

제 2 교시

수학 영역



1회

5지선다형

1. $\sqrt[3]{4} \times 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x) = x^3 - 4x^2 + x$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

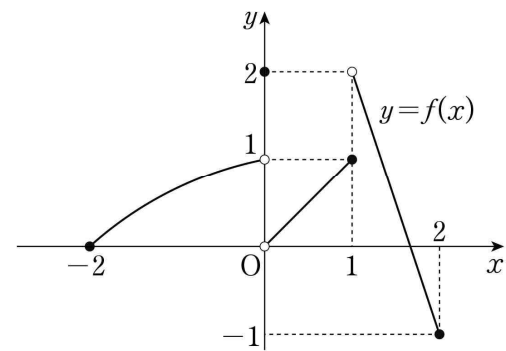
3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_4 = 2a_3 + 3a_2$$

를 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공비는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

수학 영역

5. 함수 $f(x)=(x^2+x)(2x^2-x)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

6. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\frac{1}{3}$ 일 때, $\sin\theta\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

7. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)=x^3+x$ 이고 $f(0)=-1$ 일 때, $f(2)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 두 실수 $a=(\log 3)^2-(\log 2)^2$, $b=\log_6 10$ 에 대하여 10^{ab} 의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

9. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = -3t^2 + 6t$$

이다. 양수 a 에 대하여 시각 $t=a$ 에서 점 P의 위치가 0일 때, 시각 $t=0$ 에서 $t=2a$ 까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

- ① 112 ② 114 ③ 116 ④ 118 ⑤ 120

10. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \begin{cases} 10 & (n \text{이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \\ -19 & (n \text{이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3n} a_k$ 를 만족시키는 자연수 n 의 값은? [4점]

- ① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

11. 0이 아닌 실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 4a$$

라 하자. 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -40 일 때, $f(2)$ 의 값은? [4점]

- ① -24 ② -20 ③ -16 ④ -12 ⑤ -8

12. 함수 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$ 에 대하여 원점 O에서 곡선

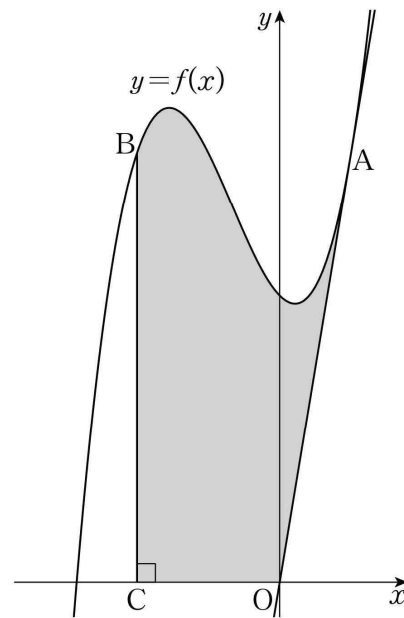
$y=f(x)$ 에 그은 접선의 접점을 A라 하고, 곡선 위의

점 $B(-2, f(-2))$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 곡선

$y=f(x)$ 와 세 선분 OA, OC, BC로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점]

- ① $\frac{45}{4}$ ② $\frac{47}{4}$ ③ $\frac{49}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{53}{4}$



13. 0이 아닌 실수 a 에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x & (x<0) \\ 1-\cos x & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 있다. 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자. $M-m=4$ 를 만족시키는 모든 a 의 값의 곱은? [4점]

- ① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$x_1 \leq x_2$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 부등식

$$\int_{x_1}^{x_2}\{f(t)-f(a)\}dt \geq \int_{x_1}^{x_2}f'(a)(t-a)dt$$

를 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 범위가 $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이다.

$f(1)=15, f'(1)=1$ 일 때, $f(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

15. 세 실수 $a, p, q (p < q)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=\begin{cases} |2^x-4| & (x\leq p \text{ 또는 } x\geq q) \\ a+\log_2 x & (p<x<q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\frac{p+q}{2}\right)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3}{2}$
- ② 2
- ③ $\frac{5}{2}$
- ④ 3
- ⑤ $\frac{7}{2}$

단답형

16. 방정식

$$\log_3(x-2)=\log_9(x+10)$$

을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

17. x 에 대한 방정식 $x^3+3x^2-k=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 자연수 k 의 개수를 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^8 a_k=8, \sum_{k=1}^8 a_k^2=20$$

일 때, $\sum_{k=1}^8 (a_k+3)(a_k-1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

수학 영역

19. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

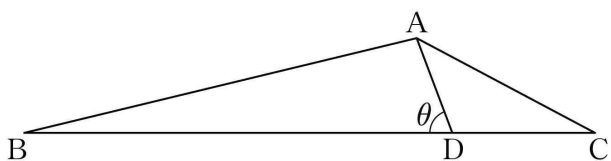
$$\int_0^x \{f(t) + t^2\} dt = xf(x) - x^3$$

을 만족시킬 때, $\int_0^4 f'(x)dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 3:1로 내분하는 점을 D라 하고, $\angle ADB = \theta$ 라 하자.

$$\overline{AD} = \sqrt{2}, \quad \overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{n} & (a_n \geq 3) \\ 10 & (a_n < 3) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_6 = 2$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ |f(x)| - |2x^2 - 8| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역 (확률과 통계)

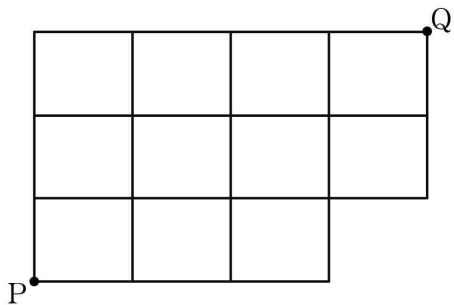
1회

5지선다형

23. ${}_4H_3$ 의 값은? [2점]

- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

24. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 P지점에서 출발하여 Q지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? [3점]



- ① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

25. 네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 a 가 적어도 한 번 이상 나오는 경우의 수는? [3점]

- ① 170 ② 175 ③ 180 ④ 185 ⑤ 190

26. 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 모두 4 이상이 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

- ① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32



수학 영역 (확률과 통계)

27. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는? [3점]

- (가) $x = 1, 2, 3, 4, 5$ 일 때 $f(x) \leq f(x+1)$ 이다.
(나) x 가 3의 배수이면 $(f \circ f)(x) = x$ 이다.

- ① 48 ② 52 ③ 56 ④ 60 ⑤ 64

28. 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 흰색 접시와 문자 A, B, C가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 검은색 접시가 있다. 이 7개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓을 때, 다음 조건을 만족시키도록 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

- (가) 검은색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.
(나) 홀수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않고, 짝수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.

- ① 84 ② 88 ③ 92 ④ 96 ⑤ 100

단답형

29. 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d 라 하자. $a \times b \times c \times d$ 가 16의 배수가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하시오. [4점]

30. 검은 공 4개와 흰 공 4개를 5명의 학생 A, B, C, D, E에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

- (가) 세 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합은 홀수이다.
(나) 학생 D가 받는 공의 개수는 학생 E가 받는 공의 개수의 2배이다.

- * 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
 - 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

1회

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{4n^2 - 1}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

24. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)a_n}{n^2} = 3$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{3n^2 + 1}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

25. 자연수 k 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을

$$a_n = \frac{(k^2 + 9)^n + 30^n}{(10k)^n}$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하도록 하는 모든 자연수 k 의 개수는? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

26. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k - k^2}{k+1} = 2n^2 - n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2 + 1}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수학 영역(미적분)

27. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$0 < x < 3$ 일 때, x 에 대한 방정식 $\sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $2n$ 이다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

28. 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx$ ($a>0$)이 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$ 의 값이 존재한다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 k 가 존재할 때,

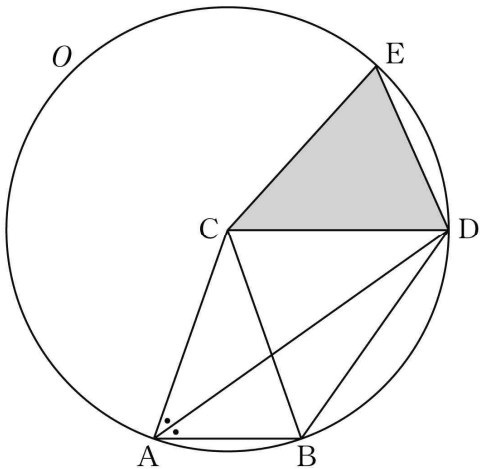
$g\left(-\frac{1}{2}\right)\times g(2)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① $6\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $9\sqrt{3}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

단답형

29. 그림과 같이 자연수 $n(n \geq 2)$ 에 대하여 중심이 C 이고 반지름의 길이가 n 인 원 O 와 $\overline{AB}=2$ 를 만족시키는 원 O 위의 두 점 A, B 가 있다. $\angle BAC$ 를 이등분하는 직선이 원 O 와 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 D 라 하자. 점 B 를 포함하지 않는 호 AD 위의 점 E 에 대하여 $\overline{BD}:\overline{DE}=\sqrt{2}:1$ 일 때, 삼각형 CDE 의 넓이를 S_n 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{S_n}{n} \right) = \frac{q}{p} \sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



30. 함수 $f(x)$ 는 $0 \leq x < 2$ 일 때 $f(x) = x(2-x)$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 이다. 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하고 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) r 은 유리수이다.
(나) 함수 $f(x)$ 가 $x = a_k$ 에서 극값을 갖고 $0 < a_k < 10$ 인 자연수 k 의 개수는 3이다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_{n+1} + a_{2n}}{a_{n+1} + a_n} = \frac{81}{10}$ 일 때, $a_7 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

5지선다형

23. 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 단축의 길이는? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 한 점근선의 방정식이 $y = \frac{1}{3}x$ 일 때, 양수 a 의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

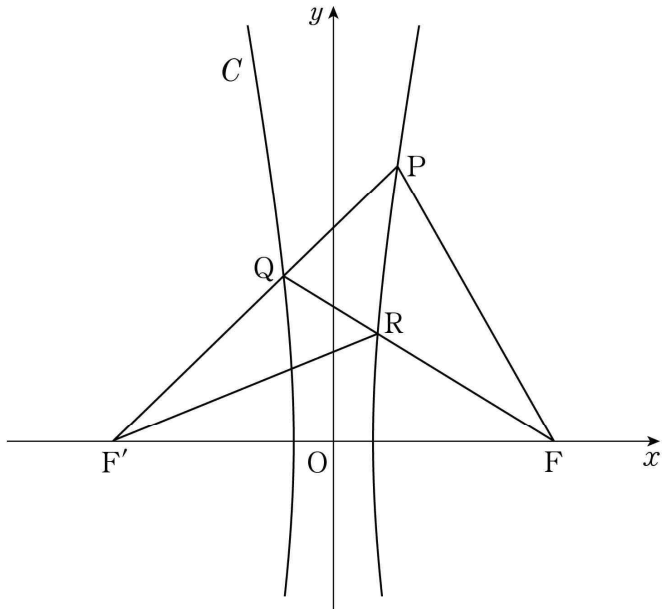
25. 초점이 F 인 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 점 P 에 대하여 선분 FP 를 지름으로 하는 원의 넓이가 25π 일 때, 이 원의 중심에서 포물선의 준선까지의 거리는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

26. 두 초점이 F(c, 0), F'(-c, 0) ($c > 0$) 이고 장축의 길이가 2 인 타원이 있다. 이 타원 위에 있는 제2사분면 위의 점 P 에 대하여 직선 F'P 가 y 축과 점 Q 에서 만난다. 직선 FP 가 선분 F'Q 의 수직이등분선일 때, c 의 값은? [3점]

① $3 - 2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2} - 1$ ③ $2\sqrt{3} - 3$
④ $\sqrt{3} - 1$ ⑤ $2\sqrt{2} - 2$

27. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이고 주축의 길이가 2인 쌍곡선 C 가 있다. 쌍곡선 C 위에 있는 제1사분면 위의 점 P 에 대하여 선분 $F'P$ 가 쌍곡선 C 와 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 Q 라 하고, 선분 FQ 가 쌍곡선 C 와 만나는 점 중 Q 가 아닌 점을 R 이라 하자. $\overline{PQ} = 4$ 이고 삼각형 $F'RQ$ 의 둘레의 길이가 16일 때, 삼각형 FPQ 의 둘레의 길이는? [3점]



- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

28. 직선 $y = a$ ($a > 0$)이 두 포물선

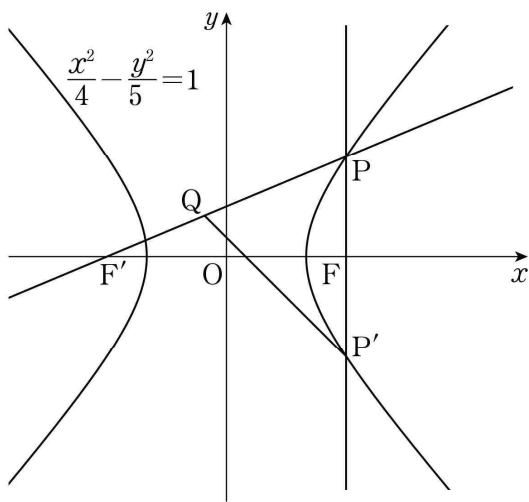
$$C_1 : y^2 = 12x, \quad C_2 : y^2 = -6x$$

와 만나는 점을 각각 P , Q 라 하고, 두 포물선 C_1 , C_2 의 초점을 각각 F_1 , F_2 라 하자. 사각형 PQF_2F_1 의 둘레의 길이가 41일 때, 사각형 PQF_2F_1 의 넓이는? [4점]

- ① 76 ② 78 ③ 80 ④ 82 ⑤ 84

단답형

29. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 이 있다. 직선 $x=c$ 가 이 쌍곡선과 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P , 제4사분면 위의 점을 P' 이라 하자. 선분 $F'P$ 위에 $\overline{PP'} = \overline{QP'}$ 인 점 Q 를 잡자. 두 점 P , P' 을 초점으로 하고 점 Q 를 지나는 타원의 장축의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 두 초점이 $F(0, 4)$, $F'(0, -4)$ 이고, 장축의 길이가 10인 타원이 있다. 이 타원 위에 있는 제1사분면 위의 점 중 $\angle F'FP = \frac{\pi}{3}$ 를 만족시키는 점 P 에 대하여 직선 FP 가 x 축과 만나는 점을 Q 라 하자. 점 Q 를 초점으로 하고 준선이 $x=a$ ($a < 0$)인 포물선이 점 P 를 지난다. 직선 FP 가 이 포물선과 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 R 이라 할 때, $\overline{PR} = p+q\sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이고, p , q 는 유리수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

01 정답 ② *지수법칙-밑이 같은 계산 [정답률 93%]

(정답 공식: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 이다.)

1st 지수법칙을 이용하여 값을 구해.

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} \text{이므로 } \sqrt[3]{4} = \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt[3]{4} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

02 정답 ④ * $h \rightarrow 0$ 일 때의 미분계수의 정의 [정답률 96%]

(정답 공식: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$)

1st 미분계수의 정의를 이용하자.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \text{에서}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \text{에서 } a=3 \text{일 때이므로 } f'(3) \text{이 돼}$$

2nd $f(x)$ 를 미분하여 $f'(3)$ 의 값을 구하자.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$$

자연수 n 에 대하여 함수 $y = x^n$ 의 도함수는 $y' = nx^{n-1}$ 이고
 함수 $y = f(x) + g(x)$ 의 도함수는 $y' = f'(x) + g'(x)$

$$\therefore f'(3) = 3 \times 3^2 - 8 \times 3 + 1 = 4$$

03 정답 ③ *등비수열의 특정항 구하기 - 특정항 이용 [정답률 91%]

(정답 공식: 첫째항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$ 이다.)

1st 주어진 식을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타내어 공비를 구해.

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$a > 0$, $r > 0$ 이다.

등비수열의 모든 항이 양수이면 첫째항이 양수이고 공비도 양수여야 해.

이때, $a_n = ar^{n-1}$ 이므로 $a_2 = ar$, $a_3 = ar^2$, $a_4 = ar^3$ 이고

이것을 $a_4 = 2a_3 + 3a_2$ 에 대입하면 $ar^3 = 2ar^2 + 3ar$ 에서

$$ar^3 - 2ar^2 - 3ar = 0, r^2 - 2r - 3 = 0, (r+1)(r-3) = 0$$

$$\therefore r = 3 (\because r > 0) \rightarrow a > 0, r > 0 \text{이므로 } ar \neq 0 \text{이지? 즉, 양변을 } ar \text{로 나눌 수 있어}$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비는 3이다.

04 정답 ② *함수의 좌극한값과 우극한값 [정답률 97%]

(정답 공식: 그래프를 따라가며 좌극한값이나 우극한값을 찾는다.)

1st 주어진 그래프에서 $x=0$ 에서의 좌극한값, $x=1$ 에서의 우극한값을 각각 구하자.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 의 값이 0의 왼쪽에서 0으로 접근할 때, 그래프를 따라가면 1에 수렴한다.

$x=0$ 에서의 좌극한값이야.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

마찬가지로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 의 값이 1의 오른쪽에서 1로 접근할 때, 그래프를 따라가면 2에 수렴한다.

$x=1$ 에서의 우극한값이야.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - 2 = -1$$

05 정답 ⑤ *곱의 미분법을 이용하여 미분계수 구하기 [정답률 93%]

(정답 공식: $y=f(x)g(x)$ 일 때, $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이다.)

