

학교시험에 반드시 출제되는

핵심 기출 문제 1118제 수록

수능 문제의 70~80%가
공통수학 개념 위에서 풀립니다.

수능 기출 문제 분석 결과
출제 방식은 달라도 근본 개념은
공통수학에서 시작되기 때문에
논리적 사고로 탄탄하게 공부해야 합니다.

자이스토리는
새로운 내신 등급에 꼭맞는 핵심 유형을
세밀하게 분류하고 자주 출제되는
기출 문제를 엄선하여 수록했습니다.
이 문제들만 충분히 연습하면
내신 1 등급은 쉽게 이룰 수 있습니다.

또한, 자이스토리만의 꼼꼼한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설은
문제를 풀어가면서 동시에 개념과 유형을 자연스럽게
익힐 수 있도록 도와줍니다.

특별한 사람만이 수학을 좋아하고 잘하는 것이 아닙니다.
개념을 바르게 이해하고, 쉬운 문제부터 단계를 밟아 기본을 다지면
수학은 어느새 재미있는 과목이 되어 있을 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1 등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [27일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헛갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A01~42		월 일	월 일
2	43~77		월 일	월 일
3	B01~52		월 일	월 일
4	53~92		월 일	월 일
5	93~106		월 일	월 일
6	C01~54		월 일	월 일
7	55~97		월 일	월 일
8	98~123		월 일	월 일
9	D01~50		월 일	월 일
10	51~78		월 일	월 일
11	79~101		월 일	월 일
12	E01~50		월 일	월 일
13	51~85		월 일	월 일
14	F01~56		월 일	월 일
15	57~94		월 일	월 일
16	95~122		월 일	월 일
17	G01~49		월 일	월 일
18	50~95		월 일	월 일
19	96~123		월 일	월 일
20	H01~56		월 일	월 일
21	57~109		월 일	월 일
22	110~152		월 일	월 일
23	I01~56		월 일	월 일
24	57~100		월 일	월 일
25	101~137		월 일	월 일
26	J01~54		월 일	월 일
27	55~93		월 일	월 일



• 나는 _____ 대학교 _____ 학과 _____ 학년이 된다.

• 磨斧作針 (마부작침) - 도끼를 갈아 비늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

집필진 · 감수진 선생님들



* 자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
 수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
 수록하였으며, 명강의로 소문난 학교 · 학원 선생님들께서
 명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여자고등학교	홍지언 부산대학교 수학 박사과정	김예진 경남 수학 전문컨설턴트	정경애 대구 수투스학학원
배수나 가인아카데미	홍지우 안양 부흥고등학교	김 준 인천 쏠에듀학원	정석균 천안 힐베르트 수학과학학원
이종석 일등급 수학 저자	황광희 시흥 시흥고등학교	박경희 화성 대치정인학원	채송화 부산 채송화수학
신건률 대치 다원교육	수경 수학 콘텐츠 연구소	신은숙 서울 펜타곤학원	홍영표 안양 더큰꿈학원
장철희 서울 보성고등학교	[다른 풀이 집필]	유대호 평촌 플랜지에듀	황선아 수원 서나학원
전경준 서울 풍문고등학교	강 현 경주 비상아이비츠 강현학원	유재영 평택 비전고등학교	개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널 
전준홍 서울 압구정 Yestudy	곽웅수 광주 카르페영수학원	이보형 성남 매쓰코드학원	
최대철 서울 인창고등학교	김리안 인천 수리안학원	이세복 서울 일타수학학원	
		전승환 안양 공줄학원	

셀프수학

[특별 감수진]

권가영 서울 (목동)커스텀 수학학원	신창훈 광주 송원고등학교	이용환 원주 원주여자고등학교	조현정 서울 동덕여자고등학교
박수진 안산 매스탑수학학원	안호진 서울 수준영재수학학원	이윤희 인천 송덕여자중학교	채희성 수원 이투스수학신영통학원
박경문 전주 해성중학교	유재영 안성 경기창조고등학교	이준형 사천 사천고등학교	추병준 성남 깊은수학학원
박주현 서울 장훈고등학교	윤지원 인천 송도일프로팁수학	장용준 의정부 상우고등학교	
송은연 군포 오른수학	이승주 인천 명신여자고등학교	장정우 광주 장정우수학교실	

[감수진]

