1 판매량 1 만족도 1 평가도

2027 자이스토리

Xi story

Xistory stands for eXtra Intensive Story
for the University Entrance Examination.

- 최신 고2 학평 기출 + 수능 대비 기출 + 기출 변형 문제
- 핵심 개념 총정리 + 개념 확인 문제
- 179개 유형의 체계적인 구성과 유형 접근법 제시
- 내신 서술형 문제 – 단계별 반복 연습
- 1등급 문제 분리 수록, 단서, 발상, 적용 특별 해설
- 내신 + 학력평가 대비 단원별 모의고사
- 다른 풀이, 톡톡 풀이, 쉬운 풀이, 입체 첨삭 해설
- 동영상 강의: 개념 + 내신 + 학평 문제
- QR코드 해설 보기(단원별)

대한민국 No.1 수능 기출문제집

고2 대수

강남인강 강의교재

수경출판사

개념과 기출 유형의 완벽한 연결로
수학 1등급의 토대를 만듭니다.

공식 암기만으로는 사고력이 필요한
내신과 수능의 복합적인 유형 문제를 해결하기 어렵습니다.

자이스토리는 새 교육과정에 맞춰
내신 시험과 최신 학력평가 기출문제를 철저히 분석했습니다.
이를 바탕으로 문제 유형을 촘촘하게 분류하고,
개념을 문제에 적용하는 체계적인 유형별 훈련을 제공합니다.
반복 학습을 통해 수학의 기본기를 탄탄하게 다지고,
어떤 문제에도 흔들리지 않는 실력을 키울 수 있습니다.

또한 자이스토리만의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설,
다른 풀이·톡톡 풀이·쉬운 풀이는
다양한 관점에서 문제를 이해하고 해결하는 힘을 길러 줍니다.
어려운 문제도 스스로 풀어 내는 경험을 통해
수학 공부의 자신감과 성취감을 높일 수 있습니다.

목표를 이루는 첫걸음은 할 수 있다는 믿음입니다.
『자이스토리 고2 대수』와 함께 개념부터 기출 유형까지
차근차근 실력을 쌓아 보세요.
여러분의 수학 1등급을 향한 도전을 응원합니다.

- 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 -



해설편 QR코드

QR코드를 스캔해서 해설을 빠르고 쉽게 확인할 수 있습니다.

QR 코드 A01~A98 정답과 해설 문제편 홀수 페이지 하단에 수록 (단원별)

학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [40일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~78		월 일	월 일
2	79~127		월 일	월 일
3	128~150		월 일	월 일
4	B 01~64		월 일	월 일
5	65~105		월 일	월 일
6	106~145		월 일	월 일
7	146~161		월 일	월 일
8	C 01~71		월 일	월 일
9	72~118		월 일	월 일
10	119~162		월 일	월 일
11	163~202		월 일	월 일
12	203~234		월 일	월 일
13	D 01~72		월 일	월 일
14	73~110		월 일	월 일
15	111~148		월 일	월 일
16	149~185		월 일	월 일
17	186~198		월 일	월 일
18	E 01~85		월 일	월 일
19	86~132		월 일	월 일
20	F 01~77		월 일	월 일
21	78~125		월 일	월 일
22	126~157		월 일	월 일
23	158~185		월 일	월 일
24	G 01~65		월 일	월 일
25	66~118		월 일	월 일
26	119~142		월 일	월 일
27	H 01~57		월 일	월 일
28	58~102		월 일	월 일
29	103~146		월 일	월 일
30	147~159		월 일	월 일
31	I 01~55		월 일	월 일
32	56~100		월 일	월 일
33	101~137		월 일	월 일
34	138~157		월 일	월 일
35	J 01~51		월 일	월 일
36	52~80		월 일	월 일
37	81~93		월 일	월 일
38	모의 A, B, C, D		월 일	월 일
39	모의 E, F, G		월 일	월 일
40	모의 H, I, J		월 일	월 일



- 나는 _____ 대학교 _____ 학과 _____ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

집필진 · 감수진 선생님들



자이스토리는 내신 + 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록 수능, 모의평가, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로 수록하였습니다. 그리고 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서 명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

권순원 서울 PGA오목관
김덕환 대전 대성여자고등학교
김대식 하남 하남고등학교
김착한 서울 성북미래탐구
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 안양 안양외국어고등학교
박숙녀 아산 충남삼성고등학교
배수나 서울 더프라임수학학원
신건률 대치 다원교육
신명선 안양 신성고등학교
신현준 안양 신성고등학교
이종석 일등급 수학 저자
이창희 THE 다원수학 이사
위경아 서울 강남대성기숙의대관
장광걸 김포 김포외국어고등학교
장경호 가평 청평중학교
장철희 서울 보성고등학교
전경준 서울 풍문고등학교
조승원 수원 경기과학고등학교
지강현 안양 신성고등학교
한재호 아산 충남삼성고등학교
홍지우 안양 부흥고등학교
홍지언 부산대 수학 박사과정
수경 수학 컨텐츠 연구소

[다른 풀이 집필]

김연주 목동쌤올림수학
김호원 성남 원수학학원
박소영 분당 수이학원
사공 원 의정부 호연지기
유대호 평촌 플랜지에듀
이강수 반포 뉴파인
장영환 제주 제로링수학교실
정광조 서울 로드맵수학

[특별 감수진]

권오서 평택 이충고등학교
김가영 대전 한빛고등학교
김금화 서울 대치메이드
김은나 수원 통수학
김진용 부산 화명고등학교
김희수 인천 태풍학원
박상욱 안양 양명고등학교
박우혁 광주 종로학원/원픽학원
신지현 서울 (서초)대치명인학원
양해영 서울 청출어람학원
윤정현 광주 차앤차수학학원
이선주 성남 (분당)수재수학학원
이성용 서울 (대치)리디파인매쓰수학전문학원
이수연 수원 매향여자정보고등학교
임경훈 서울 대진여자고등학교
전수현 전) 서울 페르마수학학원
전일화 화성 (동탄)대치메이드
정기용 서울 (목동)뉴진수학
조성용 수원 율천고등학교
최선락 서울 중계수학의중심학원
홍유정 부산 해운대하이탑학원

[감수진]

강은숙 광명 엘리스수학학원
강태완 울산 아르케수학학원
고광범 서울 로드맵플러스학원
공지환 대전 더안수학학원
곽웅수 광주 카르페수학학원
구상윤 부산 대치명인학원
권용현 서울 상승곡선학원
김다혜 평택 연세학원
김덕훈 대구 한우물수학학원
김도현 부산 해신수학학원
김동민 서울 호크마수학학원
김동욱 서울 디파인수학전문학원
김미림 김포 유투엠향산캠퍼스
김미영 서울 명수학교습소
김민운 서울 강의하는아이들(전농답십리)
김민정 창원 김민정수학학원
김병용 청주 동남수학하는사람들학원
김봉조 울산 퍼스트클래스수학영어전문학원
김상윤 의정부 골드클래스학원
김수은 부산 예주학원
김수호 문경 비안수학학원
김용희 인천 수학의성지
김은교 대전 제타수학전문학원
김은정 대구 윤쌤과학수학학원
김자윤 의왕 매쓰로드수학학원
김재홍 대구 경북여자상업고등학교
김정인 양주 옥정고등학교
김종훈 천안 마스터수학과학학원
김주진 전주 M진수학학원
김태준 서울 지혜듀학원
김효선 사천 인아카데미학원
나원선 광주 라플라스수학학원
나혜영 고양 향동매쓰탑수학학원
박강희 하남 (미사)끝장수학
박경수 서울 제이에스학원
박규태 보령 성균관수학학원
박명훈 구미 수학행수학학원
박병선 창원 깊은지성
박성진 광주 한수위수학학원
박소영 전주 황규종수학전문학원
박순옥 화성 아이퍼스트학원
박연주 서울 대치다원교육
박재윤 천안 박재윤수학학원
박정조 의왕 타이거에듀
박종선 화성 최상위영수
박준형 안양 (평촌)박준형심화수학학원
박현서 김포 일타수학학원
박현주 서울 웅진월곡학원
서성보 서울 더원학원
서지원 부산 코어영어수학전문학원
서평승 부산 신의학원
성수경 울산 위룰수학영어전문학원
송연준 부산 김시현sky수학학원
송우성 서울 서강학원
신수연 의정부 경민IT고등학교
신아영 거창 신아영수학
신재민 용인 (수지)설연고학원
신재섭 부천 그레이드원수학학원
신훈민 파주 와와학습코칭센터(운정호수점)
심용준 서울 원클래스수학전문학원
심재인 인천 통찰수학
심혜령 천안 마인영어수학학원
안지혜 대구 일리수학학원
양재성 서울 (강서)수학불패수학학원
양창진 의정부 수학의숲학원
염철호 화성 (동탄)하비투스학원
윤자인 진주 진솔수학학원
윤정현 광주 차앤차수학학원
윤태호 부천 아르케입시학원
윤혜진 청주 블랙엑스수학학원
이경미 포천 빡쎈학원
이관수 강릉 PF math 수학학원
이미경 원주 이미경수학영어전문학원
이봉윤 군산 서강수학학원
이 빈 부산 퍼스트수학학원
이성욱 하남 웅쌤수학학원
이성준 인천 지담수학학원
이수호 원주 MMM수학
이승준 의왕 (오전동)E&CT영수학원
이아름 대구 어센트수학학원
이아영 울산 아이비수학학원
이욱진 인천 SB이욱진수학학원
이원영 고양 (일산)FM수학학원
이정훈 포항 일품수학학원
이주영 안양 리즌수학교습소
이준용 서울 (강동)대산학원
이준호 성남 최상위수학학원
이창길 광주 이창길수학학원
이창석 서울 핵수학전문학원
이한나 전주 H수학교습소
이한빛 고양 (일산)한빛수학학원
이 호 부산 지수학원
이호균 인천 베스트교육학원
임호웅 서울 엠플랜수학학원
장성훈 서울 미독수학
장수윤 안산 UTM 입시학원
장혜민 경기광주 우주수학학원
전범진 서울 전병훈수학학원
정내균 부산 이젠수학학원
정민연 광주 브레인팝에듀학원
정은혁 부천 퀸즈아카데미
정재훈 구미 제일고등학교
정태성 부산 다이나믹학원
조민우 인천 프리에듀메카보습학원
조상혁 대구 제이수학
조우영 부산 위드유수학학원
지 훈 서울 쎈수학구로온수제1캠퍼스
최병헌 양산 프라임수학전문학원
최희경 서울 목동깡학원/부천메가스터디학원
탁건주 부산 수탁수학전문학원
형한희 서울 웅진프라임양천학원
홍미영 인천 이룸수학
황길주 서울 세정학원방배캠퍼스

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
문지원 서울대 의예과
석민준 서울대 첨단융합학과
장현준 서강대 수학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
조선하 서울대 자유전공학부
황대윤 서울대 수리과학부

차 례 [총 179개 유형 분류]

Ⅰ 지수함수와 로그함수

A 지수 – 17개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제 10
수능 유형별 기출 문제 12
내신 유형별 서술형 문제 28
1등급 마스터 문제 30

B 로그 – 17개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제 34
수능 유형별 기출 문제 36
내신 유형별 서술형 문제 56
1등급 마스터 문제 58

C 지수함수와 로그함수 – 25개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제 64
수능 유형별 기출 문제 68
내신 유형별 서술형 문제 98
1등급 마스터 문제 100

D 지수함수와 로그함수의 활용 – 23개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제 112
수능 유형별 기출 문제 116
내신 유형별 서술형 문제 140
1등급 마스터 문제 142

Ⅱ 삼각함수

E 삼각함수 – 12개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제 148
수능 유형별 기출 문제 151
내신 유형별 서술형 문제 164
1등급 마스터 문제 166

F 삼각함수의 그래프 – 22개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제 170
수능 유형별 기출 문제 173
내신 유형별 서술형 문제 196
1등급 마스터 문제 198

G 삼각함수의 활용 – 14개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제 206
수능 유형별 기출 문제 208
내신 유형별 서술형 문제 232
1등급 마스터 문제 234

Ⅲ 수열

H 등차수열과 등비수열 – 22개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제 244
수능 유형별 기출 문제 246
내신 유형별 서술형 문제 266
1등급 마스터 문제 268

I 수열의 합 – 16개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제 272
수능 유형별 기출 문제 274
내신 유형별 서술형 문제 296
1등급 마스터 문제 298

J 수학적 귀납법 – 11개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제 304
수능 유형별 기출 문제 306
내신 유형별 서술형 문제 322
1등급 마스터 문제 324

동영상 강의 **유승완 선생님**
이원경 선생님

Special 내신+수능 대비 단원별 모의고사

A 지수 (10문항) 328
B 로그 (10문항) 330
C 지수함수와 로그함수 (10문항) 332
D 지수함수와 로그함수의 활용 (11문항) 334
E 삼각함수 (11문항) 336
F 삼각함수의 그래프 (11문항) 338
G 삼각함수의 활용 (10문항) 340
H 등차수열과 등비수열 (13문항) 342
I 수열의 합 (10문항) 344
J 수학적 귀납법 (8문항) 346

동아리 소개 / UNIST UNIMOTORS 348

빠른 정답 찾기 349

해설편 QR코드

QR코드를 스캔해서 해설을 빠르고 쉽게 확인할 수 있습니다.

QR 코드 A01~A98 정답과 해설

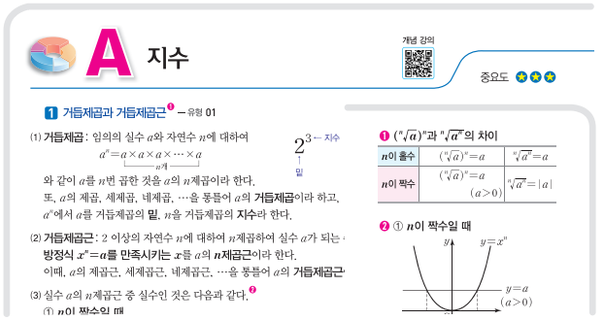
문제편 홀수 페이지 하단에 수록 (단원별)

촘촘한 유형별 문제 + 서술형 문제 훈련으로 내신 + 수능 1등급 완성

1 새교육과정 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

고2 수학의 각 단원에서 가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념을 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 강의하였습니다.