1st $y=f(x)g(x)$ 의 도함수는 $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 임을 이용해.

$$f(x) = (x^2 + x)(2x^2 - x) \text{에서}$$

$$f'(x) = (x^2 + x)'(2x^2 - x) + (x^2 + x)(2x^2 - x)'$$

$$y=f(x)g(x) \text{일 때, } y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= (2x+1)(2x^2-x) + (x^2+x)(4x-1)$$

실수

이 식을 전개한 다음에 $x=1$ 을 대입하면 식을 전개하는 과정에서 실수할 수 있으므로 이 식에 바로 $x=1$ 을 대입하여 $f'(1)$ 의 값을 구할 거야.

2nd 도함수 $f'(x)$ 에 $x=1$ 을 대입해.

$$\therefore f'(1) = 3 \times 1 + 2 \times 3 = 9$$

06 정답 ① *삼각함수의 성질 [정답률 77%]

(정답 공식: 삼각함수의 성질을 이용하여 θ 에 대한 삼각함수의 값으로 나타낸다.)

1st 삼각함수의 성질을 이용하여 θ 에 대한 삼각함수의 값을 구해.

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right] \rightarrow \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

2nd $\sin \theta \tan \theta$ 의 값을 구해.

$$\therefore \sin \theta \tan \theta = \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2}{-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{8}{9}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{8}{3}$$

$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 1$ 에서
 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

07 정답 ⑤ *도함수가 주어진 때 함수 구하기 [정답률 88%]

(정답 공식: 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 주어지면 $f(x) = \int f'(x)dx$ 임을 이용한다.)

1st 부정적분을 이용하여 다항함수 $f(x)$ 의 식을 구해.

$$f'(x) = x^3 + x \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$= \int (x^3 + x)dx \xrightarrow{\text{음이 아닌 정수 } n \text{에 대하여}} \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)} \cdots \textcircled{1}$$

2nd 적분상수 C 의 값을 결정하고 $f(2)$ 의 값을 구해.

$f(0) = -1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = C = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1 \text{이므로}$$

$$f(2) = 4 + 2 - 1 = 5$$

 톡톡 풀이: 정적분을 이용하여 $f(2)$ 의 값 구하기

$f(2) - f(0)$ 을 정적분으로 나타내어 $f(2)$ 의 값을 구해 보자.

$$f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x)dx = \int_0^2 (x^3 + x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \xrightarrow{\text{함수 } f(x) \text{의 한 부정적분을 } F(x) \text{라 하면}} \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= 4 + 2 - 6$$

이때, $f(0) = -1$ 이므로 $f(2) - (-1) = 6$ 에서 $f(2) = 5$

08 정답 ③ *로그의 성질의 활용 - 식의 값 [정답률 82%]

(정답 공식: 로그의 여러 가지 성질을 이용한다.)

1st ab 를 계산한 후 10^{ab} 의 값을 구해.

$$a = \frac{(\log 3)^2 - (\log 2)^2}{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)} = \frac{(\log 3 + \log 2)(\log 3 - \log 2)}{\log_a m + \log_a n = \log_a mn}$$

$$= \log 6 \times \log \frac{3}{2} \quad \log_a m - \log_a n = \log_a \frac{m}{n}$$

$$b = \log_6 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 6} = \frac{1}{\log 6} \xrightarrow{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

$$\text{이므로 } ab = \left(\log 6 \times \log \frac{3}{2} \right) \times \frac{1}{\log 6} = \log \frac{3}{2}$$

$$\therefore 10^{ab} = 10^{\log \frac{3}{2}} = 10^{\log_{10} \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

로그의 정의를 이용하면 $ab = \log \frac{3}{2} = \log_{10} \frac{3}{2}$
 에서 $10^{ab} = \frac{3}{2}$ 임을 이용하여 구할 수도 있어.

09 정답 ③ *적분을 이용한 점의 움직인 거리 [정답률 73%]

(정답 공식: 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점의 시간 t 에서의 속도가 $v(t)$ 일 때, 이 점의 시간 $t=a$ 에서의 위치는 $\int_0^a v(t)dt$ 이고, 시간 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$ 이다.)

1st 원점에서 출발한 점 P의 시간 $t=a$ 에서의 위치가 0임을 이용하여 양수 a 의 값을 구하자.

원점에서 출발한 점 P의 시간 $t=a$ 에서의 위치가 0이므로

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점의 시간 t 에서의 속도가 $v(t)$ 일 때,

이 점의 시간 $t=a$ 에서의 위치는 $\int_0^a v(t)dt$ 야.

$$\int_0^a v(t)dt = \int_0^a (-3t^2 + 6t)dt = [-t^3 + 3t^2]_0^a$$

$$= -a^3 + 3a^2 = -a^2(a-3) = 0$$

이때, a 가 양수이므로 $a=3, 2a=6$

점 P는 출발한 후 시각 $t=3$ 일 때 처음 위치로 다시 돌아와,
2nd 정적분을 이용하여 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하자.

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리는
 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도가 $v(t)$ 일 때,

시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)| dt$ 이다.

$$\int_0^6 |v(t)| dt = \int_0^6 |-3t^2 + 6t| dt$$

$$= \int_0^2 (-3t^2 + 6t) dt + \int_2^6 (3t^2 - 6t) dt$$

적분구간이 $0 \leq t \leq 2$ 이면 $|v(t)| = -3t^2 + 6t$,
 적분구간이 $2 \leq t \leq 6$ 이면 $|v(t)| = 3t^2 - 6t$ 가 돼.

$$= [-t^3 + 3t^2]_0^2 + [t^3 - 3t^2]_2^6$$

$$= \{(-8 + 12) - 0\} + \{(216 - 108) - (8 - 12)\}$$

$$= 4 + 108 + 4 = 116$$

10 정답 ⑤ *Σ의 활용 - 대입 [정답률 65%]

정답 공식: 자연수 n 이 3의 배수일 때와 3의 배수가 아닐 때로 나누어
 $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k$ 를 만족시키는 n 의 값을 구한다.

1st $\sum_{k=1}^{3m} a_k$ 를 n 으로 나타내 보.

$$\sum_{k=1}^{3m} a_k = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + (a_{3m-2} + a_{3m-1} + a_{3m})$$

$$= (10 + 10 - 19) + (10 + 10 - 19) + \cdots + (10 + 10 - 19)$$

$$= 1 + 1 + \cdots + 1 = n \quad \text{⑦}$$

10 + 10 - 19 = 10이 n 개야.

2nd $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k$ 를 만족시키는 자연수 n 의 값을 구해.

자연수 n 이 3의 배수일 때와 3의 배수가 아닐 때로 나누어 생각하자.

즉, 자연수 t 에 대하여

(i) $n=3t$ 일 때,

⑦에 의하여 $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3t} a_k = t, \sum_{k=1}^{3m} a_k = \sum_{k=1}^{3 \times 3t} a_k = 3t$ 이므로

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k \text{에서 } t=3t \quad \therefore t=0$$

그런데 t 는 자연수이므로 조건을 만족시키는 n 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $n=3t-1$ 일 때,

⑦에 의하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3t-1} a_k = \sum_{k=1}^{3(t-1)} a_k + a_{3t-2} + a_{3t-1} = (t-1) + 10 + 10 = t + 19$$

$$\sum_{k=1}^{3m} a_k = \sum_{k=1}^{3(3t-1)} a_k = 3t - 1 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k \text{에서 } t + 19 = 3t - 1, 2t = 20 \quad \therefore t = 10$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 값은

$$3t - 1 = 3 \times 10 - 1 = 29 \text{이다.}$$

(iii) $n=3t-2$ 일 때,

⑦에 의하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3t-2} a_k = \sum_{k=1}^{3(t-1)} a_k + a_{3t-2} = (t-1) + 10 = t + 9$$

$$\sum_{k=1}^{3m} a_k = \sum_{k=1}^{3(3t-2)} a_k = 3t - 2 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k \text{에서 } t + 9 = 3t - 2, 2t = 11 \quad \therefore t = \frac{11}{2}$$

그런데 t 는 자연수이므로 조건을 만족시키는 n 의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 n 의 값은 29이다.

11 정답 ① *함수의 극값을 이용한 미정계수의 결정 [정답률 80%]

정답 공식: 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀐다.

1st $f'(x)$ 를 구하고 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표를 작성하여 극솟값을 이용해 실수 a 의 값을 구해.

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 4a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax = 3x(x + 2a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2a \text{ 또는 } x = 0 \text{이므로 실수 } a \text{의 값의 범위에 따라}$$

실수 a 의 범위에 따라 극값을 가지는 x 의 값이 변해

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) $a > 0$ 일 때,

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2a$ 에서 극댓값을 갖고, $x = 0$ 에서 극솟값을 갖는다.

다항함수 $f(x)$ 가

$x=a$ 에서 극댓값 M 을 가지면 $f'(a)=0, f(a)=M$ 이고,
 $x=b$ 에서 극솟값 m 을 가지면 $f'(b)=0, f(b)=m$ 이다.

$$\text{즉, } f(0) = 4a = -40 \quad \therefore a = -10$$

이때, $a = -10 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때,

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값을 갖고, $x = -2a$ 에서 극솟값을 갖는다.

즉,

$$f(-2a) = (-2a)^3 + 3a \times (-2a)^2 + 4a$$

$$= 4a^3 + 4a = -40$$

$$a^3 + a + 10 = 0$$

$$(a+2)(a^2-2a+5) = 0$$

$$\therefore a = -2 \quad (\because a \text{는 실수})$$

(i), (ii)에 의하여 $a = -2$ 이다.

2nd $f(2)$ 의 값을 구해.

따라서 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 4a$ 에서 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 8$ 이므로

$$f(2) = 8 - 24 - 8 = -24$$

12 정답 ④ *곡선과 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이 [정답률 74%]

정답 공식: 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은
 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 이다. 구간 $[a, b]$ 에서 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸인
 부분의 넓이는 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ 이다.

1st 원점 O와 점 A를 지나는 접선의 방정식을 세워.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

이때, 점 A의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 + 4t - 1 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1) \text{이다.}$$

$$y = (3t^2 + 4t - 1)(x - t) + (t^3 + 2t^2 - t + 4) \text{이다.}$$

2nd t 의 값을 구하고 접선의 방정식을 구해.

이 접선이 원점을 지나므로 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$-2t^3 - 2t^2 + 4 = 0, -2(t-1)(t^2 + 2t + 2) = 0$$

$$\therefore t = 1$$

따라서 점 A의 좌표는 $(1, 6)$ 이고 점 A에서의 접선의 방정식은 $y=6x$ 이다.

3rd 곡선 $y=f(x)$ 와 세 선분 OA, OC, BC로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해.

이때, 곡선 $y=f(x)$ 와 세 선분 OA, OC, BC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하

면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $x=-2, x$ 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선

$y=f(x)$ 와 y 축, 직선 OA로 둘러싸인 부분의 넓이의 합과 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $x=-2, x$ 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

선분 BC를 의미해

$$\int_{-2}^0 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 f(x) dx$$

$$\text{곡선 } y=f(x) \text{와 } x \text{축 및 두 직선 } x=a, x=b \text{로 둘러싸인 부분의 넓이는 } \int_a^b |f(x)| dx \text{이다.}$$

$$= \int_{-2}^0 (x^3 + 2x^2 - x + 4) dx$$

또, 곡선 $y=f(x)$ 와 y 축, 직선 OA로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 |f(x) - 6x| dx = \int_0^1 \{f(x) - 6x\} dx \rightarrow \text{구간 } [0, 1] \text{에서 } f(x) \geq 6x \text{이다.}$$

$$\text{구간 } [a, b] \text{에서 두 곡선 } y=f(x), y=g(x) \text{로}$$

둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{이다.} = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 7x + 4) dx$$

이므로 구하는 부분의 넓이 S 는

$$S = \int_{-2}^0 (x^3 + 2x^2 - x + 4) dx + \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 7x + 4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x \right]_0^1$$

$$= \frac{34}{3} + \frac{17}{12}$$

$$= \frac{153}{12} = \frac{51}{4}$$

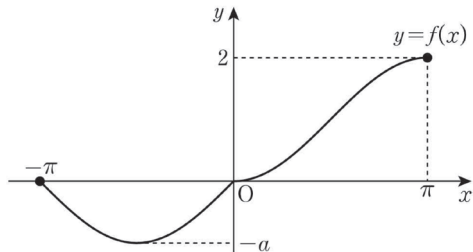
13 정답 ③ *삼각함수의 미정계수 구하기 [정답률 64%]

정답 공식: a 의 값의 범위에 따라 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다.

1st a 의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구해.

a 의 값의 범위를 나누어 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하자.

(i) $a > 0$ 일 때, $\rightarrow a > 0$ 이면 구간 $[-\pi, 0]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이야.



닫힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로

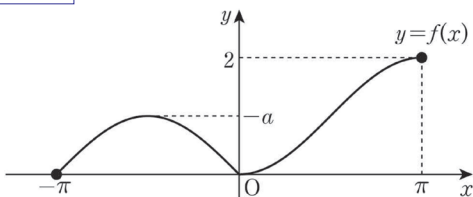
함수 $f(x)$ 는 $x=\pi$ 에서 최댓값을 가지고, $x=-\frac{\pi}{2}$ 에서 최솟값을 가진다.

즉, $M=f(\pi)=1-\cos \pi=1-(-1)=2$,

$m=f(-\frac{\pi}{2})=a\sin(-\frac{\pi}{2})=a \times (-1)=-a$ 이다.

이때, $M-m=4$ 에서 $2-(-a)=4$, $2+a=4 \quad \therefore a=2$

(ii) $-2 \leq a < 0$ 일 때, $\rightarrow -2 \leq a < 0$ 이면 구간 $[-\pi, 0]$ 에서 $0 \leq f(x) \leq -a$ 야.



닫힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로

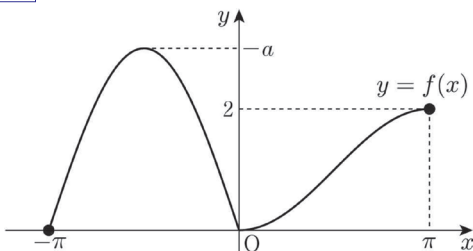
함수 $f(x)$ 는 $x=\pi$ 에서 최댓값을 가지고, $x=0$ 또는 $x=-\pi$ 에서 최솟값을 가진다.

즉, $M=f(\pi)=1-\cos \pi=2$,

$m=f(0)=1-\cos 0=1-1=0$ 이다.

이때, $M-m=2-0=2$ 이므로 $M-m=4$ 를 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a < -2$ 일 때, $\rightarrow a < -2$ 이면 구간 $[-\pi, 0]$ 에서 $0 \leq f(x) \leq -a$ 야.



닫힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로

함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{\pi}{2}$ 에서 최댓값을 가지고, $x=0$ 또는 $x=-\pi$ 에서 최솟값을 가진다.

즉, $M=f(-\frac{\pi}{2})=a\sin(-\frac{\pi}{2})=-a$,

$m=f(0)=1-\cos 0=0$ 이다.

이때, $M-m=4$ 에서 $-a-0=4 \quad \therefore a=-4$

(i)~(iii)의 의하여 조건을 만족시키는 a 의 값은 2, -4 이므로

그 곱은 $2 \times (-4) = -8$ 이다.

14 정답 ④ *사차함수의 유추 [정답률 46%]

정답 공식: $\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx$

1st 적분구간이 같음을 이용하여 주어진 식을 변형해.

$$\int_{x_1}^{x_2} \{f(t)-f(a)\}dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)dt \text{에서}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_2} f(a)dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(a)dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geq \int_{x_1}^{x_2} \{f'(a)(t-a)+f(a)\}dt$$

$x_1 \leq x_2$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 위 부등식을 만족하려면 사차함수

활정 적분구간 $[x_1, x_2]$ 의 모든 실수 x 에서 접선보다 사차함수의 그래프가 위쪽에 있어야 부등식을 만족해, 식의 모양을 통해 무엇을 의미하는지 파악하자.

$f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$ 이어야 한다.

2nd 두 점 $(-1, f(-1)), (3, f(3))$ 을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 사차함수 $f(x)$ 를 구하자.

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$ 를 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 범위가 $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이므로

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 그래프는

두 점 $(-1, f(-1)), (3, f(3))$ 을 지나는 직선에서 공통으로 접한다.

두 점 $(-1, f(-1)), (3, f(3))$ 을 지나는 직선의 방정식을

$y=mx+n$ (m, n 은 상수)라 하면

$f(x)-(mx+n)=(x+1)^2(x-3)^2 \cdots$ ㉠이고,

$x=-1, x=3$ 인 점에서 x 축에 접하므로 $(x+1)^2, (x-3)^2$ 을 인수로 가져,

즉, 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)-(mx+n)=(x+1)^2(x-3)^2$

양변을 미분하면

$$f'(x)-m=2(x+1)(x-3)^2+2(x+1)^2(x-3) \cdots$$
 ㉡

$y=f(x)g(x)$ 일 때, $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$f(1)=15, f'(1)=1$ 을 이용하기 위해

㉠, ㉡에 각각 $x=1$ 을 대입하자.

$$㉡에서 f'(1)-m=2 \times 2 \times (-2)^2+2 \times 2^2 \times (-2)$$

$$1-m=16-16 \quad \therefore m=1$$

$$㉠에서 f(1)-(m+n)=2^2 \times (-2)^2$$

$$15-(1+n)=16 \quad \therefore n=-2$$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$f(x)-(x-2)=(x+1)^2(x-3)^2$$

$$\therefore f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+x-2$$

3rd $f(4)$ 의 값을 구하자.

$$\therefore f(4)=5^2 \times 1^2+4-2=27$$

15 정답 ② *지수함수와 로그함수의 그래프 [정답률 41%]

정답 공식: 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되도록 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려본다.

1st 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되도록 하는 p, q 의 값을 구해.

함수 $y=|2^x-4|$ 의 치역은 $\{y|y \geq 0\}$ 이고 함수 $y=a+\log_2 x$ 의

치역은 실수 전체의 집합이다.

