

새수능 과목 고2 확률과 통계,
개념과 유형을 촘촘히 연계해서 공부하면
수학이 쉬워집니다.

고등학교 수학은 개념이 어렵다고
공식만 암기하면서 공부하면 성적이 오르지 않습니다.
개념을 정확히 이해하고 각 개념의 필수 공식과 문제 유형들을
단계별 문제를 통해서 익혀야 합니다.

자이스토리는 새 교육과정에 맞게
최신 학교시험과 학력평가 문제를 철저히 분석해
촘촘하게 유형을 분류하고 개념을 알맞게 적용시키는
세분화된 문제 유형 훈련으로
수학 기본 실력이 탄탄하게 다져집니다.
그래서 하루가 다르게 수학 성적이 향상됨을 느낄 수 있습니다.

또한, 자이스토리의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설,
다른 풀이, 톡톡 풀이, 쉬운 풀이 등은 수학 공부에
흥미와 성취감을 북돋아 줄 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

- 대한민국 No.1 수능 문제집 **자이스토리** -



학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [23일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헛갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~62		월 일	월 일
2	63~100		월 일	월 일
3	B 01~52		월 일	월 일
4	53~87		월 일	월 일
5	C 01~43		월 일	월 일
6	44~71		월 일	월 일
7	D 01~61		월 일	월 일
8	62~102		월 일	월 일
9	103~135		월 일	월 일
10	E 01~47		월 일	월 일
11	48~88		월 일	월 일
12	F 01~47		월 일	월 일
13	48~83		월 일	월 일
14	G 01~63		월 일	월 일
15	64~114		월 일	월 일
16	H 01~61		월 일	월 일
17	62~110		월 일	월 일
18	I 01~54		월 일	월 일
19	55~90		월 일	월 일
20	91~125		월 일	월 일
21	모의 A, B, C		월 일	월 일
22	모의 D, E, F		월 일	월 일
23	모의 G, H, I		월 일	월 일



- 나는 _____ 대학교 _____ 학과 _____ 학년이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) - 도끼를 갈아 비늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)



집필진 · 감수진 선생님들



자이스토리는 내신 + 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록 수능, 모의평가, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로 수록하였습니다.
그리고 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서 명쾌한 해설을 입체 침삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환	대전 대성여자고등학교	신현준	안양 신성고등학교	장철희	서울 보성고등학교	수경 수학 콘텐츠 연구소
김대식	하남 하남등학교	이종석	일등급 수학 저자	전경준	서울 풍문고등학교	
민경도	서울 강남 종로학원	이창희	THE 다원교육	조승원	수원 경기과학고등학교	
박소희	안양 안양외국어고등학교	위경아	서울 강남대성기숙사대관	지강현	안양 신성고등학교	
박숙녀	아산 충남삼성고등학교	장광걸	김포 김포외국어고등학교	홍지연	부산대학교 수학 박사 과정	
배수나	서울 가인아카데미	장경호	가평 청평중학교	홍지우	안양 평촌고등학교	
신명선	안양 신성고등학교	장영환	제주 제로링수학교실	황광희	시흥 시흥고등학교	

개념&문제 풀이
강의 선생님
유튜브 채널



‘셀프수학’

[다른 풀이 집필]

김기웅	구미 브리튼 영어수학학원	문선영	서울 로드맵수학학원	성지희	파주 snt수학학원	이상협	인천 마스터수학학원
김우진	세종 정진수학학원	박혜린	전주 싸이매스수학과학학원	이상규	익산 이일여자고등학교	조은영	김포 고려수학

[특별 감수진]

권가영	서울 (목동)커스텀수학학원	송은연	군포 오르수학	양해영	서울 청출어람학원
김정혁	서울 (대치)새론시대	신경미	서울 래미안수학전문교육원	이준택	안산 신길고등학교
김춘식	서울 목동엠플러스수학학원	신원화	울산 우성수학학원	정용훈	성남 (분당)일비총천수학학원
박우혁	광주 종로학원/원픽학원	신정식	서울 (목동)미래탐구학원	조원진	“안양 평촌 RTS, 안산 S&T”
송유현	제주 GTS Math	심혜진	인천 송도매쓰몽플러스학원	최선락	서울 중계수학의중심학원

[감수진]

강다은	부산 코스터디	부종민	부산 부종민수학	전준영	대구 옥수학학원
강동호	광주 별수학학원	서민재	서울 관악GMS뉴스터디학원	정민수	광주 정경태수학아카데미
구재희	오산 오성학원	설성희	김포 설쌤수학학원	정은아	용인 별들의숲수학학원
구주영	안양 거북선중고등수학학원	손태성	대구 하늘수학	정지민	청주 스텝업수학
권두리	화성 (동탄)M&S학원	송미경	영천 이루지오학원	정진영	인천 정선생수학연구소
김대한	인천 학산학원	송은연	군포 오르수학	조승혁	안산 뉴턴학원
김두비	성남 하이탑에듀	신다혜	부천 일찬학원	조종희	춘천 유튜머스학우두캠퍼스
김상윤	의정부 골드클래스학원	안영미	청주 라온수학	진하영	화성 위투지학원
김상혁	광주 프리마수학학원	안효진	서울 수준영재수학학원	차강일	순천 참수학학원
김선화	화성 수학파트너학원	양 일	인천 비코즈수학학원	채송화	부산 채송화수학학원
김소영	대구 에이블스학교습소	여성웅	수원 어 쌤수학학원	채희성	수원 이투스수학신영통학원
김예지	화성 (동탄)과수원과학수학전문학원	엄시온	김포 유튜엠	최경희	시흥 최강수학학원
김유삼	서울 현민수학학원	오상혁	서울 미듬수학학원	최선훈	고양 애플학원
김윤선	구리 국빈학원	윤정민	부산 명진학원	최승호	전주 SMT아카데미학원
김윤진	오산 더쌤수학학원	윤희용	부천 매트릭스학원	최은미	서울 위플라이수학
김현익	서울 더(The)수학학원	이민규	인천 (청라)투스카이수학학원	최지우	평택 JCK더상승학원
김혜성	서울 (노원)핏클래스학원	이보라	부산 지혜플러스학원	추병준	성남 깊은수학학원
김호연	광명 마이엠수학학원	이상철	부천 g1230 옥길	한철호	울산 수도바입시학원
나원선	광주 리플러스수학학원	이세라	의정부 매쓰스탠다드학원	홍의찬	고양 (일산)원수학
문대승	광주 열성수학학원	이승진	평택 (안중)호연수학	황미경	인천 MK수학전문학원
문소영	창원 문소영수학관리학원	이영주	제주 피드백수학학원		
박경민	대구 학문당입시학원	이은경	전주 시그마수학전문학원		
박래정	광주 R수학	이지호	양주 에이치투에스학원		
박문영	화성 (동탄)와이수학	이찬희	청주 (오창)미로수학		
박수진	안산 매스탑수학학원	이창무	대구 531수학학원		
박순지	고양 오르다입시종합학원	이태권	대구 보담학원		
박승민	오산 피버수학	이한빛	고양 (일산)한빛수학학원		
박영선	세종 유열수학	이형림	성남 (분당)원리를깨우치는수학		
박은아	울산 파스학원	임병훈	화성 강수학학원		
박정환	성남 (분당)수학의아침	임유진	대구 박진수학		
박진한	화성 엽실론학원	장보영	인천 장보영수학연구소		
박진형	울산 송정JP수학과학학원	장술민	성남 우주수학학원		
방선윤	울산 엘리트해법수학	장정우	광주 장정우수학교실		
배지후	세종 해밀학원	장준영	세종 지혜수입시학원		

[My Top Secret 집필]

곽지훈	서울대 수학교육과
김진형	서울대 약학과
문지원	서울대 의예과
석민준	서울대 첨단융합학과
장현준	서강대 수학과
정서린	서울대 약학과
정호재	서울대 경제학부
조선하	서울대 자유전공학부
황대윤	서울대 수리과학부



차 례 [총 72개 유형 분류]



I 경우의 수

A 여러 가지 순열 - 9개 유형 분류

핵심 개념 정리/개념 확인 문제	10
수능 유형별 기출 문제	12
내신 유형별 서술형 문제	24
1등급 마스터 문제	26
동아리 소개 / 서울대 GLEAP	28

B 중복조합 - 7개 유형 분류

핵심 개념 정리/개념 확인 문제	30
수능 유형별 기출 문제	32
내신 유형별 서술형 문제	42
1등급 마스터 문제	44
동아리 소개 / 고려대 Korea Tigers	48

C 이항정리 - 6개 유형 분류

핵심 개념 정리/개념 확인 문제	50
수능 유형별 기출 문제	52
내신 유형별 서술형 문제	58
1등급 마스터 문제	60

II 확률

D 확률의 뜻과 활용 - 8개 유형 분류

핵심 개념 정리/개념 확인 문제	62
수능 유형별 기출 문제	66
내신 유형별 서술형 문제	84
1등급 마스터 문제	86

E 조건부확률 - 4개 유형 분류

핵심 개념 정리/개념 확인 문제	90
수능 유형별 기출 문제	92
내신 유형별 서술형 문제	106
1등급 마스터 문제	108

F 독립시행의 확률 - 9개 유형 분류

핵심 개념 정리/개념 확인 문제	112
수능 유형별 기출 문제	114
내신 유형별 서술형 문제	128
1등급 마스터 문제	130
동아리 소개 / 연세대 Glee Club	132

III 통계

G 이산확률분포 - 9개 유형 분류

핵심 개념 정리/개념 확인 문제	134
수능 유형별 기출 문제	138
내신 유형별 서술형 문제	152
1등급 마스터 문제	154

H 연속확률분포 - 8개 유형 분류

핵심 개념 정리/개념 확인 문제	156
수능 유형별 기출 문제	160
내신 유형별 서술형 문제	172
1등급 마스터 문제	174

I 통계적 추정 - 12개 유형 분류

핵심 개념 정리/개념 확인 문제	178
수능 유형별 기출 문제	182
내신 유형별 서술형 문제	200
1등급 마스터 문제	202

내신+수능 대비 단원별 모의고사

A 여러 가지 순열 (10문항)	204
B 중복조합 (11문항)	206
C 이항정리 (11문항)	208
D 확률의 뜻과 활용 (12문항)	210
E 조건부확률 (11문항)	212
F 독립시행의 확률 (11문항)	214
G 이산확률분포 (9문항)	216
H 연속확률분포 (12문항)	218
I 통계적 추정 (10문항)	220

빠른 정답 찾기 222

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

‘셀프 수학’





새수능 유형 문제 + 서술형 문제 훈련으로 내신 + 수능 1등급 완성

1 새교육과정 핵심 개념 정리 - 쉽게 이해되는 개념과 공식

고2 수학의 각 단원에서 가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념을 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 강의하였습니다.

- **중요도** 🌟🌟🌟: 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- **+개념보충, 한걸음 더, 왜 그럴까?**: 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- **출제**: 2028 대비 예시 문제와 2026 대비 평가원 출제 경향 분석

여러 가지 순열

1 중복순열 - 유형 01-02

(1) **중복순열**
서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 순열을 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호로 ${}_n\P_r$ 와 같이 나타낸다.
세 개의 문자 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 기호로 나타내면, ${}_3\P_5$ 와 같이 나타낸다.

(2) **중복순열의 수**
서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하여 일렬로 나열할 때 세 번째, ..., r 번째에 올 수 있는 경우는 각각 n 가지이므로 곱의 법칙

① ${}_n\P_r$ 의 Π 는 곱을 뜻하는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라 읽는다.
② 순열의 수 ${}_n\P_r$ 에서는 $n \geq r$ 이어야 하지만, 중복순열의 수 ${}_n\P_r$ 에서는 중복하여 택할 수 있기 때문에 $n < r$ 일 수도 있다.

③ 곱의 법칙
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m , 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나

2 개념 확인 문제 - 개념에 대한 이해도 확인 문제

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지 확인할 수 있는 개념 이해 필수 문제를 수록하였습니다.

1 중복순열

[A01~04] 다음 중복순열의 수를 구하시오.

A01 ${}_3\P_2$ A02 ${}_2\P_2$
A03 ${}_3\P_3$ A04 ${}_2\P_3$

[A05~08] 다음을 만족시키는 자연수 n 또는 자연수 r 의 값을

2 같은 것이 있는 순열

[A17~20] 다음 숫자 또는 문자를 나열하는 경우의

A17 a, a, b, a
A18 1, 2, 2, 3, 3
A19 x, x, y, y, z, z
A20 0, 1, 1, 2, 2, 3

3 내신 유형별 서술형 문제 - 단계별 문제 해결 방법 제시

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계별 풀이 과정을 훈련해서 서술형 문제에 대한 자신감을 키울 수 있게 구성하였습니다.

내신 유형별 서술형 문제

문제를 단서를 찾고 풀이 방법을 생각해 냅니다

A87 ☆☆☆ 유형 03

서로 다른 6자루의 연필을 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수와 서로 다른 4개의 자유클를 n 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수가 같을 때, n 의 값을

A89 ☆☆☆ 유형 04

빨간 공 3개, 파란 공 3개, 노란 공 3개를 모두 일렬로 나열할 때, 빨간 공이 2개만 이웃하도록 나열하는 ? 구하고 그 과정을 서술하시오.