- **중요도** ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- 출제 : 2027 대비 평가원 출제 경향 분석



- QR 코드 : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.

2 개념 확인 문제 – 개념에 대한 이해도 확인 문제

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지 확인할 수 있는 개념 이해 필수 문제를 수록하였습니다.



3 내신 유형별 서술형 문제 – 단계별 문제 해결 방법 제시

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계별로 풀이 과정을 훈련해서 서술형 문제에 대한 자신감을 키울 수 있게 구성하였습니다.

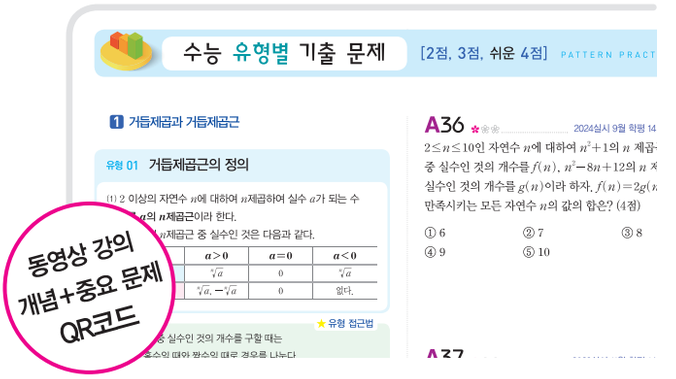


- 1st, 2nd, 3rd : 풀이의 시작과 끝을 막힘없이 따라갈 수 있게 도와주는 단계별 접근을 제시하였습니다.

4 새수능 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 출제 유형을 촘촘하게 세분화하여 유형순, 개념순, 난이도순으로 문항을 배열하였습니다.

- ★ 유형 접근법 : 해당 유형의 문제를 해결하기 위한 핵심 풀이 과정을 단계별로 제시하여 문제 분석부터 식의 변형, 계산까지 풀이의 순서와 흐름을 안내합니다.
- tip : 문제를 더 쉽고 정확하게 해결할 수 있도록 핵심 발상과 효율적인 풀이 방법, 계산 과정에서 실수하기 쉬운 부분 등을 안내합니다.



동영상 강의 개념+중요 문제 QR코드

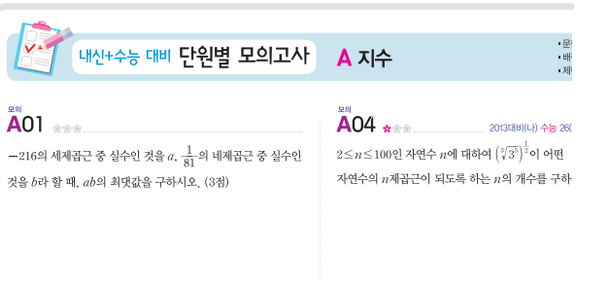
- 유형 분류 : 시험에서 출제되었던 모든 유형을 제시하여 효과적이고 완벽한 유형 분석을 할 수 있도록 하였습니다.
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- 대표 : 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.

- 난이도 : ❀❀❀ – 기본 문제 ✿❀❀ – 중급 문제 ✿✿❀ – 중상급 문제

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2026대비 수능(홀) 1(고3) : 2025년 11월에 실시한 수능
  - 2026대비 6월 모평 2(고3) : 2025년 6월에 실시한 평가원
  - 2026실시 7월 학평 3(고3) : 2026년 7월에 실시한 학력평가
  - 표시 없는 문제 : 기출 변형 문제

5 내신+수능 대비 단원별 모의고사 – 최종 실력 점검

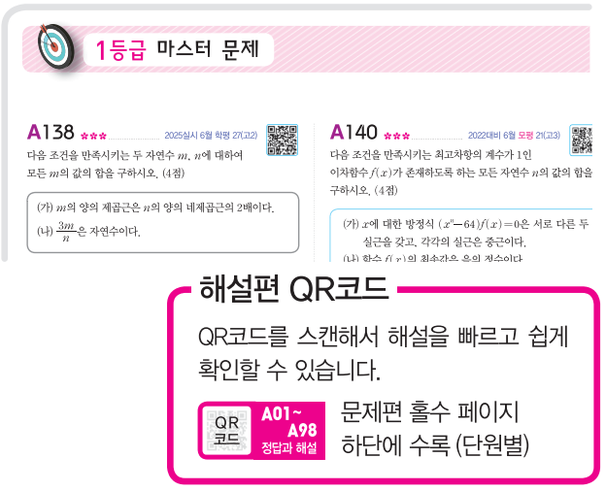
중단원별 학교시험 필수 문제와 수능형 문항, 서술형 문항을 수록하여 학교시험을 더욱 충실히 대비할 수 있습니다.



6 1등급 마스터 문제

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다.

●✤✤✤ – 상급, 고난도 문제

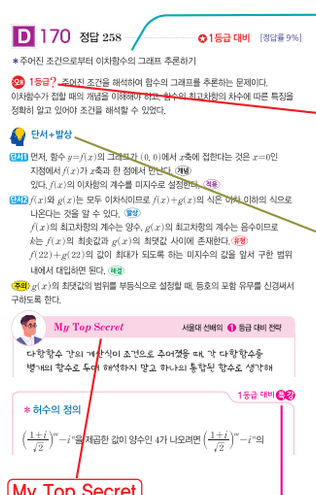


해설편 QR코드

QR코드를 스캔해서 해설을 빠르고 쉽게 확인할 수 있습니다.

QR코드 A01~A98 정답과 해설 — 문제편 홀수 페이지 하단에 수록 (단원별)

7 1등급 대비 문제 특별 해설



문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

8 입체 첨삭 해설!

정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

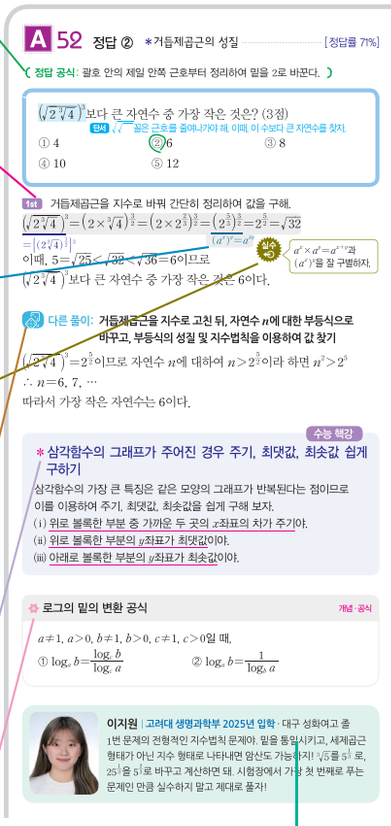
해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수 주의
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

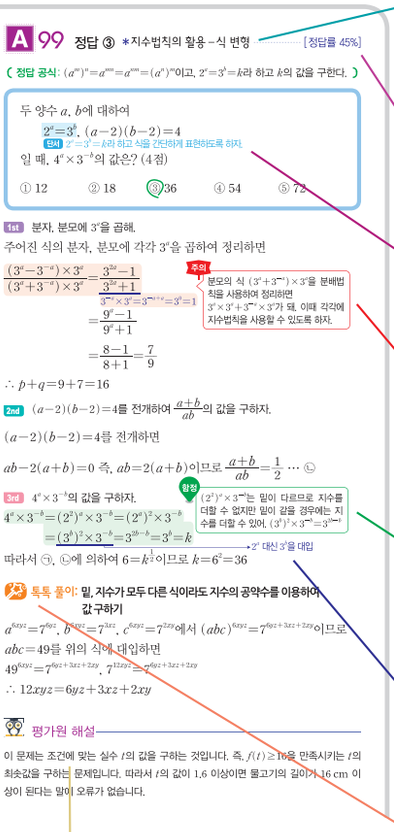
다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.



수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.



이 문제는 조건에 맞는 실수 t의 값을 구하는 것입니다. 즉, $f(t)\geq16$을 만족시키는 t의 최솟값을 구하는 문제입니다. 따라서 t의 값이 1.6 이상이면 물고기의 길이가 16 cm 이상이 된다는 말이 오류가 없습니다.

평가원 해설
오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빼먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

문항 배열 및 구성 [1715제]

❶ 개념 이해를 체크할 수 있는 개념 확인 문제 [325제]

개념 하나하나에 대한 맞춤 확인 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 최신 학력평가 기출 문제 + 최신 수능 대비 기출 문제 [179유형, 문제 1160제]

- 고2 학력평가 문제 선별 수록 [642제]
- 고2 난이도에 맞는 고3 수능+평가원+학력평가 문제 선별 수록 [512제]
- 고2 난이도에 맞는 고1 학력평가 문제 선별 수록 [6제]

❸ 학교시험+수능 대비를 위한 수능 기출 변형 문제 [173제]

수능에 적합한 개념과 공식을 이해하고 활용할 수 있도록 수능 기출 문제를 변형하여 추가 수록하였습니다.

❹ 서술형 단계별 훈련 – 내신 유형별 서술형 문제 [100제]

각 단원 중 서술형 출제 방식에 적합하고 출제 비율이 높은 내신 기출 변형 문제를 새롭게 구성하였습니다.

❺ 내신+수능 대비 단원별 모의고사 [기출 문제 + 수능 기출 변형 문제 104제]

각 단원에 출제 빈도가 높은 문제를 최신 출제 경향에 따라 구성하였습니다.

[고2 대수 문항 구성표]

	고1, 2(실시 연도)				고3(실시 연도) – 고2 난이도 수준							
연도	3월 학평	6월 학평	9월 학평	10, 11월 학평	3월 학평	4,5월 학평	6월 모평	7월 학평	9월 모평	10월 학평	수능	합계
2026	0	30	26	0	0	0	0	0	0	0	0	56
2025	0	30	26	21	0	1	9	0	8	0	8	103
2024	0	30	26	21	0	0	8	0	10	0	9	104
2023	0	28	24	14	0	0	7	0	8	1	1	83
2022	0	29	23	16	0	1	0	1	0	0	2	72
2021	0	21	20	16	6	4	6	5	2	1	3	84
2020	0	20	19	16	5	6	5	3	5	6	1	86
2019	0	33	23	26	9	3	5	2	4	0	4	109
2019 이전	26	28	22	13	59	49	48	35	40	22	51	393
2028, 2022, 2014 , 2005 대비 예비 평가 문항 수												27
수능 기출 변형 문항 수 (179개 유형 수능 기출 변형 문제)												173
개념 확인 문항 수												325
서술형 문항 수												100
총 문항 수												1715



A 지수

★ 유형 차례

유형 01 거듭제곱근의 정의

중요 유형 02 거듭제곱근의 성질을 이용한 식의 계산

유형 03 문자를 포함한 거듭제곱근의 계산

유형 04 거듭제곱근의 대소 비교

중요 유형 05 지수법칙 – 밑이 같은 계산

유형 06 지수법칙 – 밑이 다른 계산(곱셈)

유형 07 지수법칙 – 밑이 다른 계산(덧셈)

유형 08 거듭제곱근을 a^r 꼴로 나타내기

유형 09 거듭제곱을 주어진 문자로 나타내기

유형 10 a^r이 자연수, 유리수가 되는 조건

유형 11 곱셈 공식을 이용한 식의 값 구하기

유형 12 a^x+a^{-x} 꼴의 식의 값 구하기

유형 13 $\dfrac{a^{kx}\pm a^{-kx}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴의 식의 값 구하기

유형 14 $a^x=k$가 주어진 경우의 식의 값 구하기 고난도

유형 15 $a^x=b^y$이 주어진 경우의 식의 값 구하기 고난도

유형 16 지수법칙의 활용 고난도

유형 17 지수법칙의 실생활에서의 활용



★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2028	예시	유형 05 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
2027	수능		
	9월	유형 05 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 05 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
2026	수능	유형 05 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	9월	유형 05 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 05 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
2025	수능	유형 05 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	9월	유형 05 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 05 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 최근 거듭제곱근의 성질을 이용하여 거듭제곱근이 자연수가 되도록 하는 자연수를 구하는 유형의 문제의 출제 빈도가 높아지고 있다. 기본적인 거듭제곱근에 대한 성질을 정확히 알고 있으면 풀리는 문제들이다. 그리고 거듭제곱근으로 나오는 실근의 개수에 대한 문제도 종종 나오고 있으므로 거듭제곱근의 해에 대한 지식이 필요하다.
- 지수법칙을 이용하는 간단한 계산문제는 지수의 여러 가지 성질과 함께 출제될 가능성이 높다. 쉬운 문제이지만 계산 실수에 주의하여야 하고 지수법칙을 정확히 알고 있어야 한다.
- 지수를 포함한 등식의 활용 문제는 곱셈 공식, 인수분해, 유리식이나 비례식 등을 활용하여 변형하는 연습이 충분히 되어야 한다. 고1 수학에서 배웠던 내용도 한 번 더 정리하자.
- 지수를 사용하여 정의된 식이 주어지는 실생활 문제의 출제 비율이 높으므로 문제의 문자가 의미하는 것을 바르게 파악하여 주어진 식에 정확히 대입하도록 충분한 연습이 필요하다.

A 지수

개념 강의

중요도 ★★★

1 거듭제곱과 거듭제곱근[1] — 유형 01

(1) **거듭제곱**: 임의의 실수 a와 자연수 n에 대하여

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{개}}$$

2^3 ← 지수, ↑ 밑

와 같이 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 한다.