이때, 함수 $f(x)$ 의 치역이 실수 전체의 집합이므로

$p \leq 0 \cdots$ ㉠ $\rightarrow p > 0$ 이면 함수 $f(x)$ 가 아주 작은 값을 함숫값으로 가질 수 없으므로 치역이 실수 전체의 집합이 아니야.

한편, $p < x < q$ 에서 $f(x)=a+\log_2 x$ 이고 함수 $f(x)$ 의 정의역이 실수 전체의

집합이므로 $p \geq 0 \cdots$ ㉡ $\rightarrow$ 함수 $y=a+\log_2 x$ 의 정의역은 $\{x|x > 0\}$ 이므로 $p < 0$ 이면 구간 $(p, 0)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 정의되지 않아, 즉, 정의역이 실수 전체의 집합이 아니야.

㉠, ㉡에서 $p=0$

즉, $\{f(x)|x \leq 0\}=\{y|3 \leq y < 4\}$ 인데, 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이므로

$\{f(x)|x > 0\}=\{y|y < 3 \text{ 또는 } y \geq 4\}$ 이고

$\{f(x)|0 < x < q\}=\{y|y < a+\log_2 q\}=\{y|y < 3\}$,

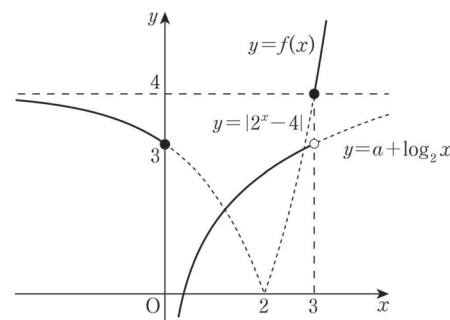
$\{f(x)|x \geq q\}=\{y|y \geq 4\}$ 이어야 한다.

즉, 함수 $y=|2^x-4|$ 의 그래프가 점 $(q, 4)$ 를 지나야 하므로

$$|2^q-4|=4 \text{에서 } 2^q-4=4, 2^q=8 \quad \therefore q=3$$

$2^q > 0$ 이므로 $2^q-4 > -4$ 지? 즉, $2^q-4 \neq -40$ 야.

2nd a 의 값을 구하고 함수 $f(x)$ 의 식을 완성해.



함수 $y=a+\log_2 x$ 의 그래프가 점 $(3, 3)$ 을 지나야 하므로

$$3=a+\log_2 3 \text{에서 } a=3-\log_2 3$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} |2^x-4| & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ 3-\log_2 3+\log_2 x & (0 < x < 3) \end{cases}$$

3rd $f(\frac{p+q}{2})$ 의 값을 구해.

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{p+q}{2}\right) &= f\left(\frac{3}{2}\right) = 3-\log_2 3+\log_2 \frac{3}{2} \\ &= 3-\log_2 3+\log_2 3-\frac{\log_2 2}{\log_2 a} = 3-1=2 \end{aligned}$$

16 정답 6 *로그방정식의 해 - 밑을 같게 만드는 경우 [정답률 87%]

(정답 공식: $\log_g f(x) = \log_g g(x)$ 이면 $f(x) = g(x)$ (단, $f(x) > 0, g(x) > 0$)이다.)

1st 진수 조건을 확인해.

진수 조건에 의하여 $x-2 > 0$ 에서 $x > 2$ 이고, $x+10 > 0$ 에서 $x > -10$ 이므로

$$x > 2 \cdots \textcircled{1}$$

2nd 주어진 방정식을 만족시키는 실수 x 의 값을 구해.

$$\log_9 (x+10) = \log_{3^2} (x+10) = \frac{1}{2} \log_3 (x+10) \text{이므로}$$

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

$$\log_3 (x-2) = \log_9 (x+10) \text{에서 } \log_3 (x-2) = \frac{1}{2} \log_3 (x+10)$$

$$2 \log_3 (x-2) = \log_3 (x+10), \log_3 (x-2)^2 = \log_3 (x+10)$$

$$m \log_a b = \log_a b^m$$

$$(x-2)^2 = x+10, x^2 - 4x + 4 = x+10, x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x+1)(x-6) = 0 \quad \therefore x = 6 (\because \textcircled{1})$$

17 정답 3 *삼차방정식의 실근의 개수 [정답률 81%]

(정답 공식: 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 삼차함수 $f(x)$ 의 (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이어야 한다.)

1st $f(x) = x^3 + 3x^2 - k$ 라 하고 함수 $f(x)$ 의 극대와 극소를 찾아.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

최고치항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 $x = a, x = \beta (a < \beta)$ 에서 극값을 가지면 $x = a$ 에서 극대, $x = \beta$ 에서 극소야.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값을 갖고 $x = 0$ 에서 극솟값을 가지므로

$$\text{함수 } f(x) \text{의 극댓값은 } f(-2) = -8 + 12 - k = 4 - k,$$

$$\text{극솟값은 } f(0) = -k \text{이다.}$$

2nd 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖는 조건을 이용하여 자연수 k 의 개수를 구해.

이때, 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로

$$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) < 0 \text{이어야 한다.}$$

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $f(x)$ 의 (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이어야 해. 즉, 극댓값과 극솟값의 부호가 다르므로 되도록 (극댓값) > 0 , (극솟값) < 0 이면 돼.

$$(4-k) \times (-k) < 0, k(k-4) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 4$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 k 는 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

18 정답 12 *합의 기호 $\sum$ 의 성질 [정답률 77%]

(두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 과 상수 c 에 대하여 $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$ 이다.)

1st 주어진 조건을 이용하여 $\sum_{k=1}^8 (a_k + 3)(a_k - 1)$ 의 값을 구해.

$$\sum_{k=1}^8 (a_k + 3)(a_k - 1) = \sum_{k=1}^8 (a_k^2 + 2a_k - 3)$$

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 과 상수 c 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^8 a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^8 a_k + \sum_{k=1}^8 (-3) = 20 + 2 \times 8 + (-3) \times 8$$

$$= 20 + 16 - 24 = 12 \quad \sum_{k=1}^n c = c + c + c + \cdots + c = cn$$

19 정답 32 *정적분과 미분의 관계 [정답률 72%]

(정답 공식: $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$)

1st 주어진 식을 간단히 정리하고, 정적분과 미분의 관계와 곱의 미분법을 이용하여 양변을 미분해.

$$\text{주어진 식 } \int_0^x \{f(t) + t^2\} dt = xf(x) - x^3 \text{의 양변을}$$

$$\text{상수 } a \text{에 대하여 } \int_a^x f(t) dt \text{ 꼴이 주어지면 } \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x) \text{임을 이용해.}$$

x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + x^2 = f(x) + xf'(x) - 3x^2$$

$$xf'(x) = 4x^2$$

다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 도 다항함수이므로

$$xf'(x) = 4x^2 \text{에서 } f'(x) \text{가 다항함수이면 } f'(x) = 4x \text{일 때 등식이 성립해.}$$

$$f'(x) = 4x$$

2nd $\int_0^4 f'(x) dx$ 의 값을 구하자.

$$\therefore \int_0^4 f'(x) dx = \int_0^4 4x dx = [2x^2]_0^4 = 32$$

20 정답 71 *사인법칙과 코사인법칙 [정답률 45%]

(정답 공식: 외접원의 반지름의 길이가 R 인 삼각형 ABC 에서 사인법칙 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, 코사인법칙 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 가 성립한다.)

1st 코사인법칙을 이용하여 선분 AB 의 길이를 구해.

$$\overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1 \text{이므로 양수 } a \text{에 대하여 } \overline{AB} = 2a, \overline{AC} = a \text{라 하고}$$

$$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 1 \text{이므로 양수 } b \text{에 대하여 } \overline{BD} = 3b, \overline{DC} = b \text{라 하면}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{2} \text{이므로 삼각형 } ABD \text{에서 코사인법칙에 의하여}$$

삼각형 ABC 에서 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$ 가 성립하고 이를 코사인법칙이라 해

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{BD} \times \cos \theta$$

$$4a^2 = 2 + 9b^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3b \times \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore 4a^2 = 9b^2 - 3b + 2 \cdots \textcircled{1}$$

한편, $\angle ADC = \pi - \theta$ 이므로

$$\cos (\angle ADC) = \cos (\pi - \theta) = -\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{이다.}$$

$$\cos (\pi - x) = -\cos x$$

즉, 삼각형 ADC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \cos (\angle ADC)$$

$$a^2 = 2 + b^2 - 2 \times \sqrt{2} \times b \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\therefore a^2 = b^2 + b + 2 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 4$ 를 하면 $4a^2 = 4b^2 + 4b + 8$ 이고 여기에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$9b^2 - 3b + 2 = 4b^2 + 4b + 8 \text{에서 } 5b^2 - 7b - 6 = 0$$

$$(b-2)(5b+3) = 0 \quad \therefore b = 2 (\because b > 0)$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a^2 = 4 + 2 + 2 = 8 \quad \therefore a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} (\because a > 0)$$

$$\therefore \overline{AB} = 2a = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

2nd 삼각형 ABD 의 외접원의 넓이를 구해.

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4} \text{이고 삼각형 } ABD \text{의}$$

외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

외접원의 반지름의 길이가 R 인 삼각형 ABC 에서 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ 이 성립하고 이를 사인법칙이라 해.

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = 2R, \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = 2R, 2R = \frac{16}{\sqrt{7}} \quad \therefore R = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

따라서 삼각형 ABD 의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{64}{7} \pi \text{이므로 } p = 7, q = 64 \text{이다.}$$

$$\therefore p + q = 7 + 64 = 71$$

21 정답 381 *수열의 귀납적 정의 - 경우 나누기 [정답률 34%]

(정답 공식: 조건을 만족시키는 a_5 의 값을 구한 후 그에 따른 a_4, a_3, a_2, a_1 의 값을 차례로 구한다.)

1st a_5 의 값을 구해.

$$a_6 = 2 \text{에 의하여 } a_5 \geq 3 \text{이므로 } a_6 = \frac{a_5}{5} \text{에서 } 2 = \frac{a_5}{5} \quad \therefore a_5 = 10$$

$$a_5 < 30 \text{이면 } a_6 = 10 \text{이 되어야 하는데 } a_6 = 2 \neq 10 \text{이므로 } a_5 \geq 30 \text{야.}$$

2nd a_4 의 값의 범위에 따라 조건을 만족시키는 a_1 의 값을 구해.

(i) $a_4 \geq 3$ 일 때,

$$a_5 = \frac{a_4}{4} \text{에서 } 10 = \frac{a_4}{4} \quad \therefore a_4 = 40$$

$$\underline{a_3 \geq 3 \text{이므로 } a_4 = \frac{a_3}{3} \text{에서 } 40 = \frac{a_3}{3} \quad \therefore a_3 = 120}$$

$$\rightarrow a_4 = 40 \neq 100 \text{이므로 } a_3 \geq 30 \text{야.}$$

$$\underline{a_2 \geq 3 \text{이므로 } a_3 = \frac{a_2}{2} \text{에서 } 120 = \frac{a_2}{2} \quad \therefore a_2 = 240}$$

$$\rightarrow a_3 = 120 \neq 100 \text{이므로 } a_2 \geq 30 \text{야.}$$

$$\underline{a_1 \geq 3 \text{이므로 } a_2 = \frac{a_1}{1} \text{에서 } 240 = \frac{a_1}{1} \quad \therefore a_1 = 240}$$

$$\rightarrow a_2 = 240 \neq 100 \text{이므로 } a_1 \geq 30 \text{야.}$$

240은 자연수이므로 이때의 조건을 만족시키는 a_1 의 값은 240이다.

(ii) $a_4 < 3$ 일 때,

$$a_4 \neq 10 \text{이므로 } a_3 \geq 3 \text{이고, } a_4 = \frac{a_3}{3} \text{에서 } a_3 = 3a_4$$

$$\therefore 3 \leq a_3 < 9 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_4 < 30 \text{이므로 } a_3 = 3a_4 < 9$$

$$a_3 \neq 10 \text{이므로 } a_2 \geq 3 \text{이고, } a_3 = \frac{a_2}{2} \text{에서 } a_2 = 2a_3$$

$$\text{즉, } \textcircled{1} \text{에 의하여 } 6 \leq a_2 < 18 \cdots \textcircled{2}$$

- i) $a_1 \geq 3$ 일 때,
 $a_2 = \frac{a_1}{1}$ 에서 $a_1 = a_2$ 이고 a_1 은 자연수이므로 ㉠에 의하여 조건을 만족시키는 a_1 의 값은 6, 7, 8, ..., 17이다.
- ii) $a_1 < 3$ 일 때,
 $a_2 = 10$ 이고 ㉠을 만족시킨다.
 이때, a_1 은 자연수이므로 조건을 만족시키는 a_1 의 값은 1, 2이다.
- i), ii)에 의하여 이때의 조건을 만족시키는 a_1 의 값은 1, 2, 6, 7, 8, ..., 17이다.
- (i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 a_1 의 값은 240, 1, 2, 6, 7, 8, ..., 17이고 그 합은

$$240 + 1 + 2 + \frac{(6+7+8+\cdots+17)}{2} = 243 + \frac{12 \times (6+17)}{2} = 243 + 138 = 381$$

첫째항이 a 이고 제 n 항이 l 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은 $\frac{n(a+l)}{2}$ 이다.

22 정답 154 *함수의 연속성과 미분가능성 [정답률 18%]

정답 공식: 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $x=a$ 에서 연속이고 $x=a$ 에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 한다.

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ |f(x)| - |2x^2 - 8| & (x \geq 0) \end{cases}$$

단서 1 $x \geq 0$ 에서 절댓값이 포함된 함수이기 때문에 절댓값 안의 식의 값이 0이 되는 점이 첨점이 될 수 있으므로 그 점에서의 미분가능성을 판단해야 해.

이라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,

단서 2 미분가능하면 연속이므로 $x=0$ 에서 연속임을 알 수 있어, 또한 $y = |2x^2 - 8| (x \geq 0)$ 에서 미분가능하지 않은 점에서도 $g(x) = |f(x)| - |2x^2 - 8|$ 은 미분가능해야 해.

$f(-5)$ 의 값을 구하시오. (4점)

단서+발상

- 단서 1** 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $x=0$ 에서의 연속성과 미분가능성을 이용하여 $f(0)$ 의 값과 $f'(0)$ 의 값을 구할 수 있다. **발상**
- 단서 2** 함수 $y = |2x^2 - 8|$ 의 첨점에서도 함수 $g(x)$ 가 미분가능함을 이용하여 또 다른 관계식을 구한다. **발상**
- 모든 단서들을 조합해 삼차함수 $f(x)$ 를 찾아서 $f(-5)$ 의 값을 구한다. **해결**

----- [문제 풀이 순서] -----

1st 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속임을 이용해.

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다.

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -f(0), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = |f(0)| - 8 = g(0) \text{에서}$$

$-f(0) = |f(0)| - 8$ 이어야 한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이라면

- (i) $f(a)$ 가 존재하고
 (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하며
 (iii) $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 이어야 해.

위 식에서

$$(i) f(0) \geq 0 \text{이면 } -f(0) = f(0) - 8 \quad \therefore f(0) = 4$$

$$(ii) f(0) < 0 \text{이면 } -f(0) = -f(0) - 8 \text{ 이므로 모순이다.}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(0) = 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$g(0) = |f(0)| - 8 = -4$$

2nd 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 해.

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

주의 함수가 미분가능하려면 '연속'이면서 '미분계수가 존재'해야 해.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-f(0+h) + f(0)}{h} \\ x < 0 \text{에서 } g(x) &= -f(x) \text{이고, } g(0) = -f(0) \text{이므로} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -f'(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(0+h)| - |2h^2 - 8| + 4}{h} \\ x \geq 0 \text{에서 } g(x) &= |f(x)| - |2x^2 - 8| \text{이고, } g(0) = -f(0) = -4 \text{이므로} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(0+h)| - |2h^2 - 8| + 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(0+h)| + 2h^2 - 8 + 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(0+h)| - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h^2}{h} \quad (\because f(0) = 4) \\ \text{삼차함수 } f(x) \text{에 대하여 } f(0) &= 4 \text{이므로} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} f(0+h) > 0, \text{ 즉 } \lim_{h \rightarrow 0^+} |f(0+h)| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} f(0+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} 2h = f'(0) \end{aligned}$$

함수 $g(x)$ 의 $x=0$ 에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 하므로

$$-f'(0) = f'(0)$$

$$\therefore f'(0) = 0 \cdots \textcircled{2}$$

3rd 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 해.

$x \geq 0$ 에서 함수 $y = |2x^2 - 8|$ 의 그래프가 x 축을 통과하는 점에서 그래프가 꺾이지므로 이 점에서 미분가능하지 않은 첨점이 생긴다.

즉, $x=2$ 에서 첨점이 생기므로 함수 $y = |2x^2 - 8|$ 은 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

그러나 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능해야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| - |2(2+h)^2 - 8| - |f(2)|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| + 2(2+h)^2 - 8 - |f(2)|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h^2 + 8h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h^2 + 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (2h + 8) = 8 \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + 8$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - |2(2+h)^2 - 8| - |f(2)|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - 2(2+h)^2 + 8 - |f(2)|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - 2(2+h)^2 + 8 - |f(2)|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h^2 + 8h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - 8$$

함수 $g(x)$ 의 $x=2$ 에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + 8$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - 8 \cdots \textcircled{3}$$

즉, ㉢에서 함수 $|f(x)|$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\therefore f(2) = 0 \cdots \textcircled{4}$$

합정 삼차함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수야. 그런데 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축을 통과하는 점에서 그래프가 꺾여지므로 이 점에서 미분가능하지 않은 첨점이 생겨, $x=2$ 에서 미분가능하지 않으므로 $f(2) = 0$ 이 돼.

$$\text{이제 } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} = -|f'(2)| \text{와}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} = |f'(2)| \text{를 ㉢에 대입하면}$$

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 $x=2$ 에서 꺾여 올라가는 형태이므로 $y = |f(x)|$ 의 $x=2$ 에서의 좌미분계수는 음의 부호를, 우미분계수는 양의 부호를 가져

$$-|f'(2)| + 8 = |f'(2)| - 8$$

$$\therefore |f'(2)| = 8 \cdots \textcircled{5}$$

4th 삼차함수 $f(x)$ 를 찾아 $f(-5)$ 의 값을 구해.