1st, 2nd, 3rd: 풀이의 시작과 끝을 막힘없이 따라갈 수 있게 도와주는 단계별 접근을 제시하였습니다.

4 새수능 유형별 기출 문제 - 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 출제 유형을 촘촘하게 세분화하여 유형순, 개념순, 난이도순으로 문항을 배열하였습니다.

- **tip**: 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR코드**: 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점] PATTERN PRACT

1 중복순열

유형 01 중복순열의 수

(1) 서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 순열을 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 ${}_n\P_r$ 와 같이 나타낸다.
(2) 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\P_r = n^r$

순열의 수 ${}_n\P_r$ 에서는 $n \geq r$ 이어야 하지만, 중복순열의 수 ${}_n\P_r$ 에서는 중복하여 택할 수 있기 때문에 $n < r$ 일 수도 있다.

tip

유형 02 문자의 나열과 중복순열

(1) **중복순열**: 중복을 허용하여 만든 순열
서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 기호로, ${}_n\P_r$ 로 나타낸다.
(2) **중복순열의 수**: 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중 ${}_n\P_r = n^r$

① 중복순열의 수 ${}_n\P_r$ 를 적용할 때, 중복하여 택할 수 있음
② $r > n$ 일 수도 있음을 항상 기억해야 한다.
③ 숫자를 중복 사용하여 몇 자리 수를 만드는 문제와 같은 순서가 중요하므로 중복순열이다.
④ 0이 맨 앞자리에 오는 경우는 제외한다.

- **유형 분류**: **빈출** - 시험에서 자주 출제되는 유형
고난도 - 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- **대표**: 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.

- **난이도**: ☆☆☆ - 기본 문제 ☆☆☆ - 중급 문제
☆☆☆ - 중상급 문제

- **출처표시**: 수능, 평가원 - 대비연도, 학력평가 - 실시연도
 - **2025대비 수능(출) 1(고3)**: 2024년 11월에 실시한 수능
 - **2026대비 6월 모평 2(고3)**: 2025년 6월에 실시한 평가원
 - **2025실시 7월 학평 3(고3)**: 2025년 7월에 실시한 학력평가
 - **표시 없는 문제**: 기출 변형 문제

5 내신+수능 대비 단원별 모의고사 - 최종 실력 점검

중단원별 학교시험 필수 문제와 수능형 문항, 서술형 문항을 수록하여 학교시험을 더욱 충실히 대비할 수 있습니다.

내신+수능 대비 단원별 모의고사

A 여러 가지 순열

A01 ☆☆☆ 2022실시 3월 학평 확통 23(고3)

${}_3\P_2$ 의 값은? (2점)

① 63 ② 69 ③ 75
④ 81 ⑤ 87

A03 ☆☆☆ 2024실시 3월 학평 확통 24

숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 1개수는? (3점)

① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54



5 1등급 마스터 문제 - 대비 문제로 1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다.

*** - 상급 문제

2등급 대비 : 정답률이 20~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는데 도움이 되는 고난도 문제

1등급 대비 : 정답률이 20% 미만인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A97 *** 2028대비 4월 예시 2(고2)

숫자 0이 적혀 있는 카드 2장, 숫자 1이 적혀 있는 카드 5장, 숫자 2가 적혀 있는 카드 3장이 있다. 이 10장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 10개의 자리에 다음 조건을 만족시키도록 각각 한 장씩 놓는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) (4점)

$n(1 \leq n \leq 10)$ 번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수를

A98 *** 2021실시 3월 학원 특목 3

숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 n 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 경우의 수를 구하시오. (4점)

(가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.
(나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

6 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설

문제 분석

어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

왜 1등급, 왜 2등급

1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실하게 알려줍니다.

단서+발상

단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

단서+발상

단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret

1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강

고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

7 입체 첨삭 해설!

정답 공식

출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이

문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

해설 적용 공식

해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

다른 풀이

문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 해강

문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식

문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

생생채택

수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

A 63 정답 ③ *같은 것이 있는 순열 [정답률 92%]

정답 공식: 같은 것이 있는 순열 n 개 중에서 서로 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때 n 개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\dots r!}$ (단, $p+q+\dots+r=n$)

6개의 문자 a, a, a, b, b, c 를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? (3점)

① 52 ② 56 ③ 60 ④ 64 ⑤ 68

해설: 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하자.
 a, a, a, b, b, c 의 같은 것이 있는 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 60$

다른 풀이: 전체 경우의 수에서 여사건의 수를 빼서 구하는 경우의 수
먼저, 2, 4가 나열되는 두 칸을 선택하는 경우의 수는 $C_2^6 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ 이며, 선택한 두 칸의 왼쪽에 2, 오른쪽에 4를 나열하면 됨.

수능 해강
*독립시행의 확률의 계산 식이 맞는지 확인하기
동일한 시행을 반복하는 경우에 각 시행에서 일어나는 사건은 서로 독립이고 그 경우의 확률을 p 라 하면 n 회의 독립시행에서 사건이 r 회 일어날 확률은 $C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$ (단, $r=1, 2, 3, \dots, n-1$)라는 건 알고 있지? 그런데 막상 문제에서는 다양한 계산을 여러 번 요구하기 때문에 실수할 수 있어, 다음을 순서대로 확인하면서 확률을 구할 때 실수하지 말자.

B 72 정답 ④ *중복조합의 활용 - 부분식 [정답률 79%]

정답 공식: 전체 경우의 수에서 $y+z$ 의 값이 1, 2, ..., 9인 경우를 각각 구한다.)

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는? (4점)

(가) $x+y+z=10$ (나) $0 < y+z < 10$

① 39 ② 44 ③ 49 ④ 54 ⑤ 59

해설: 조건 ①, ②에 의하여 x 의 값의 범위를 구하자. 주의 $y+z$ 는 미지수가 2개라서 경우를 나누기 어려우니까 미지수가 1개만 있는 x 에 대해 부분식으로 고쳐

8명이 원형 탁자에 둘러앉은 방법의 수는 $(8-1)! = 7!$ (가)이고, 정사각형 모양의 식탁에서는 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 그림과 같이 회전해도 겹쳐지지 않는 경우가 2가지 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 $7! \times 2(가)$

독특 풀이: A, B를 제외한 나머지 4가지를 색깔하는 방법의 수를 중복되는 경우의 수로 나누어 구하기
A, B를 제외한 나머지 4가지 색을 칠하는 방법의 수는 $4!$ 이다. 그런데 그림과 같이 각 경우에 대해 중복되는 경우는 2가지씩 나와, 왼쪽 그림을 사분면으로 180° 회전시켜 오른쪽 그림과 겹쳐지므로, 왼쪽 그림과 같이 색을 칠하는 경우의 수만큼 오른쪽 그림과 같이 색을 칠하는 경우는 같은 경우이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2} = 12$ 이다.
중복되는 경우가 C, D, E, F를 배열할 때 2가지씩 나오므로 C, D, E, F를 배열하는 경우의 수를 2로 나누어야 하는 거야.

평가원 해설
본 문항에서 다루고 있는 타구공은 규칙화된 제품으로, '서로 다른'이라는 설명이 없으면 구별되지 않는다고 가정한다. 그러나 모양, 크기 등에서 구별되는 '과일'의 경우에는 '서로 다른' 혹은 '똑같은'과 같은 설명을 포함하여 구별되는지 구별되지 않는지를 명시한다. 2015학년도 수시 1학년 12명의 '같은 종류의 주스'는 주스의 종류만 같으면 그 종류의 주스 8명은 구별되지 않는다고 가정한다. 본 문항에서도 타구공의 색이 같으면 그 색의 타구공은 구별되지 않는다고 가정한다. 따라서 이와 같은 원리를 적용하면 된다.

출제 개념

문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률

교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시합니다.

핵심 단서

문제를 푸는데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의

풀이 과정에서 주어진 조건을 빼먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정

개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명

더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 독특한 풀이

직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

개념 하나하나에 대한 맞춤 확인 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초실력을 쌓도록 구성하였습니다.

② 학력평가 기출 문제+수능 유형 완전 정복 문제 [72유형, 문제 616제]

- 고2 난이도에 맞는 고3 수능+평가원+학력평가 문제 선별 수록 [592제]
- 2018~2008 고1, 2 학력평가 문항 중에서 교육과정에 꼭 맞는 문제 선별 수록 [24제]

③ 학교시험+수능 대비를 위한 수능 기출 변형 문제 [28제]

수능에 적합한 개념과 공식을 이해하고 활용할 수 있도록 수능 기출 문제를 변형하여 추가 수록하였습니다.

4 서술형 단계별 훈련 - 내신 기출 변형 서술형 문제 [90제]

각 단위 중 서술형 출제 방식에 적합하고 출제 비율이 높은 내신 기출 변형 문제를 새롭게 구성하였습니다.

⑤ 내신+수능 단원별 모의고사 [기출 문제+수능 기출 변형 문제 97제]

각 단원에 출제 빈도가 높은 문제를 최신 출제 경향에 따라 구성하였습니다.

[고2 확률과 통계 문항 구성표]

	고3(대비 연도) - 고2 난이도 수준							
연도	3월 학평	4, 5월 학평	6월 모평	7월 학평	9월 모평	10월 학평	수능	합계
2026	5	4	6	6	7	4	7	39
2025	2	2	6	3	8	0	8	29
2024	5	2	8	1	7	1	8	32
2023	5	5	6	5	1	2	2	26
2022	5	4	7	7	6	3	5	37
2021	1	9	9	10	10	7	12	58
2020	0	3	4	4	8	6	10	35
2019	1	1	8	4	9	7	9	39
2018	1	2	4	4	9	9	9	38
2018이전	13	10	21	25	49	47	73	238
2028, 2022, 2014, 2005 대비 예비 평가 수록 문항 수								21
고1, 2 학력평가 문항 수								24
수능 기출 변형 문제 수록 문항 수(68개 유형 수능 기출 변형 문제)								28
개념 확인 문제 수록 문항 수								276
서술형 문항 수								90
총 수록 문항 수								1010



여러 가지 순열

★ 유형 차례

- 유형 01 중복순열의 수
- 유형 02 문자의 나열과 중복순열
- 유형 03 나누어 주는 경우와 중복순열
- 유형 04 함수의 개수와 중복순열
- ★ 중요 유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열 고난도
- 유형 06 같은 것이 있는 수의 나열로 만든 자연수의 개수
- ★ 중요 유형 07 배분과 같은 것이 있는 순열
- 유형 08 도로망에서 최단 경로의 이해
- 유형 09 도로망에서 최단 경로의 응용 고난도



★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2028	예시	유형 02 문자의 나열과 중복순열	※※※
		유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	***
2026	수능	유형 02 문자의 나열과 중복순열	※※※
	9월	유형 02 문자의 나열과 중복순열	※※※
	6월	유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	※※※
	수능	출제되지 않음	
2025	9월	유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	※※※
	6월	유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	※※※
	수능	유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	※※※
	9월	유형 09 도로망에서 최단 경로의 응용	※※※
2024	6월	유형 04 함수의 개수와 중복순열	***
		유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	※※※

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 확률과 통계에서 배우는 순열은 공통수학 1에서 배운 순열의 확장 개념이므로 여러 가지 순열을 학습하기 전에 다시 한 번 공통수학 1의 순열의 개념과 공식을 확인해야 한다.
- 문제의 의미만 잘 파악하면 어려운 단원은 아니지만 문장제 문제 유형이 대다수인 단원이기 때문에 체감난이도가 높아 다수의 문항으로 연습하는 것이 중요하다.
- 문제에 주어진 조건에서 중복순열, 같은 것이 있는 순열 중 어떤 것을 이용해야 하는지 빠르게 파악할 수 있도록 여러 문제를 풀어보며 습득한다.
- 문제에서 규칙을 직접 찾아 중복순열의 개념과 연결하여 복합적으로 문제를 푸는 고난도 문제를 대비해야 한다.



A

여러 가지 순열

개념 강의



중요도 ★★☆☆

1 중복순열 — 유형 01~04 출제 2028 예시 3번, 2026 수능 23번, 2026 9월 모평 23번

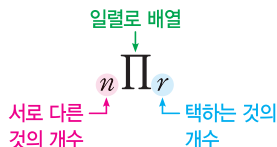
(1) 중복순열

서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 택하는 순열을 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호로

$${}_n\Pi_r$$

와 같이 나타낸다.

예 세 개의 문자 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 기호로 나타내면 ${}_3\Pi_5$ 이다.



- ① ${}_n\Pi_r$ 의 Π 는 곱을 뜻하는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라 읽는다.
- ② 순열의 수 ${}_nP_r$ 에서는 $n \geq r$ 이어야 하지만, 중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$ 에서는 중복하여 택할 수 있기 때문에 $n < r$ 일 수도 있다.

(2) 중복순열의 수

서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하여 일렬로 나열할 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째, ..., r 번째에 올 수 있는 경우는 각각 n 가지이므로 곱의 법칙^①에 의하여

$$\underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{개}} = n^r$$

이 성립한다.