또, a의 제곱, 세제곱, 네제곱, …을 통틀어 a의 **거듭제곱**이라 하고,

a^n에서 a를 거듭제곱의 **밑**, n을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

(2) **거듭제곱근**: 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 **방정식 $x^n = a$를 만족시키는 x**를 a의 **n제곱근**이라 한다.

이때, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.

(3) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.[2]

① **n이 짝수일 때**

$a > 0$이면 양수 $\sqrt[n]{a}$와 음수 $-\sqrt[n]{a}$의 2개가 있고,
그 절댓값은 같다.
$a = 0$이면 $\sqrt[n]{0}$, 즉 0뿐이다.
$a < 0$이면 없다.

② **n이 홀수일 때**

a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ 오직 하나뿐이다.

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수일 때	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수일 때	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

2 거듭제곱근의 성질[3] — 유형 02~04

$a > 0$, $b > 0$이고 m, n이 양의 정수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

3 지수의 확장[4] — 유형 05~17

출제 2027대비 9월 모평 1번, 2027대비 6월 모평 1번

(1) **지수가 0 또는 음의 정수인 경우**

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (단, $a \neq 0$, n은 자연수)

(2) **지수가 유리수인 경우**

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (단, $a > 0$, m, n은 정수, $n > 0$)

(3) **지수법칙**[5]

$a > 0$, $b > 0$이고 x, y가 실수일 때,

① $a^x a^y = a^{x+y}$ 예 $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

② $a^x \div a^y = a^{x-y}$ 예 $3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$ 예 $(5^2)^4 = 5^{2\times 4} = 5^8$

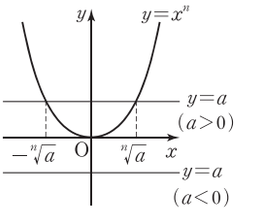
④ $(ab)^x = a^x b^x$ 예 $(7 \times 11)^2 = 7^2 \times 11^2$

---

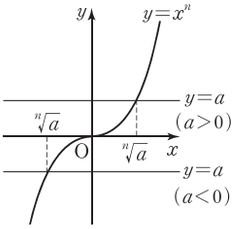
[1] $(\sqrt[n]{a})^n$과 $\sqrt[n]{a^n}$의 차이

	$(\sqrt[n]{a})^n$	$\sqrt[n]{a^n}$
n이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a$
n이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$ $(a>0)$	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$

[2] ① n이 짝수일 때



② n이 홀수일 때



[3] $a > 0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

[4] $a^{\frac{m}{n}}$과 같이 지수가 유리수인 경우, a가 자연수일 때, $a^{\frac{m}{n}}$이 자연수가 되기 위한 조건은 m이 n의 배수 또는 n이 m의 약수일 때이다.

[5] 밑이 같을 때와 다를 때를 구분하자. 간단한 계산 문제뿐만 아니라 문장제 문제도 꼭 하나씩 출제된다. 지수법칙을 이용할 때는 먼저 밑이 같은지 다른지를 확인하고 같은 밑에 대해서 지수끼리 더할지, 곱할지를 정확하게 계산하자.

1 거듭제곱과 거듭제곱근

[A01~02] 다음 거듭제곱근을 구하시오.

A 01 -1의 세제곱근

A 02 16의 네제곱근

[A03~04] 다음 거듭제곱근 중 실수인 것을 구하시오.

A 03 -8의 세제곱근

A 04 81의 네제곱근

[A05~08] 다음 값을 구하시오.

A 05 $\sqrt[3]{8}$

A 06 $-\sqrt[4]{16}$

A 07 $\sqrt[5]{(-5)^5}$

A 08 $\sqrt[4]{256}$

2 거듭제곱근의 성질

[A09~12] 다음 식을 간단히 하시오.

A 09 $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25}$

A 10 $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$

A 11 $(\sqrt[8]{100})^4$

A 12 $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

[A13~14] 다음 식을 간단히 하시오.

A 13 $\sqrt[3]{3\sqrt{4}}\times\sqrt[6]{\dfrac{16}{9}}$

A 14 $\dfrac{\sqrt[6]{27}\times\sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}$

[A15~16] 다음 거듭제곱근의 값을 구하시오.

A 15 $\sqrt{\dfrac{9^7+3^{11}}{9^4+3^5}}$

A 16 $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$

3 지수의 확장

[A17~20] 다음 값을 구하시오.

A 17 $(-3)^0$

A 18 5^{-2}

A 19 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$

A 20 $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}$

[A21~23] 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a\neq0$)

A 21 $a^4\times a^3\div a^6$

A 22 $(a^{-2})^4\times(a^{-3})^{-5}$

A 23 $\dfrac{(a^{-6})^3\times(a^3)^6}{a^3\times a^{-6}}$

[A24~26] 다음 식을 간단히 하시오.

A 24 $2^{-2}\times8^{\frac{7}{3}}$

A 25 $(5^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}}\div125$

A 26 $9^{\frac{1}{2}}\times3^{-3}\div27^{-\frac{2}{3}}$

[A27~28] $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$일 때, 다음 거듭제곱을 a, b를 이용하여 나타내시오.

A 27 $\sqrt[6]{12}$

A 28 6^6

[A29~31] 곱셈공식을 이용하여 다음 식을 간단히 하시오. (단, a, b는 양수)

A 29 $(a-b)\div\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$ (단, $a\neq b$)

A 30 $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

A 31 $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

A 32 두 실수 x, y에 대하여 $15^x=25$, $375^y=125$일 때, $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}$의 값을 구하시오.

A 33 $a^{2x}=\sqrt{2}-1$일 때, $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 값을 구하시오.

❖ 정답 및 해설 6~7p

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점] PATTERN PRACTICE

1 거듭제곱과 거듭제곱근

유형 01 거듭제곱근의 정의

(1) 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수 x를 a의 n제곱근이라 한다.

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

★ 유형 접근법

a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 구할 때는

1st n이 홀수일 때와 짝수일 때로 경우를 나눈다.

2nd n의 값에 따라 $a>0$, $a=0$, $a<0$일 때로 나누어 실수인 것의 개수를 구한다.

tip a의 n제곱근 중 실수인 것은 n이 홀수이면 항상 1개이고, n이 짝수이면 $a>0$, $a=0$, $a<0$일 때 각각 2개, 1개, 0개이다.

A34 대표 2025실시 10월 학평 15(고2)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $n-12$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? (4점)

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

A35 ✻❀❀ 2016실시(나) 11월 학평 13(고2)

실수 a, b에 대하여 a는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근일 때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

A36 ✻❀❀ 2024실시 9월 학평 14(고2)

$2\le n\le 10$인 자연수 n에 대하여 n^2+1의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$, $n^2-8n+12$의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n)=2g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은? (4점)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

A37 ✻❀❀ 2023실시 11월 학평 14(고2)

자연수 $n(n\ge 2)$에 대하여 $m-2n$의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(3)+f(4)=3$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은? (4점)

① 18 ② 23 ③ 28
④ 33 ⑤ 38

A38 ✻❀❀ 2020실시 11월 학평 11(고2)

양수 k의 세제곱근 중 실수인 것을 a라 할 때, a의 네제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[3]{4}$이다. k의 값은? (3점)

① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

A39 ✻❀❀ 2019실시(가) 9월 학평 25(고2)

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$가 음수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. (3점)

A40 ✻✻❀ 2024실시 6월 학평 26(고2)

자연수 n에 대하여 $\sqrt[n+1]{8}$이 어떤 자연수의 네제곱근이 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

2 거듭제곱근의 성질

유형 02 거듭제곱근의 성질을 이용한 식의 계산

두 양수 a, b에 대하여 m, n이 2 이상의 정수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

★ 유형 접근법

거듭제곱근을 계산할 때는

1st 근호 안의 수를 소인수분해하여 거듭제곱 꼴로 정리한다.

2nd 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 값을 구한다.

A41 대표 2026실시 6월 학평 22(고2)

$\sqrt[3]{49}\times\sqrt[3]{7^4}$의 값을 구하시오. (3점)

A42 ❀❀❀ 2023실시 6월 학평 22(고2)

$\sqrt[3]{27^2}\times 3^2$의 값을 구하시오. (3점)

A43 ❀❀❀ 2022실시 6월 학평 1(고2)

$\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}$의 값은? (2점)

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

A44 ❀❀❀ 2021실시 6월 학평 1(고2)

$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A45 ❀❀❀ 2020실시 9월 학평 3(고2)

$\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{81}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

❖ 정답 및 해설 7~10p

고난도

유형 14 $a^x=k$가 주어진 경우의 식의 값 구하기

$a>0$, $b>0$, $x\neq0$, $y\neq0$일 때, $a^x=k$, $b^y=k$이면

① $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$

② $ab=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$, $\frac{a}{b}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

★ 유형 접근법

$a^x=k$, $b^y=k$가 주어진 경우의 식의 값을 구할 때는

1st a, b를 k의 거듭제곱 꼴로 나타낸다.

2nd 구하려는 식의 각 항을 k의 거듭제곱 꼴로 바꾸어 나타낸다.

3rd 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 하고 구하는 값을 계산한다.

A109 대표 2019실시(가) 6월 학평 4(고2)

실수 x가 $5^x=\sqrt{3}$을 만족시킬 때, $5^{2x}+5^{-2x}$의 값은? (3점)

① $\frac{19}{6}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

A110 ✿❀❀ 2020실시 11월 학평 24(고2)

실수 a에 대하여 $4^a=\frac{4}{9}$일 때, 2^{3-a}의 값을 구하시오. (3점)

A111 ✿❀❀ 2019실시(나) 4월 학평 16(고3)

두 실수 a, b에 대하여 $2^a=3$, $6^b=5$일 때, 2^{ab+a+b}의 값은? (4점)

① 15 ② 18 ③ 21

④ 24 ⑤ 27

A112 ✿❀❀ 2018실시(나) 9월 학평 17(고2)

두 실수 a, b에 대하여

$2^{\frac{4}{a}}=100$, $25^{\frac{2}{b}}=10$

이 성립할 때, $2a+b$의 값은? (4점)

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

A113 ✿❀❀ 2013실시(A) 11월 학평 8(고2)

실수 x, y에 대하여 $27^x=5$, $125^y=9$일 때, xy의 값은? (3점)

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

A114 ✿❀❀ 2009실시(나) 7월 학평 10(고3)

세 양수 a, b, c가 $a^x=b^{2y}=c^{3z}=7$, $abc=49$를 만족할 때, $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}$의 값은? (3점)

① 8 ② 10 ③ 12

④ 14 ⑤ 16

A115 ✿❀❀ 2009대비(나) 9월 모평 20(고3)

두 실수 a, b가 $3^{a+b}=4$, $2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. (3점)

고난도

유형 15 $a^x=b^y$이 주어진 경우의 식의 값 구하기

$a>0$, $b>0$, $x\neq0$, $y\neq0$일 때, $a^x=b^y$이면
$a^x=b^y=k(k>0)$이라 하고 $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$임을 이용한다.

tip

$a^x=b^y$가 주어진 경우 a, b를 직접 비교하기보다는
$a^x=b^y=k$로 놓고 밑을 k로 통일하여 계산한다.

A116 대표 2017실시(나) 9월 학평 15(고2)

두 양수 a, b에 대하여

$$2^a=3^b,\ (a-2)(b-2)=4$$

일 때, $4^a\times3^{-b}$의 값은? (4점)

① 12 ② 18 ③ 36
④ 54 ⑤ 72

A117 ✿❀❀

1이 아닌 양수 a, b에 대하여 $a^x=b^y=(ab)^z$일 때,

$\dfrac{xy}{2yz+2zx}$의 값은? (단, $xyz\neq0$) (4점)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

A118 ✿❀❀

1이 아닌 양수 a, b에 대하여 $a^x=b^{2y}=6^z$이고,

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{z}$일 때, ab^2의 값을 구하시오. (단, $xyz\neq0$) (4점)

A119 ✿✿❀

세 양수 x, y, z가

$$\sqrt{5^x}=9^y=8^z,\ \frac{2}{x}+\frac{3}{2y}+\frac{1}{3z}=1$$

를 만족시킬 때, $5^{\frac{x}{2}-1}-3^{2y-3}+2^{3z-1}$의 값을 구하시오. (4점)

고난도

유형 16 지수법칙의 활용

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 실수일 때,

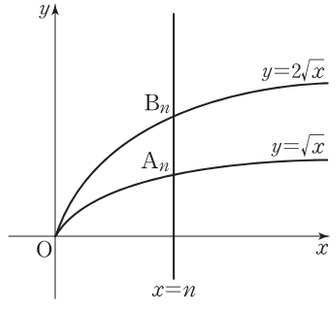
① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$
③ $(a^m)^n=a^{mn}$ ④ $(ab)^n=a^n b^n$
⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$ ⑥ $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a^0=1$

tip

1 다른 단원과 통합된 문제들이 나올 수 있으므로 각 단원의 기본 개념을 정확하게 이해하여 문제 풀이에 적용할 수 있게 하자.
2 그래프를 활용하는 문제에서는 주어진 점의 좌표의 특징을 이용하면 쉽게 문제를 해결할 수 있다.

A120 대표 2016실시(가) 6월 학평 13(고2)

자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 무리함수 $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$의 그래프와 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자.
삼각형 OA_nB_n의 넓이를 $S(n)$이라고 할 때, $S(2^{10})=2^k$이다. k의 값은? (단, O는 원점이다.) (3점)



① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

A01 ~ A120 정답과 해설

❖ 정답 및 해설 22~25p

내신 유형별 서술형 문제

문제에서 단서를 찾고 풀이 방법을 생각해 냅니다!

A128 ✻❀❀ 유형 01

2 이상 30 이하인 자연수 n에 대하여 $n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하고, $n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st $n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하는 n의 조건을 구한다.