네 식 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤을 이용하여 삼차함수 $f(x)$ 를 찾자.

㉠에서 $f(0) = 4$ 이므로

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{라 하자.}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } f'(0) = 0 \text{이므로 } c = 0$$

$$\text{즉, } f(x) = ax^3 + bx^2 + 4, f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$\textcircled{4} \text{에서 } f(2) = 8a + 4b + 4 = 0$$

$$\textcircled{5} \text{에서 } |f'(2)| = |12a + 4b| = 8$$

두 식을 연립하면

$$4b = -8a - 4 \text{를 } |12a + 4b| = 8 \text{에 대입해.}$$

$$|12a + 4b| = |12a + (-8a - 4)| = |4a - 4| = 8$$

$$4a - 4 = 8 \text{일 때, } a = 3, b = -7$$

$$4a - 4 = -8 \text{일 때, } a = -1, b = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4 \text{ 또는 } f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \text{이다.}$$

(i) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$ 인 경우

$$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4 = (x-1)(x-2)(3x+2) \text{이므로}$$

함수 $g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 좌미분계수와 우미분계수를 구해 보면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(1+h)| + 2(1+h)^2 - 8 - |f(1)| + 6}{h} \\ \text{함수 } f(x) \text{의 최고차항의 계수가 양수이고} \\ f\left(-\frac{2}{3}\right) &= f(1) = f(2) = 0 \text{이므로 그래프의 개형을 그려보면} \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} f(1+h) > 0, \lim_{h \rightarrow 0^+} f(1+h) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h^2+4h}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h^3+2h^2-5h}{h} + 4 \\
&= -1 \\
&\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(1+h)|+2(1+h)^2-8-|f(1)|+6}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-f(1+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h^2+4h}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-3h^3-2h^2+5h}{h} + 4 \\
&= 9 \\
&\text{즉, } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} \text{ 이므로} \\
&x=1 \text{에서의 좌미분계수와 우미분계수가 다르므로 함수 } g(x) \text{는 } x=1 \text{에서 미분가능하지 않아.} \\
&\text{함수 } g(x) \text{가 } x=1 \text{에서 미분가능하지 않다.} \\
&\text{조건을 만족시키지 않으므로 구하는 함수가 아니야.} \\
&\text{(ii) } f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \text{인 경우} \\
&f(x) = -x^3 + x^2 + 4 = -(x-2)(x^2+x+2) \text{이므로} \\
&\text{함수 } g(x) \text{는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.} \\
&\text{(i), (ii)에서 } f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \\
&\therefore f(-5) = 125 + 25 + 4 = 154
\end{aligned}$$

선택과목: 확률과 통계

23 정답 ① *중복조합의 수 [정답률 86%]

[정답 공식: 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이다.

1st 중복조합의 수를 구하자.

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r \quad {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

24 정답 ⑤ *도로망에서 최단 경로 [정답률 79%]

[정답 공식: 가로가 p 칸, 세로가 q 칸인 직사각형 도로망을 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{n!}{p! \times q!}$ (단, $p+q=n$)으로 계산한다.

1st 모서리가 그려져 있다고 가정하고 같은 것이 있는 순열을 이용하여 전체 경로의 수를 구하자.

도로망을 따라 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b 라 하자.

가로가 4칸, 세로가 3칸인 직사각형 도로망을 최단 거리로 가는 경우의 수는

4개의 a 와 3개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

a, a, a, a, b, b, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같아.

$$\text{경우의 수는 } \frac{7!}{3!4!} = 35$$

[같은 것이 있는 순열]

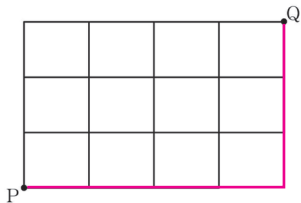
n 개 중에서 서로 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때 n 개를

일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q! \cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

2nd 전체 경로의 수에서 그려지지 않은 경로의 경우의 수를 빼서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하자.

그림과 같이 그려지지 않은 경로로 이동하는 경우의 수는 1이므로

구하는 경우의 수는 $35 - 1 = 34$ 이다.



쉬운 풀이: 경로의 합을 이용하여 P 지점에서 출발하여 Q 지점까지 가는 경로의 수 구하기

그림과 같이 경로의 합을 이용하여 구할 수 있어.

		4	10	20	34	Q
1						
1	3	6	10	14		
1	2	3	4	4		
	1	1	1			
P						

따라서 최단 거리로 가는 방법의 수를 구하면 34야.

25 정답 ② *자연수의 개수와 중복순열 [정답률 81%]

[정답 공식: 중복순열을 이용하여 전체 경우의 수를 구하고 문자 a 가 나오지 않는 경우를 빼서 경우의 수를 구한다.

1st 전체 경우의 수를 구하자.

네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는

경우의 수는 ${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$ 이다.

[중복순열의 수]

서로 다른 n 개 중에서 중복을 허락하여 r 개를 택해

일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$

2nd a 가 나오지 않는 경우를 구하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하자.

문자 a 가 나오지 않는 경우는 세 문자 b, c, d 중에서 중복을 허락하여

4개를 택해 일렬로 나열하는 경우이므로 경우의 수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81 \text{이다.}$$

서로 다른 세 문자 b, c, d 에서 중복을 허락하여 4개를 택해

일렬로 나열하는 경우의 수이므로 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$ 이다.

따라서 문자 a 가 적어도 한 번 이상 나오는 경우의 수는

$$256 - 81 = 175 \text{이다.}$$

26 정답 ③ *같은 것이 있는 문자의 나열 [정답률 58%]

[정답 공식: 3을 먼저 나열하고 2끼리 이웃한 경우와 이웃하지 않는 경우로 나누어 나열해 본다.

1st 숫자 3이 적힌 카드 세 장을 먼저 나열하고 2끼리 이웃한 경우와 이웃하지 않는 경우로 나누어 각 경우를 구하자.

숫자 3이 적힌 카드를 다음과 같이 먼저 나열해 보자.

$\square, 3, \square, 3, \square, 3, \square$

이와 같이 네 곳의 빈칸에 수를 나열할 때 숫자 2끼리 이웃한 경우와

이웃하지 않는 경우로 나누어 각 경우의 수를 구한다.

(i) 숫자 2끼리 이웃한 경우

②가 네 곳의 빈칸 중 하나를 택하는 경우의 수는 4이다.

1이 나머지 세 곳의 빈칸 중 하나를 택하는 경우의 수는 3이므로

이 경우의 수는 $1 \times 4 \times 3 = 12$ 이다.

숫자 3이 적힌 세 개의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 10이.

(ii) 숫자 2끼리 이웃하지 않는 경우

2가 네 곳의 빈칸 중 두 빈칸을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$ 이다.

나머지 두 빈칸 중 하나를 1이 택하는 경우의 수는 2이므로

$$\text{이 경우의 수는 } 1 \times {}_4C_2 \times 2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 2 = 12$$

숫자 3이 적힌 세 개의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 10이.

2nd 구하는 경우의 수를 구하자.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $12 + 12 = 24$ 이다.

다른 풀이: 숫자 1이 적힌 카드를 기준으로 하여 경우의 수를 구하기

서로 이웃한 두 장의 카드의 숫자의 합이 4 이상이 되려면 1이 적힌 카드와 이웃한 카드에는 숫자 3이 있어야 함을 이용해 보자.

(i) 숫자 1이 적힌 카드가 양 끝에 있는 경우

1, 3, $\square, \square, \square, \square$ 또는 $\square, \square, \square, \square, 3, 1$ 에서 네 곳의 빈칸에

2, 2, 3, 3이 적힌 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

[같은 것이 있는 순열]

n 개 중에서 서로 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때 n 개를

일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q! \cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6 \text{이므로 이 경우의 수는 } 2 \times 6 = 12$$

(ii) 숫자 1이 적힌 카드가 양 끝에 있지 않은 경우

숫자 1이 적힌 카드의 양옆에 3이 있어야 하므로

3, 1, 3을 한 묶음으로 보고 카드 (3, 1, 3), 2, 2, 3을 일렬로

주의 보통의 경우는 숫자를 하나로 묶으면 자리를 바꾸는 경우의 수를 곱하지만, 이 경우는 1의 양옆에 있는 3끼리 자리를 바꿔도 같은 경우임에 주의해.

$$\text{나열하는 경우의 수는 } \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $12 + 12 = 24$ 이다.

27 정답 ④ *경우의 수-함수 [정답률 60%]

[정답 공식: 두 집합 X, Y 의 원소의 개수가 각각 m, n 일 때, 함수 $f: X \rightarrow Y$ 중에서 $a < b$ 이면 $f(a) \leq f(b)$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수는 ${}_nH_m$ 이다.

1st 조건 (나)를 만족시키도록 3과 6의 함숫값을 먼저 대응시켜 $f(3), f(6)$ 의 값을 구하자.

X 의 원소 중 3의 배수는 3과 6이므로

$$(f \circ f)(3) = 3, (f \circ f)(6) = 6 \text{이다.}$$

따라서 $f(3) = 3$ 이고 $f(6) = 6$ 이다.

3의 배수 a 에 대하여 $f(a) = b$ 라 하면 $f(f(a)) = a$ 이므로 $f(b) = a$ 야.

이때, $a > b$ 이면 $f(b) > f(a)$ 이고, $a < b$ 이면 $f(b) < f(a)$ 이므로 조건 (가)를

만족시키지 않아, 따라서 $f(a) = a$ 가 되므로 $f(3) = 3, f(6) = 6$ 이야.

2nd 조건 (가)를 만족시키도록 $f(1), f(2), f(4), f(5)$ 의 경우의 수를 구하자.

$f(1), f(2)$ 의 값을 구하는 경우의 수는 1, 2, 3 중에서 중복을

허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

조건 (가)에 의하여 $f(1) \leq f(2)$ 이므로 공역의 원소 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하면 이 중 작거나 같은 수는 $f(1)$ 이 되고, 크거나 같은 수는 $f(2)$ 가 되는 거야.

예를 들어, 2와 3을 택하면 $f(1)=2, f(2)=3$ 이고 2만 2개 택하면 $f(1)=f(2)=2$ 인 거지.

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \text{이다.}$$

[중복조합]

서로 다른 n 개 중에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

$f(4), f(5)$ 의 값을 구하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6 중에서 중복을

허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \text{이다.}$$

3rd 함수의 개수를 구하자.

따라서 구하는 함수의 개수는 $6 \times 10 = 60$ 이다.

28

정답 ④ *원순열

[정답률 65%]

[정답 공식: 문자가 적힌 검은색 접시를 먼저 원순열로 나열하고 그 사이에 흰색 접시를 홀수]와 짝수끼리 서로 이웃하지 않도록 놓는다.

1st 조건 (가)를 만족시키도록 문자가 적힌 검은색 접시를 먼저 원순열로 나열하자.

A, B, C가 적힌 검은색 접시의 원 모양의 식탁에 놓는 원순열의 수는

서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

$(3-1)! = 2 \times 1 = 2$ 이다.

이때, 조건 (가)를 만족시키려면 각각의 검은색 접시 사이에 흰색 접시가 적어도 한 개 있어야 한다.

2nd 검은색 접시 사이에 흰색 접시를 놓는 모든 경우의 수를 구하자.

검은색 접시를 원순열로 나열한 이후에는 회전하여 같아지지 않기 때문에 원순열이 아닌에 주의하여 흰색 접시를 나열해야 해.

검은색 접시 사이에 놓인 흰색 접시의 수를 각각 a, b, c ($a \geq b \geq c$)라 하면

$a=2, b=1, c=1$ 이다. 검은색 접시 사이의 3개의 자리 중 a 의 위치를 고르는

검은색 접시 사이에는 총 3개의 빈자리가 생기는데 여기에 흰색 접시 4개를 나누어서 놓아야 해. 이때, 흰색 접시는 4개이므로 한 자리는 2개의 접시가 들어가고

나머지 두 자리는 1개씩 들어가게 돼.

경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$ 이다.

이때, a 위치의 접시 2개에는 홀수와 짝수를 하나씩 놓아야 한다.

a 의 위치에 짝수 또는 홀수끼리 오는 경우에는 조건 (나)를 만족시킬 수 없어.

1, 2, 3, 4 중에서 a 의 위치에 놓일 2개의 수를 고르는 경우의 수는

$4 \times 2 = 8$ 이고 1, 2, 3, 4 중에서 남은 2개의 수를 b 또는 c 에 놓는

두 접시 중 첫 번째 접시에는 1, 2, 3, 4 중에서 어떤 숫자든 상관없이 올 수 있어.

그런데 두 번째 접시는 첫 번째 접시와 같은 홀수 또는 짝수가 올 수 없으므로

첫 번째 접시가 홀수이면 짝수, 짝수이면 홀수만 올 수 있어.

따라서 경우의 수는 $4 \times 2 = 8$ 이야.

경우의 수는 2이므로 검은색 접시 사이에 흰색 접시를 놓는 모든

경우의 수는 $3 \times 8 \times 2 = 48$ 이다.

3rd 구하는 경우의 수를 구하자.

따라서 조건을 만족시키도록 접시를 놓는 경우의 수는

$$2 \times 48 = 96$$

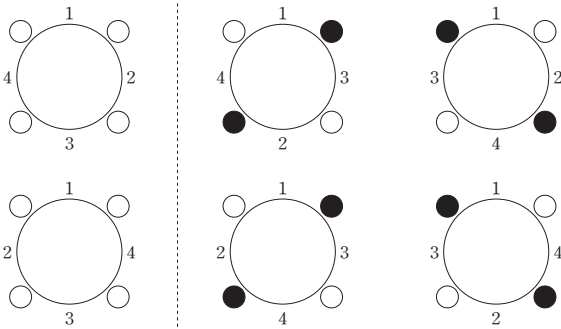
다른 풀이: 흰색 접시를 먼저 나열하고 검은색 접시를 놓는 방법으로 경우의 수 구하기

숫자 1, 2, 3, 4가 적힌 흰색 접시를 먼저 나열하고 흰색 접시 사이에

검은 접시를 놓아 보자.

숫자 1, 2, 3, 4가 적힌 흰색 접시를 원 모양의 식탁에 놓는 경우의 수는

$$3! = 6 \text{이다.}$$



위 그림에서 왼쪽의 두 경우와 같이 홀수는 홀수끼리 짝수는 짝수끼리

마주 보는 경우에는 흰색 접시 사이의 네 자리 중 세 자리 어디든

상관없이 검은색 접시를 놓으면 조건 (가)를 만족시킨다.

따라서 경우의 수는 ${}_2P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ 이므로 왼쪽 두 경우의 수의 합은

24 $\times$ 2 = 48

흰색 접시가 놓인 이후에는 원순열이 아니라, 흰색 접시 사이에 검은색 접시를 놓을 때는 순서에 따라 다른 경우가 되므로 조합이 아니라 순열로 계산해.

위 그림의 오른쪽 네 경우와 같이 홀수는 홀수끼리 짝수는 짝수끼리

마주 보지 않는 경우에는 두 홀수와 두 짝수 사이에 반드시 검은 접시를

놓아야 한다. 두 홀수와 두 짝수 사이에 검은색 접시를 골라 놓는

경우의 수는 ${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$ 이고 나머지 하나의 검은색 접시를 놓는

경우의 수는 2이므로 오른쪽 네 경우의 수의 합은 $6 \times 2 \times 4 = 48$

따라서 구하는 모든 경우의 수는 $48 + 48 = 96$

29

정답 363 *중복순열

[정답률 10%]

[정답 공식: a, b, c, d 중에서 짝수의 개수가 2개, 3개, 4개인 경우로 나누어 순서쌍의 개수를] 구한다.

한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d 라 하자.

[단서1] 주사위를 던져서 나올 수 있는 홀수는 1, 3, 5이고, 짝수는 2, 4, 6이야.

$a \times b \times c \times d$ 가 16의 배수가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를

[단서2] $16 = 2^4$ 이므로 $a \times b \times c \times d$ 에서의 인수는 2를 최소한 4개 포함해야 해.

구하시오. (4점)



단서+발상

[단서1] 인수 중 2의 개수에 주목해야 하므로 홀수와 짝수로 숫자들을 분류한다.

주사위를 던져서 나올 수 있는 눈의 수 중 홀수는 1, 3, 5이고 짝수는 2, 4, 6이다. [발상]

[단서2] $16 = 2^4$ 이고 a, b, c, d 가 가질 수 있는 값이 1, 2, ..., 6이므로 $a \times b \times c \times d$ 가 16의 배수가 되기 위해 a, b, c, d 중에서 짝수의 개수는 2 이상이어야 하고 인수는 2를 최소한 4개 포함해야 한다. [발상]

짝수의 개수가 2, 3, 4일 때를 나누어 각각의 경우의 수를 계산하고 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구한다. [해결]

[문제 풀이 순서]

1st a, b, c, d 중에서 짝수의 개수가 2, 3, 4인 경우로 나누어 각 경우의 수를 구하자.

주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수인 a, b, c, d 중에서 짝수의 개수는 2 이상이여야 한다.