따라서 서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수, 즉 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n\Pi_r = n^r$$

예 세 개의 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

- ② 곱의 법칙
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m , 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n 이면 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$ 이다.

2 같은 것이 있는 순열 — 유형 05~09 출제 2028 예시 21번, 2026 6월 모평 23번

(1) 같은 것이 있는 순열

n 개 중 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때, n 개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

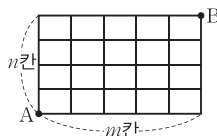
$$\frac{n!}{p! \times q! \times \cdots \times r!} \quad \text{③ (단, } p+q+\cdots+r=n\text{)}$$

예 다섯 개의 문자 a, a, b, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 2! \times 1!} = 30$

- ③ n 개 중 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때, 이 n 개를 모두 같은 것으로 보고 일렬로 나열한 것 중 같은 경우가 $p! \times q! \times \cdots \times r!$ 가지씩 있으므로 $p! \times q! \times \cdots \times r!$ 로 나누어 준다.

(2) 도로망에서 최단 거리로 가는 경우의 수

그림과 같이 가로로 m 칸, 세로로 n 칸 있는 직사각형 모양의 도로망에서 오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b 라 하면 A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 m 개의 a 와 n 개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.



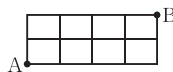
따라서 A지점에서 B지점까지 최단 거리를 가는 경우의 수는

$$\frac{(m+n)!}{m! \times n!}$$

예 그림과 같은 도로망에서 A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구해 보자.

오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b 라 하면 4개의 a 와 2개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\text{(구하는 경우의 수)} = \frac{(4+2)!}{4! \times 2!} = 15$$





1 중복순열

[A01~04] 다음 중복순열의 수를 구하시오.

A 01 ${}_2\Pi_2$

A 02 ${}_4\Pi_2$

A 03 ${}_3\Pi_3$

A 04 ${}_2\Pi_5$

[A05~08] 다음을 만족시키는 자연수 n 또는 자연수 r 의 값을 구하시오.

A 05 ${}_n\Pi_4=81$

A 06 ${}_n\Pi_6=729$

A 07 ${}_2\Pi_r=64$

A 08 ${}_4\Pi_r=1024$

[A09~12] 다음 경우의 수를 구하시오.

A 09 서로 다른 편지 3개를 서로 다른 우체통 4개에 넣는 경우의 수

A 10 5명의 학생이 각각 A, B, C 세 개의 교실 중 한 교실을 택하는 경우의 수

A 11 4명의 학생이 가위바위보를 할 때, 나올 수 있는 경우의 수

A 12 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수

[A13~16] 다음 함수의 개수를 구하시오.

A 13 두 집합 $X=\{1, 2\}$, $Y=\{A, B\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수A 14 두 집합 $X=\{1, 2\}$, $Y=\{A, B, C\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수A 15 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{A, B, C, D\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수A 16 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{A, B, C\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수

2 같은 것이 있는 순열

[A17~20] 다음 숫자 또는 문자를 나열하는 경우의 수를 구하시오.

A 17 a, a, b, a

A 18 $1, 2, 2, 3, 3$

A 19 x, x, y, y, y, z, z

A 20 $0, 1, 1, 2, 2, 3$

[A21~23] 1, 2, 2, 3, 3의 다섯 개의 숫자 중에서 다섯 자리 자연수를 만들 때, 다음을 구하시오.

A 21 다섯 자리 자연수의 개수

A 22 다섯 자리 자연수 중 짝수의 개수

A 23 다섯 자리 자연수 중 홀수의 개수

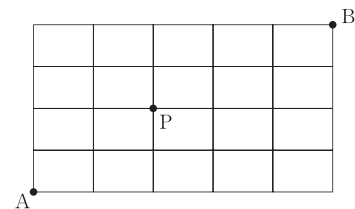
[A24~26] 7개의 기호 ▲, ▽, ▲, ■, ■, △, ■을 일렬로 배열할 때, 다음을 구하시오.

A 24 일렬로 배열하는 경우의 수

A 25 양 끝에 ■이 놓이도록 배열하는 경우의 수

A 26 ▽이 ▲보다 반드시 앞에 오도록 배열하는 경우의 수

[A27~29] 그림과 같은 도로망이 있다. 다음을 구하시오.



A 27 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수

A 28 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수

A 29 A지점에서 출발하여 P지점을 지나지 않고 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수



1 중복순열

유형 01 중복순열의 수

- (1) 서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 순열을 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 ${}_nP_r$ 와 같이 나타낸다.
- (2) 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_nP_r = n^r$

tip

순열의 수 ${}_nP_r$ 에서는 $n \geq r$ 이어야 하지만, 중복순열의 수 ${}_nP_r$ 에서는 중복하여 택할 수 있기 때문에 $n < r$ 일 수도 있다.

A30 대표 2025실시 7월 학평 확통 23(고3)

${}_4P_3$ 의 값은? (2점)

- ① 8 ② 16 ③ 32
④ 64 ⑤ 128



A31 ※※※ 2020실시(나) 4월 학평 22(고3)

${}_2P_3$ 의 값을 구하시오. (3점)

A32 ※※※ 2023실시 3월 학평 확통 23(고3)

${}_3P_2 + {}_3P_2$ 의 값은? (2점)

- ① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19



유형 02 문자의 나열과 중복순열

빈출

- (1) 중복순열 : 중복을 허용하여 만든 순열
서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 중복순열 기호로 ${}_nP_r$ 로 나타낸다.
- (2) 중복순열의 수 : 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열의 수 ${}_nP_r = n^r$

tip

- ① 중복순열의 수 ${}_nP_r$ 를 적용할 때, 중복하여 택할 수 있음을 기억하자.
② $r > n$ 일 수도 있음을 항상 기억해야 한다.
③ 숫자를 중복 사용하여 몇 자리 수를 만드는 문제와 같은 중복 배열은 순서가 중요하므로 중복순열이다.
④ 0이 맨 앞자리에 오는 경우는 제외한다.

A33 대표 2026대비 수능 확통 23(고3)

네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? (2점)

- ① 56 ② 60 ③ 64
④ 68 ⑤ 72



A34 ※※※ 2028대비 4월 예시 3(고2)

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 짝수의 개수는? (2점)

- ① 150 ② 200 ③ 250
④ 300 ⑤ 350



A35 ※※※ 2026대비 9월 모평 확통 23(고3)

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? (2점)

- ① 72 ② 75 ③ 78
④ 81 ⑤ 84



A36 ※※※ 2025실시 3월 학평 확통 25(고3)



네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 a 가 적어도 한 번 이상 나오는 경우의 수는? (3점)

- ① 170 ② 175 ③ 180
④ 185 ⑤ 190

유형 03 나누어 주는 경우와 중복순열

서로 다른 n 개의 공을 r 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_r\Pi_n = r^n$

tip

서로 다른 n 개의 공을 r 명의 학생에게 남김없이 나누어줄 때 특정 학생에게 m 개의 공을 주는 경우의 수는 먼저 그 학생에게 줘야 할 m 개의 공을 고른 후 나머지 학생에게 남은 공을 남김없이 나누어 주는 경우의 수인 ${}_rC_m \times (r-1)^{n-m}$ 과 같다.

A37 대표 2023실시 3월 학평 확통 26(고3)



서로 다른 공 6개를 남김없이 세 주머니 A, B, C에 나누어 넣을 때, 주머니 A에 넣은 공의 개수가 3이 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 공을 넣지 않는 주머니가 있을 수 있다.) (3점)

- ① 120 ② 130 ③ 140
④ 150 ⑤ 160

A38 ※※※ 2016대비(B) 6월 모평 9(고3)

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) (3점)

- ① 1024 ② 1034 ③ 1044
④ 1054 ⑤ 1064

A39 ※※※ 2022실시 3월 학평 확통 28(고3)



세 명의 학생 A, B, C에게 서로 다른 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) (4점)

- (가) 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다.
(나) 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이다.

- ① 167 ② 170 ③ 173
④ 176 ⑤ 179

유형 04 함수의 개수와 중복순열

- (1) 서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하면 ${}_n\Pi_r = n^r$
(2) 함수의 개수 : 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 $n(X) = a$, $n(Y) = b$ 일 때,
① 일대일함수의 개수 : ${}_bP_a$ (단, $b \geq a$)
② 함수의 개수 : ${}_b\Pi_a = b^a$

참고 | 함수의 정의와 종류

- ① 함수 : 정의역의 모든 원소가 각각 공역의 원소 하나에 대응한다.
② 일대일함수 : 정의역의 원소가 같지 않으면 치역의 원소도 같지 않다. 즉, $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
③ 일대일대응 : 치역과 공역이 같은 일대일함수이다.

tip

- ① 중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$ 에서 중복 가능한 것을 n 으로 생각한다.
② 선택 받는 것의 개수 $n \leftarrow$ 중복 가능하다.
③ 선택하는 것의 개수 $r \leftarrow$ 중복 불가능하다.

A40 대표 2024실시 5월 학평 확통 26(고3)



두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는? (3점)

- (가) $f(1) + f(2) = 4$
(나) 1은 함수 f 의 치역의 원소이다.

- ① 145 ② 150 ③ 155
④ 160 ⑤ 165



내신 유형별 서술형 문제



문제에서 단서를 찾고
풀이 방법을 생각해 냅니다!



A87 ***

유형 03



서로 다른 6자루의 연필을 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수와 서로 다른 4개의 지우개를 n 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수가 같을 때, n 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, 연필이나 지우개를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) (10점)

1st 서로 다른 6자루의 연필을 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구한다.

2nd 서로 다른 4개의 지우개를 n 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구한다.

3rd n 의 값을 구한다.

A88 ***

유형 04



두 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow B$ 의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

(가) $f(a) \neq 1$, $f(a) \neq 5$

(나) $f(b) = f(c)$

1st 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수를 구한다.

2nd 조건 (나)를 만족시키면서 $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$, $f(e)$ 의 값을 정하는 경우의 수를 구한다.

3rd 함수의 개수를 구한다.

A89 ***

유형 07



빨간 공 3개, 파란 공 3개, 노란 공 3개를 모두 일렬로 나열할 때, 빨간 공이 2개만 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 구하고 그 과정을 서술하시오.

(단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.) (10점)

1st 빨간 공을 제외한 나머지 공을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

2nd 빨간 공 3개를 2개, 1개의 두 묶음으로 나누어 나열된 공 사이에 나열하는 경우의 수를 구한다.

3rd 구하는 경우의 수를 구한다.

A90 ***

유형 04



집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

$$f(-2) \times f(-1) \times f(0) \times f(1) \times f(2) = 4$$

1st 함수값이 음수가 될 수 있는 경우를 파악하여 음수의 개수를 기준으로 경우를 나눈다.

2nd 각 경우에 대하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구한다.

3rd 함수의 개수를 구한다.

A91 ***

유형 07



서로 다른 종류의 선물 5개를 학생 3명에게 남김없이 나누어 줄 때, 학생 3명 모두에게 적어도 1개씩 나누어 주는 경우의 수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A92 ***

유형 02



숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개의 수를 택해 일렬로 나열한 네 자리 자연수 중 백의 자리의 수와 십의 자리의 수의 합이 홀수인 것의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A93 ***

유형 03



다음 조건을 만족시키는 집합 $U = \{1, 2, 4, 6\}$ 의 세 부분집합 A, B, C 의 모든 순서쌍 (A, B, C) 의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

(가) $n(A \cup B) = 3, A \cap C = \emptyset$

(나) 집합 $A \cap B$ 는 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는다.

A94 ***

유형 07



딸기 맛 사탕 4개, 포도 맛 사탕 2개, 레몬 맛 사탕 2개가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 사탕을 하나씩 모두 꺼낼 때, 딸기 맛 사탕을 모두 꺼내기 전에 포도 맛 사탕을 모두 꺼내는 경우의 수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, 같은 맛 사탕은 서로 구별하지 않고, 꺼낸 사탕은 다시 넣지 않는다.) (10점)

A95 ***

유형 04



집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

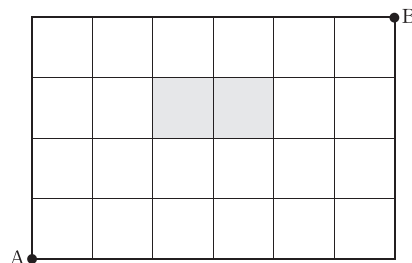
- (가) 집합 X 의 임의의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) \times f(x_2)$ 의 값은 짝수이다.
(나) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 3이다.

A96 ***

유형 09



그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 색칠된 직사각형의 네 변 중 적어도 한 변을 반드시 지난다고 할 때, 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, 직사각형의 변의 일부만 지나가는 경우는 한 변을 지나지 않은 것으로 간주한다.) (10점)





1등급 마스터 문제

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]



A97 ***

2028대비 4월 예시 21(고2)



숫자 0이 적혀 있는 카드 2장, 숫자 1이 적혀 있는 카드 5장, 숫자 2가 적혀 있는 카드 3장이 있다. 이 10장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 10개의 자리에 다음 조건을 만족시키도록 각각 한 장씩 놓는 경우의 수는?
(단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)
(4점)

$n(1 \leq n \leq 10)$ 번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수를 a_n 이라 할 때, $|a_{k+1} - a_k| = 2$ 를 만족시키는 자연수 $k(1 \leq k \leq 9)$ 의 개수는 3이다.



↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
1번째 2번째 3번째 4번째 5번째 6번째 7번째 8번째 9번째 10번째
자리 자리 자리 자리 자리 자리 자리 자리 자리 자리

- ① 136 ② 138 ③ 140
④ 142 ⑤ 144

A98 ***

2021실시 3월 학평 확통 30(고3)



숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. (4점)

- (가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.
(나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

A99 ★ 1등급 대비 2016실시(가) 10월 학평 30(고3)



1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i 번째($i=1, 2, \dots, 9$) 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i 라 하자. $1 < p < q < 9$ 인 두 자연수 p, q 에 대하여 a_i 가 다음 조건을 만족시킨다.

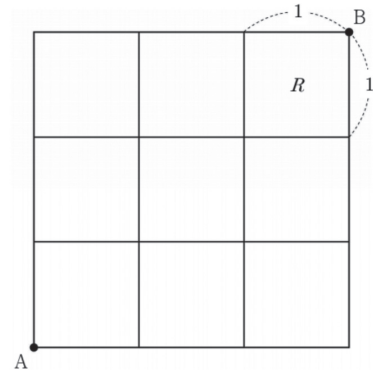
- (가) $1 \leq i < p$ 이면 $a_i < a_{i+1}$ 이다.
- (나) $p \leq i < q$ 이면 $a_i > a_{i+1}$ 이다.
- (다) $q \leq i < 9$ 이면 $a_i < a_{i+1}$ 이다.

$a_1=2, a_p=8$ 인 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) (4점)

A100 ★ 2등급 대비 2020실시(나) 4월 학평 29(고3)



그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R 와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다.



이 도로망을 따라 최단거리로 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 다시 A 지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (4점)

- (가) 정사각형 R 의 네 변을 모두 지나야 한다.
- (나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R 뿐이다.



모의

A01

2022실시 3월 학평 확통 23(고3)



${}_3\Pi_4$ 의 값은? (2점)

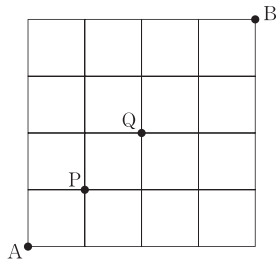
- ① 63 ② 69 ③ 75
④ 81 ⑤ 87

모의

A02

2010실시(가) 4월 학평 30(고3)

그림과 같이 직사각형으로 이루어진 도로망이 있다. A지점에서 B지점까지 최단거리로 갈 때, P와 Q 두 지점을 모두 지나는 경로의 수를 구하시오. (2점)



모의

A03

2024실시 3월 학평 확통 24(고3)



숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 홀수의 개수는? (3점)

- ① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54

모의

A04

2023대비 6월 모평 확통 27(고3)



네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? (3점)

- (가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
(나) a 는 한 번만 나온다.

- ① 384 ② 408 ③ 432
④ 456 ⑤ 480

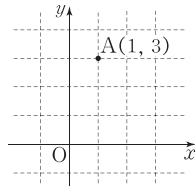
모의

A05 * * *

2004실시(가) 3월 학평 29(고3)



좌표평면 위에서 상하 또는 좌우방향으로 한번에 1만큼씩 움직이는 점 P가 있다. 이때, 원점을 출발한 점 P가 6번 움직여서 최종 위치가 점 A(1, 3)이 되는 경우의 수를 구하시오. (4점)



모의

A06 * * *

2007실시(가) 5월 학평 29(고3)

7명의 학생이 양로원으로 봉사활동을 갔다. 청소 도우미 2명, 빨래 도우미 2명, 식사 도우미 3명으로 역할을 나누려고 할 때, 가능한 방법의 수는? (4점)

- ① 105 ② 210 ③ 315
④ 420 ⑤ 630

모의

A07 * * *

2011대비(나) 9월 모평 27(고3)

지수는 다음 규칙에 따라 월요일부터 금요일까지 5일 동안 하루에 한 가지씩 운동을 하는 계획을 세우려 한다.

- (가) 5일 중 3일을 선택하여 요가를 한다.
(나) 요가를 하지 않는 2일 중 하루를 선택하여 수영,
줄넘기 중 한 가지를 하고, 남은 하루는 농구, 축구
중 한 가지를 한다.

지수가 세울 수 있는 계획의 가짓수는? (3점)

- ① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

모의

A08 * * *

2010대비(가) 6월 모평 27(고3)



두 문자 a, b 를 중복을 허락하여 만든 6자리 문자열 중에서 다음 조건을 만족시키는 문자열의 개수는? (3점)

- (가) 첫 문자는 a 이다.
(나) a 끼리는 이웃하지 않는다.

- ① 16 ② 14 ③ 12
④ 10 ⑤ 8

모의

A09 * * *

2015실시(B) 10월 학평 18(고3)



다음 조건을 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는?

(4점)

- (가) 각 자리의 수의 합은 14이다.
(나) 각 자리의 수는 모두 홀수이다.

- ① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

서술형

모의

A10 * * *

학생 7명을 A팀과 B팀으로 나누어 다음 표와 같이 팀장과 팀원을 배정할 때 가능한 모든 방법의 수를 구하시오.

(단, 7명은 팀장이나 팀원의 역할을 한다.) (12점)

	팀장	팀원
A팀	1명	2명
B팀	2명	2명



A

여러 가지 순열



개념 확인 문제

A 01 정답 4 *중복순열

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

A 02 정답 16 *중복순열

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

A 03 정답 27 *중복순열

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

A 04 정답 32 *중복순열

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

A 05 정답 3 *중복순열

$${}_n\Pi_4 = n^4 \text{이므로 } {}_n\Pi_4 = 81 \text{에서 } n^4 = 81 = 3^4 \quad \therefore n = 3$$

A 06 정답 3 *중복순열

$${}_n\Pi_6 = n^6 \text{이므로 } {}_n\Pi_6 = 729 \text{에서 } n^6 = 729 = 3^6 \quad \therefore n = 3$$

A 07 정답 6 *중복순열

$${}_2\Pi_r = 2^r \text{이므로 } {}_2\Pi_r = 64 \text{에서 } 2^r = 64 = 2^6 \quad \therefore r = 6$$

A 08 정답 5 *중복순열

$${}_4\Pi_r = 4^r \text{이므로 } {}_4\Pi_r = 1024 \text{에서 } 4^r = 1024 = 4^5 \quad \therefore r = 5$$

A 09 정답 64 *중복순열

서로 다른 편지 3개를 서로 다른 우체통 4개에 넣는 경우의 수는 서로 다른 4개의 우체통에서 편지를 넣은 3개의 우체통을 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

A 10 정답 243 *중복순열

서로 다른 3개 중 중복을 허락하여 5개를 선택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

A 11 정답 81 *중복순열

4명의 학생이 가위바위보를 할 때, 나올 수 있는 경우의 수는 서로 다른 3개 중 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

A 12 정답 500 *중복순열

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 그 경우의 수는 4이고, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 각각 0, 1, 2, 3, 4가 모두 올 수 있으므로 그 경우의 수는 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $4 \times 125 = 500$

A 13 정답 4 *중복순열

두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{A, B\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수는 Y 의 원소 A, B의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X 의 원소 1, 2에 대응시키면 된다. 따라서 구하는 함수의 개수는 ${}_2\Pi_2 = 4$

A 14 정답 9 *중복순열

두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{A, B, C\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수는 Y 의 원소 A, B, C의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X 의 원소 1, 2에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 ${}_3\Pi_2 = 9$

A 15 정답 64 *중복순열

두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{A, B, C, D\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수는 Y 의 원소 A, B, C, D의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X 의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 ${}_4\Pi_3 = 64$

A 16 정답 81 *중복순열

두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{A, B, C\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수는 Y 의 원소 A, B, C의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 ${}_3\Pi_4 = 81$

A 17 정답 4 *같은 것이 있는 순열

4개의 문자 중 a가 3개 있으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

A 18 정답 30 *같은 것이 있는 순열

5개의 숫자 중 2가 2개, 3이 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{1! \times 2! \times 2!} = 30$$

A 19 정답 210 *같은 것이 있는 순열

7개의 문자 중 x가 2개, y가 3개, z가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 3! \times 2!} = 210$$

A 20 정답 180 *같은 것이 있는 순열

6개의 숫자 중 1이 2개, 2가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{1! \times 2! \times 2! \times 1!} = 180$$

A 21 정답 30 *같은 것이 있는 순열

1, 2, 2, 3, 3의 5개의 자연수를 일렬로 배열하므로

$$\text{구하는 개수는 } \frac{5!}{2!2!} = 30$$

A 22 정답 12 *같은 것이 있는 순열

다섯 자리 자연수가 짝수가 되려면 일의 자리의 숫자가 2가 되어야 하므로 앞의 네 자리에는 나머지 4개의 숫자 1, 2, 3, 3의 4개의 자연수를 일렬로 배열하면 된다. 따라서 구하는 개수는 $\frac{4!}{2!} = 12$

A 23 정답 18 *같은 것이 있는 순열

(i) 끝 자리가 1인 다섯 자리 자연수인 경우

□□□□1에서 빈 자리에 4개의 숫자 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는

$$\text{경우의 수는 같은 것이 있는 순열을 이용하면 } \frac{4!}{2!2!} = 6$$

(ii) 끝 자리가 3인 다섯 자리 자연수인 경우

□□□□3에서 빈 자리에 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\text{같은 것이 있는 순열을 이용하면 } \frac{4!}{2!} = 12$$

(i)~(ii)에 의하여 $6+12=18$

A 24 정답 420 *같은 것이 있는 순열

같은 것인 ▲이 2개, ■이 3개 있으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 1} = 420$$

A 25 정답 60 *같은 것이 있는 순열

양 끝에 ■을 먼저 놓고, 나머지 5개인 ▲, ▽, ▲, △, ■을 일렬로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!} = 60$

A 26 정답 140 *같은 것이 있는 순열

▽과 ▲을 같은 문자로 생각하고 ▲, ▲, ▲, ■, ■, △, ■을 일렬로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 140$

A 27 정답 126 *최단 경로

가로 5칸, 세로 4칸이므로 $\frac{9!}{5!4!} = 126$

A 28 정답 60 *최단 경로

A → P : 가로 2칸, 세로 2칸, P → B : 가로 3칸, 세로 2칸

$$\therefore \frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{3!2!} = 6 \times 10 = 60$$

A 29 정답 66 *최단 경로

A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수에서 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 제외하면 되므로 $126 - 60 = 66$



수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 30 정답 ④ *중복순열 [정답률 95%]

[정답 공식: 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$ 이다.]

${}_4\Pi_3$ 의 값은? (2점)

[단서] 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열을 의미해.

- ① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

1st 중복순열을 이용하여 계산하자.

$${}_4\Pi_3 = 4^3 \text{이므로}$$

서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$

$${}_4\Pi_3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

A 31 정답 8 *중복순열 [정답률 89%]

[정답 공식: 서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$ 이다.]

${}_2\Pi_3$ 의 값을 구하시오. (3점) [단서] 중복순열을 이용해.

1st 중복순열의 수를 구해.

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

[중복순열의 수] 서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$

A 32 정답 ① *자연수의 개수와 중복순열 [정답률 87%]

[정답 공식: ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(r-1)\}$, ${}_n\Pi_r = n^r$]

${}_3P_2 + {}_3\Pi_2$ 의 값은? (2점)

[단서] 순열과 중복순열의 공식을 떠올려봐.

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

1st 순열과 중복순열의 값을 각각 구하여 더하자.

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(r-1)\}$$

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6, {}_3\Pi_2 = 3^2 = 9 \text{이므로}$$

$${}_n\Pi_r = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{개}} = n^r$$

$${}_3P_2 + {}_3\Pi_2 = 6 + 9 = 15$$

A 33 정답 ③ *자연수의 개수와 중복순열 [정답률 92%]

[정답 공식: 서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$ 이다.]

네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? (2점) [단서] 중복을 허락하여 나열하므로 중복순열이야.

- ① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72

1st 중복순열의 공식을 이용하여 경우의 수를 구하자.

서로 다른 4개의 문자에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

[중복순열]

서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$



김준영 | 2026 수능 응시 · 서울 강서고 졸

2026학년도 9월 평가원 23번 문제와 숫자만 바뀌고 완전히 똑같은 문제가 나와서 너무 반가웠어! 네 문자 중에서 중복을 허락해서 3개를 택하고 나열하는 문제니까 일단 뽑힌 문자들이 들어갈 칸 세 개를 머리 속에 그리고 시작했어. 맨 앞 칸부터 마지막 칸까지 문자를 하나씩 집어넣는다고 생각하면 간단해! 중복을 허락한다고 했으므로 각 칸마다 넣을 수 있는 문자가 네 가지로 동일하지? 총 세 칸에 네 가지 문자를 한 번씩 넣는다고 하면 4를 세 번 곱한 64가 답이 돼.

A 34 정답 ③ *자연수의 개수와 중복순열 [정답률 88%]

[정답 공식: 네 자리 자연수가 짝수가 되려면 일의 자리의 수가 짝수이어야 한다.]