2nd $n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하는 n의 조건을 구한다.

3rd 자연수 n의 개수를 구한다.

A129 ✻✻❀ 유형 10

2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$$

이 서로 다른 세 실근 α_1, α_2, α_3을 가진다. 세 수 α_1, α_2, α_3이 모두 정수일 때, $m+n=k$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st 세 실근을 가지기 위한 m, n의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$을 구한다.

2nd α_1, α_2, α_3이 서로 다른 정수가 되기 위한 m, n, k의 값을 각각 구한다.

A130 ✻❀❀ 유형 06

등식

$$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}=(2^a+2^b)^3$$

을 만족시키는 유리수 a, b에 대하여 $3a+b$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $a>b$) (10점)

1st $\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}$의 값을 구한다.

2nd $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$의 값을 구한다.

3rd $3a+b$의 값을 구한다.

A131 ❀❀❀ 유형 01

1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) a는 b의 5제곱근이다.
(나) c는 $\sqrt[3]{a}$의 네제곱근이다.

$\frac{b}{c}=a^x$일 때, 실수 x의 값을 $\frac{q}{p}$라 하자. $q-p$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (10점)

1st 거듭제곱근의 정의를 활용해서 a, b, c의 관계를 구한다.

2nd b, c를 한 문자로 표현하여 x의 값을 구한다.

A132 ✿❀❀ 유형 15

0이 아닌 네 실수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

(가) $27^a=25^b=15^c$
(나) $kab=(2b+3a)c$

A133 ✿✿❀ 유형 10

x에 대한 이차방정식

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x^2-18x+\sqrt{a}\times\sqrt[2\times3]{a}\times\sqrt[3\times4]{a}=0$$

의 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha\times\beta$의 값이 정수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A134 ✿❀❀ 유형 12

1이 아닌 두 양수 a, b와 두 실수 x, y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a^{\frac{b}{a}}=b^a=(ab)^{ab}$
(나) $a^{\frac{2}{x}}=3$
(다) $b^{2y}+1=6b^{y+1}$

$36\times3^x-\dfrac{2+b^{2y}+b^{-2y}}{3^x-1}$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A135 ✿✿❀ 유형 10

$\left(\dfrac{n}{18}\right)^{\frac{n}{12}}$이 자연수가 되도록 하는 500보다 작은 모든 자연수 n의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A136 ✿❀❀ 유형 10

$x=\dfrac{1}{2}(3^{10}-2\times3^{-10})$일 때, $\sqrt[n]{x+\sqrt{x^2+2}}$가 자연수가 되는 1보다 큰 자연수 n의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A137 ✿❀❀ 유형 17

사람의 몸 안에 들어온 방사성 물질 세슘 137은 신체 대사 작용을 통해 시간이 지남에 따라 일정한 비율로 몸 밖으로 빠져나간다. 이때 이 물질이 절반만큼 몸 밖으로 빠져나가는 데 걸리는 시간을 세슘 137의 생물학적 반감기라 하고 세슘 137의 생물학적 반감기는 110일이다. 세슘 137이 몸 안에 들어왔을 때 응급약인 프러시안 블루를 처방하면 세슘 137의 생물학적 반감기를 30일로 줄일 수 있다고 한다.
어떤 사고로 A와 B의 몸 안에 세슘 137이 각각 320 mg, 20 mg이 들어와서 응급조치가 필요한 A에게만 프러시안 블루를 처방하였을 때, A의 체내 세슘 137의 양이 B의 세슘 137의 양과 같아지는 시점은 사고일로부터 n일 후라고 한다. 자연수 n의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.
(단, n은 자연수) (10점)

❖ 정답 및 해설 28~33p

1등급 마스터 문제

1 + 2 거듭제곱과 거듭제곱근

A138 ★★★ 2025실시 6월 학평 27(고2)

다음 조건을 만족시키는 두 자연수 m, n에 대하여 모든 m의 값의 합을 구하시오. (4점)

(가) m의 양의 제곱근은 n의 양의 네제곱근의 2배이다.
(나) $\frac{3m}{n}$은 자연수이다.

A139 ★★★ 2023실시 9월 학평 14(고2)

$4 \le n \le 12$인 자연수 n에 대하여 $n^2-15n+50$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(n)=f(n+1)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? (4점)

① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

A140 ★★★ 2022대비 6월 모평 21(고3)

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

A141 ★★★ 2019실시(나) 3월 학평 15(고3)

자연수 n에 대하여 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하고, $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n)>g(n)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? (4점)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

3 지수의 확장

A142 ★★★ 2009대비(나) 6월 모평 27(고3)

부등식 $1<m^{n-5}<n^{m-8}$을 만족시키는 자연수 m, n에 대하여

$$A=m^{\frac{1}{m-8}}\times n^{\frac{1}{n-5}}$$

$$B=m^{-\frac{1}{m-8}}\times n^{\frac{1}{n-5}}$$

$$C=m^{\frac{1}{m-8}}\times n^{-\frac{1}{n-5}}$$

이라고 할 때, A, B, C의 대소 관계로 옳은 것은? (4점)

① $A>B>C$ ② $A>C>B$ ③ $B>A>C$
④ $B>C>A$ ⑤ $C>A>B$

A143 ★★★ 2023실시 6월 학평 14(고2)

등식 $\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{2}}\right)^m\times n=100$을 만족시키는 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? (4점)

① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

A144 ★★★ 2019실시(가) 6월 학평 21(고2)

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\sqrt[4]{9\times 2^{n+1}} & (n\text{이 홀수})\\ \sqrt[4]{4\times 3^{n}} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는? (4점)

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

A145 ★★★ 2017실시(나) 4월 학평 17(고3)

두 자연수 a, b에 대하여

$\sqrt{\frac{2^a\times 5^b}{2}}$이 자연수, $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}}$이 유리수

일 때, $a+b$의 최솟값은? (4점)

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

❖ 정답 및 해설 34~37p

모의
A01 ❀❀❀

-216의 세제곱근 중 실수인 것을 a, $\frac{1}{81}$의 네제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, ab의 최댓값을 구하시오. (3점)

모의
A02 ❀❀❀

$3\times\sqrt[3]{16}+2\times\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{k}$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 $\frac{k}{48}$의 값은? (4점)

① 12 ② 36 ③ 54
④ 72 ⑤ 96

모의
A03 ❀❀❀ 2017실시(나) 3월 학평 3(고2)

$8^{\frac{2}{3}}\times 27^{-\frac{1}{3}}$의 값은? (2점)

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

모의
A04 ✿❀❀ 2013대비(나) 수능 26(고3)

$2\le n\le 100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (4점)

모의
A05 ✿❀❀ 2007대비(나) 9월 모평 20(고3)

세 양수 a, b, c에 대하여 $a^6=3$, $b^5=7$, $c^2=11$일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하시오. (3점)

모의
A06 ❀❀❀ 2015실시(A) 3월 학평 7(고3)

두 실수 a , b에 대하여 $2^a=3$, $3^b=\sqrt{2}$가 성립할 때, ab의 값은? (3점)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

모의
A07 ✿❀❀ 2010대비(나) 6월 모평 4(고3)

실수 a가 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값은? (3점)

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{17}{4}$
④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

모의
A08 ✿✿❀ 2005실시(나) 3월 학평 22(고3)

$f(n)=a^{\frac{1}{n}}$ (단, $a>0$, $a\neq1$)일 때,

$f(2\times3)\times f(3\times4)\times\cdots\times f(9\times10)=f(k)$

를 만족하는 상수 k에 대하여 $10k$의 값을 구하시오. (4점)

모의
A09 ✿✿❀ 2009실시(가) 3월 학평 16(고3)

원기둥 모양의 수도관에서 단면인 원의 넓이를 S, 원의 둘레의 길이를 L이라 하고, 수도관의 기울기를 I라 하자. 이 수도관에서 물이 가득 찬 상태로 흐를 때 물의 속력을 v라 하면

$$v=c\left(\frac{S}{L}\right)^{\frac{2}{3}}\times I^{\frac{1}{2}}$$ (단, c는 상수이다.)

이 성립한다고 한다.

단면인 원의 반지름의 길이가 각각 a, b인 원기둥 모양의 두 수도관 A, B에서 물이 가득 찬 상태로 흐르고 있다. 두 수도관 A, B의 기울기가 각각 0.01, 0.04이고, 흐르는 물의 속력을 각각 v_A, v_B라고 하자. $\frac{v_A}{v_B}=2$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은? (단, 두 수도관 A, B에 대한 상수 c의 값은 서로 같다.) (4점)

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 8
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 16

서술형

모의
A10 ✿✿❀

어떤 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 시각 t에서의 개체수를 $N(t)$라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$N(t)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-bt}}$$ (단, a, b, c는 양의 상수)

이때, K는 이 생물의 최대개체량이다.

이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=5$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{1}{2}$이었고, $t=7$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{3}{4}$이었다. 이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=9$일 때의 개체수를 $\frac{q}{p}K$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (10점)

❖ 정답 및 해설 556~558p

A 지수

개념 확인 문제

A 01 정답 $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

-1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-1$이므로
$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -1의 세제곱근은 -1, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

A 02 정답 $\pm2i, \pm2$ ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로
$x^4-16=0$, $(x^2+4)(x^2-4)=0$
$(x+2i)(x-2i)(x+2)(x-2)=0$
$\therefore\ x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$
따라서 16의 네제곱근은 $\pm2i$, ±2이다.

A 03 정답 -2 ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

-8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로
$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$
이때, $x^2-2x+4=0$은 실근을 갖지 않으므로 $x+2=0$에서 $x=-2$
따라서 -8의 세제곱근 중 실근인 것은 -2이다.

A 04 정답 $-3, 3$ ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로
$x^4-81=0$, $(x^2-9)(x^2+9)=0$
이때, $x^2+9=0$은 실근을 갖지 않으므로 $x^2-9=0$에서
$(x+3)(x-3)=0$ $\therefore\ x=-3$ 또는 $x=3$
따라서 81의 네제곱근 중 실근인 것은 -3, 3이다.

A 05 정답 2 ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

A 06 정답 -2 ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

$-\sqrt[4]{16}=-\sqrt[4]{2^4}=-2$

A 07 정답 -5 ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

$\sqrt[5]{(-5)^5}=-5$

A 08 정답 4 ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

$\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$

A 09 정답 5 ····· *거듭제곱근의 성질

$\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5\times25}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

A 10 정답 3 ····· *거듭제곱근의 성질

$\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}=\sqrt[4]{\frac{729}{9}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

A 11 정답 10 ····· *거듭제곱근의 성질

$(\sqrt[8]{100})^4=\sqrt[8]{100^4}=\sqrt[8]{10^8}=10$

A 12 정답 2 ····· *거듭제곱근의 성질

$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

A 13 정답 2 ····· *거듭제곱근의 성질

$\sqrt[3]{3\sqrt{4}}\times\sqrt[6]{\frac{16}{9}}=\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{6\times\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

A 14 정답 1 ····· *거듭제곱근의 성질

$\frac{\sqrt[6]{27}\times\sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[12]{3^2}}{\sqrt[6]{3^4}}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{3^4}}=\sqrt[6]{\frac{3^3\times3}{3^4}}=\sqrt[6]{\frac{3^4}{3^4}}=\sqrt[6]{1}=1$

A 15 정답 27 ····· *거듭제곱근의 성질

$\sqrt{\frac{9^7+3^{11}}{9^4+3^5}}=\sqrt{\frac{3^{14}+3^{11}}{3^8+3^5}}=\sqrt{\frac{3^{11}(3^3+1)}{3^5(3^3+1)}}=\sqrt{3^6}=3^3=27$

A 16 정답 16 ····· *거듭제곱근의 성질

$\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}=\sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}=\sqrt{\frac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}}=\sqrt{2^8}=2^4=16$

A 17 정답 1 ····· *지수의 확장

$(-3)^0=1$

A 18 정답 $\frac{1}{25}$ ····· *지수의 확장

$5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

A 19 정답 32 ····· *지수의 확장

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=2^5=32$

A 20 정답 $\frac{27}{64}$ ····· *지수의 확장

$\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

A 21 정답 a ····· *지수의 확장

$a^4\times a^3\div a^6=a^{4+3-6}=a$

A 22 정답 a^7 ····· *지수의 확장

$(a^{-2})^4\times(a^{-3})^{-5}=a^{-8}\times a^{15}=a^{-8+15}=a^7$

A 23 정답 a^3 *지수의 확장

$$\frac{(a^{-6})^3\times(a^3)^6}{a^3\times a^{-6}}=\frac{a^{-18}\times a^{18}}{a^{3+(-6)}}=\frac{a^{(-18)+18}}{a^{-3}}=a^{0-(-3)}=a^3$$

A 24 정답 32 *지수의 확장

$$2^{-2}\times 8^{\frac{7}{3}}=2^{-2}\times(2^3)^{\frac{7}{3}}=2^{-2}\times 2^7=2^{-2+7}=2^5=32$$

A 25 정답 5 *지수의 확장

$$(5^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}}\div 125=5^{\sqrt{16}}\div 5^3=5^4\div 5^3=5^{4-3}=5$$

A 26 정답 1 *지수의 확장

$$9^{\frac{1}{2}}\times 3^{-3}\div 27^{-\frac{2}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{2}}\times 3^{-3}\div(3^3)^{-\frac{2}{3}}$$
$$=3\times 3^{-3}\div 3^{-2}=3^{1+(-3)-(-2)}=3^0=1$$

A 27 정답 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ *지수의 확장

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$$\sqrt[6]{12}=12^{\frac{1}{6}}=(2^2)^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}\times(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$$

A 28 정답 $a^{12}b^{18}$ *지수의 확장

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$$6^6=2^6\times 3^6=(2^{\frac{1}{2}})^{12}\times(3^{\frac{1}{3}})^{18}=a^{12}b^{18}$$

A 29 정답 $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ *지수의 확장

$$(a-b)\div(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=\frac{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$$

A 30 정답 $a+b$ *지수의 확장

$$(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3=a+b$$

A 31 정답 $a-b$ *지수의 확장

$$(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})=\{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$$
$$=(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$$
$$=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2$$
$$=a-b$$

A 32 정답 -2 *지수의 확장

$25^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{2}{x}}=15$, $125^{\frac{1}{y}}=5^{\frac{3}{y}}=375$이므로

$$5^{\frac{2}{x}}\div 5^{\frac{3}{y}}=5^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}=\frac{15}{375}=\frac{1}{25}=5^{-2}$$

$\therefore\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-2$

A 33 정답 $2\sqrt{2}-1$ *지수의 확장

분모, 분자에 a^x을 각각 곱하면

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2+\frac{1}{\sqrt{2}-1}}{(\sqrt{2}-1)+1}=\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-1$$

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 34 정답 ③ *거듭제곱근의 정의 [정답률 63%]

정답 공식: 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 n이 홀수이면 1이고, n이 짝수이면 $a>0$일 때 2, $a=0$일 때 1, $a<0$일 때 0이다.