(i) 짝수의 개수가 2인 경우

$a \times b \times c \times d$ 는 16의 배수이므로 2개의 짝수 중 4의 개수는 2이다.

네 수 a, b, c, d 중에서 4가 되는 수 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_2 = 6$ 이다. 남은 2개의 수가 홀수인 경우의 수는

$${}_3P_2 = 9 \text{이다.}$$

4를 제외한 남은 2개의 수를 홀수인 1, 3, 5에서 중복을 허락하여 택하는 중복순열의 수야.

만약 a 와 c 가 홀수라 하면 $a=1, c=3$ 인 경우와 $a=3, c=1$ 인 경우는 다르므로

a 와 c 는 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열이 되는 거야.

따라서 짝수의 개수가 2인 경우의 수는 $6 \times 9 = 54$ 이다.

(ii) 짝수의 개수가 3인 경우

$a \times b \times c \times d$ 가 16의 배수이므로 4의 개수는 1 이상이다.

네 수 a, b, c, d 중에서 홀수인 수 1개를 선택하는 경우의 수는

a, b, c, d 중에서 홀수인 수 1개를 고르는 경우의 수는 짝수인 수 3개를 고르는 경우의 수와 같아.

즉, ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$ 로 생각할 수도 있어.

${}_4C_1 = 4$ 이고 홀수의 개수는 1, 3, 5의 3이므로 홀수가 되는 경우의 수는 3이다.

이때, $a \times b \times c \times d$ 가 16의 배수이고 한 문자는 홀수이므로

3개의 짝수 중 적어도 하나는 4이다.

3개의 짝수 중 4의 개수가 1 이상인 경우의 수는

'적어도' 하나가 4이므로 여사건을 생각할 수 있어.

여사건의 경우는 4가 하나도 없는 경우이므로 적어도 하나가 4인 경우의 수는

전체 경우의 수에서 4가 하나도 없는 경우의 수를 빼서 구할 수 있어.

짝수 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

경우의 수는 ${}_3P_3 = 3^3$ 이야.

$${}_3P_3 - {}_2P_3 = 27 - 8 = 19$$

짝수 4를 제외한 2와 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

경우의 수는 ${}_2P_3 = 2^3$ 이야.

따라서 짝수의 개수가 3인 경우의 수는 $4 \times 3 \times 19 = 228$ 이다.

(iii) 짝수의 개수가 4인 경우

짝수의 개수가 4인 경우의 수는 ${}_3P_4 = 3^4 = 81$ 이다.

짝수 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는

중복순열의 수이므로 경우의 수는 ${}_3P_4 = 3^4$ 이야.

2nd 순서쌍의 개수를 구하자.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$$54 + 228 + 81 = 363 \text{이다.}$$

1등급 대비 특강

* 중복순열과 여사건

이 문제에서 짝수의 개수가 3인 경우가 제일 구하기 막막했을 거야.

$a \times b \times c \times d$ 가 16의 배수가 되기 위해서라면 3개의 짝수 중에서 4가 '적어도 하나'는

있어야 하잖아? 여기서 눈치 빠른 사람들은 적어도 하나라는 표현을 보고 여사건을

떠올렸을 거야. 3개의 짝수 중에서 4가 하나도 포함되지 않는 경우의 수는 $2^3 = 8$ 이고,

짝수 3개를 고르는 전체 경우의 수는 $3^3 = 27$ 이므로 3개의 짝수를 조건에 맞게 결정하

는 수는 $27 - 8 = 19$ 가 돼. 문제에서 여사건을 쓴다고 암시하는 표현이 직접적으로

등장하지는 않았지만, 경우의 수를 구하는 과정 가운데 언제든 이용될 수 있다는 사실을

기억하며 문제를 풀어야 해. 평상시에 기본기를 많이 다져 두자!



My Top Secret

서울대 선배의 1등급 대비 전략

경우의 수와 관련된 어려운 문제를 풀다 보면 계산이 헛갈리는 경우가 많아. 그래서 시험지 여백에다가 계산의 결과만 쓰는 것이 아니라 계산하는 과정을 어느 정도 남겨놓으면 자신의 풀이를 점검하는 데 큰 도움이 되지. 이 문제를 예시로 들자면 짝수의 개수가 2인 경우에서 '54'라고 결과만 남기지 말고 ${}_4C_2 \times {}_3P_2 = 54$ 처럼 어느 정도 계산하는 과정을 남기면, 나중에 검산할 때, '4가 되는 경우와 나머지 수들이 홀수가 되는 경우까지 고려해서 54를 얻었지?'라고 쉽게 파악할 수 있어. 이 습관을 들여놓으면 문제를 풀면서 자신의 논리를 점검하기 좋기 때문에 실수를 줄일 수 있지. 쉬운 문제부터 연습하다 보면 자연스럽게 체득할 수 있을 거야!

[정답 공식: 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이다.]

검은 공 4개와 흰 공 4개를 5명의 학생 A, B, C, D, E에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

(단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) (4점)

단서1 같은 색 공끼리 구별하지 않으므로 순서를 생각할 필요가 없는 조합임을 알 수 있어.

단서2 다른 학생이 남은 공을 모두 받을 수도 있으므로 중복을 허락하는 중복조합임을 알 수 있어.

(가) 세 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합은 홀수이다.
단서3 공은 모두 8개 있으므로 A, B, C가 받는 공의 개수의 합은 최대 7이 될 수 있겠지?
 (나) 학생 D가 받는 공의 개수는 학생 E가 받는 공의 개수의 2배이다. **단서4** 만약 E가 공을 1개 받는다면 D는 2개를 받고 E가 공을 2개 받는다면 D는 4개를 받겠지? E가 공을 3개 받는다면 D는 6개를 받는데 전체 공의 개수가 8이므로 성립하지 않네?

단서+발상

단서1, 2 검은 공 4개와 흰 공이 4개 있는데 같은 색 공끼리 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다는 조건을 통해 중복조합을 이용해야 하는 문제임을 알 수 있다. **발상**

단서3 세 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합이 홀수이므로 1, 3, 5, 7이 될 수 있고, 2, 4, 6은 될 수 없다. 학생 D와 E가 받는 공의 개수에 따라 세 학생 A, B, C가 받는 공의 개수가 결정되고 이때의 개수의 합이 홀수가 되어야 한다. **발상**

단서4 총 8개의 공이 있으므로 조건 (나)에 의하여 (D가 받는 공의 개수, E가 받는 공의 개수)는 (2, 1) 또는 (4, 2)가 될 수 있다. **적용**

이때, 학생 D와 E가 받는 공의 개수가 각각 4개, 2개일 때는 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합이 2가 되어 조건 (가)에 모순이다. 따라서 학생 D와 E가 받는 공의 개수는 각각 2개, 1개임을 알 수 있고 학생 E가 받는 공의 색깔을 가정하여 학생 D에게 공을 어떻게 나누어 주느냐에 따라 경우를 나누어 본다. **해결**

[문제 풀이 순서]

1st 조건 (나)를 만족시키도록 D와 E가 받는 공의 개수를 구하자.

학생 A, B, C, D, E가 받는 공의 개수를 각각 a, b, c, d, e 라 하면

조건 (나)에 의하여 $d=2, e=1$ 또는 $d=4, e=2$ 이다.

한편, $d=4, e=2$ 이면 $a+b+c=2$ 가 되므로

조건 (가)의 $a+b+c$ 가 홀수라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $d=2, e=1$ 이다.

조건 (나)를 통해 학생 D가 받는 공의 개수는 2, 학생 E가 받는 공의 개수는 1의 1가지 배임을 알 수 있어.

2nd D와 E에게 공을 나누어 주고 A, B, C에게 공 5개를 나누어 주는 모든 경우의 수를 구하자.

E는 1개의 공을 받으므로 흰 공 1개 또는 검은 공 1개를 받을 수 있다.

따라서 E가 공을 받는 경우의 수는 2이다.

한편, 조건 (나)에 의하여 D는 2개의 공을 받고 E가 흰 공 1개를 받을 때 D는 흰 공 1개/검은 공 1개, 흰 공 2개, 검은 공 2개를 받을 수 있다. 이때의 경우의 수는 3이고 D가 받은 색 공에 따라 A, B, C에게 5개의 공을 나누어 주는 경우는 다음과 같다.

(i) D가 흰 공 1개, 검은 공 1개를 받는 경우

A, B, C에게 흰 공 2개와 검은 공 3개를 나누어 줄 수 있다.

A, B, C에게 흰 공 2개를 남김없이 나누어 주는 경우는 서로 다른 3개 중에서 중복하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

주의 만약 A가 흰 공 2개를 모두 갖는다면 AA, A와 B가 각각 흰 공을 1개씩 갖는다면 AB, A와 C가 각각 흰 공을 1개씩 갖는다면 AC, C가 흰 공 2개를 모두 갖는다면 CC와 같이 생각할 수 있어, 이처럼 흰 공 2개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우는 A, B, C를 중복을 허락하여 2번 택하는 것과 같으므로 중복조합으로 구해야 해.

$$\text{경우의 수는 } {}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

[중복조합]

서로 다른 n 개 중에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

또, A, B, C에게 검은 공 3개를 남김없이 나누어 주는 경우는 서로 다른 3개 중에서 중복하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

따라서 이 경우의 수는 $6 \times 10 = 60$

두 경우가 동시에 일어나므로 곱해주어야 해.

(ii) D가 흰 공 2개를 받는 경우

A, B, C에게 흰 공 1개와 검은 공 4개를 나누어 줄 수 있다.

A, B, C에게 흰 공 1개를 나누어 주는 경우는 서로 다른 3개 중에서 중복하여 1개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로 경우의 수는

$${}_3H_1 = {}_{3+1-1}C_1 = {}_3C_1 = 3$$

또, A, B, C에게 검은 공 4개를 남김없이 나누어 주는 경우는 서로 다른 3개 중에서 중복하여 4개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

${}_nH_r = {}_nC_{n-r}$

따라서 이 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$

(iii) D가 검은 공 2개를 받는 경우

A, B, C에게 흰 공 3개와 검은 공 2개를 나누어 줄 수 있다.

A, B, C에게 흰 공 3개를 남김없이 나누어 주는 경우는 서로 다른 3개 중에서 중복하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

또, A, B, C에게 검은 공 2개를 남김없이 나누어 주는 경우는 서로 다른 3개 중에서 중복하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

따라서 이 경우의 수는 $10 \times 6 = 60$

3rd 구하는 경우의 수를 구하자.

(i)~(iii)에 의하여 E가 흰 공을 받을 때 남은 학생에게 공을 나누어 주는

경우의 수는 $60 + 45 + 60 = 165$ 이므로

구하는 경우의 수는 $2 \times 165 = 330$ 이다.

E가 공을 받을 수 있는 경우의 수는 2이므로 2를 곱해야 해.

1등급 대비 특강

* 중복조합을 이용할 때의 주의점

이 문제에서 특히 조심해야 했던 부분은 나눠주는 공의 색깔이 2종류라는 거야. 만약 공의 색깔이 한 종류였다면 서로 다른 3명의 학생 중에서 중복을 허용하여 5번 선택하는 중복조합의 수, 즉 ${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = 21$ 이라는 간단한 답이 나왔겠지? 하지만 공의 색깔이 2종류이기에 D가 2개의 공을 어떻게 받는지 구분해서 각 경우의 수를 구하는 것이 이 문제의 핵심이라고 할 수 있어. 다음부터 문제를 풀 때는 이런 부분을 조심하면서 문제를 풀자.



My Top Secret

서울대 선배의 1등급 대비 전략

이 문제처럼 고려할 수 있는 경우가 많아 보이는 문제가 있어. 특히, 이 문제는 푸는 사람에게 따라 E가 검은 공 1개, D가 검은 공 2개를 받는 경우부터 E가 흰 공 1개, D가 흰 공 2개를 받는 경우까지 6가지 경우를 각각 구한 사람도 있을 수 있어. 하지만 최대한 계산을 간소화할 수 있는 방법을 찾는 것이 실제 시험장에서 유리해. 실수를 줄이고 계산도 간편하게 할 수 있거든. 이 문제를 예시로 들면 6가지 경우를 일일이 구하지 않고 학생 E에게 일단 흰 공을 주고 학생 D가 공을 어떻게 받는지에 따라 각 경우의 수를 구하고 마지막에 2를 곱하는 방식으로 구했잖아? 그래서 앞으로는 경우의 수를 구할 때의 계산을 최대한 효율적으로 할 수 있도록 방법을 찾는 연습을 해보면 어떨까?

선택과목: 미적분

23 정답 ① * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 95%]

[정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분자와 분모의 최고차항의 계수를 비교한다.]

1st 극한값을 계산하자.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{4n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{4 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4}$$

분자와 분모에서 최고차항이 n^2 으로 동일하므로 n^2 으로 분자와 분모의 각 항을 나누자.

다른 풀이: 계수의 비로 극한값 구하기

분자와 분모에서 최고차항이 n^2 으로 동일하지?

분모, 분자의 n^2 의 계수의 비로 극한값을 구할 수 있으므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{4n^2 - 1} = \frac{1}{4}$$

24 정답 ③ * 치환을 이용한 수열의 극한 [정답률 92%]

[정답 공식: $\frac{(2n+3)a_n}{n^2} = b_n$ 으로 치환하고 a_n 을 b_n 에 대한 식으로 나타낸 후, 수열의 극한의 성질을 이용한다.]

1st $\frac{(2n+3)a_n}{n^2} = b_n$ 으로 치환해.

$$b_n = \frac{(2n+3)a_n}{n^2} \text{이라 두면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \text{이고,}$$

$$a_n = \frac{n^2 b_n}{2n+3} \text{이다.}$$

2nd 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구해.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{3n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} \times a_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} \times \frac{n^2 b_n}{2n+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(3n^2+1)(2n+3)} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &\quad \text{수렴하는 두 수열 } \{a_n\}, \{b_n\} \text{에 대하여} \\ &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{이 성립함을 이용해.} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{6n^3+9n^2+2n+3} \times 3 \\ &= \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2} \quad \text{분자와 분모에서 최고차항이 } n^3 \text{으로 동일하지?} \\ &\quad \text{분모, 분자의 } n^3 \text{의 계수의 비로 극한값 } \frac{1}{6} \text{을 구해.}\end{aligned}$$

다른 풀이: 수렴하는 두 분수 꼴로 나타내기

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{3n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n+3)a_n}{n^2} \times \frac{n^2}{2n+3} \times \frac{n}{3n^2+1} \right) \\ &\quad \text{조건에 주어진 수렴하는 수열의 곱으로 나타내어 극한값을 구할 수 있어.} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2n+3)a_n}{n^2} \times \frac{n^3}{(2n+3)(3n^2+1)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)a_n}{n^2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

25 정답 ④ * 등비수열의 극한에서의 미지수 구하기 [정답률 72%]

정답 공식: 등비수열 $\{r^n\}$ 에 대하여 $-1 < r \leq 1$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ 은 수렴하고, $r > 1$ 또는 $r \leq -1$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ 은 발산한다.

1st 주어진 수열의 꼴을 살펴보고 어떤 수열인지 파악해야 해.

분모, 분자의 최고차가 n 이므로 거듭제곱 꼴의 합으로 나타내면

$$a_n = \frac{(k^2+9)^n + 30^n}{(10k)^n} = \left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n + \left(\frac{3}{k}\right)^n$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 두 등비수열의 합이다.

2nd 등비수열의 공비를 구해.

$$k \text{가 자연수이므로 } \left(\frac{k^2+9}{10k}\right) > 0, \frac{3}{k} > 0 \text{이고,}$$

두 등비수열 $\left\{\left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}, \left\{\left(\frac{3}{k}\right)^n\right\}$ 이 각각 수렴해야 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴한다.

$$\frac{p^n+q^n}{r^n} \text{ 꼴의 수열이므로 } \frac{p}{r} \leq 1 \text{이고 } \frac{q}{r} \leq 1 \text{일 때 } \frac{p^n+q^n}{r^n} \text{이 수렴해,}$$

(단, p, q, r 이 양수)

3rd 각 등비수열이 수렴할 조건을 구해.

(i) $\left\{\left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}$ 이 수렴할 조건

k 가 자연수이므로 공비는 양수이고 1 이하여야 한다. 즉,

$$\frac{k^2+9}{10k} \leq 1$$

$$k^2 - 10k + 9 \leq 0, (k-1)(k-9) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq k \leq 9$$

(ii) $\left\{\left(\frac{3}{k}\right)^n\right\}$ 이 수렴할 조건

k 가 자연수이므로 공비는 양수이고 1 이하여야 한다. 즉,

$$\frac{3}{k} \leq 1$$

$$\therefore k \geq 3$$

4th k 의 개수를 구해.

(i), (ii)에 의하여

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴할 조건은 $3 \leq k \leq 9$ 이다. → 자연수 a, b 에 대하여 $a \leq x \leq b$ 를 만족시키는 자연수 x 의 개수는 $b-a+1$

따라서 구하는 자연수 k 의 개수는 7이다.

26 정답 ⑤ * a_n 과 S_n 의 관계를 이용한 수열의 극한 [정답률 65%]

정답 공식: 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$

1st 일반항 a_n 을 구해.

모든 자연수 n 에 대하여

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k - k^2}{k+1} = 2n^2 - n$$

주의

일반항은 a_n 이 아니고, 주어진 시그마에서의 $k=n$ 일 때의 항이므로

이때, 일반항은 $\frac{a_n - n^2}{n+1}$ 이므로 $\frac{a_n - n^2}{n+1}$ 이 되어야 해. 그러니 분모, 분자를 각각 n^2 으로 나눈 거야.