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 짝수의 개수는? (2점)

- ① 150 ② 200 ③ 250
④ 300 ⑤ 350

1st 일의 자리의 숫자가 짝수인 경우의 수를 구하자.

네 자리 자연수가 짝수가 되려면 일의 자리의 수는 짝수가 와야 한다. 따라서 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 일의 자리 수를 짝수로 택하는 경우의 수는 2이다.

2nd 나머지 세 자리에 올 수 있는 경우의 수를 구하자.

일의 자리를 제외한 나머지 세 자리의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 선택할 수 있으므로 경우의 수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

[중복순열]

서로 다른 n 개 중에서 중복을 허락하여 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$

따라서 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 짝수의 개수는

$$2 \times 125 = 250$$

A 35 정답 ④ *중복순열 [정답률 92%]

[정답 공식: 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$ 이다.]

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? (2점)

- ① 72 ② 75 ③ 78
④ 81 ⑤ 84

1st 중복순열의 공식을 이용하여 경우의 수를 구하자.

서로 다른 3개의 문자에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

[중복순열]

서로 다른 n 개 중에서 중복을 허락하여 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$

* 중복순열

개념 · 공식

서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$

A 36 정답 ② *자연수의 개수와 중복순열 [정답률 81%]

[정답 공식: 중복순열을 이용하여 전체 경우의 수를 구하고 문자 a 가 나오지 않는 경우를 빼서 경우의 수를 구한다.]

네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로

나열할 때, 문자 a 가 적어도 한 번 이상 나오는 경우의 수는? (3점)

- ① 170 ② 175 ③ 180
④ 185 ⑤ 190

1st 전체 경우의 수를 구하자.

네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$ 이다.

[중복순열의 수] 서로 다른 n 개 중에서 중복을 허락하여 r 개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$

2nd a 가 나오지 않는 경우를 구하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하자.

문자 a 가 나오지 않는 경우는 세 문자 b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우이므로 경우의 수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81 \text{이다.}$$

서로 다른 세 문자 b, c, d 에서 중복을 허락하여 4개를 택해

일렬로 나열하는 경우의 수이므로 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$ 이다.

따라서 문자 a 가 적어도 한 번 이상 나오는 경우의 수는 $256 - 81 = 175$ 이다.

A 37 정답 ⑤ *자연수의 개수와 중복순열 [정답률 67%]

[정답 공식: ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, ${}_n\Pi_r = n^r$]

2nd 주머니 개수보다 놓아야 하는 공의 개수가 더 많고 주머니와 공이 각각 구분되니까 중복을 허락하는 순열이겠지?

서로 다른 공 6개를 남김없이 세 주머니 A, B, C에 나누어 넣을 때, 주머니 A에 넣은 공의 개수가 3이 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 공을 넣지 않는 주머니가 있을 수 있다.) (3점)

- ① 120 ② 130 ③ 140 ④ 150 ⑤ 160

1st 주머니 A에 넣을 3개의 공을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 선택하는 조합으로 구할 수 있지.

주머니 A에 넣을 3개의 공을 선택하는 경우의 수는

서로 다른 n 개의 공에서 순서없이 r 개만 선택하는 것이므로

서로 다른 n 개에서 r 개를 뽑는 조합을 이용해야 해.

$${}_6C_3 = \frac{{}_6P_3}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{(가지)}$$

2nd 남은 3개의 공을 두 주머니 B, C에 나누어 넣는 방법의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 선택하는 중복순열로 구하자.

서로 다른 3개의 남은 공을 2개의 주머니 B, C에 넣는 방법의 수는

실제로 A 주머니에 3개를 먼저 넣은 후 남은 공 3개를 a, b, c 라고 하고 이를 B, C 주머니에 넣는 경우의 수를 직접 순서쌍 (B 주머니에 든 공, C 주머니에 든 공)으로 나열해 보면 $(0, abc), (a, bc), (b, ca), (c, ab), (bc, a), (ca, b), (ab, c), (abc, 0)$ 으로 8가지야.

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8 \text{(가지)}$$

3rd 주머니 A에 3개의 공을 택하여 넣는 각각의 경우에 대해 나머지 3개를 2개의 주머니에 넣는 것이므로 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하자.

따라서 구하는 경우의 수는 주머니 A에 넣을 3개의 공을 택한 각각의 경우에 대해 서로 다른 3개의 남은 공을 2개의 주머니에 넣는 방법의 수가 8가지씩이므로 곱의 법칙에 의해

$$20 \times 8 = 160 \text{(가지)}$$

A 38 정답 ① *중복순열 - 나열 [정답률 83%]

[정답 공식: 4명의 학생 중 중복을 허용하여 5명을 뽑는다.]

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) (3점) **단서** 단서가 의미하는 바를 파악해야 해. 연필이 종류가 다르고 중복을 허락하는 경우이므로 중복순열을 생각해야 해.

- ① 1024 ② 1034 ③ 1044 ④ 1054 ⑤ 1064

1st 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구해.

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 4명 중 한 명을 선택하는 것 연필의 선택을 받는 것 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 5개를 택한 후 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 연필의 종류가 다르므로 순열이야. ${}_4\Pi_5 = 4^5 = 2^{10} = 1024$ **[중복순열]** 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 순열이야.

A 39 정답 ④ *중복순열 - 서로 다른 종류의 물건 [정답률 45%]

[정답 공식: 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하인 경우에 대하여 학생 A가 사탕 1개는 꼭 받는 경우를 구한다.]

세 명의 학생 A, B, C에게 서로 다른 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) (4점)

단서1 학생 A가 사탕을 1개도 못받는 경우를 제외시켜야 해.

(가) 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다.

(나) 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이다.

단서2 학생 B가 받는 사탕의 개수가 0개, 1개, 2개로 3가지의 경우를 나누어 경우의 수를 구해 보자.

- ① 167 ② 170 ③ 173 ④ 176 ⑤ 179

1st 어떤 조건을 기준으로 경우를 나눌지 파악하자.

조건 (나)에서 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이므로 문제의 단서 조항에 2 이하라고 했기 때문에 학생 B가 받는 사탕의 개수가 0인 경우도 빼먹지 말고 반드시 고려해야 해.

학생 B가 받는 사탕의 개수를 기준으로 경우를 나눈 뒤 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받으면서 두 학생 A, C에게 남은 사탕을 나누어 주는 경우를 생각해야 한다.

2nd 학생 B가 받는 사탕의 개수가 2 이하인 경우의 수를 각각 구하자.

(i) 학생 B가 0개의 사탕을 받는 경우

남은 두 학생 A, C가 5개의 사탕을 받으므로

합정 사탕의 종류가 서로 다르기 때문에 나누어 주는 사탕의 순서를 정할 수 있는 관계로 중복조합이 아닌 중복순열로 접근해야 해.

구하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_5 - 1 = 2^5 - 1 = 31$$

학생 C가 사탕을 모두 받으면 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받아야 한다는 조건을 만족시키지 못하므로 1가지 경우를 빼줘야 해.

[중복순열] 서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$

(ii) 학생 B가 1개의 사탕을 받는 경우

남은 두 학생 A, C가 4개의 사탕을 받으므로 구하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times ({}_2\Pi_4 - 1) = 5 \times (2^4 - 1) = 75$$

학생 C가 사탕을 모두 받으면 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받아야 한다는 조건을 만족시키지 못하므로 1가지 경우를 빼줘야 해.

(iii) 학생 B가 2개의 사탕을 받는 경우

남은 두 학생 A, C가 3개의 사탕을 받으므로 구하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times ({}_2\Pi_3 - 1) = 10 \times (2^3 - 1) = 70$$

학생 C가 사탕을 모두 받으면 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받아야 한다는 조건을 만족시키지 못하므로 1가지 경우를 빼줘야 해.

3rd 각 경우에 대하여 경우의 수를 구하여 모두 더하자.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $31 + 75 + 70 = 176$

A 40 정답 ⑤ *중복순열 [정답률 66%]

[정답 공식: 서로 다른 n 개 중 중복을 허락하여 r 개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$ 이다.]

두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는? (3점)

(가) $f(1) + f(2) = 4$ **단서1** $f(1)=1, f(2)=3$ 또는 $f(1)=3, f(2)=1$ 또는 $f(1)=f(2)=2$ 인 경우가 있겠지?

(나) 1은 함수 f 의 치역의 원소이다.

단서2 $f(1)=1, f(2)=3$ 이거나 $f(1)=3, f(2)=1$ 이면 조건 (나)를 무조건 만족시키고, $f(1)=f(2)=2$ 이면 조건 (나)를 만족시키기 위해 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중 적어도 하나는 1이어야 해.

- ① 145 ② 150 ③ 155
④ 160 ⑤ 165

1st 조건 (가)를 만족시키는 경우를 먼저 생각해 보자.

조건 (가)에서 $f(1) + f(2) = 4$ 이므로

$f(1)=1, f(2)=3$ 또는 $f(1)=3, f(2)=1$ 또는

$f(1)=f(2)=2$ 이다.

각 경우에 대하여 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수를 구하자.

(i) $f(1)=1, f(2)=3$ 인 경우

항상 조건 (나)를 만족시키므로 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4의 4개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$$\therefore {}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

$f(3)$ 의 값을 택하는 방법의 수 4가지, $f(4)$ 의 값을 택하는 방법의 수 4가지, $f(5)$ 의 값을 택하는 방법의 수도 4가지이므로 $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

따라서 이때의 함수 f 의 개수는 64이다.

(ii) $f(1)=3, f(2)=1$ 인 경우

(i)의 경우와 마찬가지로 이때의 함수 f 의 개수는 64이다.

(iii) $f(1)=f(2)=2$ 인 경우

조건 (나)를 만족시키기 위해 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중 적어도 하나는 1이어야 한다. $f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 모든 경우의 수에서 치역에 1이 포함되지 않은 경우의 수를 빼자.

$f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 모든 경우의 수는

1, 2, 3, 4의 4개 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$ 이고, $f(3) \neq 1, f(4) \neq 1, f(5) \neq 1$ 인 경우의 수는

2, 3, 4의 3개 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$
이다.

즉, $f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중에서 적어도 하나는 1이 되도록

$f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_4\Pi_3 - {}_3\Pi_3 = 64 - 27 = 37$$
이다.

따라서 이때의 함수 f 의 개수는 37이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 모든 함수 f 의 개수는

$$64 + 64 + 37 = 165$$
이다.



B 66 정답 15 *중복조합의 이해-적어도, n 개 이상 [정답률 72%]

[정답 공식: A, B, C 세 학생에게 사탕 1개씩 먼저 나누어 주고, 나머지 사탕을 나누어 주는 경우의 수를 구한다.]

단서1 서로 다른 3명의 학생 중에 중복을 허락하여 7개를 선택할 수 있으므로

중복조합에 관한 문제임을 알 수 있어.

같은 종류의 사탕 7개를 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 줄 때, 세 학생 모두 적어도 한 개의 사탕을 받도록 나누어 주는

단서2 각 학생이 받는 사탕의 개수의 최솟값은 1이야.

경우의 수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)



단서+발상

단서1 같은 종류의 사탕을 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우이므로 중복조합에 관한 문제임을 알 수 있다. [발상]

단서2 세 학생 모두 적어도 한 개의 사탕을 받아야 하므로 학생이 받는 사탕의 개수는 최소 1임을 알 수 있다. [발상]
사탕 1개씩 먼저 받고, 남은 4개의 사탕을 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다. [해결]

[문제 풀이 순서]

1st 학생 A, B, C에게 사탕을 하나씩 먼저 나누어 주자.

세 학생 모두 적어도 한 개의 사탕을 받아야 하므로 먼저 세 학생에게 사탕을 하나씩 나누어 줄 수 있다.

이때, 남은 사탕의 개수는 4이고 4개의 사탕을 세 학생에게 나누어

$$7-3=4$$

주는 경우의 수를 구하면 된다.

2nd 남은 사탕을 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수를 구하자.

학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2$$

[중복조합]

서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

$$= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$



다른 풀이: 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수를 이용하여 경우의 수 구하기

학생 A, B, C가 받은 사탕의 개수를 각각 a, b, c 라 하면 구하는 경우의 수는

방정식 $a+b+c=7$... ①의 자연수해를

순서쌍 (a, b, c) 로 나타내었을 때, 같은 종류의 사탕 7개를 세 학생에게 적어도 한 개 이상 나누어 주는 모든 경우의 수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 같아.

한편, 학생 A, B, C 세 사람이 사탕을 한 개 이상 받아야 하므로 $a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1$ ($a' \geq 0, b' \geq 0, c' \geq 0$)이라 하고 방정식 ①에 대입하면

$$(a'+1) + (b'+1) + (c'+1) = 7$$

즉, 방정식 $a'+b'+c'=4$ (a', b', c' 은 음이 아닌 정수)

방정식 $x_1+x_2+\dots+x_m=n$ (m, n 은 자연수의 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_mH_n$)

의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하면 돼.

$$\therefore {}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2$$

$$= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

[채점 기준표]

1st	학생 A, B, C에게 사탕을 하나씩 먼저 나누어 준다.	5점
2nd	남은 사탕을 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수를 구한다.	5점

B 67 정답 60 *중복조합의 이해 [정답률 75%]

[정답 공식: $(a+b+c)^3$ 과 $(d+e)^5$ 의 항의 개수를 각각 구하여 곱한다.]