강다은 부산 코스타디	박문영 화성 (동탄)와이수학	윤희용 부천 매트릭스학원	정진영 인천 정선생수학연구소
강동호 광주 별수학학원	박순지 고양 오르다입시종합학원	이민규 인천(청라) 투스카이수학학원	조승혁 안산 뉴턴학원
구재희 오산 오성학원	박승민 오산 피버수학	이보라 부산 지혜플러스학원	조원진 평촌 RTS 안산S&T
구주영 안양 거북선중고등수학학원	박영선 세종 유열수학	이상준 부산 화명조은학원	조종희 춘천 유트엠수학
권두리 화성 (동탄)M&S학원	박은아 울산 팍스학원	이상철 부천 g1230 옥길	진하영 화성(기안) 위투지학원
김대환 인천 학산학원	박정환 성남 (분당)수학의아침	이세라 의정부 매쓰스탠다드 학원	차강일 순천 참수학학원
김두비 성남 하이탑에듀	박제이 서울 다짐수학	이승진 평택(안중) 호연수학	채송화 부산 채송화수학학원
김리안 인천 수리안학원	박진한 화성 엽실론학원	이영주 제주 피드백수학학원	최경희 시흥 최강수학학원
김상윤 의정부 골드클래스학원	박진형 울산 송정IPS수학과학학원	이은경 전주 시그마수학전문학원	최선훈 고양 애플학원
김상혁 광주 프리마수학학원	방선윤 울산 엘리트해법수학	이준택 안산 신길고등학교	최승호 전주 SMT01카데미학원
김선화 화성 수학파트너학원	배지후 세종 해밀학원	이지호 양주 에이치투에스학원	최영호 시흥 편한수학학원
김소영 대구 에이블수학교습소	부종민 부산 부종민수학	이찬희 청주 (오창)미로수학	최은미 서울 위플라이수학
김예지 화성 (동탄)과수원학원	서민재 서울 관악GMS뉴스터디학원	이창무 대구 531수학학원	한광희 전주 유니이츠학원
김유삼 서울 현민수학학원	설성희 김포 설쌤수학학원	이태권 대구 보답학원	한철호 울산 수토바입시학원
김윤선 구리 국빈학원	손태성 대구 하늘수학	이한빛 고양 (일산)한빛수학학원	홍의찬 고양 (일산)원수학
김윤진 오산 더샘수학학원	송미경 영천 이루지오학원	이형림 성남 (분당)원리깨우치는데수학	황미경 인천 MK수학전문학원
김정혁 서울 (대치)새론시대	송유현 제주 GTS Math	임병훈 수원 웅진프라임금곡학원	
김초식 서울 (목동)엘플러스수학학원	신경미 서울 래미안수학전문교육원	임유진 대구 박진수학	
김현익 서울 더(The)수학학원	신다혜 부천 알찬학원	장보영 인천 장보영수학연구소	
김혜성 서울 (노원)핏클래스학원	신정식 서울 (목동)미래탐구학원	장술민 성남 우주수학학원	
김호연 광명 마이엠수학학원	심해진 인천 송도메스몽플러스학원	장준영 세종 지혜수입시학원	
나원선 광주 라플라스수학학원	안영미 청주 라온수학	전준영 대구 옥수학학원	
문대승 광주 열성수학학원	양 일 인천 비코즈수학학원	정민수 광주 정경태수학아카데미	
문상경 대구 수이일체수학학원	어성웅 수원 어쌤수학학원	정정보 대전 카이탑수학	
문소영 창원 문소영수학관리학원	엄시은 김포 유트엠	정용훈 성남 (분당)일비총천수학학원	
박경민 대구 학문당입시학원	오상혁 서울 미듬수학학원	정은아 용인 별들의숲수학학원	
박래정 광주 RJ수학	윤정민 부산 명진학원	정지민 청주 스텝업수학	

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
문지원 서울대학교 의예과
석민준 서울대학교 첨단융합학과
장현준 서강대 수학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
조선하 서울대학교 자유전공학부
황대윤 서울대 수리과학부

차 례 [총 187개 유형]

I 도형의 방정식

A 평면좌표 - 11개 유형

개념 스토리 / 개념 확인 문제	10
내신+학평 유형 스토리	12
서술형 스토리	22
1등급 고난도 스토리	23

B 직선의 방정식 - 18개 유형

개념 스토리 / 개념 확인 문제	26
내신+학평 유형 스토리	30
서술형 스토리	45
1등급 고난도 스토리	46
동아리 소개 / 카이스트 KAKI	48

C 원의 방정식 - 19개 유형

개념 스토리 / 개념 확인 문제	50
내신+학평 유형 스토리	54
서술형 스토리	72
1등급 고난도 스토리	73

D 도형의 이동 - 13개 유형

개념 스토리 / 개념 확인 문제	76
내신+학평 유형 스토리	80
서술형 스토리	92
1등급 고난도 스토리	93

II 집합과 명제

E 집합의 뜻과 표현 - 13개 유형

개념 스토리 / 개념 확인 문제	96
내신+학평 유형 스토리	100
서술형 스토리	108
1등급 고난도 스토리	109
동아리 소개 / 서울대 GLEAP	110

F 집합의 연산 - 18개 유형

개념 스토리 / 개념 확인 문제	112
내신+학평 유형 스토리	116
서술형 스토리	132
1등급 고난도 스토리	133

G 명제 - 25개 유형

개념 스토리 / 개념 확인 문제	136
내신+학평 유형 스토리	140
서술형 스토리	157
1등급 고난도 스토리	158
동아리 소개 / 고려대 Korea Tigers	160

Ⅲ 함수와 그래프

H 함수 - 29개 유형

개념 스토리 / 개념 확인 문제	162
내신+학평 유형 스토리	166
서술형 스토리	188
1등급 고난도 스토리	189

I 유리식과 유리함수 - 23개 유형

개념 스토리 / 개념 확인 문제	192
내신+학평 유형 스토리	196
서술형 스토리	213
1등급 고난도 스토리	214
동아리 소개 / 성균관대 성균지	216

J 무리식과 무리함수 - 18개 유형

개념 스토리 / 개념 확인 문제	218
내신+학평 유형 스토리	220
서술형 스토리	232
1등급 고난도 스토리	233

빠른 정답 찾기 236

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

셀프수학





완벽한 개념 이해, 핵심 기출 유형 문제 훈련으로 내신

1등급

완성

1 개념 스토리+개념 확인 문제

공통수학2에서 꼭 알아야 하는 중요한 교과서 개념을 쉽게 이해되도록 설명하였습니다. 또한, 개념과 공식을 확실히 자신의 것으로 만들 수 있는 개념 확인 문제를 함께 수록했습니다.