2 이상의 자연수 n에 대하여 $n-12$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? (4점)

단서 1 $f(n)$의 값은 $n-12$의 부호와 n이 홀수인지, 짝수인지에 따라 0, 1, 2가 될 수 있어.

단서 2 $f(2n)$은 $2n-12$의 $2n$제곱근 중 실수인 것의 개수야. 이때, $2n$은 짝수이므로 $f(2n)$의 값은 $2n-12$의 부호에 의하여 결정돼.

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

1st $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 경우를 찾아.

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 0 또는 1 또는 2이므로 $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 경우는 $f(n)=0$, $f(2n)=1$ 또는 $f(n)=1$, $f(2n)=0$인 경우 뿐이다.

2nd 각 경우를 만족시키는 2 이상의 자연수 n의 값을 구해.

(i) $f(n)=0$, $f(2n)=1$인 경우

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 0이려면 $a<0$이고 n은 짝수이어야 해.
또, 실수 a의 $2n$제곱근 중 실수인 것의 개수가 1이려면 $a=0$이어야 해.

i) $f(n)=0$일 때,

$n-12<0$, 즉 $2\le n<12$이고 n이 짝수이어야 하므로 가능한 자연수 n의 값은 2, 4, 6, 8, 10이다.

ii) $f(2n)=1$일 때,

$2n$은 짝수이므로 $2n-12=0$, 즉 $n=6$이어야 한다.

i), ii)에 의하여 $f(n)=0$, $f(2n)=1$을 만족시키는 자연수 n의 값은 6이다.

(ii) $f(n)=1$, $f(2n)=0$인 경우

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 1이려면 n이 홀수이거나 $a=0$이어야 해.
또, 실수 a의 $2n$제곱근 중 실수인 것의 개수가 0이려면 $a<0$이어야 해.

i) $f(n)=1$일 때,

$n-12<0$, 즉 $2\le n<12$이면 n은 홀수이어야 하므로 가능한 자연수 n의 값은 3, 5, 7, 9, 11이다.

$n-12=0$, 즉 $n=12$이면 $f(n)=1$을 만족시킨다.

$n-12>0$, 즉 $n>12$이면 n은 홀수이어야 하므로 가능한 자연수 n의 값은 13, 15, 17, …이다.

따라서 이때의 가능한 자연수 n의 값은 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, …이다.

ii) $f(2n)=0$일 때,

$2n$은 짝수이므로 $2n-12<0$, 즉 $2\le n<6$이어야 하므로 가능한 자연수 n의 값은 2, 3, 4, 5이다.

i), ii)에 의하여 $f(n)=1$, $f(2n)=0$을 만족시키는 자연수 n의 값은 3, 5이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값은 3, 5, 6이므로 그 합은 $3+5+6=14$이다.

쉬운 풀이: n의 값에 따라 $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 경우 찾기

$2n$은 짝수이므로 $2n-12>0$, 즉 $n>6$이면 $f(2n)=2$야.
즉, $n>6$일 때 $f(n)+f(2n)\geq 2$이므로 조건을 만족시키지 않아.
따라서 $2\leq n\leq 6$일 때, $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구해 보자.

(i) $n=2$일 때,
$n-12=2-12=-10<0$이고 -10의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이므로 $f(n)=f(2)=0$
$2n-12=2\times 2-12=-8<0$이고 -8의 4제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이므로 $f(2n)=f(4)=0$
따라서 이때의 $f(n)+f(2n)$의 값은 $0+0=0$이야.

(ii) $n=3$일 때,
$n-12=3-12=-9<0$이고 -9의 3제곱근 중 실수인 것($\sqrt[3]{-9}$)의 개수는 1이므로 $f(n)=f(3)=1$
$2n-12=2\times 3-12=-6<0$이고 -6의 6제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이므로 $f(2n)=f(6)=0$
따라서 이때의 $f(n)+f(2n)$의 값은 $1+0=1$이야.

(iii) $n=4$일 때,
$n-12=4-12=-8<0$이고 -8의 4제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이므로 $f(n)=f(4)=0$
$2n-12=2\times 4-12=-4<0$이고 -4의 8제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이므로 $f(2n)=f(8)=0$
따라서 이때의 $f(n)+f(2n)$의 값은 $0+0=0$이야.

(iv) $n=5$일 때,
$n-12=5-12=-7<0$이고 -7의 5제곱근 중 실수인 것($\sqrt[5]{-7}$)의 개수는 1이므로 $f(n)=f(5)=1$
$2n-12=2\times 5-12=-2<0$이고 -2의 10제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이므로 $f(2n)=f(10)=0$
따라서 이때의 $f(n)+f(2n)$의 값은 $1+0=1$이야.

(v) $n=6$일 때,
$n-12=6-12=-6<0$이고 -6의 6제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이므로 $f(n)=f(6)=0$
$2n-12=2\times 6-12=0$이고 0의 12제곱근 중 실수인 것(0)의 개수는 1이므로 $f(2n)=f(12)=1$
따라서 이때의 $f(n)+f(2n)$의 값은 $0+1=1$이야.

(i)~(v)에 의하여 $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값은 3, 5, 6이므로 그 합은 $3+5+6=14$야.

A 35 정답 ⑤ *거듭제곱근의 정의 [정답률 82%]

정답 공식: a의 n제곱근은 $\sqrt[n]{a}$이다.

실수 a, b에 대하여 a는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근일 때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)
단서 거듭제곱근의 정의를 알고 있는지 물어보고 있어.

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

1st a, b를 거듭제곱근을 이용하여 표현해 봐.
a는 2의 세제곱근이므로 $a^3=2$, $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근이므로 $(\sqrt{2})^4=b$
2nd 1st 에서 구한 값을 $\left(\frac{b}{a}\right)^3$에 대입하자.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{a^3}=\frac{\{(\sqrt{2})^4\}^3}{2}=\frac{2^6}{2}=2^5=32$$

A 36 정답 ③ *거듭제곱근의 정의 [정답률 74%]

정답 공식: a의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 $a>0$일 때 n이 홀수이면 1, 짝수이면 2이고, $a<0$일 때 n이 홀수이면 1, 짝수이면 0이다.

$2\leq n\leq 10$인 자연수 n에 대하여 n^2+1의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$, $n^2-8n+12$의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n)=2g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은? (4점)
단서 a의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 a의 부호에 따라 n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 생각해.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

1st $f(n)$을 구해.
$2\leq n\leq 10$인 자연수 n에 대하여 $n^2+1>0$이므로 n^2+1의 n 제곱근 중 실수인 것은 n이 홀수일 때 1개, n이 짝수일 때 2개이다.
n^2+1의 n 제곱근 중 실수인 것은 n이 홀수이면 $\sqrt[n]{n^2+1}$이고 n이 짝수이면 $\pm\sqrt[n]{n^2+1}$이야.

$$\therefore f(n)=\begin{cases}1 & (n=3,\ 5,\ 7,\ 9)\\ 2 & (n=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10)\end{cases}$$

2nd $g(n)$을 구해.
$n^2-8n+12=(n-2)(n-6)$이므로
$n<2$ 또는 $n>6$일 때, $n^2-8n+12>0$
$n=2$ 또는 $n=6$일 때, $n^2-8n+12=0$
$2<n<6$일 때, $n^2-8n+12<0$
따라서 $n^2-8n+12$의 n 제곱근 중 실수인 것은
(i) $n<2$ 또는 $n>6$일 때, n이 홀수이면 1개, n이 짝수이면 2개이다.
$n^2-8n+12>0$이므로 $n^2-8n+12$의 n 제곱근 중 실수인 것은 n이 홀수이면 $\sqrt[n]{n^2-8n+12}$,
(ii) $n=2$ 또는 $n=6$일 때, 1개이다. n이 짝수이면 $\pm\sqrt[n]{n^2-8n+12}$이야.
$n^2-8n+12=0$이고 0의 n 제곱근은 0이야.
(iii) $2<n<6$일 때, n이 홀수이면 1개, n이 짝수이면 0개이다.
$n^2-8n+12<0$이므로 $n^2-8n+12$의 n 제곱근 중 실수인 것은 n이 홀수이면 $\sqrt[n]{n^2-8n+12}$, n이 짝수이면 없어.
(i)~(iii)에 의하여 $g(n)=\begin{cases}0 & (n=4)\\ 1 & (n=2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9)\\ 2 & (n=8,\ 10)\end{cases}$

3rd $f(n)=2g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값을 구해.
$f(n)=2g(n)$을 만족시켜야 하므로 $f(n)=2$, $g(n)=1$이다.
$f(n)=1$이면 $g(n)=\frac{1}{2}$, $f(n)=2$이면 $g(n)=1$이어야 해. 그런데 $g(n)$으로 가능한 값은 0, 1, 2이므로 $f(n)=2g(n)$을 만족시키는 경우는 $f(n)=2$, $g(n)=1$ 뿐이야.
즉, 이것을 만족시키는 모든 자연수 n의 값은 2, 6이고 그 합은 $2+6=8$이다.

A 37 정답 ① *거듭제곱근의 정의 [정답률 64%]

정답 공식: 실수 a의 n 제곱근 중 실수의 개수는
n이 홀수일 때 1개이고 n이 짝수일 때 $\begin{cases}a>0\text{이면 }2\text{개}\\ a=0\text{이면 }1\text{개}\\ a<0\text{이면 }0\text{개}\end{cases}$

단서 1 n이 짝수일 때와 홀수일 때를 나누어 생각해 봐.
자연수 $n(n\geq 2)$에 대하여 $m-2n$의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(3)+f(4)=3$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은? (4점)
단서 2 $f(n)$의 값은 0, 1, 2 중 하나야.

① 18 ② 23 ③ 28 ④ 33 ⑤ 38

1st m의 값의 범위에 따라 $f(n)$의 값을 구해.

(i) $n=2$이면 n은 짝수이므로 $m-2n=m-4$의 n제곱근, 즉 제곱근 중에서 실수인 것의 개수는
$m-4>0$이면 $\pm\sqrt{m-4}$로 2개, $m-4=0$이면 0으로 1개, $m-4<0$이면 실수인 것은 없어.
 i) $m-4>0$, 즉 $m>4$일 때, 2이므로 $f(2)=2$
 ii) $m-4=0$, 즉 $m=4$일 때, 1이므로 $f(2)=1$
 iii) $m-4<0$, 즉 $m<4$일 때, 0이므로 $f(2)=0$

(ii) $n=3$이면 n은 홀수이므로 $m-2n=m-6$의 n제곱근, 즉 세제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 m의 값에 관계없이 1이므로
m의 값에 관계없이 $\sqrt[3]{m-6}$으로 1개야.
$f(3)=1$

(iii) $n=4$이면 n은 짝수이므로 $m-2n=m-8$의 n제곱근, 즉 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수는
$m-8>0$이면 $\pm\sqrt[4]{m-8}$로 2개, $m-8=0$이면 0으로 1개, $m-8<0$이면 실수인 것은 없어.
 i) $m-8>0$, 즉 $m>8$일 때, 2이므로 $f(4)=2$
 i) $m-8=0$, 즉 $m=8$일 때, 1이므로 $f(4)=1$
 i) $m-8<0$, 즉 $m<8$일 때, 0이므로 $f(4)=0$

2nd $f(2)+f(3)+f(4)=3$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값을 구해.

(ii)에 의하여 $f(3)=1$이므로 $f(2)+f(3)+f(4)=3$에서
$f(2)+f(4)=2$ … ㉠
따라서 ㉠을 만족시키는 경우는 $f(2)=0$, $f(4)=2$ 또는 $f(2)=1$, $f(4)=1$ 또는 $f(2)=2$, $f(4)=0$인 경우이다.

(Ⅰ) $f(2)=0$, $f(4)=2$일 때, $f(2)=0$에서 $m<4$, $f(4)=2$에서 $m>8$
따라서 $f(2)=0$, $f(4)=2$를 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(Ⅱ) $f(2)=1$, $f(4)=1$일 때, $f(2)=1$에서 $m=4$, $f(4)=1$에서 $m=8$
따라서 $f(2)=1$, $f(4)=1$을 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(Ⅲ) $f(2)=2$, $f(4)=0$일 때, $f(2)=2$에서 $m>4$, $f(4)=0$에서 $m<8$
따라서 $f(2)=2$, $f(4)=0$을 만족시키는 m의 값의 범위는 $4<m<8$이다.

(Ⅰ)~(Ⅲ)에 의하여 $f(2)+f(3)+f(4)=3$을 만족시키는 m의 값의 범위는 $4<m<8$이므로 모든 자연수 m의 값은 5, 6, 7이고 그 합은 $5+6+7=18$이다.