$n \geq 2$ 일 때,

$$\frac{a_n - n^2}{n+1} = S_n - S_{n-1}$$

[수열의 합과 일반항의 관계]

$$a_1 = S_1 \text{이고 } a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$$

$$= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$$

$$= (2n^2 - n) - (2n^2 - 5n + 3) = 4n - 3$$

이 식을 정리하면

$$a_n = (4n - 3)(n + 1) + n^2$$

$$= 4n^2 + n - 3 + n^2$$

$$= 5n^2 + n - 3 (n \geq 2)$$

실수

$n \rightarrow \infty$ 일 때의 수렴값을 구해야 하므로 a_1 은 신경쓰지 않아도 돼.

2nd 극한값을 구해.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+n-3}{n^2+1} = 5$$

27 정답 ② * 수열의 극한의 대소 관계 [정답률 55%]

정답 공식: $0 < x < 3$ 에서 사인함수 그래프와 직선 $y=1$ 과의 교점이 $2n$ 개가 되려면 삼각함수의 그래프가 대략 $2n$ 번 반복되는 경우를 생각하면 된다.

1st 사인함수의 그래프를 그려봐.

함수 $y = \sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)$ 의 주기는 $2a_n$ 이고,

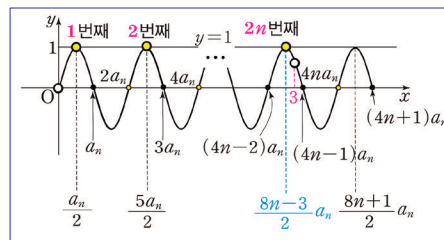
$y = \sin ax$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$ 이므로 $y = \sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)$ 의 주기는 $2a_n$ 이고

x 절편은 차례대로 $x = a_n, 2a_n, 3a_n, \dots$ 이야.

$0 < x < 3$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 방정식 $\sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right) = 1$ 의 서로

다른 실근의 개수가 $2n$ 이므로 $0 < x < 3$ 에서 함수 $y = \sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)$ 의 그래프의 개형

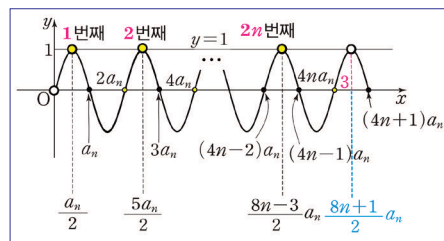
과 실근의 개수를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



[그림 1]

$0 < x < 3$ 에서 자연수 n 에 대하여 함수 $y = \sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{8n-3}{2}a_n, 1\right)$ 을

지나므로 교점의 개수가 $2n$ 이상이 되려면 $\frac{8n-3}{2}a_n < 3$ 을 만족시켜야 해.



[그림 2]

자연수 n 에 대하여 함수 $y = \sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{8n+1}{2}a_n, 1\right)$ 을 지나므로

교점의 개수가 $2n$ 이상이 되려면 $3 \leq \frac{8n+1}{2}a_n$ 을 만족시켜야 해.

2nd 교점의 개수가 $2n+10$ 이 되지 않도록 a_n 의 범위를 구해.

$$\frac{8n-3}{2}a_n < 3 \leq \frac{8n+1}{2}a_n$$

활정

이때, $0 < x < 3$ 이므로 $x = \frac{8n+1}{2}a_n$ 이어도

$a_n > 0$ 이므로 주어진 부등식을 a_n 으로 나누면

$$\frac{8n-3}{2} < \frac{3}{a_n} \leq \frac{8n+1}{2}$$

차근차근 계산해 보자.

n 으로 나누면 $\frac{8n-3}{2n} < \frac{3}{na_n} \leq \frac{8n+1}{2n}$ 이고, $\left(\because \frac{8n-3}{2n} > 1 \text{이고, } n \text{이 자연수}\right)$ 이므로

역수를 취하면 $\frac{2n}{8n+1} \leq \frac{na_n}{3} < \frac{2n}{8n-3}$ 을 만족시켜야 해.

부등식의 각 변에 3을 곱하면

$$\frac{6n}{8n+1} \leq na_n < \frac{6n}{8n-3}$$

$$\therefore \frac{6n}{8n+1} \leq na_n < \frac{6n}{8n-3}$$

3rd 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구해.

위 식의 각 변에 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 를 취하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{8n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} na_n < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{8n-3}$$

[수렴하는 세 수열의 대소 관계]

$$a_n < b_n < c_n \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

$$\therefore \frac{3}{4} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} na_n \leq \frac{3}{4}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \frac{3}{4}$$

다른 풀이: 대수식으로 풀기

$0 < x < 3$ 에서 $a_n > 0$ 이므로

$$0 < \frac{\pi}{a_n} x < \frac{3\pi}{a_n} \dots \textcircled{1}$$

$\frac{\pi}{a_n} x = X$ 로 치환하면 $X > 0$ 이고,

방정식 $\sin X = 1$ 의 해는

$$X = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \dots, \frac{\pi}{2} + 2(2n-1)\pi, \frac{\pi}{2} + 4n\pi, \dots$$

1번째 2번째 3번째 ... 2n번째 (2n+1)번째

이때, 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 $2n$ 이어야 하므로

$$\frac{\pi}{2} + 2(2n-1)\pi < \frac{3\pi}{a_n} \leq \frac{\pi}{2} + 4n\pi$$

주의
이때, $X = \frac{\pi}{2} + 4n\pi$ 이면
 $X = \frac{3\pi}{a_n}$ 이지만 $\textcircled{1}$ 에서 제외돼,
 $\frac{8n-3}{2} < \frac{3}{a_n} \leq \frac{8n+1}{2}$
(이하 동일)

28 정답 ④ * x^n 을 포함한 극한으로 정의된 함수 [정답률 41%]

정답 공식: 등비수열 $\{x_n\}$ 의 극한으로 정의된 함수는 공비 x 의 값의 범위를 나누어 구해야 한다. $|x| > 1$, $x = -1$, $x = 1$, $|x| < 1$ 로 나누어서 함수 $g(x)$ 를 구한 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$ 를 찾아야 한다. 함수 $f(x)$ 가 원점에 대하여 대칭이므로 그래프의 개형에서 직선 $y = k$ 와 한 점에서 만나도록 극댓값 혹은 극솟값을 정한다.

1st x 의 범위를 나누어 $g(x)$ 를 구해.

(i) $|x| < 1$ 인 경우 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1 & (x=1) \\ 0 & (-1 < x < 1) \end{cases}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ 이므로 $g(x) = f(x)$

(ii) $|x| > 1$ 인 경우

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{2n+2} + x^n + f(x)}{x^{2n} + x^n + 1}$
→ $2x^{2n+2} = 2x^2 \times x^{2n}$ 으로 나타내자.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + \frac{1}{x^n} + \frac{f(x)}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{2n}}}$$

주의
 $x^n < x^{2n}$ 이므로 분자와 분모의
최고차항은 x^{2n} 이야.
분모, 분자를 x^{2n} 으로 나누자.

$= 2x^2$

(iii) $x = -1$ 인 경우

$g(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n + f(-1)}{2 + (-1)^n}$

한정
 n 이 짝수일 때와 홀수일 때로
구분해서 극한값을 구해야 해.

조건에서 모든 실수 x 에 대해 이 극한값이 존재하므로 $x = -1$ 일 때도 존재해야 한다.

$1 + \frac{f(-1)}{3} = 1 + f(-1)$ 에서
→ n 이 짝수일 때 $1 + \frac{f(-1)}{3}$,
 n 이 홀수일 때 $1 + f(-1)$

$f(-1) = 0$

위 식에 대입하면 $g(-1) = 1$

(iv) $x = 1$ 인 경우

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = 1^{2n+2} = 1$ 이므로 $g(1) = \frac{3 + f(-1)}{3}$

$f(1) = a + b = -f(-1) = 0$ 이므로

$f(x)$ 가 원점에 대칭인 함수이므로 모든 실수 x 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$ 가 성립해.

$b = -a \dots \textcircled{1}$

$g(1) = 1$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| < 1) \\ 1 & (|x| = 1) \\ 2x^2 & (|x| > 1) \end{cases}$$

2nd 함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형에서 조건을 만족시키는 $f(x)$ 를 구해.

$f(x) = ax^3 + bx \ (a > 0)$

$= ax^3 - ax \ (\because \textcircled{1})$

$= ax(x+1)(x-1)$

이므로 방정식 $f(x) = 0$ 의 근은 $x = -1, 0, 1$ 이다.

$f'(x) = 3ax^2 - a$ 에서 $f'(x) = 0$ 의 근은

$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 극대이고 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 극소이다.

이때, 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이제, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 보자.

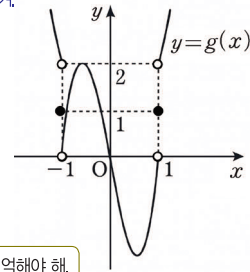
함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 k 가 존재해야 하므로

한정

k 가 실수라면 조건을 만족시키는 $f(x)$ 는 무수히 많아. 하지만, k 가 자연수이고 $f(x)$ 는 $|x| > 1$ 에서 이차함수이므로 $k = 1$ 또는 $k = 2$ 일 때 조건을 만족시켜야 해.

$-1 < x < 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같이 되어야 한다.

직선 $y = 2$ 와 함수 $g(x)$ 의 그래프와의 교점의 개수는 1,
 $k = 1$ 일 때 직선 $y = 1$ 과 함수 $g(x)$ 의 그래프와의 교점의 개수는 3,
 $k \geq 3$ 일 때 직선 $y = k$ 와 함수 $g(x)$ 의 그래프와의 교점의 개수는 2이므로
조건을 만족시켜.



실수

k 가 자연수라는 조건을 꼭 기억해야 해.

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 2가 되어야 하므로

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2, a \times (-\frac{\sqrt{3}}{3})^3 - a \times (-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2$

$-\frac{\sqrt{3}}{9}a + \frac{\sqrt{3}}{3}a = 2$

$-\frac{\sqrt{3}a}{9} + \frac{3\sqrt{3}a}{9} = \frac{2\sqrt{3}a}{9} = 2 \quad \therefore a = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

$\therefore f(x) = 3\sqrt{3}x(x+1)(x-1)$

3rd 함숫값을 구해.

$\therefore g(-\frac{1}{2}) \times g(2) = f(-\frac{1}{2}) \times 8$

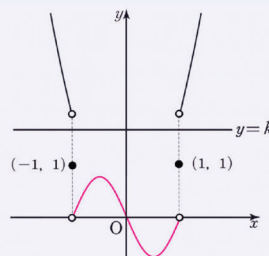
$= 3\sqrt{3} \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2} + 1) \times (-\frac{1}{2} - 1) \times 8 \ (\because \textcircled{1})$

$= 9\sqrt{3}$

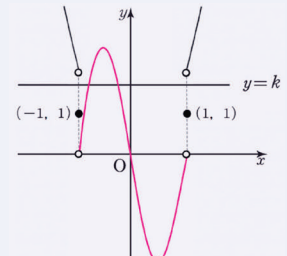
수능 핵심

*** (극대값) $\neq 2$ 인 경우 직선 $y = k$ 와 한 점에서 만나지 않는 이유를 그래프로 이해하자!**

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 2보다 작으면 [그림 1]과 같이 $y = k$ 와 한 점에서 만나는 자연수 k 가 존재하지 않고, 극댓값이 2보다 클 때도 [그림 2]와 같이 $y = k$ 와 한 점에서 만나는 자연수 k 가 존재하지 않아.



[그림 1]



[그림 2]

29 정답 13 *도형의 넓이에 대한 극한 [정답률 22%]

정답 공식: 원주각과 중심각의 관계에 의해 $\angle CAB$ 또는 $\angle DAB$ 와 같은 크기를 가진 각을 구해 보자. 코사인법칙으로 선분 DE의 길이를 구하고, 반지름이 n 이므로 피타고라스 정리에서 삼각형 CDE의 높이를 구한 다음 S_n 을 구하면 된다.

단서1 각 BAD는 호 BD의 원주각이고 각 BCD는 부채꼴 CBD의 중심각이야.

원주각의 크기는 중심각의 크기의 절반이므로 $\angle BCD = 2\angle BAD = \angle BAC$

그림과 같이 자연수 $n (n \geq 2)$ 에 대하여 중심이 C이고 반지름의 길이가 n 인 원 O와 $\overline{AB} = 2$ 를 만족시키는 원 O 위의 두 점 A, B가 있다. $\angle BAC$ 를 이등분하는 직선이 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AD 위의 점 E에 대하여 $\overline{BD} : \overline{DE} = \sqrt{2} : 1$ 일 때, 삼각형

CDE의 넓이를 S_n 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{S_n}{n}) = \frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의

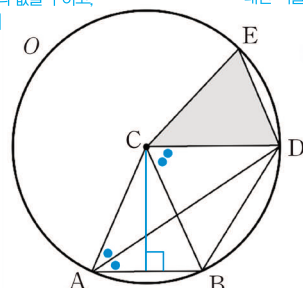
값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (4점)

단서2 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을

내려 $\cos(\angle CAB)$ 의 값을 구하고,
코사인법칙을 이용하여
BD의 값을 구해.

단서3 단서2와 삼각형 CDE의 넓이를 n 에

대한 식을 이용하여 극한값을 구해.

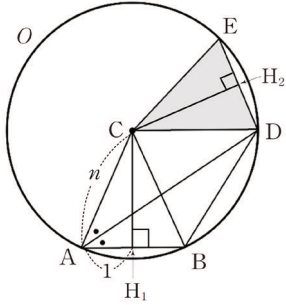


단서+발상

- 단서1** 삼각형 CDE에 대한 정보를 얻기 위해 변 DE와 길이가 나와 있는 변 BD에 집중하자. BD를 포함하는 삼각형 BDC를 보면 중심각에 대한 정보를 파악해야 함을 알 수 있다. 중심각의 정보가 필요하니까 호 BD에 대한 원주각을 찾는다. **발상**
- 단서2** 각 BCD는 부채꼴 CBD의 중심각이다. 원주각의 크기는 중심각의 크기의 절반이므로 $\angle BCD = \angle BAC$ 임을 알 수 있다. $\angle BAC$ 에 대한 정보를 파악하기 위해 직각삼각형을 만든다. **개념**
- 단서3** 점 C에서 선분 AB에 수선의 발을 내려서 $\cos(\angle BAC)$ 의 값을 구한다. 이후 코사인법칙을 이용해 BD의 값을 구할 수 있고, 길이를 이용해 DE를 구할 수 있다. 마지막으로 삼각형 CDE의 넓이를 n 에 대한 식으로 표현하고 극한값을 계산한다. **해결**

[문제 풀이 순서]

1st $\cos(\angle DCB)$ 와 $\overline{BD}$ 를 n 에 대한 식으로 나타내 보.

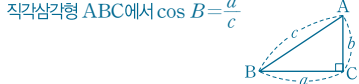


점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하면

삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 $\overline{AB} = 2\overline{AH_1} = 2$ $\therefore \overline{AH_1} = 1$ **→ 이등변삼각형의 꼭짓각의 이등분선은 밑변을 수직이등분해**

이때, $\angle CH_1A = \frac{\pi}{2}$ 이고 반지름이 n 이므로

$$\cos(\angle BAC) = \cos(\angle CAH_1) = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{CA}} = \frac{1}{n}$$



각 BAD는 호 BD의 원주각이고 각 BCD는 부채꼴 CBD의 중심각이므로 $\angle BCD = 2\angle BAD$

또한, **단서1**에 의하여 $\angle BAC = \angle BCD$

$$\therefore \cos(\angle BCD) = \cos(\angle BAC) = \frac{1}{n}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해 $\overline{BD}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{CB} \times \overline{CD} \times \cos(\angle BCD)$

$$= n^2 + n^2 - 2 \times n \times n \times \frac{1}{n} = 2n^2 - 2n$$

$$\therefore \overline{BD} = \sqrt{2n^2 - 2n}$$

2nd $\overline{DE}$, $\overline{CH_2}$ 의 길이를 n 에 대한 식으로 나타내 보.

조건에서 $\overline{BD} : \overline{DE} = \sqrt{2} : 1$ 이므로

$$\overline{DE} = \frac{\overline{BD}}{\sqrt{2}} = \sqrt{n^2 - n} \quad \text{㉠}$$

점 C에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 H_2 라 하면

삼각형 CDE는 이등변삼각형이므로

$$\overline{DE} = 2\overline{DH_2}$$

$$\overline{DH_2} = \frac{1}{2}\sqrt{n^2 - n}$$

$\angle CH_2D = \frac{\pi}{2}$ 에서 삼각형 CH_2D 는 직각삼각형이므로

$$\overline{CH_2}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DH_2}^2 = n^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{n^2 - n}\right)^2 = n^2 - \frac{n^2 - n}{4} = \frac{3n^2 + n}{4}$$

피타고라스 정리를 이용해,

$$\therefore \overline{CH_2} = \frac{\sqrt{3n^2 + n}}{2} \quad \text{㉡}$$

3rd S_n 과 극한값을 구해.