- **중요도** 🌟🌟🌟: 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- **개념 확인 문제**: 개념 하나하나에 대한 맞춤 문제로 구성

개념 스토리

개념 확인 문제

1 두 점 사이의 거리 - 유형 01-05

(1) 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
특히, 원점 O와 점 $A(x, y)$ 사이의 거리는 $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$

(2) 같은 거리에 있는 점의 좌표
(i) 구하고자 하는 점의 좌표를 미지수로 나타낸 x 축 위에 있다. $\Rightarrow (a, 0)$ y 축 위에 있다. $\Rightarrow$ $0, (0, b)$
(ii) 두 점 사이의 거리 공식을 활용하여 식을 세우고 방

2 선분의 내분점 - 유형 06-08

점 P가 선분 AB 위에 있고, $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$ ($m > 0$)
AB를 $m : n$ 로 내분한다고 하며 점 P를 선분 AB의 내분점
(1) 수직선 위의 선분의 내분점
수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 에 대하여 선분 AB를 내분하는 점을 P라 하면 $P(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n})$
특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $M(\frac{x_1 + x_2}{2})$

(2) 좌표평면 위의 선분의 내분점
좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB를 $m : n$ 로 내분하는 점 P의 좌표는 $P(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n})$

3 평면좌표의 활용
[A09~A10] 좌표평면 위의 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

- **QR 코드**: 수학 전문 강사의 생생한 개념 강의를 통해 완벽한 개념 학습을 할 수 있도록 하였습니다.

3 서술형 스토리 - 단계별 문제해결 방법 제시

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계적으로 풀어나가는 과정을 제시하여 서술형 문제에 대한 자신감을 얻을 수 있게 구성하였습니다.

서술형 스토리

단계별 서술하기 + 스스로 서술하기

A68 ★☆☆

좌표평면 위의 두 점 $A(3, 2)$, $B(-4, 5)$ 에 대하여 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 를 만족하는 점 C가 직선 $y = x - 2$ 위의 점일 때, 원점 O에서 점 C까지의 거리를 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

1st 직선 위의 점 C의 좌표를 한 문자로 나타내보자.

2nd $\overline{AC} = \overline{BC}$ 임을 이용하여 점 C의 좌표를 구하자.

3rd OC의 길이를 구하자.

A70 ★☆☆

두 점 $A(3, 2)$, $B(-3, -1)$ 을 이은 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점을 E라 하자. 직선 $y = mx - 2$ 가 점 E를 지날 때, 상수 m의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

A71 ★☆☆

두 점 $A(-4, -3)$, $B(1, -1)$ 에 대하여 점 C(a, 3)이 $\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 를 만족할 때, ab의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, 점 C는 두 점 A와 B를 이은 선분 있고, 점 C는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.) (10점)

2 내신+학평 유형 스토리

개념에 따른 유형을 자세히 공부할 수 있도록 학교 시험이나 학력평가에서 출제되었던 문제들을 촘촘하게 세분화하여 개념순, 난이도 순으로 수록하였습니다.

- **유형 정리**: 시험에서 출제되었던 모든 유형을 제시하여 효과적이고 완벽한 유형 분석을 할 수 있도록 하였습니다.
- **tip**: 유형에 따라 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR 코드**: 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.

내신+학평 유형 스토리

※※※ : 기본 문제 ※※※ : 중급 문제
※※※ : 중상급 문제 ※※※ : 상급 문제

1 두 점 사이의 거리 + 3 평면좌표의 활용

유형 01 두 점 사이의 거리 ★☆☆

(1) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
(2) 원점 O와 점 $A(x, y)$ 사이의 거리는 $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$

tip
두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 좌표평면에서 $\overline{AB}$ 를 빗변으로 하는 직각삼각형을 그렸을 때, 피타고라스 정리를 적용한 것이다.

A13 ※※※ 2024년 10월 교육청 2(고1)

좌표평면 위의 두 점 $(1, 3)$, $(2, 5)$ 사이의 거리는? (2점)

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

A14 ※※※ 2024년 9월 학평 4(고1)

좌표평면 위의 두 점 $A(1, 3)$, $B(2, a)$ 사이의 거리가 $\sqrt{17}$ 일 때, 양수 a의 값은? (3점)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

A16 ※※※ 2023년 9월 학평 3(고1)

좌표평면 위의 점 $A(a, 3)$ 에 대하여 $OA = 4$ 일 때, a의 값은? (단, O는 원점이다.) (2점)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

A17 ★☆☆

그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $A(0, 3)$, $B(2, 0)$ 을 잇는 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD에 대하여 OC의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, 점 C는 제1사분면 위의 점이다.)