A 38 정답 ⑤ *거듭제곱근의 정의 [정답률 75%]

정답 공식: 양수 k의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{k}$, a의 네제곱근 중 실수는 $\pm\sqrt[4]{a}$이다. 이때, $\sqrt[3]{k}=a$임을 이용한다.

양수 k의 세제곱근 중 실수인 것을 a라 할 때, a의 네제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[3]{4}$이다. k의 값은? (3점)
단서 1 거듭제곱근의 정의를 이용하여 세제곱근 중 실수를 찾아.
단서 2 양수 a의 네제곱근 중 양수는 $\sqrt[4]{a}$임을 이용하자.
① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256

1st k의 세제곱근과 네제곱근을 구해 보자.

양수 k의 세제곱근 중 실수인 것이 a이므로 (k의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{k}$와 같아.)
$a=\sqrt[3]{k}$에서 $a=k^{\frac{1}{3}}$ $(a>0)$ … ㉠
a의 네제곱근 중 양수인 것이 $\sqrt[4]{4}$이므로 (지수로 나타내면 계산이 쉬워.)
$\sqrt[3]{4}=\sqrt[4]{a}$에서 $4^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{4}}$, $(2^2)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{4}}$ (a의 네제곱근 중 실수는 $\pm\sqrt[4]{a}$이고 그중 양수이므로 $\sqrt[4]{a}$)
$2^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{4}}$ … ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2^{\frac{2}{3}}=\left(k^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$, $2^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{1}{12}}$ ($(a^m)^n=a^{mn}$)
$\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{12}=\left(k^{\frac{1}{12}}\right)^{12}$ $\therefore k=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{12}=2^8=256$

A 39 정답 15 *거듭제곱근의 정의 [정답률 62%]

정답 공식: $a<0$일 때, n이 짝수이면 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없고, n이 홀수이면 실수인 것은 음수 한 개뿐이다.

단서 $\sqrt[n]{a}$에서 n이 홀수이면 a의 n제곱근 중 실수인 것은 한 개뿐이고 음수가 되기 위해서는 $a<0$이어야 하지.
모든 실수 x에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$가 음수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. (3점)

1st 세제곱근이 음수가 되기 위해서는 세제곱근 안의 값이 음수일 때밖에 없지?
모든 실수 x에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$가 음수가 되려면
$-x^2+2ax-6a<0$ (세제곱근 $\sqrt[3]{\ }$이 음수가 되기 위해서 근호 안의 값이 음수가 되어야 해.)
$x^2-2ax+6a>0$

2nd 모든 실수 x에 대하여 (이차식)>0이 되기 위해서는 (이차식)$=0$의 판별식이 음수일 때야.

이차방정식 $x^2-2ax+6a=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=a^2-6a=a(a-6)<0$ $\therefore 0<a<6$
$y=x^2-2ax+6a$라 하면 이차함수의 그래프가 x축보다 위에 있어야 하므로 x축과 만나지 않아야 해.
즉, 이차방정식 $x^2-2ax+6a=0$은 실근을 가지지 않아야 하므로 판별식 $D<0$이야.
따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은 $1+2+3+4+5=15$

A 40 정답 22 *거듭제곱근의 정의 [정답률 57%]

정답 공식: 방정식 $x^n=a$의 근을 a의 n 제곱근이라 한다.

자연수 n에 대하여 $\sqrt[n+1]{8}$이 어떤 자연수의 네제곱근이 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (4점)
단서 $\sqrt[n+1]{8}$을 네제곱하면 어떤 자연수가 돼.

1st 거듭제곱근의 정의를 이용하여 n의 값을 구해.

$\sqrt[n+1]{8}$이 어떤 자연수의 네제곱근이므로 어떤 자연수를 k라 하면
(a의 n 제곱근은 방정식 $x^n=a$의 근이야.)
$\sqrt[n+1]{8}$은 방정식 $x^4=k$의 근이다.
즉, $x=\sqrt[n+1]{8}$을 대입하면 식이 성립하므로 $(\sqrt[n+1]{8})^4=k$에서
$(\underbrace{\sqrt[n+1]{2^3}}_{\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}})^4=k$, $\underbrace{\left(2^{\frac{3}{n+1}}\right)^4}_{(a^m)^n=a^{mn}}=k$ $\therefore 2^{\frac{12}{n+1}}=k$
이때, k는 자연수이므로 $n+1$은 12의 양의 약수가 되어야 한다.
즉, $n+1$의 값으로 가능한 값은 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로 n의 값으로 가능한 값은 0, 1, 2, 3, 5, 11이다.
그런데 n은 자연수이므로 조건을 만족시키는 n의 값은 1, 2, 3, 5, 11이고 그 합은 $1+2+3+5+11=22$이다.

A 41 정답 49 *거듭제곱근의 성질을 이용한 식의 계산 [정답률 93%]

정답 공식: 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

단서 거듭제곱근의 성질을 이용하여 값을 구하면 돼.
$\sqrt[3]{49}\times\sqrt[3]{7^4}$의 값을 구하시오. (3점)

1st 주어진 식의 값을 구해.

$\sqrt[3]{49}\times\sqrt[3]{7^4}=\underbrace{\sqrt[3]{7^2}\times\sqrt[3]{7^4}=\sqrt[3]{7^2\times7^4}}_{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}}=\sqrt[3]{7^6}=7^2=49$

다른 풀이: $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$임을 이용하기

$\sqrt[3]{49}\times\sqrt[3]{7^4}=\underbrace{\sqrt[3]{7^2}\times\sqrt[3]{7^4}}_{\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}}=\underbrace{7^{\frac{2}{3}}\times7^{\frac{4}{3}}}_{a^m\times a^n=a^{m+n}}=7^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=7^2=49$

A 89 정답 ⑤ *a^r이 자연수, 유리수가 되는 조건 ···· [정답률 83%]

(정답 공식: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, $\frac{n}{k}$이 자연수가 되기 위해서는 n은 k의 배수가 되어야 한다.)

$1\le n\le 15$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{7})^n$이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 개수는? (3점)

단서 $(\sqrt[3]{7})^n$이 자연수가 되기 위해서는 근호가 없어져야 해.
지수법칙을 이용하여 $(\sqrt[3]{7})^n=7^{\frac{n}{3}}$으로 나타내고, $7^{\frac{n}{3}}$이 자연수가 되기 위한 n의 조건을 찾으면 돼.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st $(\sqrt[3]{7})^n$을 지수법칙을 이용하여 간단히 하자.

$(\sqrt[3]{7})^n=\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^n=7^{\frac{n}{3}}$ $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, $(a^x)^y=a^{xy}$

2nd $7^{\frac{n}{3}}$이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값을 구하자.

$7^{\frac{n}{3}}$이 자연수가 되려면 지수인 $\frac{n}{3}$이 자연수가 되어야 한다.

즉, $7^{\frac{n}{3}}$이 자연수가 되려면 $\frac{n}{3}=m$(m은 자연수), 즉 $n=3m$이므로 n은 3의 배수가 되어야 한다. 15 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 $\frac{15}{3}=5$야.

따라서 $1\le n\le 15$인 자연수 n은 3, 6, 9, 12, 15로 5개이다.

수능 핵강

* 자연수의 특징으로 m의 배수의 개수 구하기

자연수 n 이하의 수에 대하여 m의 배수의 개수는 $\frac{n}{m}$의 몫으로 구할 수 있어.

예를 들면 1000 이하의 자연수 중 7의 배수의 개수는 $\frac{1000}{7}=142.\times\times\times$이므로 7의 배수의 개수는 몫인 142가 되는 거야.

A 90 정답 ③ *a^r이 자연수, 유리수가 되는 조건 ···· [정답률 82%]

(정답 공식: $(a^m)^n=a^{mn}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$)

2 이상의 두 자연수 a, n에 대하여 $(\sqrt[n]{a})^3$의 값이 자연수가 되도록 하는 n의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(4)+f(27)$의 값은? (4점)

단서 $a=4$일 때 n의 최댓값과 $a=27$일 때 n의 최댓값의 합을 구하는 거야.

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

1st $f(4)$의 값을 구해.

$(\sqrt[n]{a})^3=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^3=a^{\frac{3}{n}}$이므로

(i) $a=4$일 때,

$4^{\frac{3}{n}}=(2^2)^{\frac{3}{n}}=2^{2\times\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$

이것이 자연수가 되려면 $\frac{6}{n}$이 자연수이어야 하므로 가능한 자연수 n의 값은 2, 3, 6이다. n은 6의 양의 약수이어야 해. 그런데 n이 2 이상의 자연수이므로 가능한 n의 값은 2, 3, 6이야.

$\therefore f(4)=6$

2nd $f(27)$의 값을 구해.

(ii) $a=27$일 때,

$27^{\frac{3}{n}}=(3^3)^{\frac{3}{n}}=3^{3\times\frac{3}{n}}=3^{\frac{9}{n}}$

이것이 자연수가 되려면 $\frac{9}{n}$가 자연수이어야 하므로 가능한 자연수 n의 값은 3, 9이다. n은 9의 양의 약수이어야 해. 그런데 n이 2 이상의 자연수이므로 가능한 n의 값은 3, 9야.

$\therefore f(27)=9$

(i), (ii)에 의하여 $f(4)+f(27)=6+9=15$

A 91 정답 ③ *a^r이 자연수, 유리수가 되는 조건 ···· [정답률 63%]

(정답 공식: 지수법칙 $(a^n)^m=a^{mn}$을 적용한다.)

10 이하의 자연수 a에 대하여 $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? (3점)

단서 $(a^m)^n=a^{mn}$을 이용하여 간단히 나타내고 자연수가 되기 위한 조건을 찾자.

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

1st 지수법칙을 이용하여 식을 정리해 보자.

지수법칙을 이용하여 식을 정리하면

$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}$

2nd $a^{\frac{1}{3}}$의 값이 자연수가 되는 조건을 생각해.

$a^{\frac{1}{3}}$의 값이 자연수가 되기 위해서는 $a=k^3$ (k는 자연수) 꼴이므로 $a^{\frac{1}{3}}=(k^3)^{\frac{1}{3}}=k$

$1\le k^3\le 10$ $\therefore k=1, k=2$

즉, $a=1^3=1$, $a=2^3=8$이므로 모든 a의 값의 합은 $1+8=9$ $1\le k^3\le 10$, $1\le k\le 10^{\frac{1}{3}}$이므로 $k=1, k=2$

다른 풀이 ❶: 자연수 a의 값 직접 구하기

$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}$의 값이 자연수이려면 a는 어떤 자연수의 세제곱 꼴이어야 해.

$1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, ···

이때, a는 10 이하의 자연수이므로 $a^{\frac{1}{3}}$의 값이 자연수가 되는 a의 값은 1, 8이야.

따라서 모든 a의 값의 합은 $1+8=9$

다른 풀이 ❷: 주어진 조건 10 이하의 자연수 a를 부등식으로 표현하여 해결하기

조건에서 $1\le a\le 10$이므로 $1\le a^{\frac{2}{3}}\le 10^{\frac{2}{3}}$

$1\le\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(10^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $1\le a^{\frac{1}{3}}\le 10^{\frac{1}{3}}$

$a=k^3$ (k는 자연수) 꼴이므로 $k=1$, $k=2$일 때, 각각 $a=1$, $a=8$

따라서 모든 a의 값의 합은 $1+8=9$

A 92 정답 12 *a^r이 자연수, 유리수가 되는 조건 ··· [정답률 58%]

(정답 공식: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$의 꼴로 변형한 후 계산한다.)

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^n$이 네 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오. (4점)

단서 $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$으로 변형하여 나타내자.

1st 거듭제곱근의 성질을 사용하여 식을 간단히 정리하자.

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^n=\left(\sqrt{2\times 4^{\frac{1}{3}}}\right)^n=2^{\frac{5}{6}n}$ $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^n=\left(\sqrt{2\times 4^{\frac{1}{3}}}\right)^n=\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{n}{2}}=2^{\frac{5}{6}n}$

2nd $10^3\le 2^{\frac{5}{6}n}<10^4$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하자.

이것이 네 자리의 자연수이므로

$1000\le 2^{\frac{5}{6}n}<10000$

이때, $2^{10}=1024$, $2^{13}=8192$이므로

$2^{10}\le 2^{\frac{5}{6}n}<2^{14}$

$10\le\frac{5}{6}n<14$ $\frac{5}{6}n$이 자연수가 되는 n은 6의 배수이므로 $n=6k$ (k는 자연수) 꼴이야.

따라서 $\frac{5}{6}n$이 자연수가 되는 n의 값은 $n=12$이다.

다른 풀이: 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $2^{\frac{q}{p}n}$이 자연수이려면 n은 p의 배수임을 이용하기

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^n=2^{\frac{5}{6}n}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n은 6의 배수이다.

$n=6$일 때, $2^5=32$ $\quad$ $n=12$일 때, $(2^5)^2=2^{10}=1024$

$n=18$일 때, $(2^5)^3=2^{15}=32768$

⋮

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^n=2^{\frac{5}{6}n}$이 네 자리 자연수가 되어야 하므로 $n=12$

A 93 정답 124 *a^r이 자연수, 유리수가 되는 조건 ··· [정답률 58%]

정답 공식: $(a^m)^n=a^{mn}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, 소수 a, 자연수 m, n에 대해 $a^{\frac{m}{n}}$이 자연수가 되기 위해서는 m이 n의 배수(n이 m의 약수)이어야 한다.

단서1 지수법칙을 이용하면 둘 다 3^a 꼴로 나타낼 수 있어.

2 이상의 자연수 n에 대하여 $(\sqrt{3^n})^{\frac{1}{2}}$과 $\sqrt[n]{3^{100}}$이 모두 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

단서2 3^a 꼴의 값이 자연수가 되려면 지수가 양의 정수이어야 하지?