㉠, ㉡에서 삼각형 CDE의 넓이 S_n 은

$$S_n = \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{CH_2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{n^2 - n} \times \frac{\sqrt{3n^2 + n}}{2} = \frac{n\sqrt{3n^2 - 2n - 1}}{4}$$

이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{S_n}{n} = \frac{\sqrt{3n} - \sqrt{3n^2 - 2n - 1}}{4}$$

$$= \frac{(\sqrt{3n} - \sqrt{3n^2 - 2n - 1})(\sqrt{3n} + \sqrt{3n^2 - 2n - 1})}{4(\sqrt{3n} + \sqrt{3n^2 - 2n - 1})}$$

$$= \frac{2n + 1}{4(\sqrt{3n} + \sqrt{3n^2 - 2n - 1})} \quad \text{√-√ 꼴의 무리식은 유리화하여 √+√ 꼴로 나타낸 다음 최고차항의 계수를 비교하여 극한값을 구해}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{S_n}{n} \right) = \frac{2}{4(\sqrt{3} + \sqrt{3})} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{12}\sqrt{3}$$

따라서 $p = 12$, $q = 1$ 이므로 $p + q = 13$



My Top Secret

서울대 선배의 ① 등급 대비 전략

도형 문제를 풀 때, 주어진 조건에서 정보를 찾아낼 수도 있지만 구하는 것을 보고 어떤 정보를 구해야 하는지 역으로 생각하는 것도 필요해. 이 문제의 경우, 삼각형 CDE의 넓이를 구하기 위해 ED의 길이를 구해야 하고, 비율이 주어져 있으므로 변 BD와 이를 포함하는 삼각형 CBD에 집중할 수 있어. 원주각과 중심각의 관계를 사용한 경험이 충분하다면 자연스럽게 호 BD와 중심각 BCD에 눈이 갈 거고, 여기까지 파악했다면 각 BAC에 대한 정보를 얻기 위해 직각삼각형을 만드는 발상이 그렇게 뜬금없다고 느끼지는 않을 거야.

30 정답 25 *등비수열의 극한에서 미지수 구하기 [정답률 11%]

정답 공식: 함수 $f(x)$ 가 극값을 가지는 x 좌표 중 1부터 9까지의 자연수 중 세 개의 좌표만을 원소로 가지는 등비수열을 모두 확인하면 $\{9, 3, 1\}$, $\{9, 6, 4\}$ 뿐이다. 이 두 가지 경우의 극한값이 조건에 맞는지를 확인해 보면 된다.

함수 $f(x)$ 는 $0 \leq x < 2$ 일 때 $f(x) = x(2-x)$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 이다. 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하고 다음 조건을 만족시킨다. **단서1** 함수 $f(x)$ 는 $0 \leq x < 2$ 에서는 이차함수이고, 그 외의 범위에서는 주기가 2인 주기함수야.

(가) r 은 유리수이다.

함정 a_k 의 후보는 1, 2, 3, ..., 9

(나) 함수 $f(x)$ 가 $x = a_k$ 에서 극값을 갖고 $0 < a_k < 10$ 인 자연수 k 의 개수는 3이다. **단서2** $f(x)$ 는 모든 정수일 때 극값을 가지므로 조건을 만족하려면 $1 \leq a_k \leq 9$ 에서 세 개의 자연수의 값을 가져야 해.

단서3 $r > 1$ 이면 a_{2n} 의 공비는 r^2 이고 a_{n+1} 의 공비는 r 이므로 $r^2 > r$ 이 성립하게 되어 분자가 분모보다 큰 분수식이라서 수렴하지 않게 돼.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_{n+1} + a_{2n}}{a_{n+1} + a_n} = \frac{81}{10} \text{ 일 때, } a_7 = \frac{q}{p} \text{ 이다. } p+q \text{의 값을}$$

구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (4점)

단서+발상

단서1 조건 (나)에서 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값을 찾으라고 했으니 $f(x)$ 의 그래프를 그려 본다. $0 \leq x < 2$ 에서 이차함수이고 주기가 2인 함수임을 이용한다. **개념**

단서2 $f(x)$ 는 x 가 모든 정수일 때 극값을 가짐을 그래프로 확인했으니, 조건 (나)에 의해 a_n 은 1에서 9까지의 자연수 중 3개만을 항으로 가지게 된다. 공비가 유리수가 되도록 하는 자연수 세 개의 조합을 모두 찾아 본다. **적용**

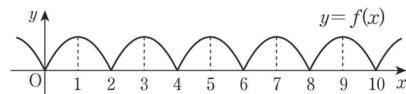
단서3 등비수열 a_n 이 수렴한다고 했으니, $-1 < r \leq 1$ 이다. a_n 을 찾아야 우리가 구하고자 하는 a_7 을 구할 수 있으니, 첫째항을 미지수로 잡고 마지막 극한 조건을 사용한다. 앞서 구한 자연수 세 개의 조합들 중 단 한 가지 조합만 남게 된다. **해결**

[문제 풀이 순서]

1st 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 보.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같고, 함수 $f(x)$ 는 $0 \leq x < 2$ 에서는 이차함수이고, 그 외의 범위에서는 주기가 2인 주기함수이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = t$ (t 는 정수)에서 극값을 가진다.



2nd 조건을 만족시키는 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비 r 의 값과 순서쌍 (a_i, a_j, a_k) 를 구하자.

등비수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $-1 < r \leq 1$ 이다.

조건 (가)에서 r 은 유리수인데, 극한 조건에서 $a_{n+1} = a_1 r^n$, $a_{2n} = a_1 r^{2n-1}$ 이므로 $r > 1$ 이면 $r^2 > r$ 이 되어 주어진 극한이 발산하게 돼. $\therefore -1 < r \leq 1$

조건 (나)를 만족시키는 3개의 자연수를 i, j, k ($k < j < i$)라 하면 $a_i \neq a_j$ 이므로 $r \neq 1$ 이고, $a_1 \neq 0$ 이다.

$r = 1$ 이면 서로 같은 세 자연수가 돼.

서로소인 두 자연수 p ($p \geq 2$), q 에 대하여 $|r| = \frac{q}{p}$ 라 하자.

$a_k = a_1 r^{k-i}$ 이고, a_i, a_k 는 자연수, $k-i \geq 2$ 이므로 a_i 는 p^2 의 배수이다.

$0 < a_i < 10$ 에서 p 는 2 또는 3이므로 r 의 값은 $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$ 이다.

등비수열을 이루는 서로소인 두 자연수 m ($m \geq 2$), n 이라 하면 $\frac{n}{m}$ 이 공비가 되므로 등비수열을

이루는 세 수는 $m, n, \frac{n^2}{m}$ 이야. 각 세 수는 자연수이므로 각 항에 m 을 곱해도 일반성을 잃지 않아.

따라서 세 수는 m^2, mn, n^2 이야.

한 자리의 자연수 중 제곱수는 1, 4, 9뿐이므로 m, n 은 1, 2, 3 중에서 고르면 돼. $n < m$ 이라 두면 m 은 2 또는 3이 가능하고, m^2 은 4 또는 9가 될 수 있어. 이때, 공비 r ($r > 0$)의 값은 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ 야.

이때, 조건 (나)를 만족시키는 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비와 순서쌍 (a_i, a_j, a_k) 는

$r = \frac{1}{2}$ 일 때, $(4, 2, 1)$,

$r = \frac{1}{3}$ 일 때, $(9, 3, 1)$,

$r = \frac{2}{3}$ 일 때, $(9, 6, 4)$ 뿐이다.

한편,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_{n+1} + a_{2n}}{a_{n+1} + a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1^2 r^n + a_1 r^{2n-1}}{a_1 r^n + a_1 r^{n-1}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1^2 r^n + a_1 r^{2n-1}}{a_1 r^{n-1}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 r + r^n}{r + 1} \\&= \frac{a_1 r}{r + 1} = \frac{81}{10}\end{aligned}$$

에서 $a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r}$ 이다.

(i) $r = \frac{1}{2}$ 일 때,

$(a_i, a_j, a_k) = (4, 2, 1)$ 이다.

$$\text{이때, } a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{3^4\left(\frac{1}{2}+1\right)}{10 \times \frac{1}{2}} = \frac{3^4 \times \frac{3}{2}}{10 \times \frac{1}{2}} = \frac{3^5}{10} \text{이므로}$$

조건을 만족시키지 않는다.

함정 $a_1 = \frac{3^5}{10}$ 에 공비 $\frac{1}{2}$ 을 아무리 곱해도 정수를 만들어 낼 수 없어.

(ii) $r = \frac{1}{3}$ 일 때,

$(a_i, a_j, a_k) = (9, 3, 1)$ 이다.

$$\text{이때, } a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{3^4\left(\frac{1}{3}+1\right)}{10 \times \frac{1}{3}} = \frac{3^4 \times \frac{4}{3}}{10 \times \frac{1}{3}} = \frac{2 \times 3^4}{5} \text{에서}$$

$a_k = a_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1$ 인 자연수 k 가 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

주의

$a_n = \frac{162}{5 \times 3^{n-1}}$ 이므로 분모의 5가 약분되지 않아서 어떤 자연수 n 도 조건을 만족시키지 않아. 즉, $\frac{162}{5}, \frac{54}{5}, \frac{18}{5}, \frac{6}{5}, \dots$ 이므로 조건을 만족시키지 않아.

(iii) $r = \frac{2}{3}$ 일 때,

$(a_i, a_j, a_k) = (9, 6, 4)$ 이다.

$$a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{3^4\left(\frac{2}{3}+1\right)}{10 \times \frac{2}{3}} = \frac{3^4 \times \frac{5}{3}}{10 \times \frac{2}{3}} = \frac{3^4}{4} \text{에서}$$

$i=3, j=4, k=5$ 이다.

$a_3=9, a_4=6, a_5=4$ 이고 조건을 모두 만족시켜.

3rd $p+q$ 의 값을 구해.

(i)~(iii)에 의하여 $r = \frac{2}{3}$ 이므로

$$a_7 = a_1 r^5 = \frac{3^4}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9} \text{이다.}$$

따라서 $p=9, q=16$ 이므로 $p+q=25$

🔍 톡톡 풀이: r 의 값이 $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$ 일 때 직접 나열하기

$$a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} \text{이므로}$$

$$(i) r = \frac{1}{2} \text{이면 } a_1 = \frac{3^4 \times \left(\frac{1}{2}+1\right)}{10 \times \frac{1}{2}} = \frac{3^4 \times \frac{3}{2}}{10 \times \frac{1}{2}} = \frac{243}{10} \text{이야.}$$

이때, 공비 $\frac{1}{2}$ 을 아무리 곱해도 분모에 5가 있기 때문에 이후 항 중에서 자연수가 나올 수가 없지.

$$(ii) r = -\frac{1}{2} \text{ 이면 } a_1 = \frac{3^4 \times \left(-\frac{1}{2}+1\right)}{10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{81}{10} \text{이야.}$$

이 경우도 (i)과 마찬가지로 이후 항 중에서 자연수가 나올 수가 없지.

$$(iii) r = \frac{2}{3} \text{ 이면 } a_1 = \frac{3^4 \times \left(\frac{2}{3}+1\right)}{10 \times \frac{2}{3}} = \frac{3^4 \times \frac{5}{3}}{10 \times \frac{2}{3}} = \frac{81}{4} \text{이야.}$$

이 경우는 공비 $\frac{2}{3}$ 를 곱했을 때,

$$\frac{81}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9, 9 \times \frac{2}{3} = 6, 6 \times \frac{2}{3} = 4 \text{로 자연수가 나와.}$$

:

나머지 경우를 직접 계산해보면 $r = \frac{2}{3}$ 인 경우만 조건을 만족시켜.

(이하 동일)

1등급 대비 특강

* 구간별로 정의된 함수의 극값

$f(x)$ 가 미분가능할 때, $f'(x)=0$ 을 만족하는 x 의 값들에서 $f(x)$ 는 극값을 가져. 구간별로 정의된 함수에서 구간 내부의 함수는 미분가능하므로 극값 여부를 확인하기 편하지만, 각 구간의 연결지점에서는 미분가능하다는 보장이 없으므로 그래프를 통해 직접 극값 여부를 꼭 확인해야 해. 이 문제에서 등장한 $f(x)$ 는 주기함수로, 구간별로 정의된 함수의 일종이야. 따라서 구간 내부에서 이차함수가 극값을 가지는 지점인 $x=2n-1$ (n 은 정수)뿐 아니라 각 구간의 연결지점인 $x=2n$ (n 은 정수)에서도 극값 여부를 판단하는 꼼꼼함이 필요해.



My Top Secret

서울대 선배의 1등급 대비 전략

자연수, 정수 조건은 '빠짐없이 세는 것이 중요해. 이런 경우의 수 문제를 풀 때와 비슷한 느낌을 받았을 거야.

$f(x)$ 의 극값 조건을 해석해 등비수열을 이루는 1부터 9까지의 자연수 3개를 찾을 때, 가장 큰 자연수를 9, 8, 7, ... 순서대로 차례차례 1씩 내리며 생각하고, 각각의 수에 대해 그 다음으로 큰 자연수에 대해서도 똑같은 과정을 적용하다 보면, 가능한 자연수 조합을 놓치는 실수를 막을 수 있어.

처음에는 느리고 귀찮다고 느낄 수 있지만, 패턴이 보이면서 점점 더 빨리 셀 수 있게 될 거야.

선택과목: 기하

23

정답 ⑤ *타원의 단축과 장축 [정답률 86%]

[정답 공식: 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)의 장축의 길이는 $2a$ 이고 단축의 길이는 $2b$ 이다. **]**

1st 주어진 타원의 단축의 길이를 구해.

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $a > b > 0$ 이면 단축의 길이는 $2b$ 야.

$$\text{타원 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \text{ 즉 } \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \text{의 단축의 길이는}$$

$$2 \times 2 = 4 \text{이다.}$$

$$9 = 3^2, 4 = 2^2 \text{이고 } 3 > 2 \text{이므로 단축의 길이는 } 2 \times 2 = 4 \text{야.}$$

24

정답 ③ *쌍곡선의 점근선 [정답률 84%]

[정답 공식: 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 이다. **]**

1st 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구한 후 양수 a 의 값을 구해.

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1, \text{ 즉 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \text{의 점근선의 방정식은}$$

$$y = \pm \frac{2}{a}x \text{이다. 쌍곡선 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ($a > 0, b > 0$)의 점근선의 방정식은 } y = \pm \frac{b}{a}x \text{임을}$$

이용하면 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식을 a 를 이용해 나타낼 수 있어.

이때, 주어진 쌍곡선의 점근선의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이고 a 는 양수이므로

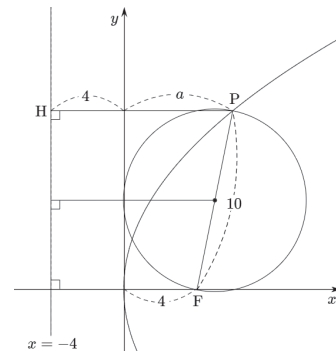
$$\frac{2}{a} = \frac{1}{3} \quad \therefore a = 6$$

25

정답 ① *포물선의 정의 및 방정식 [정답률 78%]

[정답 공식: 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 P와 초점 F($p, 0$) 사이의 거리는 점 P와 준선 $x = -p$ 까지의 거리와 같다. **]**

1st 포물선의 정의를 이용하여 점 P의 x 좌표를 구해.



포물선 $y^2 = 16x$, 즉 $y^2 = 4 \times 4x$ 의 준선의 방정식은 $x = -4$ 이고 초점 F의 좌표는 $(4, 0) \dots \textcircled{1}$ 이다.

포물선 $y^2 = 4px$ 의 준선의 방정식은 $x = -p$ 이고 초점 F의 좌표는 $(p, 0)$ 이야.

포물선 위의 점 P에서 준선 $x = -4$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

포물선의 정의에 의하여 $\overline{FP} = \overline{HP}$ 이고

포물선의 정의에 따르면 포물선 위의 점에서 초점 사이의 거리는 그 점에서 준선까지의 거리와 같아.

넓이가 25π 인 원의 지름의 길이는 $2 \times 5 = 10$ 이므로 $\overline{FP} = 10$

$$\therefore \overline{HP} = \overline{FP} = 10 \dots \textcircled{2}$$

점 P의 x 좌표를 a 라 하면 $\overline{HP} = a - (-4) = a + 4$

포물선의 준선 $x = -4$ 는 x 축에 수직인 직선이므로 점 P와 준선 사이의 거리는 점 P의 x 좌표와 -4 의 차와 같아.

㉔에 의해 $a+4=10 \quad \therefore a=6$
따라서 점 P의 x 좌표는 6이다.

2nd 원의 중심의 x 좌표를 구한 후 원의 중심에서 포물선의 준선까지의 거리를 구해.
㉔에 의해 초점 F의 x 좌표는 4이고 원의 중심은 선분 FP의 중점이므로 원의 중심의 x 좌표는 $\frac{4+6}{2}=5$ 이다.
선분 FP가 주어진 원의 지름이므로 원의 중심은 선분 FP의 중점과 같아, 선분의 중점의 x 좌표는 선분의 양 끝점의 x 좌표끼리의 합에 2를 나누어서 구할 수 있지?
따라서 원의 중심에서 포물선의 준선까지의 거리는 $5-(-4)=9$ 이다.

❖ 포물선의 정의 및 방정식

개념·공식

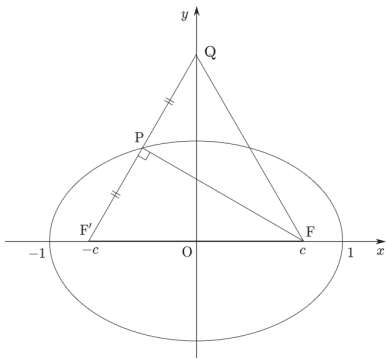
- 포물선의 정의: 평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 주어질 때, 점 F와 직선 l 에 이르는 거리가 각각 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다. 이때, 점 F를 초점, 직선 l 을 준선이라 한다.
- 초점이 $F(p, 0)$, 준선이 $x=-p$ 인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p \neq 0$)
- 초점이 $F(0, p)$, 준선이 $y=-p$ 인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p \neq 0$)

26

정답 ④ *타원의 정의의 활용 [정답률 68%]

(정답 공식: 선분 AB의 수직이등분선 위의 임의의 점 X에 대하여 $\overline{AX}=\overline{BX}$ 가 성립한다.)