$(a+b+c)^3(d+e)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

단서 $(a+b+c)^3$ 과 $(d+e)^5$ 에서 각각의 서로 다른 항을 생각하여 곱하면 되겠지?



단서+발상

단서 $(a+b+c)^3(d+e)^5$ 의 전개식에서 $(a+b+c)^3$ 과 $(d+e)^5$ 으로 나누어 각 전개식에서의 서로 다른 항의 개수를 구하여 그 개수를 곱해 주어진 전개식의 항의 개수를 구할 수 있다. [발상]

$(a+b+c)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는, $(d+e)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다. [해결]

[문제 풀이 순서]

1st $(a+b+c)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하자.

$(a+b+c)^3$ 을 전개했을 때 나오는 항은 $a^l b^m c^n$ 꼴이므로

l, m, n 은 $l+m+n=3$ (단, $0 \leq l \leq 3, 0 \leq m \leq 3, 0 \leq n \leq 3$)을 만족시켜야 한다.

즉, $(a+b+c)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

방정식 $l+m+n=3$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

l, m, n 은 a, b, c 가 각각 곱해진 횟수를 의미해, 따라서 음수가 나올 수 없어.

따라서 $(a+b+c)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

[중복조합]

서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

2nd $(d+e)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하자.

마찬가지로 $(d+e)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

3rd 구해야 하는 서로 다른 항의 개수를 구하자.

두 인수 $(a+b+c)^3$ 과 $(d+e)^5$ 에는 같은 문자가 없으므로

두 인수의 곱 $(a+b+c)^3(d+e)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 각 인수에서 항의 개수들의 곱이다.

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$10 \times 6 = 60$$

[채점 기준표]

1st	$(a+b+c)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구한다.	5점
2nd	$(d+e)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구한다.	3점
3rd	구해야 하는 서로 다른 항의 개수를 구한다.	2점

B 68 정답 55 *중복조합의 활용-방정식 [정답률 74%]

정답 공식: 방정식 $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ (m, n 은 자연수)의 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_mH_n$ 이다.

방정식 $x + y + z + 5w = 8$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점) **단서** 중복조합을 이용한 정수해의 개수를 구하는 문제네? w 의 값에 따라 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수가 결정돼.

단서+발상

단서 x, y, z, w 가 음이 아닌 정수라는 조건에서 중복조합을 이용한 정수해의 개수를 구하는 문제임을 알 수 있다. **발상** 주어진 방정식에서 w 의 값에 따라 방정식이 달라지므로 w 의 값이 될 수 있는 경우를 확인하고 각 경우에 따른 경우의 수를 구할 수 있다. **해결**

[문제 풀이 순서]

1st w 의 값을 나누어서 각각의 경우의 수를 구하자.

방정식 $x + y + z + 5w = 8 \dots \textcircled{1}$ 에서 x, y, z, w 는 음이 아닌 정수이므로 w 의 값에 따라 다음 경우로 나누어 각각의 경우의 수를 구할 수 있다. $w \geq 2$ 이면 방정식의 좌변값이 음수가 되므로 성립하지 않아. 따라서 $w=0$ 또는 $w=1$ 이 돼.

(i) $w=0$ 인 경우

$\textcircled{1}$ 에 $w=0$ 을 대입하면

$$x + y + z = 8$$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

[중복조합]

서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

(ii) $w=1$ 인 경우

$\textcircled{1}$ 에 $w=1$ 을 대입하면

$$x + y + z + 5 = 8$$

$$\therefore x + y + z = 3$$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

2nd 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 구하자.

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$45 + 10 = 55$$

(i)과(ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙을 이용하여야 해.

[채점 기준표]

1st w 의 값을 나누어서 각각의 경우의 수를 구한다.	8점
2nd 전체 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 구한다.	2점

★ 방정식 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ 의 정수해의 개수

개념·공식

① 음이 아닌 정수해의 개수 : ${}_nH_r$

② 양의 정수해의 개수 : ${}_nH_{r-n}$

B 69 정답 44 *중복조합의 이해 [정답률 60%]

정답 공식: 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이다.

빨간 공, 파란 공, 노란 공, 하얀 공이 각각 3개씩 있다. 이 12개의 공 중에서 6개의 공을 선택하는 경우의 수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) (10점) **단서1** 같은 색의 공은 최대 3개 선택할 수 있어. **단서2** 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않고, 6개의 공을 선택하는 것이기 때문에 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있어.

단서+발상

단서1 네 종류의 공이 각각 3개씩 있으므로 한 종류의 공을 4개 이상 선택할 수 없고 3개까지 선택할 수 있다. **발상**

단서2 같은 색의 공은 서로 구별하지 않고 네 종류의 공 중 일부 색의 공을 아예 선택하지 않아도 되므로 중복을 허락하는 중복조합을 적용할 수 있다. **적용**

[문제 풀이 순서]

1st 네 종류의 공이 각각 6개 이상씩 있다고 가정하고 6개의 공을 선택하는 경우의 수를 구하자.

빨간 공, 파란 공, 노란 공, 하얀 공의 네 종류의 공이 각각 6개 이상씩 있다고 가정하자.

이 중에서 중복을 허락하여 6개의 공을 택하는 경우의 수에서 한 종류의 공을 4개 이상 택하는 경우의 수를 빼면 구해야 하는 경우의 수를 구할 수 있다. **여사건의 경우를 생각할 수 있어.**

네 종류의 공이 각각 6개 이상씩 있다고 가정하면

네 종류의 공에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

[중복조합]

서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

2nd 한 종류의 공을 4개 이상 선택하는 경우의 수를 구하자.

이 중에서 한 종류의 공을 4개 이상 선택하는 경우는 다음과 같이 세 가지 경우가 있고 각각의 경우에 따른 경우의 수를 구할 수 있다.

(i) 한 가지 색의 공을 6개 모두 선택할 때,

네 가지 색의 공 중에서 한 가지 색의 공을 6개 모두 선택하는 경우의 수는 서로 다른 4개 중에서 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_4C_1 = 4$$

(ii) 두 가지 색의 공을 각각 5개, 1개 선택할 때,

네 가지 색의 공 중에서 두 가지 색의 공을 각각 5개, 1개 선택하는 경우의 수는 서로 다른 4개 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4C_2 \times 2! = 12$

선택한 두 가지 색의 공이 빨간 공, 파란 공이라 했을 때, 빨간 공 5개/파란 공 1개인 경우와 빨간 공 1개/파란 공 5개인 경우로 2가지 경우가 있었지?

(iii) 두 가지 색의 공을 각각 4개, 2개 선택할 때,

(ii)와 마찬가지로 경우의 수는 ${}_4C_2 \times 2! = 12$

(iv) 세 가지 색의 공을 각각 4개, 1개, 1개 선택할 때,

네 가지 색의 공 중에서 세 가지 색의 공을 각각 4개, 1개, 1개 선택하는 경우의 수는 서로 다른 4개 중에서 3개를 택하여 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_3 \times \frac{3!}{2!} = 12$$

1개를 선택하는 두 종류의 공은 같은 것이 있는 순열로 생각할 수 있어.

(i)~(iv)에 의하여 한 종류의 공을 4개 이상 선택하는 경우의 수는

$$4 + 12 + 12 + 12 = 40 \text{이다.}$$



1등급 마스터 문제

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

**B 76** 정답 ② * 중복조합의 활용 [정답률 35%]

[정답 공식: 0이 적혀 있는 공을 꺼내면 공이 0이다. 나머지 공 3개 중 중복을 허용하여 3개를 뽑는다.]

단서 1 숫자 0, 2, 3, 5를 각각 3회 반복할 수 있다.

주머니 안에 0, 2, 3, 5가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 넣는 시행을 3회 반복한다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 모두 곱한 값으로 가능한 서로 다른 정수의 개수는? (4점)

- ① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

단서 2 2, 3, 5가 소수이므로 각각의 곱은 서로 다르지? 근데 세 수 중 0이 포함되면 그 곱은 같네. 같은 경우를 생각하게 좀 더 쉽겠다.

1st 주어진 사건의 여사건인 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 서로 같은 정수가 생기는 경우를 따져 주자.

주머니 안의 숫자 0, 2, 3, 5를 중복을 허용하여

(∵ 단서 1)

3회 꺼낸 세 수의 곱이 같은 정수인 경우를 생각해 보자.

이때, 2, 3, 5는 소수이므로 이 세 수 중 중복을 허용하여 꺼낸 세 수의 곱

[소수] 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수

[약수] 0이 아닌 정수를 나누어떨어지게 하는 정수

은 모두 다르다. 그러나 중복을 허용하여 꺼낸 세 수에 0이 포함된 경우 주어진 수가 다른 수의 약수이거나 배수이면 중복하여 곱하면 곱이 같은 수가 나올 수 있지만 소수는 자기 자신만을 약수로 가지므로 그럴 수 없어. 즉, 2, 3, 8이면 2를 세 번 반복하면 8이 되지는 세 수의 곱은 0으로 모두 같다. 즉,

0이 3개인 경우 1가지

0이 2개인 경우 2, 3, 5 중에 1개를 꺼내면 되므로 3가지

0이 1개인 경우 2, 3, 5 중에 2개를 중복을 허용하여 꺼내면 되므로

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6(\text{가지})$$

따라서 세 수의 곱이 서로 같은 정수가 나오는 경우의 수는

$$1 + 3 + 6 = 10$$

2nd 전체의 경우에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 같은 경우를 빼주자.

주어진 사건의 여사건

전체의 경우의 수인 4개의 공 중 중복을 허용하여 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

즉, 꺼낸 세 수의 곱이 0이 아닌 경우의 수는 $20 - 10 = 10$ 이므로 0을 포함한 서로 다른 정수의 개수는 $10 + 1 = 11$

세 수의 곱이 0이 되는 경우를 모두 제외시키면 안되지!

다른 풀이: 세 개의 공에 적힌 수 중 0, 2, 3, 5의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하고 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하기

꺼낸 세 개의 공에 적힌 수 중 0, 2, 3, 5의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하자. 그럼, 꺼낸 세 수의 곱은 0 또는 $2^b 3^c 5^d$ 이고

↳ $a \neq 0$ 이면 무조건 세 수의 곱은 0이아.

$$a + b + c + d = 3(a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0) \text{ 이지?}$$

↳ 3회 반복이므로 0, 2, 3, 5가 나올 수 있는 경우의 합은 30이아.

(i) $a \neq 0$ 일 때, 꺼낸 세 수의 곱은 항상 0이지? 즉, 곱한 값으로 가능한 경우는 0으로 1가지야.

(ii) $a = 0$ 일 때, 꺼낸 세 수의 곱은 $2^b 3^c 5^d$ 이고 b, c, d 에 따라 $2^b 3^c 5^d$ 은 모두 다른 정수이므로 구하는 정수의 개수는 방정식 $b + c + d = 3$ 의 음이 아닌 정수 해의 순서쌍의 개수와 같아.

$$\therefore {}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 서로 다른 정수의 개수는 $1 + 10 = 11$

B 77 정답 ② * 중복조합의 이해 - 적어도, n 개 이상 [정답률 33%]

[정답 공식: 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 뽑는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이다.]

단서 1 카드의 색의 가짓수는 모두 4가지야.

빨간색 카드 1장, 파란색 카드 1장, 노란색 카드 3장, 보라색 카드 3장이 있다. 이 8장의 카드를 세 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?

(단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) (4점)

단서 2 전체 경우의 수에서 학생 A 또는 B가 카드를 받지 못하는 경우를 빼서 구할 수 있어.

(가) 두 학생 A, B는 각각 1장 이상의 카드를 받고,

학생 C는 카드를 받지 못할 수 있다.

(나) 학생 A가 받는 카드의 색의 가짓수는 3 이하이다.

단서 3 카드의 색의 가짓수가 1, 2, 3인 경우를 모두 더하여 구하는 것보다 여사건을 생각하여 전체 경우의 수에서 색의 가짓수가 4인 경우의 수를 빼는 것이 좋겠지?

- ① 730 ② 746 ③ 762
④ 778 ⑤ 794

1st 학생 A, B, C에게 카드를 나누어 주는 경우의 수를 구하자.

빨간색 카드 1장, 파란색 카드 1장, 노란색 카드 3장, 보라색 카드 3장을 차례로 학생 A, B, C에게 나누어 준다고 할 때, 8장의 카드를 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

↳ 파란색 카드 1장을 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수

$${}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_3H_3 \times {}_3H_3$$

↳ 빨간색 카드 1장을 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수

학생 A, B, C에게 노란색 카드 3장을 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수

$$= 3 \times 3 \times {}_3C_3 \times {}_3C_3 = 3 \times 3 \times 10 \times 10 = 900$$

[중복조합]

서로 다른 n 개 중에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

2nd 여사건의 경우로 학생 A, B가 카드를 받지 못하는 경우의 수를 구하고 조건 (가)를 만족하는 경우의 수를 구하자.