1st 우선 지수법칙을 이용하여 주어진 값을 3^a 꼴로 나타내 보자.

$(\sqrt{3^n})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{n}{4}}$, $\sqrt[n]{3^{100}}=3^{\frac{100}{n}}$ → $(a^m)^n=a^{mn}$과 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$을 이용한 거야.

2nd $3^{\frac{n}{4}}$이 자연수가 되도록 하는 n의 값을 구하시오.

$3^{\frac{n}{4}}$이 자연수가 되도록 하려면 지수 $\frac{n}{4}$이 양의 정수이어야 하므로

자연수 n은 4의 배수이어야 한다. 만약 지수 $\frac{n}{4}$은 양의 정수가 아니고, 예를 들어 $n=2$이면 $3^{\frac{n}{4}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$처럼 $3^{\frac{n}{4}}$은 자연수가 아니야.

즉, $n=4k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) 즉, 지수 $\frac{n}{4}$은 양의 정수이어야 해.

3rd $3^{\frac{100}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 n의 값을 구하시오.

또한, $3^{\frac{100}{n}}$이 자연수가 되도록 하려면 마찬가지로 지수가 양의 정수이어야 하므로 2 이상의 자연수 n은 100의 양의 약수이어야 한다.

$n=2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$

따라서 2 이상의 자연수 n 중에서 100의 양의 약수이면서 동시에 4의 배수인 자연수 n은 4, 20, 100이므로

구하는 모든 n의 값의 합은

$4+20+100=124$

실수 주의 문제의 조건에 n은 2 이상의 자연수라고 했으므로 1은 제외시켜야 해.

수능 핵강

* 지수법칙에서 주의할 점

① 지수가 유리수인 경우, 밑이 양수일 때에만 지수법칙이 성립해.

밑이 음수일 때 유리수 지수를 허용하면

$(-2)^{\frac{1}{2}}\times(-2)^{\frac{1}{2}}\neq\{(-2)\times(-2)\}^{\frac{1}{2}}$

좌변은 $\sqrt{2}i\times\sqrt{2}i=-2$, 우변은 $4^{\frac{1}{2}}=2$가 되어

지수법칙 $a^nb^n=(ab)^n$을 만족시키지 않아.

② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$으로 정의할 때, m은 정수이고 n은 자연수임에 특히 주의하자.

즉, $a^{-\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{-2}}=\sqrt[-2]{a^3}$ ($a>0$)은 잘못된 표현이야.

올바른 표현은 $a^{-\frac{3}{2}}=a^{\frac{-3}{2}}=\sqrt[2]{a^{-3}}$

③ 밑이 음수이고 지수가 분수일 때는 지수법칙이 성립하지 않아.

거듭제곱근의 성질 개념·공식

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 양의 정수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $\quad$ ② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\quad$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ $\quad$ ⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

A 94 정답 33 *a^r이 자연수, 유리수가 되는 조건 ··· [정답률 73%]

정답 공식: 4^n이 세제곱수이어야 한다. 즉, n이 3의 배수이어야 한다.

100 이하의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[3]{4^n}$이 정수가 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (3점)

단서 정수 꼴이 되려면 $\sqrt[3]{\ }$가 사라져야 하니까 $4^{\square}$에서 $\square$가 자연수가 되도록 하는 n의 값을 찾자.

1st 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식부터 간단히 하여 n의 조건을 찾자.

$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ $\quad$ $\frac{2n}{3}$이 자연수가 아닌 유리수이면 $a^{\frac{2n}{3}}=\sqrt[3]{a^{2n}}$으로 무리수이지?

$\sqrt[3]{4^n}=4^{\frac{n}{3}}=2^{\frac{2n}{3}}$에서 하지만 자연수이면 $2^{\square}$으로 2의 거듭제곱이야.

정수가 되기 위해서는 $\frac{2n}{3}$이 자연수이어야 하므로 n은 3의 배수이어야 한다. 분자의 수가 분모의 수의 배수이면 되니까

2nd 조건을 만족시키는 n의 개수를 구하시오.

이때, n은 100 이하의 자연수이고, 100 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 33이므로 n의 개수는 33이 된다. $\frac{100}{3}=33.\times\times\times$

수능 핵강

* 자연수의 특징으로 배수의 개수 구하기

자연수 n 이하의 수에 대하여

2의 배수의 개수는 $\frac{n}{2}$의 몫만큼, 3의 배수의 개수는 $\frac{n}{3}$의 몫만큼, ⋯,

k의 배수의 개수는 $\frac{n}{k}$의 몫만큼이므로 배수의 개수를 따질 때, 사용하자.

A 95 정답 36 *a^r이 자연수, 유리수가 되는 조건 ····· [정답률 57%]

정답 공식: $(ab)^m=a^mb^m$

$\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt[4]{a}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 a의 최솟값을 구하시오. (4점)

단서 자연수가 되기 위해서는 근호가 없어져야 해.

1st $\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt[4]{a}$의 값을 자연수 n이라 하고 식을 정리해.

$\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt[4]{a}=n$ (n은 자연수)이라 하면

$n=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{3^2\times a}{2^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ $a>0, b>0$이고 r가 유리수일 때 $(ab)^r=a^rb^r$

n이 자연수가 되려면 자연수 a는 $a=2^2\times3^2\times k^4$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

$n=\left(\frac{3^2\times2^2\times3^2\times k^4}{2^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

$=(3^4\times k^4)^{\frac{1}{4}}=3\times k$

이므로 n이 자연수가 돼.

따라서 자연수 a의 최솟값은

$k=1$일 때 36이다.

A 96 정답 252 *거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 ····· [정답률 72%]

정답 공식: $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$ 모두 자연수가 되어야 한다.

$30\le a\le40$, $150\le b\le294$일 때, $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$의 값이 자연수가 되도록 하는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (3점)

단서 $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$의 값이 자연수가 되려면 자연수 m, n에 대하여 $a=m^2$, $b=n^3$ 꼴이어야 해.

A 127 정답 ② *지수법칙의 실생활에서의 활용 ···· [정답률 65%]

정답 공식: 부패지수가 각각 P_1, $4P_1$일 때 관계식의 각 문자에 해당하는 값을 대입하고, 두 식을 나눠서 구하고자 하는 값을 찾는다.

어떤 물질의 부패지수 P와 일평균 습도 $H(\%)$, 일평균 기온 $t(℃)$ 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$P=\frac{H-65}{14}\times(1.05)^{t}\cdots ⓐ$$

❶일평균 습도가 72 %, 일평균 기온이 10 ℃인 날에 이 물질의 부패지수를 P_1이라 하자.❷일평균 습도가 79 %, 일평균 기온이 x ℃인 날에 이 물질의 부패지수가 $4P_1$일 때, x의 값은? (단, $1.05^{14}=2$로 계산한다.) (4점)

단서 ⓐ를 가지고 ❶과 ❷의 자료를 대입하여 정리해. 이때, ❷는 ❶의 4배이지?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

1st 주어진 식에 조건을 각각 대입해.

P_1일 때 $H=72(\%)$, $t=10(℃)$이므로

$$P_1=\frac{72-65}{14}\times(1.05)^{10}=\frac{1}{2}\times(1.05)^{10}\cdots ㉠$$

$4P_1$일 때 $H=79(\%)$, $t=x(℃)$이므로

$$4P_1=\frac{79-65}{14}\times(1.05)^{x}=(1.05)^{x}\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 → ㉡은 ㉠의 4배이니까 $4\times$㉠$=$㉡

$$4\times\left\{\frac{1}{2}\times(1.05)^{10}\right\}=(1.05)^{x}$$ → $a^m=a^n$일 때 $a^m\div a^n=1$, 즉 $a^{m-n}=1$

$(1.05)^{x-10}=2$

그런데 $1.05^{14}=2$이므로

$(1.05)^{x-10}=1.05^{14}$

밑이 1.05로 같으니까 지수를 비교해.

$x-10=14$

$\therefore x=24$

거듭제곱근의 성질과 지수법칙 개념·공식

(1) 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 양의 정수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

③ $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

(2) 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$ ④ $(ab)^n=a^n b^n$

⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

내신 유형별 서술형 문제

A 128 정답 10 *거듭제곱근의 정의 ····· [정답률 67%]

정답 공식: a의 n제곱근 중 실수는 x에 대한 방정식 $x^n=a$의 실근이다.

단서 n의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 각 경우에서의 부호에 따른 실근을 조사해.

2 이상 30 이하인 자연수 n에 대하여 $n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하고, $n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

단서+발상

단서 a의 n제곱근 중 실수는 x에 대한 방정식 $x^n=a$의 실근과 같다. a의 n제곱근 중 양의 실근이 존재하기 위해서 $a>0$이어야 하고, a의 n제곱근 중 음의 실근이 존재하기 위해서 $a>0$이고 n은 짝수이거나, $a<0$이고 n은 홀수이어야 한다. 개념

따라서 n의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 $n-9$와 $n-20$의 부호에 따른 실수가 존재하는 n의 조건을 구할 수 있다. 적용

[문제 풀이 순서]

1st $n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하는 n의 조건을 구하자.

$n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하기 위해서는

$n-9>0$이어야 한다. $\therefore n>9\cdots ㉠$

2nd $n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하는 n의 조건을 구하자.

$n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하기 위해서는

[a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하는 경우]

$a>0$, n이 짝수인 경우 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$, $x=-a^{\frac{1}{n}}$이고 $-a^{\frac{1}{n}}<0$이야.

$a<0$, n이 홀수인 경우 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$이고 $a^{\frac{1}{n}}<0$이야.

n이 홀수이고 $n-20<0$이거나 n이 짝수이고 $n-20>0$이어야 한다.

따라서 자연수 n은

$n<20$인 홀수 또는 $n>20$인 짝수이다. $\cdots ㉡$

3rd 자연수 n의 개수를 구하자.

㉠, ㉡에 의하여 30 이하인 자연수 n은 $9<n<20$인 홀수 또는 $20<n\le 30$인 짝수이다.

(i) n이 $9<n<20$인 홀수 $\Rightarrow n=11, 13, 15, 17, 19$이므로 5개이다.

(ii) n이 $20<n\le 30$인 짝수

$n=22, 24, 26, 28, 30$이므로 5개이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 자연수 n의 개수는 10이다.

[채점 기준표]

1st	$n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하는 n의 조건을 구한다.	3점
2nd	$n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하는 n의 조건을 구한다.	4.5점
3rd	자연수 n의 개수를 구한다.	2.5점

A 129 정답 20 *a^r이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 57%]

정답 공식: 양수 a와 짝수인 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 실근은 $a^{\frac{1}{n}}$ 또는 $-a^{\frac{1}{n}}$이다.

단서 서로 다른 실근이 3개 가지고 있음을 알 수 있고, m, n의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 실근의 개수를 확인해 보자.

2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 x에 대한 방정식

$(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$

이 서로 다른 세 실근 α_1, α_2, α_3을 가진다. 세 수 α_1, α_2, α_3이 모두 정수일 때, $m+n=k$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

단서+발상

단서 $x^n=a$의 실근에서 n이 짝수인 경우 실수 a에 대하여 $a>0$이면 a의 n제곱근 중 실근은 $a^{\frac{1}{n}}$, $-a^{\frac{1}{n}}$이고, n이 홀수인 경우 a의 n제곱근 중 실근은 $a^{\frac{1}{n}}$이다. (개념)
방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 해는 방정식 $x^m=2^6$ 또는 $x^n=-2^9$의 해와 같고, 이때 x의 지수 m, n의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 각 경우의 실근의 개수를 구할 수 있다. (적용)
실근 α_1, α_2, α_3에서 같은 근이 생기는 m, n의 값이 존재하는지 확인하여 자연수 k의 값을 구할 수 있다. (해결)

[문제 풀이 순서]

1st 세 실근을 가지기 위한 m, n의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$을 구하자.

방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$이려면 $x^m=2^6$ 또는 $x^n=-2^9$이다.

n이 짝수이면 방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 존재하지 않는다.
n이 짝수일 때, 방정식 $x^n=a$에서 $a\geq 0$이어야 실근이 존재해.

방정식 $x^m=2^6$의 실근은 최대 2개이므로

방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$이 세 실근을 가질 수 없다.

따라서 n은 홀수이다.

n은 홀수이므로 방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 $x=-2^{\frac{9}{n}}$으로 1개,
n이 홀수일 때, 실수 a에 대해 방정식 $x^n=a$의 실근은 항상 1개야.

방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 3개이므로

방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2개이다.

따라서 m은 짝수이고 방정식 $x^m=2^6$의 실근은 $x=2^{\frac{6}{m}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{m}}$이다.
$a>0$, n이 짝수인 경우 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$ 또는 $x=-a^{\frac{1}{n}}$

$\therefore \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}=\left\{-2^{\frac{9}{n}}, 2^{\frac{6}{m}}, -2^{\frac{6}{m}}\right\}$

2nd α_1, α_2, α_3이 서로 다른 정수가 되기 위한 m, n, k의 값을 각각 구하자.

$2^{\frac{6}{m}}$, $-2^{\frac{6}{m}}$이 정수이므로 $m=2, 6$
m이 2 이상인 자연수 중 짝수이면서 6의 약수는 2, 6이야.

$-2^{\frac{9}{n}}$이 정수이므로 $n=3, 9$

조건을 만족시키는 m, n의 값을 순서쌍 (m, n)으로 나타내자.

(i) $(2, 3)$인 경우
방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2^3, -2^3
방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 -2^3
따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 2^3, -2^3으로 서로 다른 세 정수가 될 수 없다.

(ii) $(2, 9)$인 경우
방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2^3, -2^3
방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 -2
따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 2^3, -2^3, -2이므로 서로 다른 세 정수이다.
$\therefore m+n=11$

(iii) $(6, 3)$인 경우
방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2, -2
방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 -2^3
따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 2, -2, -2^3이므로 서로 다른 세 정수이다.
$\therefore m+n=9$

(iv) $(6, 9)$인 경우
방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2, -2
방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 -2
따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 서로 다른 세 정수가 될 수 없다.