- **난이도**: ※※※ - 기본 문제, ※※※ - 중급 문제
※※※ - 중상급 문제, ※※※ - 상급 문제

- **출처표시**: 수능, 평가원 - 대비연도, 학력평가 - 실시연도
 - **2026대비 수능 22번**: 2025년 11월에 실시한 수능
 - **2025실시 6월 학평 16(고1)**: 2025년 6월에 실시한 학력평가
 - **2024실시 3월 학평 10(고2)**: 2024년 3월에 실시한 학력평가
 - **표시 없는 문제**: 기출 변형 문제

- **최다출제**: 내신, 학평에서 가장 출제율이 높은 문제
- **최신유형**: 최근 내신+학평에서 출제되는 새로운 유형의 문제
- **필수**: 유형 학습을 위해 꼭 확인 해야 하는 문제
- **중요**: 시험에 반드시 출제되는 중요 유형 체크
- **고난도**: 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형

문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다

문항 배열 및 구성 [1118제]

① 개념 이해와 개념 확인 문제 [258제]

각 단원에서 배울 개념 중 중요한 것들을 자세히 설명하고 개념 하나하나에 대한 맞춤 문제를 수록하였습니다.

② 최신 15개년 187개 유형 핵심 기출 문제 수록

- 새교육과정에 꼭 맞는 최신 고1 학력평가 핵심 기출 문제 수록(192제)
- 고2, 고3 기출 문제 중 새교육과정에 알맞은 기출 문제 선별 수록(177제)
- 새교육과정 완벽 대비를 위한 유형별 핵심 기출 변형 문제 수록(442제)
- 기출 핵심 유형 완전 학습 - 내신+학평 유형 스토리[187유형, 772제]

③ 서술형 단계별 훈련을 위한 내신 기출 변형 문제 서술형 스토리 [서술형 49제]

각 단원 중 서술형 출제 방식에 적합하고 출제 비율이 높은 내신 기출 변형 서술형 문제를 구성하였습니다.

★ 내신 1등급을 위한 내신 기출 변형 문제 추가 수록

1. 내신 1등급을 위해 187개 문제 유형으로 세분화

수학 개념을 쉽고 빠르게 이해하는 가장 좋은 학습법은 문제 유형을 세분화해서 공부하는 것입니다.

학교 시험은 다양한 유형에서 고르게 출제되기 때문에, 유형을 세분화해서 충분히 연습해야 합니다.

2. 187개 유형 연습을 위한 기출 문제 + 내신 기출 변형 문제 수록

학력평가는 특정한 유형에서 많이 출제되기 때문에 어떤 유형은 기출 문제가 과하게 많고,

어떤 유형은 기출 문제가 부족합니다. 그래서 187개 유형에 맞는 내신 기출 변형 문제를 보충 수록해서

1등급을 위한 완벽한 학습이 되도록 하였습니다.

[공통수학2 문항 구성표]

시행연도	고1 3월 학력평가	고1 6월 학력평가	고1 9월 학력평가	고1 11월 학력평가	고2 3월 학력평가	연도별 문항 수
2025				0	14	14
2024			12	15	18	45
2023			11	16	15	42
2022	출제 되지 않음		9	13	14	36
2021			5	11	10	26
2020			9	10	11	30
2019	1	0	5	9	16	31
2018	0	0	5	10	6	21
2017	0	0	4	2	6	12
2016	0	1	6	2	20	29
2015 이전	1	7	12	16	37	73
고3 수능, 평가원, 학력평가	10					
내신 기출 변형 문제	442					
기본 개념, 서술형 문제	307					
총 수록 문항 수						1118

■ 내신 기출 변형 문제 : 187개 유형 예상 문제 수록

■ 학평 기출 : 핵심 기출 문제 선별 수록



A

평면좌표

* 유형 차례

- ★ 중요 유형 01 두 점 사이의 거리
- ★ 중요 유형 02 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점
- 유형 03 두 점 사이의 거리의 활용 - 삼각형의 모양 (고난도)
- 유형 04 선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값
- 유형 05 중선정리
- 유형 06 수직선에서 선분의 내분점
- ★ 중요 유형 07 좌표평면에서 선분의 내분점
- 유형 08 선분의 내분점의 활용 (고난도)
- ★ 중요 유형 09 삼각형의 무게중심
- 유형 10 선분의 중점의 활용 - 사각형 (고난도)
- 유형 11 각의 이등분선의 성질 (고난도)

내분점, 중점, 무게중심을
구할 때, x 좌표끼리, y 좌표끼리
계산해야 해.



* 단원 학습 목표

- 중학교에서 배운 수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식과 피타고라스 정리를 이용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식을 유도하고 이를 활용하여 문제를 풀 수 있다.
- 선분의 내분을 기하학적으로 이해하여 공식을 이용해 내분점의 좌표를 구하고, 이를 활용할 수 있다.