(i) 학생 A가 카드를 한 장도 받지 못하는 경우

학생 B, C에게 모든 카드를 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2H_3 \times {}_2H_3 = 2 \times 2 \times {}_4C_3 \times {}_4C_3$$

$$= 2 \times 2 \times 4 \times 4 = 64 \qquad = {}_{2+3-1}C_3 \times {}_{2+3-1}C_3$$

(ii) 학생 B가 카드를 한 장도 받지 못하는 경우

(i)과 마찬가지로 경우의 수는 64

(iii) 학생 A, B 모두 카드를 한 장도 받지 못하는 경우

학생 C에게만 모든 카드를 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

그 경우의 수는 1

(i)~(iii)에 의하여 학생 A 또는 학생 B가 카드를 받지 못하는 경우의 수는 $64 + 64 - 1 = 127$ 이다.

따라서 조건 (가)를 만족하는 경우의 수는

$$900 - 127 = 773$$

3rd 여사건의 경우로 학생 A가 서로 다른 4가지 색의 카드를 받고, 학생 B가 1장 이상의 카드를 받는 경우의 수를 구하자.

주의

규칙 (가)를 만족하는 전체 경우의 수에서 규칙 (나)를 만족하지 않는 경우의 수를 뺄 것아. 규칙 (가)에서 학생 B는 1장 이상의 카드를 받음에 주의하자.

학생 A가 빨간색, 파란색, 노란색, 보라색 카드를 각각 1장씩 받으면 남은 카드는 노란색 2장과 보라색 2장뿐이다.

이때, 학생 B가 1장 이상의 카드를 받는 경우의 수는 남은 카드를

학생 A, B, C에게 나누어 주는 전체 경우의 수에서 학생 A, C에게만 나누어 주는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

남은 노란색 2장과 보라색 2장의 카드를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는

보라색 카드 2장을 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수

$${}_3H_2 \times {}_3H_2 = {}_4C_2 \times {}_4C_2 = 6 \times 6 = 36$$

노란색 카드 2장을 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수

남은 노란색 2장과 보라색 2장의 카드를 학생 A, C에게만 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_2 \times {}_2H_2 = {}_3C_2 \times {}_3C_2 = 3 \times 3 = 9$$

따라서 학생 A가 서로 다른 4가지 색의 카드를 받고, 학생 B가 카드를 1장 이상 받는 경우의 수는

$$36 - 9 = 27$$

4th 규칙을 모두 만족시키는 경우의 수를 구하자.

따라서 규칙 (가)와 (나)에 따라 카드를 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $773 - 27 = 746$ 이다.

B 78 정답 285 *중복조합의 이해 [정답률 53%]

[정답 공식: 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$]

세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 사탕 6개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (4점)

단서 1 학생 A가 받은 사탕의 개수를 a 라 하면 $a \geq 10$ 이다.

(가) 학생 A가 받은 사탕의 개수는 1 이상이다.

(나) 학생 B가 받은 초콜릿의 개수는 1 이상이다.

(다) 학생 C가 받은 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 1 이상이다. 단서 3 학생 C가 받은 사탕과 초콜릿의 개수를 각각 c, z 라 하면 전체 경우에서 $c=0, z=0$ 인 경우를 제외하면 돼.

단서 2 학생 B가 받은 초콜릿 개수를 y 라 하면 $y \geq 10$ 이다.

1st 중복조합의 수를 이용하여 학생 A가 받은 사탕 개수가 1개 이상인 경우의 수를 구해.

세 학생이 받은 사탕의 개수를 각각 a, b, c 라 하면

(i) $a \geq 1$ 인 경우 $a = a' + 1$ 이라 하면

$$\begin{aligned} a' + b + c &= 5 \\ a + b + c &= 6 \text{에서 } a' + 1 + b + c = 6 \text{이므로 } a' + b + c = 5 \\ (a' \geq 0, b \geq 0, c \geq 0) \end{aligned}$$

이므로 중복조합에 의하여

$${}_3H_5 = {}_7C_2 = 21 (a' \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$$

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

2nd 중복조합의 수를 이용하여 학생 B가 받은 초콜릿 개수가 1개 이상인 경우의 수를 구해.

세 학생이 받은 초콜릿 개수를 각각 x, y, z 라 하면

(ii) $y \geq 1$ 인 경우 $y = y' + 1$ 이라 하면

$$\begin{aligned} x + y' + z &= 4 (x \geq 0, y' \geq 0, z \geq 0) \\ x + y + z &= 5 \text{에서 } x + y' + 1 + z = 5 \text{이므로 } x + y' + z = 4 \\ \text{이므로 중복조합의 수에 의하여 } {}_3H_4 &= {}_6C_1 = 15 (x \geq 0, y' \geq 0, z \geq 0) \\ {}_3H_4 &= {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \end{aligned}$$

3rd 학생 C가 사탕과 초콜릿을 하나도 받지 못하는 경우의 수를 구해.

(iii) (i)의 경우 중에서 $c=0$ 이고, (ii)의 경우 중에서 $z=0$ 인 경우

$$\begin{aligned} {}_2H_5 \times {}_2H_4 &= {}_6C_5 \times {}_5C_4 = 30 \\ \text{①에서 } z=0 \text{인 경우 } x + y' &= 4 \text{이므로 } {}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5 \\ \rightarrow \text{③에서 } c=0 \text{인 경우 } a' + b &= 5 \text{이므로 } {}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6 \end{aligned}$$

4th 구하고자 하는 경우의 수를 구해.

따라서 구하는 경우의 수는 (i)~(iii)에 의하여

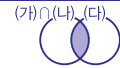
(조건 (가), (나)를 만족시키는 경우) - (조건 (다)를 만족시키지 않는 경우)

$$= ((i) \times (ii) \text{의 경우의 수}) - ((iii) \text{의 경우의 수})$$

$$= 21 \times 15 - 30$$

$$= 315 - 30 = 285$$

조건 (가)와 조건 (나)를 동시에 만족시키는 경우의 수를 곱의 법칙을 이용하여 구해.



(가)와 (나)를 동시에 만족시키면서 (다)를 만족시키지 않는 경우는 제외하자.

B 79 정답 96 *중복조합의 활용 -방정식 [정답률 21%]

[정답 공식: 전체 경우의 수에서 두 자연수가 같은 값을 가지는 경우의 수를 뺀다. 180을 소인수분해해서 a, b, c 의 값을 구해본다.]

다음 조건을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오. (4점)

(가) $abc = 180$

단서 1 a, b, c 는 180의 양의 약수이니까 180을 소인수분해하자.

(나) $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$

단서 2 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 은 어떤 인수도 0이 되면 안 되므로 $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ 이어야 해.

1st 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 를 찾아보자.

180을 소인수분해하면 $abc = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 이므로

$$a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}, b = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}, c = 2^{x_3} 3^{y_3} 5^{z_3} \quad (i=1, 2, 3 \text{에 대하여 지수 } x_i, y_i, z_i \text{는 모두 음이 아닌 정수})$$

라 하자.

예를 들어, $abc = 3 \times 6 \times 10 = 180$ 이라면 $a = 2^0 3^1 5^1 = 3$ 에서 $x_1=0, y_1=1, z_1=0$ 이고, $b = 2^1 3^1 5^1 = 6$ 에서 $x_2=1, y_2=1, z_2=0$ 이고, $c = 2^1 3^0 5^1 = 10$ 에서 $x_3=1, y_3=0, z_3=1$ 이때, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \times 3^{y_1+y_2+y_3} \times 5^{z_1+z_2+z_3} = 2^2 \times 3^2 \times 5 \text{에서}$$

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ 으로 밑이 a 로 같을 때, $f(x) = g(x)$ 가 성립한다.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, y_1 + y_2 + y_3 = 2, z_1 + z_2 + z_3 = 1 \text{이므로}$$

[중복조합과 정수 해의 개수] $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ 에 대하여

① 음이 아닌 정수 해의 개수: ${}_nH_r$ ② 계산원리: ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

$${}_3H_2 \times {}_3H_2 \times {}_3H_1 = {}_{3+2-1}C_2 \times {}_{3+2-1}C_2 \times {}_{3+1-1}C_1$$

$$= {}_4C_2 \times {}_4C_2 \times {}_3C_1$$

$$= 6 \times 6 \times 3 = 108 \dots \text{㉠}$$

2nd 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍의 개수를 구해 보자.

㉠에서 구한 순서쌍의 개수 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우도 포함되어 있으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍의 개수를 구하여 ㉠에서 빼주자. 예를 들어, $(a, b, c) = (1, 1, 180)$ 일 때, $a=b=10$ 이니까 제외해야 해.

조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는

$$a=b \text{ 또는 } a=c \text{ 또는 } b=c$$

$$xyz \neq 0 \text{이면 } x \neq 0 \text{이고, } y \neq 0 \text{이고, } z \neq 0 \text{이므로}$$

$$xyz \neq 0 \text{의 부정은 } x, y, z \text{ 중 한 개만 } 0 \text{이면 되지}$$

이때는 a, b, c 중 두 수만 같은 경우가 존재하므로

세 수가 모두 같은 $a=b=c$ 인 경우는 존재하지 않아.

만약 $a=b=c$ 이면 $a^3=180$ 인 자연수 a 는 존재하지 않기 때문이야.

a, b, c 중 두 수가 같은 순서쌍을 따져 보면, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 에 대하여 인수 2, 3이 2개씩이나 다음과 같이 분류할 수 있어. 이때, 1도 180의 약수인가 잊지 말고!

$$(1, 1, 180), (1, 180, 1), (180, 1, 1) \leftarrow 3 \text{개}$$

$$(2, 2, 45), (2, 45, 2), (45, 2, 2) \leftarrow 3 \text{개}$$

$$(3, 3, 20), (3, 20, 3), (20, 3, 3) \leftarrow 3 \text{개}$$

$$(6, 6, 5), (6, 5, 6), (5, 6, 6) \leftarrow 3 \text{개}$$

즉, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍의 개수는 모두 12이다. ... ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$$108 - 12 = 96 = \text{㉢} - \text{㉡}$$

* 상황을 간단히 한 뒤 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수 구하기 [유형 01]

네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은 공 4개, 흰 공 5개, 빨간 공 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) (4점)

- (가) 각 학생이 받는 공의 색의 종류의 수는 2이다.
 (나) 학생 A는 흰 공과 검은 공을 받으며 흰 공보다 검은 공을 더 많이 받는다. [단서1] 학생 A는 조건 (가)에 의하여 10보다 작은 홀수 개의 공을 가질 수 있어.
 (다) 학생 A가 받는 공의 개수는 홀수이며 학생 A가 받는 공의 개수 이상의 공을 받는 학생은 없다.

[단서2] 세 공의 개수의 평균은 $\frac{4+5+5}{3} = \frac{14}{3}$ 이고, $4 \leq \frac{14}{3} \leq 5$ 이므로 학생 A는 최소 5개 이상의 공을 가져야 해.

오해 2등급? 꼬리에 꼬리를 무는 조건을 간단하게 적용하여 경우의 수를 구하는 문제이다. 이를 위해서는 학생 A가 가지는 검은 공의 개수가 흰 공의 개수보다 많고, 받은 전체 공의 개수가 홀수이며 나머지 학생들보다 더 많은 공을 받았다는 조건을 염두에 둘 수 있어야 한다.

단서+발상

[단서1] 학생 A가 가질 수 있는 검은 공, 흰 공의 개수를 기준으로 경우를 나눈다. [발상] 각 경우마다 색깔별로 남은 공의 개수를 파악한 뒤, 조건에 따라 경우를 간단히 할 수 있는 포인트를 파악한다. [적용]

[단서2] 각 경우마다 학생 A가 받는 공의 개수보다 많거나 같은 경우나 받는 공의 색의 종류가 2가지가 아닌 (0가지, 1가지, 3가지) 경우는 제외한다. [해결]

[주의] 학생 A가 홀수 개의 공을 받고, 조건 (나)를 만족시키는 경우마다 조건 (가), (다)를 만족시키는지 빠뜨리지 않게 경우의 수를 세어야 한다.

[핵심 정답 공식] 학생 A가 홀수 개의 공을 받는 경우의 검은 공의 개수와 흰 공의 개수를 순서대로 순서쌍으로 나타내면 (2, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 3)이다.

----- [문제 풀이 순서] -----

1st 한 번의 시행으로 나타낼 수 있는 사건과 그 확률을 구해봐.

각 학생이 받는 공의 색의 종류의 수는 2개이고, 학생 A는 흰 공과 검은 공을 받는다고 하므로 학생 A가 받는 검은 공과 흰 공의 개수를 각각 $b, w (b > w)$ 라 하자.

두 정수 $b, w (1 \leq b \leq 4, 1 \leq w \leq 5)$ 에 대한 순서쌍 (b, w) 중에서 조건 (가), (나)를 만족시키면서 학생 A가 홀수 개의 공을 받는 경우는 (2, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 3)이므로 각 경우에 대한 경우의 수를 구하자.

(i) (2, 1)인 경우

학생 A가 3개의 공을 가지게 되고 검은 공 4개, 흰 공 5개, 빨간 공 5개 중에서 남은 공은 검은 공 2개, 흰 공 4개, 빨간 공 5개 즉, 11개이다.