(i)~(iv)에 의해 모든 자연수 k의 값의 합은 $11+9=20$
서로 다른 근이 나오는지 확인하기 위해 가능한 경우의 자연수 m, n을 대입해봐야 해.

[채점 기준표]

1st	세 실근을 가지기 위한 m, n의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$을 구한다.	4점
2nd	α_1, α_2, α_3가 서로 다른 정수가 되기 위한 m, n, k의 값을 각각 구한다.	6점

A 130 정답 21 *지수법칙의 활용 [정답률 68%]

정답 공식: $(ab)^n=a^nb^n$, $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$

등식 **단서1** 분자의 항이 복잡하므로 분모와 분자에 일정한 값을 곱하여 식을 간단히 만들 수 있어.

$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$ **단서2** 곱셈공식을 활용해 식을 변형하여 계산할 수 있어.

$=(2^a+2^b)^3$

을 만족시키는 유리수 a, b에 대하여 $3a+b$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $a>b$) (10점)

단서+발상

단서1 분자가 계산이 번거로운 2^{-k} 꼴의 항들로 이루어져 있으므로 분모와 분자에 2^5을 곱하여 식을 간단히 만들고 같은 부호의 항끼리 묶어 계산할 수 있다. (발상)

단서2 $\sqrt[3]{2}=A$라 하면 $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$는 A^2-A+1로 나타낼 수 있다. (발상)
곱셈공식 $(A+1)(A^2-A+1)=A^3+1$을 활용해 식을 변형하여 계산할 수 있다. (적용)

[문제 풀이 순서]

1st $\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}$의 값을 구하자.

$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-1}$

$=\frac{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}=\frac{1}{2^{-5}}\left(\frac{1+2+2^2+2^3+2^4+2^5}{2^5-2^4+2^3-2^2+2-1}\right)$

$=2^5\left\{\frac{1+2^2+2^4+2(1+2^2+2^4)}{2(1+2^2+2^4)-(1+2^2+2^4)}\right\}=2^5\left\{\frac{3(1+2^2+2^4)}{1+2^2+2^4}\right\}=3\times 2^5$

$\therefore \left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}=(3\times 2^5)^3 \cdots$ ㉠

2nd $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$의 값을 구하자.

$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}\right)^3=\left\{\frac{\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3+1}\right\}^3$

$=\frac{(\sqrt[3]{2}+1)^3}{27} \cdots$ ㉡

$\left\{\frac{\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}\right\}^3$

1등급 마스터 문제

F 158 정답 ⑤ ····· ✪1등급 대비 [정답률 38%]

정답 공식: 함수 $y=\sin x$의 그래프를 이용하여 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)=\sin(x+a)$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여 조건을 만족시키는 양수 a의 값을 구한다.

함수 $f(x)=\sin(x+a)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는

단서1 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 그래프야.

3π보다 작은 모든 양수 a의 값의 합은? (4점)

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각

단서2 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이거나 최솟값이 -1이 되도록 a의 값의 범위를 나누어 생각해.

M, m이라 할 때, $2|M|=|m|$이다.

① $\frac{25}{6}\pi$ ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ $\frac{9}{2}\pi$

④ $\frac{14}{3}\pi$ ⑤ $\frac{29}{6}\pi$

단서+발상

단서1 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $y=\sin(x+a)$의 최댓값과 최솟값은 닫힌구간 $[a, a+\pi]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값과 최솟값과 같다. 개념

단서2 닫힌구간 $[a, a+\pi]$에는 함숫값이 1 또는 -1인 x의 값이 포함되므로 최댓값이 1이거나 최솟값이 -1인 경우로 범위를 나누어 생각한다. 발상

즉, a의 값이 범위에 따라 최댓값이 1이거나 최솟값이 -1이므로 각 경우에 $2|M|=|m|$을 만족시키는 a의 값을 구한다. 해결

[문제 풀이 순서]

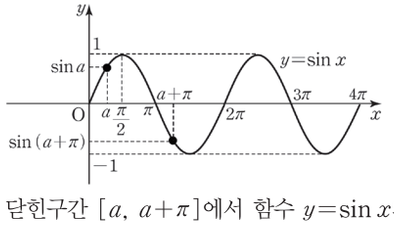
1st a의 값의 범위에 따라 조건을 만족시키는 양수 a의 값을 구해.

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)=\sin(x+a)$의 최댓값, 최솟값은 닫힌구간 $[a, a+\pi]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값, 최솟값과 같다.

$x+a=t$라 하면 $0\le x\le\pi$에서 $a\le t\le a+\pi$이므로 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $y=\sin(x+a)$의 최댓값, 최솟값은 각각 닫힌구간 $[a, a+\pi]$에서 함수 $y=\sin t$의 최댓값, 최솟값과 같아.

따라서 닫힌구간 $[a, a+\pi]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값이 1이거나 최솟값이 -1이 되도록 하는 a의 값의 범위에 따라 조건을 만족시키는 양수 a의 값을 구하자.

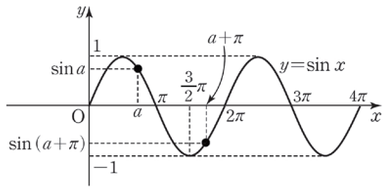
(i) $0<a\le\frac{\pi}{2}$일 때,



그림과 같이 닫힌구간 $[a, a+\pi]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값은 $M=\sin\frac{\pi}{2}=1$이고 최솟값은 $m=\sin(a+\pi)=-\sin a$이다.

이때, $|M|=1$이고 $-1\le-\sin a<0$에서 $0<|m|\le1$이므로 $2|M|=|m|$을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{\pi}{2}<a\le\pi$일 때,

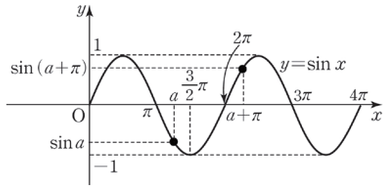


그림과 같이 닫힌구간 $[a, a+\pi]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값은 $M=\sin a$이고 최솟값은 $m=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$이다.

이때, $0\le\sin a<1$에서 $|M|=|\sin a|=\sin a$이고 $|m|=1$이므로 $2|M|=|m|$에서 $2\sin a=1$, $\sin a=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{5}{6}\pi\left(\because \frac{\pi}{2}<a\le\pi\right)$

(iii) $\pi<a\le\frac{3}{2}\pi$일 때,

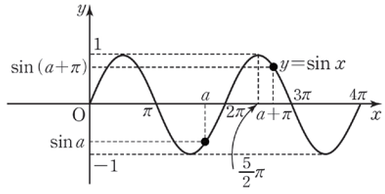


그림과 같이 닫힌구간 $[a, a+\pi]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값은 $M=\sin(a+\pi)=-\sin a$이고 최솟값은 $m=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$이다.

이때, $0<-\sin a\le1$에서 $|M|=|-\sin a|=-\sin a$이고 $|m|=1$이므로 $2|M|=|m|$에서 $-2\sin a=1$, $\sin a=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{7}{6}\pi\left(\because \pi<a\le\frac{3}{2}\pi\right)$

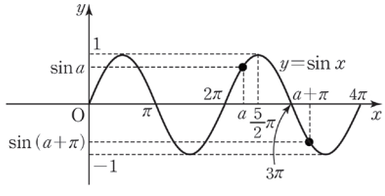
(iv) $\frac{3}{2}\pi<a\le2\pi$일 때,



그림과 같이 닫힌구간 $[a, a+\pi]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값은 $M=\sin\frac{5}{2}\pi=1$이고 최솟값은 $m=\sin a$이다.

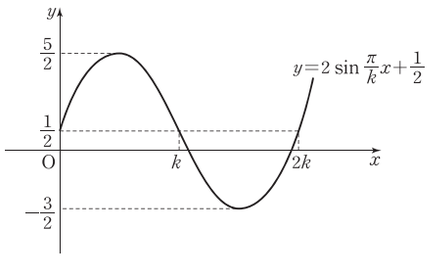
이때, $|M|=1$이고 $-1<\sin a\le0$에서 $0\le|m|<1$이므로 $2|M|=|m|$을 만족시키지 않는다.

(v) $2\pi<a\le\frac{5}{2}\pi$일 때,



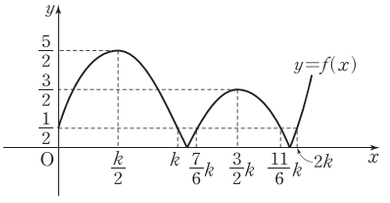
그림과 같이 닫힌구간 $[a, a+\pi]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값은 $M=\sin\frac{5}{2}\pi=1$이고 최솟값은 $m=\sin(a+\pi)=-\sin a$이다.

이때, $|M|=1$이고 $-1\le-\sin a<0$에서 $0<|m|\le1$이므로 $2|M|=|m|$을 만족시키지 않는다.



[그림 1]

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}$에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그리면 되므로 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

2nd 조건을 만족시키도록 하는 k, α, β의 값을 각각 구해.

함수 $y=f(x)$의 그래프에 의하여 $0\le t<k$ 또는 $t>2k-1$이면 $t+1>2k$인 경우이고 이때, $0\le t<k$일 때, $f(t)>\frac{1}{2}$이므로 최댓값은 $\frac{1}{2}$보다 커. $f(t+1)>\frac{1}{2}$이므로 최댓값은 $\frac{1}{2}$보다 커.

$t\le x\le t+1$에서 $f(x)>\frac{1}{2}$인 x의 값이 존재한다.

따라서 이때의 최댓값은 $\frac{1}{2}$보다 크므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $t\le x\le t+1$에서 최댓값이 $\frac{1}{2}$이 되려면 $k\le t\le 2k-1$이어야 한다.

한편, $0\le x\le 2k$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$의 해와 같다.

즉, $\left|2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$에서

$2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 또는 $2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

(i) $2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$에서

$2\sin\frac{\pi}{k}x=0$, $\sin\frac{\pi}{k}x=0$

$\frac{\pi}{k}x=0$ 또는 $\frac{\pi}{k}x=\pi$ 또는 $\frac{\pi}{k}x=2\pi$

$0\le x\le 2k$에서 $0\le\frac{\pi}{k}x\le 2\pi$이므로 이 구간에서 방정식의 해를 구하면 돼.

$\therefore x=0$ 또는 $x=k$ 또는 $x=2k$

(ii) $2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$에서

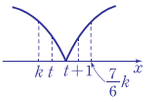
$2\sin\frac{\pi}{k}x=-1$, $\sin\frac{\pi}{k}x=-\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{k}x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{\pi}{k}x=\frac{11}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{7}{6}k$ 또는 $x=\frac{11}{6}k$

이때, $\frac{7}{6}k-k=2k-\frac{11}{6}k=\frac{k}{6}$이고 $t\le x\le t+1$에서 $(t+1)-t=1$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각하자.

(Ⅰ) $\frac{k}{6}>1$일 때, 예를 들어 구간 $[t,t+1]$이 그림과 같이 존재할 경우야.



$k\le x\le k+1$에서 $f(x)\le f(k)=\frac{1}{2}$

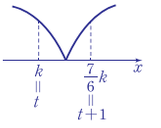
$\frac{7}{6}k-1\le x\le\frac{7}{6}k$에서 $f(x)\le f\left(\frac{7}{6}k\right)=\frac{1}{2}$,

$\frac{11}{6}k\le x\le\frac{11}{6}k+1$에서 $f(x)\le f\left(\frac{11}{6}k\right)=\frac{1}{2}$,

$2k-1\le x\le 2k$에서 $f(x)\le f(2k)=\frac{1}{2}$

따라서 $t\le x\le t+1$에서 $f(x)$의 최댓값이 $\frac{1}{2}$이 되도록 하는 서로 다른 t의 값은 k, $\frac{7}{6}k-1$, $\frac{11}{6}k$, $2k-1$로 4개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(Ⅱ) $\frac{k}{6}=1$, 즉 $k=6$일 때, 예를 들어 구간 $[t,t+1]$이 그림과 같이 존재할 경우야.

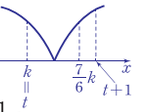


$6\le x\le 7$에서 $f(x)\le f(6)=f(7)=\frac{1}{2}$

$11\le x\le 12$에서 $f(x)\le f(11)=f(12)=\frac{1}{2}$

따라서 $t\le x\le t+1$에서 $f(x)$의 최댓값이 $\frac{1}{2}$이 되도록 하는 서로 다른 t의 값은 6, 11로 2개이므로 조건을 만족시킨다.

(Ⅲ) $\frac{k}{6}<1$일 때, 예를 들어 구간 $[t,t+1]$이 그림과 같이 존재할 경우야.



$k+1>\frac{7}{6}k$, $\frac{7}{6}k-1<k$, $\frac{11}{6}k+1>2k$, $2k-1<\frac{11}{6}k$

$k=t$라 하면 $\frac{7}{6}k<t+1$이므로 $k+1>\frac{7}{6}k$야.

따라서 $t\le x\le t+1$에서 $f(x)$의 최댓값이 $\frac{1}{2}$이 되도록 하는 t의 값은 존재하지 않는다.

(Ⅰ)~(Ⅲ)에 의하여 $k=6$, $\alpha=6$, $\beta=11$이므로

$k\alpha+\beta=6\times 6+11=47$



My Top Secret 서울대 선배의 ❶ 등급 대비 전략

함수 $f(x)=\left|2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}\right|$의 그래프를 다음의 순서로 그리자.

(i) 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{k}x$의 주기와 최댓값, 최솟값을 파악하여 이 함수의 그래프를 그린다.

(ii) 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{k}x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동하여 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}$의 그래프를 그린다.

(iii) 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 완성한다.