* 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 좌표를 이용하면 변의 길이를 식으로 나타낼 수 있기 때문에 도형의 성질을 쉽게 파악할 수 있다.
즉, 주어진 도형을 좌표평면 위에 옮겨 두 점 사이의 거리와 내분점의 좌표를 구하는 연습을 꾸준히 한다.
- 선분의 내분점 공식에 의해 삼각형의 무게중심의 좌표도 구할 수 있다. 좌표평면 위의 도형의 활용문제에서 무게중심과 연관된 여러 성질들을 종합적으로 적용할 수 있도록 한다.

* 자주 출제되는 개념+공식

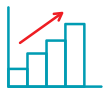
- 1 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
- 2 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여
 - (1) 선분 AB 를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로
내분하는 점을 P 라 하면

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$
 - (2) 선분 AB 의 중점을 M 이라 하면

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
- 3 좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 을
꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 하면

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$



1 두 점 사이의 거리¹ — 유형 01~05

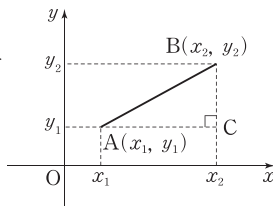
(1) 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

특히, 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$



(2) 같은 거리에 있는 점의 좌표²

(i) 구하고자 하는 점의 좌표를 미지수로 나타낸다.

예) x 축 위에 있다. $\Rightarrow (a, 0)$ y 축 위에 있다. $\Rightarrow (0, b)$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위에 있다. $\Rightarrow (c, f(c))$

(ii) 두 점 사이의 거리 공식을 활용하여 식을 세우고 방정식을 푼다.

2 선분의 내분점 — 유형 06~08

점 P가 선분 AB 위에 있고, $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n (m > 0, n > 0)$ 일 때, 점 P는 선분 AB를 $m : n$ 을 내분한다고 하며 점 P를 선분 AB의 내분점이라 한다.

(1) 수직선 위의 선분의 내분점

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 에 대하여 선분 AB를 $m : n (m > 0, n > 0)$ 으로

내분하는 점을 P라 하면 $P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}\right)$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

(2) 좌표평면 위의 선분의 내분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB를

$m : n (m > 0, n > 0)$ 으로 내분하는 점을 P라 하면

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ 중점은 선분을 1 : 1로 내분하는 점이다.

참고 선분 AB의 내분점 P는 m, n 의 값에 관계없이 항상 선분 AB 위에 있다.

3 평면좌표의 활용 — 유형 01~11

(1) 삼각형의 무게중심³

① 좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 을 꼭짓점으로 하는

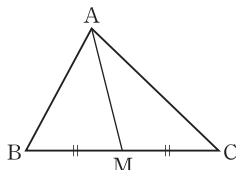
삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

② 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $m : n (m > 0, n > 0)$ 으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 할 때, 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심은 일치한다.

(2) 중선정리 (파푸스의 정리)

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$



① 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$

사이의 거리는 $\overline{AB} = |x_2 - x_1|$

특히, 원점 O와 점 $A(x_1)$ 사이의

거리는 $\overline{OA} = |x_1|$

참고 왼쪽 그림과 같이 직각삼각형

ABC에서 피타고라스 정리에 의

$$\overline{AB}^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

② 삼각형의 외심

① 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점을 외심이라 한다.

② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

즉, O가 삼각형 ABC의 외심이면

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} \text{이다.}$$

③ 삼각형의 무게중심은 세 중선을

각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분한다.

또한, 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여

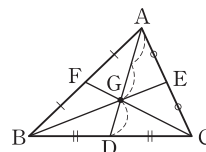
$$(1) \triangle GAB = \triangle GBC = \triangle GCA$$

$$= \frac{1}{3} \triangle ABC$$

$$(2) \triangle GAF = \triangle GBF = \triangle GBD$$

$$= \triangle GCD = \triangle GCE$$

$$= \triangle GAE = \frac{1}{6} \triangle ABC$$



**1 두 점 사이의 거리**

[A01~A02] 수직선 위의 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

A01 $A(2), B(-3)$ **A02** $A(-8), B(1)$

[A03~A04] 좌표평면 위의 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

A03 $O(0, 0), A(-6, 8)$ **A04** $A(-5, -2), B(1, -6)$ **2 선분의 내분점****A05** 수직선 위의 두 점 $A(-3), B(5)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표를 구하시오.**A06** 수직선 위의 두 점 $A(-4), B(6)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표를 a , 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.**A07** 좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 1), B(3, 7)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 5 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표를 구하시오.**A08** 좌표평면 위의 두 점 $A(a, 3), B(4, b)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 3 : 1로 내분하는 점 R의 좌표가 $(4, 0)$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하시오.**3 평면좌표의 활용**

[A09~A10] 좌표평면 위의 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

A09 $A(3, 1), B(2, 6), C(7, 2)$ **A10** $A(1, 8), B(-2, 3), C(4, -5)$ [A11~A12] 좌표평면 위의 세 점 $A(0, 5), B(4, -3), C(p, q)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 다음과 같을 때, pq 의 값을 구하시오.**A11** $G(1, 0)$ **A12** $G(4, -1)$



내신+학평 유형 스토리

※※※ : 기본 문제 ※※※ : 중상급 문제
※※※ : 중급 문제 ※※※ : 상급 문제

1 두 점 사이의 거리 + 3 평면좌표의 활용

유형 01 두 점 사이의 거리

★중요

기초

(1) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(2) 원점 O 와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

tip

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 좌표평면에서 $\overline{AB}$ 를 빗변으로 하는 직각삼각형을 그렸을 때, 피타고라스 정리를 적용한 것이다.