1st 수직이등분선 위의 점의 성질을 이용하여 삼각형 QF'F는 어떤 삼각형인지 알아본 후 삼각형 PF'F의 각 변을 c 를 이용하여 나타내.



선분의 수직이등분선 위의 점에서 선분의 양 끝점까지의 거리는 각각 같아, 그럼 점 F가 선분 F'Q의 수직이등분선 위의 점인가? $\overline{FF'}=\overline{FQ}$ 겠지?

직선 FP가 선분 F'Q의 수직이등분선이므로 $\overline{FF'}=\overline{FQ}$

원점 $O(0, 0)$ 에 대하여 $\overline{OF}=\overline{OF'}$ 이고 $\overline{FF'} \perp \overline{QQO}$ 이므로

$\overline{F'Q}=\overline{FQ}$ 점 Q는 선분 FF'의 수직이등분선 위의 점이므로 $\overline{F'Q}=\overline{FQ}$ 야.

즉, $\overline{FF'}=\overline{FQ}=\overline{F'Q}$ 이므로 삼각형 QF'F는 정삼각형이다.

$\overline{FF'}=c-(-c)=2c$, $\overline{PF'}=\frac{1}{2}\overline{F'Q}=\frac{1}{2}\overline{FF'}=\frac{1}{2} \times 2c=c \dots$ ㉔이고

두 점 F, F'이 모두 x 축 위의 점이니
선분 FF'의 길이는 두 점의 x 좌표의 차와 같아.

$\angle F'PF=90^\circ$ 이므로 삼각형 PF'F에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{PF}^2=\overline{FF'}^2-\overline{PF'}^2=(2c)^2-c^2=3c^2 \quad \therefore \overline{PF}=\sqrt{3}c \dots$ ㉕

2nd 타원의 정의를 이용하여 c 의 값을 구해.

주어진 타원의 장축의 길이는 2이므로 타원의 정의에 의해

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2$

㉔, ㉕에 의해 $\sqrt{3}c+c=2$, $(\sqrt{3}+1)c=2$

$\therefore c=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$

❖ 다른 풀이: 직각삼각형 PF'F의 세 변의 길이의 비 이용하기

삼각형 QF'F는 정삼각형이므로 삼각형 PF'F는 $\angle F'=60^\circ$,

$\angle P=90^\circ$ 인 직각삼각형이지?

이는 특수한 직각삼각형으로 $\overline{FF'}:\overline{PF'}:\overline{PF}=2:1:\sqrt{3}$ 이야.

이를 이용하면 $\overline{PF}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{FF'}=\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2c=\sqrt{3}c$ 야.

(이하 동일)

❖ 타원

개념·공식

- 두 정점(초점)에서의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라고 한다.
- 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 에 대하여
 - 장축의 길이: $2a$
 - 두 초점까지의 거리의 합: $2a$
 - 단축의 길이: $2b$
 - 초점의 좌표: $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

27

정답 ② *쌍곡선의 방정식 [정답률 65%]

(정답 공식: 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0, b>0$)의 두 초점 F, F'과 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a$ 가 항상 성립한다.)

1st 삼각형 F'RQ의 둘레의 길이를 이용하여 선분 F'Q의 길이를 구해.

두 점 Q와 R이 쌍곡선 C 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의해

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$)의 두 초점을 F, F'이라 할 때

쌍곡선 위의 임의의 점 P에 대하여 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a$ 야.

$\overline{FQ}-\overline{F'Q}=2$, $\overline{F'R}-\overline{F'R}=2$ 이다.

$\overline{FQ}=\overline{F'Q}+2 \dots$ ㉔, $\overline{F'R}=\overline{F'R}-2$ 이므로

$\overline{QR}=\overline{FQ}-\overline{F'R}=\overline{F'Q}+2-(\overline{F'R}-2)=\overline{F'Q}-\overline{F'R}+4$

이때, 삼각형 F'RQ의 둘레의 길이가 16이므로

$\overline{F'Q}+\overline{F'R}+\overline{QR}=\overline{F'Q}+\overline{F'R}+(\overline{F'Q}-\overline{F'R}+4)=2\overline{F'Q}+4=16$

$2\overline{F'Q}=12 \quad \therefore \overline{F'Q}=6$

2nd 삼각형 FPQ의 둘레의 길이를 구해.

$\overline{PQ}=4$ 이므로 $\overline{F'P}=\overline{F'Q}+4=6+4=10$

점 P가 쌍곡선 C 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{F'P}-\overline{FP}=2 \quad \therefore \overline{FP}=\overline{F'P}-2=10-2=8$

㉔에 의해 $\overline{FQ}=\overline{F'Q}+2=6+2=8$

따라서 삼각형 FPQ의 둘레의 길이는

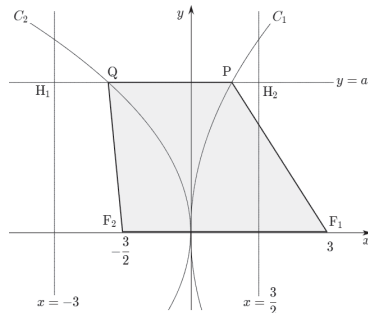
$\overline{FP}+\overline{PQ}+\overline{FQ}=8+4+8=20$

28

정답 ③ *포물선의 방정식 [정답률 62%]

(정답 공식: 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P와 초점 $F(p, 0)$ 사이의 거리는 점 P와 준선 $x=-p$ 까지의 거리와 같다.)

1st 두 점 P와 Q의 좌표를 a 를 이용하여 나타내.



점 P는 포물선 C_1 과 직선 $y=a$ 의 교점이므로 점 P의 x 좌표를 x_1 이라 하면

$a^2=12x_1 \quad \therefore x_1=\frac{a^2}{12}$

점 Q는 포물선 C_2 와 직선 $y=a$ 의 교점이므로 점 Q의 x 좌표를 x_2 라 하면

$a^2=-6x_2 \quad \therefore x_2=-\frac{a^2}{6}$

따라서 점 P의 좌표는 $(\frac{a^2}{12}, a)$ 이고 점 Q의 좌표는 $(-\frac{a^2}{6}, a)$ 이다.

2nd 사각형 PQF₂F₁의 네 변의 길이를 a 를 이용하여 나타내.

포물선 $C_1: y^2=12x$ 의 초점 F₁의 좌표는 (3, 0)이고 준선의 방정식은

$x=-3$ 이고 포물선 $C_2: y^2=-6x$ 의 초점 F₂의 좌표는 $(-\frac{3}{2}, 0)$ 이고

준선의 방정식은 $x=\frac{3}{2}$ 이다. 포물선 $y^2=4px$ (단, $p \neq 0$)의 초점의 좌표는 $F(p, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x=-p$ 야.

사각형 PQF₂F₁의 네 변의 길이를 a 에 관한 식으로 나타내보자.

$\overline{F_1F_2}=3-(-\frac{3}{2})=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$, $\overline{PQ}=x_1-x_2=\frac{a^2}{12}-(-\frac{a^2}{6})=\frac{a^2}{4}$

점 P는 포물선 C_1 위의 점이고 점 F₁은 포물선 C_1 의 초점이므로 점 P에서 포물선 C_1 의 준선 $x=-3$ 에 내린 수선의 발을 H₁이라 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{PF_1}=\overline{PH_1}=x_1-(-3)=\frac{a^2}{12}+3$

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P와 초점 $F(p, 0)$ 사이의 거리는 점 P와 준선 $x=-p$ 까지의 거리와 같아.

점 Q는 포물선 C_2 위의 점이고 점 F₂은 포물선 C_2 의 초점이므로 점 Q에서 포물선

C_2 의 준선 $x=\frac{3}{2}$ 에 내린 수선의 발을 H₂라 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{QF_2}=\overline{QH_2}=\frac{3}{2}-x_2=\frac{3}{2}-(-\frac{a^2}{6})=\frac{a^2}{6}+\frac{3}{2}$

3rd 사각형 PQF₂F₁의 둘레의 길이를 이용하여 a 의 값을 구하고 사각형 PQF₂F₁의 넓이를 구해.

사각형 PQF₂F₁의 둘레의 길이가 41이므로

$\overline{PQ}+\overline{QF_2}+\overline{F_1F_2}+\overline{PF_1}=\frac{a^2}{4}+(\frac{a^2}{6}+\frac{3}{2})+\frac{9}{2}+(\frac{a^2}{12}+3)$
 $=\frac{1}{2}a^2+9=41$

$$\frac{1}{2}a^2=32, a^2=64 \quad \therefore a=8 (\because a>0)$$

$\overline{PQ} \parallel \overline{F_1F_2}$ 이므로 사각형 PQF_2F_1 은 사다리꼴이다.
따라서 사각형 PQF_2F_1 의 넓이는
아랫변의 길이가 a , 윗변의 길이가 b , 높이가 h 인 사다리꼴의 넓이 S 는
 $S=\frac{1}{2} \times (a+b) \times h$ 이,
 $\frac{1}{2} \times (\overline{PQ} + \overline{F_1F_2}) \times (\text{점 P의 } y\text{좌표}) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{a^2}{4} + \frac{9}{2}\right) \times a$
 $= \frac{1}{2} \times \left(16 + \frac{9}{2}\right) \times 8$
 $= 82$

29 정답 128 *쌍곡선과 타원 [정답률 52%]

〔정답 공식: 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 에 대하여 $c^2 = a^2 + b^2$ 이다.〕

1st 점 P의 좌표를 이용하여 선분 PF' 의 길이를 구해.

점 F가 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 초점이므로
 $c^2 = 4 + 5 = 9 \quad \therefore c = 3 (\because c > 0)$ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점을 $F(c, 0), F'(-c, 0) (c > a > 0)$ 이라고 하면
 $c^2 = a^2 + b^2$ 이,

이때, 점 P가 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 과 직선 $x = 3$ 의 교점이므로

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \text{에 } x = 3 \text{을 대입하면}$$

$$\frac{9}{4} - \frac{y^2}{5} = 1, \frac{y^2}{5} = \frac{5}{4}, y^2 = \frac{25}{4}$$

$$\therefore y = \pm \frac{5}{2}$$

이때, 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 점 P의 좌표는 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ 이다.

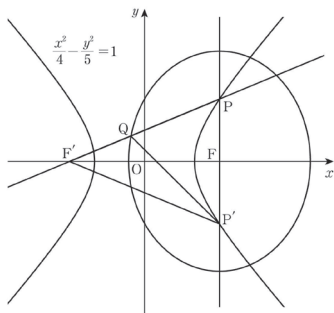
$\overline{PF} = \frac{5}{2}$ 이고 쌍곡선의 주축의 길이가 4이므로 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{PF}$ 의 길이는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 의 주축의 길이는 $2a$ 이고 쌍곡선의 두 점 P의 y 좌표와 같아. 초점을 F, F' 이라 할 때 쌍곡선 위의 임의의 점 P에 대하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a$ 이,

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4$$

$$\therefore \overline{PF'} = 4 + \overline{PF} = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

2nd 다음인 삼각형을 찾은 후 닮음 관계를 이용하여 선분 PQ의 길이를 구해.



두 삼각형 $PF'P$ 과 $PP'Q$ 는 $\overline{PP'} = \overline{QP'}$, $\overline{PF'} = \overline{P'F'}$ 이므로 이등변삼각형이고 밑각이 $\angle F'PP'$ 으로 같다. 따라서 두 삼각형은 닮음이다.

밑각의 크기가 같은 이등변삼각형은 서로 닮음이다.

$$\overline{PP'} = \frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) = 5 \text{이므로 두 삼각형 } PF'P \text{과 } PP'Q \text{의 닮음비는}$$

점 P의 좌표는 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, 점 P'의 좌표는 $\left(3, -\frac{5}{2}\right)$ 이고 두 점은 x 좌표가 같으므로 선분 PP' 의 길이는 두 점의 y 좌표의 차와 같아.

$$\overline{PF'} : \overline{PP'} = \frac{13}{2} : 5 = 13 : 10 \text{이다.}$$

이때, $\overline{PP'} : \overline{PQ} = 13 : 10$ 이므로 $5 : \overline{PQ} = 13 : 10$, $13\overline{PQ} = 50$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{50}{13}$$

3rd 타원의 성질을 이용하여 장축의 길이를 구해.

두 점 P, P'을 초점으로 하고 점 Q를 지나는 타원의 장축의 길이는 타원의 정의에 의해 $\overline{PQ} + \overline{QP'}$ 의 값과 같다.

타원 위의 임의의 점에서 타원의 두 초점까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같아.

$$\overline{QP'} = \overline{PP'} = 5 \text{이므로 } \overline{PQ} + \overline{QP'} = \frac{50}{13} + 5 = \frac{115}{13}$$

따라서 타원의 장축의 길이는 $\frac{115}{13}$ 이다.

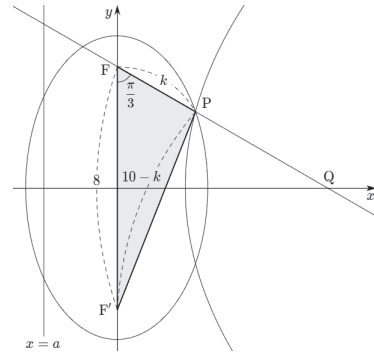
따라서 $p = 13, q = 115$ 이므로

$$p + q = 13 + 115 = 128$$

30 정답 60 *포물선과 타원 [정답률 32%]

〔정답 공식: 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는 준선까지의 거리와 같다.〕

1st 코사인법칙과 타원의 정의를 이용하여 선분 FP의 길이를 구해.



타원의 장축의 길이가 10이므로 $\overline{FP} + \overline{F'P} = 10$ 이다.

따라서 $\overline{FP} = k (0 < k < 10)$ 라 하면 $\overline{F'P} = 10 - k$

두 초점이 F, F' 인 타원의 장축의 길이가 a 일 때,

타원 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = a$

$$\overline{FF'} = 4 - (-4) = 8 \text{이고 } \angle F'FP = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

삼각형 PPF' 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{F'P}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{FF'}^2 - 2 \times \overline{FP} \times \overline{FF'} \times \cos \frac{\pi}{3} \quad \text{삼각형 ABC에서 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$(10 - k)^2 = k^2 + 64 - 2 \times k \times 8 \times \frac{1}{2}, k^2 - 20k + 100 = k^2 - 8k + 64,$$

$$12k = 36 \quad \therefore k = 3$$

따라서 선분 FP의 길이는 3이다.

2nd 포물선의 정의와 삼각비를 이용하여 선분 RQ의 길이를 구해.

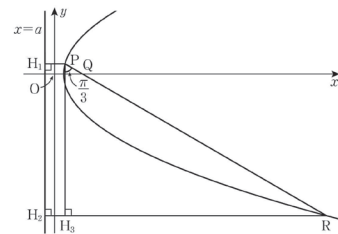
$$\angle F'FP = \frac{\pi}{3} \text{이고 원점 O에 대하여 } \overline{OF} = 4 \text{이므로 } \overline{FQ} = 2\overline{OF} = 8$$

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{FQ} - \overline{FP} = 8 - 3 = 5 \quad \text{삼각형 OFQ는 } \angle F'FP = \frac{\pi}{3} \text{인 직각삼각형이므로}$$

특수각의 삼각비에 의해 $\overline{OF} : \overline{FQ} : \overline{OQ} = 1 : 2 : \sqrt{3}$

이와, 이때, $\overline{OF} : \overline{FQ} = 1 : 2$ 이므로

$\overline{FQ} = 2\overline{OF} = 2 \times 4 = 8$ 이,



점 P는 포물선 위의 점이므로 점 P에서 포물선의 준선 $x = a$ 에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하면 $\overline{PH_1} = \overline{PQ} = 5$

선분 RQ의 길이를 l 이라 하면 점 R도 포물선 위의 점이므로 점 R에서 포물선의 준선 $x = a$ 에 내린 수선의 발을 H_2 라 하면 $\overline{RH_2} = \overline{RQ} = l$

점 P에서 직선 RH_2 에 내린 수선의 발을 H_3 이라 하면

$$\overline{H_2H_3} = \overline{PH_1} = 5 \quad \text{준선 } x = a \text{와 직선 } PH_3 \text{은 평행하므로 } \overline{H_2H_3} = \overline{PH_1} = 5 \text{이,}$$

$$\overline{RH_3} = \overline{RH_2} - \overline{H_2H_3} = l - 5 \text{이고 } \overline{PR} = \overline{PQ} + l = l + 5 \text{이므로}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{RH_3}}{\overline{PR}}, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l - 5}{l + 5}, 2(l - 5) = \sqrt{3}(l + 5),$$

직각삼각형 PH_3R 에서 $\angle RPH_3 = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{RH_3}}{\overline{PR}}$ 이,

$$2l - 10 = \sqrt{3}l + 5\sqrt{3}, (2 - \sqrt{3})l = 10 + 5\sqrt{3}$$

$$\therefore l = \frac{10 + 5\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = (10 + 5\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 35 + 20\sqrt{3}$$

따라서 선분 RQ의 길이는 $35 + 20\sqrt{3}$ 이다.

3rd 선분 PR의 길이를 구하여 $p + q$ 의 값을 구해.

$$\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{RQ} = 5 + (35 + 20\sqrt{3}) = 40 + 20\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$p = 40, q = 20 \quad \therefore p + q = 40 + 20 = 60$$

☆ 포물선의 정의 및 방정식

개념·공식

- 포물선의 정의: 평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 주어질 때, 점 F와 직선 l 에 이르는 거리가 각각 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다. 이때, 점 F를 초점, 직선 l 을 준선이라 한다.
- 초점이 $F(p, 0)$, 준선이 $x = -p$ 인 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ (단, $p \neq 0$)
- 초점이 $F(0, p)$, 준선이 $y = -p$ 인 포물선의 방정식은 $x^2 = 4py$ (단, $p \neq 0$)