따라서 남은 3명의 학생 B, C, D가 받는 공의 개수가 3개 이상이 되어야 하므로 조건 (다)를 만족시키지 못하므로 경우의 수도 0이다.

학생 A가 가진 공의 개수가 3이므로 다른 세 명의 학생이 2개 이하의 공을 가지겠지? 그렇다면 남은 3명이 가진 공의 개수의 합이 11개가 나올 수 없어.

(ii) (3, 2)인 경우

학생 A가 5개의 공을 가지게 되고 검은 공 4개, 흰 공 5개, 빨간 공 5개 중에서 남은 공은 검은 공 1개, 흰 공 3개, 빨간 공 5개 즉, 9개이다.

남은 검은 공의 개수가 1이므로 검은 공을 기준으로 경우를 나누면 가장 간단하게 경우를 나눌 수 있겠어.

따라서 세 명의 학생 B, C, D가 남은 9개의 공을 받는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

[주의]

흰 공을 2개 받았다면 남은 공은 흰 공 1개, 빨간 공 5개지? 6개의 공을 2명에게 나누어 주면 한 명은 받는 공의 색이 2가지가 될 수 없어. 흰 공을 3개 받은 경우도 마찬가지.

I. 검은 공을 받는 학생이 흰 공 1개를 받는 경우

조건 (가)에 의하여 각 학생이 받는 공의 색의 종류의 수가 2이니까

검은 공을 기준으로 남은 다른 색의 공을 받는 경우로 나눠줘

검은 공을 받는 학생을 선택하는 경우의 수 3과 같다.

남은 두 학생에게 흰 공 2개와 빨간 공 5개를 나누어 주려면 각각 검은 공을 받는 학생에게 남은 흰 공 3개 중 1개를 줘야 하므로 흰 공은 $3 - 1 = 2$ (개) 남았어. 흰 공 1개, 빨간 공 1개를 먼저 나누어 주고 남은 빨간 공 3개를 2명에게 나누어 주는 경우의 수를 구하면 된다.

두 명이 더 갖게 되는 빨간공의 개수를 각각 x, y 라 하면 $x + y = 3$ 이므로 경우의 수는 ${}_2H_3$

이때, 한 명의 학생에게 빨간 공 3개를 모두 나누어 주는 경우는 제외되어야 하므로 한 명에게 다 몰아서 공을 주면 학생 A가 받는 공의 개수와 같아지므로 조건 (다)를 만족시키지 않아.

${}_2H_3 - 2 = {}_4C_3 - 2 = 4 - 2 = 2$

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$

II. 검은 공을 받는 학생이 빨간 공을 받는 경우

조건 (가)에 의하여 각 학생이 받는 공의 색의 종류의 수가 2이니까

검은 공을 기준으로 남은 다른 색의 공을 받는 경우로 나눠줘

검은 공을 받는 학생이 우선 빨간 공 1개를 받는 경우는 검은 공 빨간 공 2개를 받았다면 남은 공은 흰 공 3개, 빨간 공 3개.

6개의 공을 2명에게 나누어 주면 조건 (가)를 만족시킬 수 있지?

따라서 검은 공을 받은 학생에게도 나중에 빨간 공을 또 나눠줄 수 있는 거야.

을 받는 학생을 선택하는 경우의 수 3과 같다.

남은 두 학생은 조건 (가)에 의하여 흰 공과 빨간 공을 받아야 하므로 흰 공 3개와 빨간 공 4개 중에서 각각 흰 공 1개, 빨간 공 1개를 먼저 나누어 준다. 이제 남은 흰 공 1개, 빨간 공 2개를 나누어 주는 경우의 수를 구하면 된다.

남은 흰 공 1개를 검은 공을 받지 않은 남은 두 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 $2 \cdots (*)$

[주의]

이때 빨간 공은 검은 공을 받은 학생도 받을 수 있으므로 두 명의 학생이 아니라 세 명의 학생에게 나누어 주는 경우를 구해야 해.

남은 빨간 공 2개를 세 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 세 명이 더 갖게 되는 빨간 공의 개수를 각각 x, y, z 라 하면 $x + y + z = 2$ 이므로 경우의 수는 ${}_3H_2$

구하면 된다. 이때, 흰 공 1개와 빨간 공 2개를 한 명에게 모두 나누어 주는 경우는 제외되어야 하므로 한 명에게 다 몰아서 공을 주면 학생 A가 받는 공의 개수와 같아지므로 조건 (다)를 만족시키지 않아.

${}_3H_2 - 1 = {}_4C_2 - 1 = 6 - 1 = 5$

(*)에 의하여 남은 흰 공 1개를 두 명에게 나누어 주는

각 경우에 대하여 흰공을 받은 학생에게 빨간공도

나누어 주면 되므로 그 경우의 수는 17가지야.

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 2 \times 5 = 30$

I ~ II에 의하여 구하는 경우의 수는 $6 + 30 = 36$ 이다.

(iii) (4, 1)인 경우

학생 A가 5개의 공을 가지게 되고 검은 공 4개, 흰 공 5개, 빨간 공 5개 중에서 남은 공은 검은 공 0개, 흰 공 4개, 빨간 공 5개 즉, 9개이다.

따라서 세 학생 B, C, D에게 각각 흰 공과 빨간 공을 1개씩 먼저 나누어 주면 남은 공은 흰 공 1개, 빨간 공 2개이고, 이 남은 공을 3명에게 나누어 주는 경우의 수를 구하면 된다.

흰 공을 받는 학생을 선택하는 경우의 수는 3

남은 빨간 공 2개를 세 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 구하면 된다. 세 명이 더 갖게 되는 빨간공의 개수를 각각 x, y, z 라 하면 $x + y + z = 2$ 이므로 경우의 수는 ${}_3H_2$

이때, 흰 공을 받는 학생에게 빨간 공 2개를 모두 나누어 주는 경우는 제외되어야 하므로 한 명에게 다 몰아서 공을 주면 학생 A가 받는 공의 개수와 같아지므로 조건 (다)를 만족시키지 않아.

${}_3H_2 - 1 = 5$

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 5 = 15$ 이다.

(iv) (4, 3)인 경우

학생 A가 7개의 공을 가지게 되고 검은 공 4개, 흰 공 5개, 빨간 공 5개 중에서 남은 공은 검은 공 0개, 흰 공 2개, 빨간 공 5개 즉, 7개이다.

따라서 조건 (가)를 만족시키지 못하므로 경우의 수는 0이다.

3rd 위에서 구한 값들을 종합하여 답을 구하자.

따라서 (i)~(iv)에 의하여 구하는 경우의 수는

$0 + 36 + 15 + 0 = 51$ 이다.



My Top Secret

서울대 선배의 ① 등급 대비 전략

3가지 색의 공 중에서 개수가 적은 색의 공을 기준으로 먼저 경우를 나누어 준 뒤, 조건 (가)에 의하여 학생이 가지는 공의 색의 종류의 수는 2이므로 2가지가 아닌 색의 공을 가지게 되는 경우를 제외해야 하고, 조건 (다)에 의하여 학생 A가 가지게 되는 공의 개수보다 많거나 같은 경우는 제외해야 해.

B 84 정답 201 ★2등급 대비 [정답률 15%]

* 경우를 나누고, 조건을 만족시키도록 중복조합을 통해 경우의 수 구하기 [유형 01]

네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) (4점)

단서1 학생 A가 4개 이상의 검은색 모자를 받아야 하므로 학생 A가 받는 검은색 모자의 수를 기준으로 합의 법칙을 사용할 수 있어.

(가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.

(나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.

(다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

단서2 학생 A를 포함한 두 명만 검은색 모자를 흰색 모자보다 많이 받을 수 있으므로 학생 A를 포함하여 두 명이 받는 검은색 모자의 수를 결정하면 그에 따른 흰색 모자의 개수도 결정할 수 있어.

2등급? 학생 A에게 나눠줄 수 있는 검은색 모자의 개수를 기준으로 나머지 학생들에게 모자를 나누어 줄 수 있는 경우의 수를 구해야 한다.

이를 위해서는 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4, 5의 두 가지 경우인 것과 학생 A가 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받게 하는 것이 경우로 나눌 수 있어야 한다.



단서+발상

단서1 조건 (나)에 의하여 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4, 5, 6이지만 학생 A가 검은색 모자 6개를 전부 받게 되면 조건 (다)를 만족시키지 않기 때문에 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4, 5이다. (발상)

단서2 조건 (다)에 의하여 학생 A가 받는 검은색 모자가 4개이면 흰색 모자는 3개 이하로 가져야 하고, (적용)

학생 A가 받는 검은색 모자가 5개이면 흰색 모자는 4개 이하로 가져야 한다. (해결)

주의 학생 A가 검은색 모자를 4개 가질 때, 흰색 모자 4개를 가질 경우를 반드시 제외해 주어야 한다.

【핵심 정답 공식: 서로 다른 n 명의 사람에게 색깔이 같은 모자 r 개를 나누어 주는 방법의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이다.

[문제 풀이 순서]

1st 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4, 5의 두 가지 경우임을 이용해.

(나) 조건을 만족시키는 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4, 5, 6이다. 만일 학생 A가 6개의 검은색 모자를 받게 되면 학생 B, C, D가 모두 검은색 모자를 받을 수 없어서 (다) 조건을 만족시킬 수 없다.

두 명의 학생이 받는 검은색 모자의 개수가 흰색 모자의 개수보다 더 많아서는 안 된다.

A가 6개의 검은색 모자를 다 받으면 학생 B, C, D는 검은색 모자를 받을 수 없고, 이렇게 되면 학생 A 1명만 검은색 모자를 흰색 모자보다 많이 받게 되어서 조건 (다)를 만족시킬 수 없어.

따라서 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수가 4, 5인 경우를 나누어 생각해 보자.

2nd 학생 A가 4개의 검은색 모자를 받는 경우를 표로 나타내어 보.

학생 A가 4개의 검은색 모자를 받는 경우는 다른 학생 1명이 2개의 검은색 모자를 받는 경우와 다른 학생 2명이 각각 1개씩의 검은색 모자를 받는 경우로 나눌 수 있다. 6개의 검은색 모자를 4명에게 나누어 줄 때, A가 4개를 받으면 남은 2개를 3명에게 나누어 주는 경우를 생각해.

(i) A가 아닌 학생 1명이 남은 2개의 검은색 모자를 모두 받는 경우

6개의 검은색 모자 중 남은 2개를 학생 B에게 모두 나누어 주면 조건 (가)에 의하여 각 학생은 1개 이상의 모자를 받아야 하므로 학생 C, D는 각각 1개의 흰색 모자를 우선 받아야 한다.

학생	A	B	C	D
검은색 모자의 수	4	2	0	0
흰색 모자의 수		0 또는 1	1	1

학생 A, C, D가 추가로 받는 흰색 모자의 개수를 각각 a, c, d 라 하고, 가능한 경우를 다음과 같이 나누어 보자.

i) B가 1개의 흰색 모자를 받는 경우

학생 C, D가 검은색 모자를 받지 않으니 흰색 모자보다 검은색 모자를 많이 받는 학생 2명은 A, B가 되어야 해.

학생	A	B	C	D
검은색 모자의 수	4	2	0	0
흰색 모자의 수	a	1	$1+c$	$1+d$

학생 A는 3개 이하의 흰색 모자를 받아야 하므로 $0 \leq a \leq 3$ 이다. 이때, 방정식 $a+c+d=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해

a, c, d 의 순서쌍의 개수는 ${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = 10$

또한, 6개의 검은색 모자 중 남은 2개를 학생 C 또는 D에게 나누어 주는 경우도 같으므로 가능한 경우의 수는 $3 \times 10 = 30$

ii) B가 흰색 모자를 받지 않는 경우

이 경우에도 A가 3개 이하의 흰색 모자를 받아야 해.

학생	A	B	C	D
검은색 모자의 수	4	2	0	0
흰색 모자의 수	a	0	$1+c$	$1+d$

학생 A는 3개 이하의 흰색 모자를 받아야 하므로 $0 \leq a \leq 3$ 이다. 이때, 방정식 $a+c+d=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해 a, c, d 의 순서쌍의 개수는 ${}_4H_4 - 1 = {}_{4+4-1}C_4 - 1 = 15 - 1 = 14$

A, B, C, D가 추가로 받는 흰색 모자의 개수를 a, b, c, d 라 하면 순서쌍 (a, b, c, d) 에 대하여 $(4, 0, 0, 0)$ 의 경우는 제외해야 해.

또한, 6개의 검은색 모자 중 남은 2개를 학생 C 또는 D에게 나누어 주는 경우도 같으므로 가능한 경우의 수는 $3 \times 14 = 42$

i), ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $30 + 42 = 72$

(ii) A가 아닌 학생 중 2명이 각각 1개씩의 검은색 모자를 받게 되는 경우 6개의 검은색 모자 중 남은 2개를 학생 B, C에게 각각 1개씩 나누어 주면 조건 (가)에 의하여 각 학생은 1개 이상의 모자를 받아야 하므로 학생 D는 1개의 흰색 모자를 우선 받아야 한다.