A13 ※※※ 2024실시 10월 교육청 2(고1)



좌표평면 위의 두 점 $(1, 3)$, $(2, 5)$ 사이의 거리는? (2점)

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

A14 ※※※ 2024실시 9월 학평 4(고1)



좌표평면 위의 두 점 $A(1, 3)$, $B(2, a)$ 사이의 거리가 $\sqrt{17}$ 일 때, 양수 a 의 값은? (3점)

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

A15 ※※※ 2022실시 9월 학평 25(고1)



좌표평면 위에 두 점 $A(2t, -3)$, $B(-1, 2t)$ 가 있다. 선분 AB 의 길이를 l 이라 할 때, 실수 t 에 대하여 l^2 의 최솟값을 구하시오. (3점)

A16 ※※※ 2023실시 9월 학평 3(고1)



좌표평면 위의 점 $A(a, 3)$ 에 대하여

$\overline{OA} = 4$ 일 때, a^2 의 값은? (단, O 는 원점이다.) (2점)

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

A17 ※※※ 2023실시 9월 학평 13(고1)

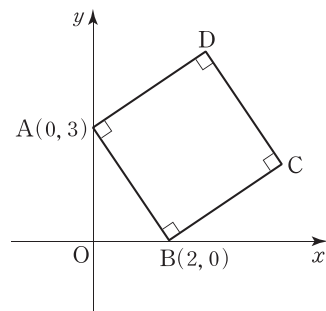


그림과 같이 좌표평면 위의 두 점

$A(0, 3)$, $B(2, 0)$ 을 잇는 선분 AB 를 한 변으로 하는

정사각형 $ABCD$ 에 대하여 $\overline{OC}^2$ 의 값을 구하시오.

(단, O 는 원점이고, 점 C 는 제 1 사분면 위의 점이다.) (4점)



A18 ※※※ 2019실시 9월 학평 13(고1)

이차함수 $f(x) = x^2 + 4x + 3$ 의 그래프와

직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점 P , Q 에서 만난다.

점 P 가 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점일 때,

선분 PQ 의 길이는? (단, k 는 상수이다.) (3점)

- ① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$
④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

유형 02 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

☆중요

이해

점 P가 두 점 A, B에서 같은 거리에 있으면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이다.

이때, 점 P가

- (1) x 축 위의 점이면 $P(a, 0)$
 (2) y 축 위의 점이면 $P(0, b)$
 (3) 직선 $y=mx+n$ 위의 점이면 $P(a, ma+n)$

이라 좌표를 놓는다.

tip

✚ 삼각형의 외심

- ① 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
 ② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

A19 ***

세 점 $A(-5, -7)$, $B(a, -2)$, $C(3, 1)$ 에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 를 만족하는 a 의 값은? (3점)

- ① -2 ② -1 ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

A20 ***

최다출제

좌표평면 위의 두 점 $A(-3, 3)$, $B(4, 4)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표를 구하시오. (3점)

A21 ***

2023실시 11월 학평 9(고1)

좌표평면 위에 두 점 $A(2, 4)$, $B(5, 1)$ 이 있다. 직선 $y = -x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 일 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.) (3점)

- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$



A22 ***

두 점 $A(0, 2)$, $B(-2, 1)$ 로부터 같은 거리에 있는 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = -x + 1$ 위의 점일 때, ab 의 값은?

(3점)

- ① $-\frac{15}{8}$ ② $-\frac{15}{4}$ ③ $-\frac{15}{2}$
 ④ -2 ⑤ -1

A23 ***

필수

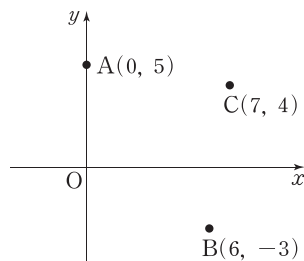


좌표평면 위의 세 점 $A(3, 4)$, $B(-3, 0)$, $C(5, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, ab 의 값은? (3점)

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

A24 ***

다음 그림은 A, B, C 세 아파트의 위치를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 학생들의 편의를 위해 각 아파트로부터의 거리가 같은 지점에 학교를 지으려고 할 때, 학교의 위치는 $P(a, b)$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (4점)





A68 ***

좌표평면 위의 두 점 $A(3, 2)$, $B(-4, 5)$ 에 대하여 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 를 만족하는 점 C 가 직선 $y = x - 2$ 위의 점일 때, 원점 O 에서 점 C 까지의 거리를 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

1st 직선 위의 점 C 의 좌표를 한 문자로 나타내보자.

2nd $\overline{AC} = \overline{BC}$ 임을 이용하여 점 C 의 좌표를 구하자.

3rd $\overline{OC}$ 의 길이를 구하자.

A69 ***

좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 1)$, $B(4, 4)$ 로부터 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 C , y 축 위의 점을 D 라고 할 때, $\overline{CD}$ 의 길이를 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

1st $\overline{CA} = \overline{CB}$ 임을 이용하여 점 C 의 좌표를 구하자.

2nd $\overline{DA} = \overline{DB}$ 임을 이용하여 점 D 의 좌표를 구하자.

3rd $\overline{CD}$ 의 길이를 구하자.

A70 ***

두 점 $A(3, 2)$, $B(-3, -1)$ 을 이은 선분 AB 를 $2:3$ 으로 내분하는 점을 E 라 하자. 직선 $y = mx - 2$ 가 점 E 를 지날 때, 상수 m 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

A71 ***

두 점 $A(-4, -3)$, $B(1, -1)$ 에 대하여 점 $C(a, b)$ 가 $3\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 를 만족할 때, ab 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, 점 C 는 두 점 A 와 B 를 이은 선분 위에 있고, 점 C 는 점 A 도 아니고 점 B 도 아니다.) (10점)

A72 ***

좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(-3, 5)$, $B(9, -1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 에 대하여 선분 AB 를 $1:3$ 으로 내분하는 점을 P , 선분 AB 를 $3:1$ 로 내분하는 점을 Q 라 하자. 두 삼각형 OBP , OQA 의 무게중심을 각각 G_1 , G_2 라 할 때, $\overline{G_1G_2}$ 의 길이를 구하는 과정을 서술하시오. (10점)



1등급 고난도 스토리

A

A73 ☆2등급 대비



좌표평면 위에 원점 O 와 점 $A(1, 3)$ 을 이은 선분 OA 를 한 변으로 하는 정삼각형 OAB 를 만들 때, 가능한 모든 점 B 의 y 좌표의 합을 구하시오. (4점)

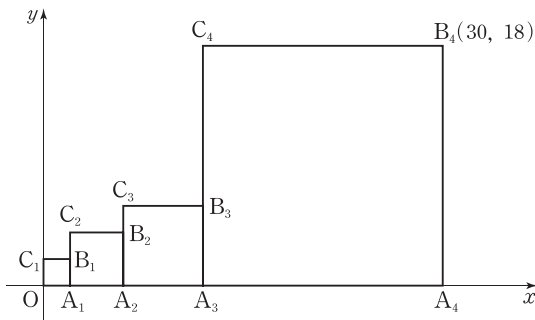
A74 ☆2등급 대비

2013실시 9월 학평 28(고1)



그림과 같이 x 축 위의 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4 에 대하여 $\overline{OA_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}$ 를 각각 한 변으로 하는 정사각형 $OA_1B_1C_1, A_1A_2B_2C_2, A_2A_3B_3C_3, A_3A_4B_4C_4$ 가 있다. 점 B_4 의 좌표가 $(30, 18)$ 이고 정사각형 $OA_1B_1C_1, A_1A_2B_2C_2, A_2A_3B_3C_3$ 의 넓이의 비가 $1:4:9$ 일 때, $\overline{B_1B_3}^2$ 의 값을 구하시오.

(단, O 는 원점이다.) (4점)

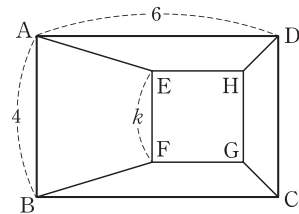


A75 ☆2등급 대비

신유형



그림은 가로, 세로의 길이가 각각 6, 4인 직사각형 $ABCD$ 의 내부에 한 변의 길이가 k ($0 < k < 4$)인 정사각형 $EFGH$ 를 $\overline{AB}$ 과 $\overline{EF}$ 가 평행하도록 그린 것이다. [보기] 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 두 사각형 $ABCD$ 와 $EFGH$ 는 만나지 않는다.) (4점)



[보기]

ㄱ. k 의 값에 관계없이 $\overline{AE}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{DH}^2$ 을 만족시킨다.

ㄴ. $k=1$ 일 때, $\overline{AE} = \overline{DH} = \sqrt{\frac{13}{2}}$ 이면 $\overline{BF} = \frac{5}{2}$ 이다.

ㄷ. $k=2$ 일 때, 두 사다리꼴 $ABFE$ 와 $CDHG$ 의 넓이의 합은 12이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



A 평면좌표

개념 확인 문제

A 01 정답 5

$$\overline{AB} = |-3-2| = 5$$

A 02 정답 9

$$\overline{AB} = |1 - (-8)| = 9$$

A 03 정답 10

$$\overline{OA} = \sqrt{(-6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{100} = 10$$

A 04 정답 $2\sqrt{13}$

$$\overline{AB} = \sqrt{\{1 - (-5)\}^2 + \{-6 - (-2)\}^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

A 05 정답 P(3)

$$P\left(\frac{3 \times 5 + 1 \times (-3)}{3+1}\right) \quad \therefore P(3)$$

A 06 정답 2

$$a = \frac{1 \times 6 + 2 \times (-4)}{1+2} = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{2 \times 6 + 1 \times (-4)}{2+1} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore a+b = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2$$

A 07 정답 $P\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$

$$P\left(\frac{5 \times 3 + 3 \times (-1)}{5+3}, \frac{5 \times 7 + 3 \times 1}{5+3}\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$$

A 08 정답 5

$$R\left(\frac{3 \times 4 + 1 \times a}{3+1}, \frac{3 \times b + 1 \times 3}{3+1}\right) \text{에서 } R\left(\frac{12+a}{4}, \frac{3b+3}{4}\right) \text{이}$$

$$R(4, 0) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\begin{cases} 12+a=16 \Rightarrow a=4 \\ 3b+3=0 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

$$\therefore a-b = 4 - (-1) = 5$$

A 09 정답 G(4, 3)

$$G\left(\frac{3+2+7}{3}, \frac{1+6+2}{3}\right)$$

$$\therefore G(4, 3)$$

A 10 정답 G(1, 2)

$$G\left(\frac{1-2+4}{3}, \frac{8+3-5}{3}\right)$$

$$\therefore G(1, 2)$$

A 11 정답 2

$$G\left(\frac{0+4+p}{3}, \frac{5-3+q}{3}\right) \text{가 } G(1, 0) \text{ 이므로}$$

$$p = -1, q = -2 \quad \therefore pq = 2$$

A 12 정답 -40

$$G\left(\frac{0+4+p}{3}, \frac{5-3+q}{3}\right) \text{가 } G(4, -1) \text{ 이므로}$$

$$p = 8, q = -5 \quad \therefore pq = -40$$



내신+학평 유형 스토리

A 13 정답 ① 두 점 사이의 거리

[정답 공식] 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\left[\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \right]$

답서 두 점 사이의 거리는 좌표의 같은 위치의 값마다 x 좌표와 y 좌표 각각의 차를 구한 후 제곱해서 더하여 제곱근을 취하면 구할 수 있어.

좌표평면 위의 두 점 (1, 3), (2, 5) 사이의 거리는?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

1st 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 거리를 구해.

구하는 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(2-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

[두 점 사이의 거리]

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

A 14 정답 ③ 두 점 사이의 거리

[정답 공식] 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\left[\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \right]$

좌표평면 위의 두 점 A(1, 3), B(2, a) 사이의 거리가

$\sqrt{17}$ 일 때, 양수 a의 값은? **답서** 이렇게 문제에서 부호를 언급할 때에는 다른 부호의 수가 나올 수도 있음을 명심하면.

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

1st 두 점 사이의 거리 공식에 대입하자.

두 점 A, B 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-2)^2 + (3-a)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 10}$$

이 값이 $\sqrt{17}$ 이므로 $\sqrt{a^2 - 6a + 10} = \sqrt{17}$ **두 점 사이의 거리 공식은 두 점을 빗변의 양 끝점으로 하는 직각삼각형에서 피타고라스 정리를 이용하면 떠올릴 수 있어.**

2nd 양변을 제곱하여 양수 a의 값을 구하자.

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 6a + 10 = 17$$

$$a^2 - 6a - 7 = (a-7)(a+1) = 0$$

따라서 양수 a의 값은 $a=7$ 이다.

A 15 정답 2 두 점 사이의 거리

[정답 공식:] 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 잇는 선분의 길이는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이다.

좌표평면 위에 두 점 $A(2t, -3), B(-1, 2t)$ 가 있다.

선분 AB의 길이를 l 이라 할 때, 실수 t 에 대하여 l^2 의 최솟값을 구하시오. **단서** 선분 AB의 길이는 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 구하면 돼.

1st 선분 AB의 길이 l 을 구해.

두 점 $A(2t, -3), B(-1, 2t)$ 에 대하여
선분 AB의 길이가 l 이므로

$$\begin{aligned} l &= \overline{AB} = \sqrt{\{2t - (-1)\}^2 + \{-3 - 2t\}^2} \\ &= \sqrt{4t^2 + 4t + 1 + 9 + 12t + 4t^2} \\ &= \sqrt{8t^2 + 16t + 10} \end{aligned}$$

2nd l^2 의 최솟값을 구해.

$$\begin{aligned} l^2 &= 8t^2 + 16t + 10 = 8(t^2 + 2t + 1 - 1) + 10 \\ &= 8(t+1)^2 - 8 + 10 = 8(t+1)^2 + 2 \end{aligned}$$

따라서 l^2 은 $t = -1$ 일 때 최솟값 2를 가진다.

l^2 은 t 에 대한 이차함수이고
최고차항의 계수가 8이므로
그래프는 아래로 볼록한
포물선이야. 따라서 l^2 은
포물선의 꼭짓점에서 최솟값을
가져.

A 16 정답 ② 두 점 사이의 거리

[정답 공식:] 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이다.

좌표평면 위의 점 $A(a, 3)$ 에 대하여 $\overline{OA} = 4$ 일 때, a^2 의 값은? (단, O는 원점이다.) **단서** 두 점 사이의 거리 공식을 적용할 수 있어.

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

1st 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 a 의 값을 구하자.

좌표평면 위의 두 점 $O(0, 0), A(a, 3)$ 사이의 거리는
두 점 사이의 거리 공식에 의하여 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA} = \sqrt{(a-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{a^2 + 9} \quad \overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

이때, $\overline{OA} = 4$ 이므로 $\sqrt{a^2 + 9} = 4$ 에서 $a^2 + 9 = 16$

$$\therefore a^2 = 4^2 - 9 = 7 \quad \text{양변을 제곱해서 근호를 없애}$$

☆ 두 점 사이의 거리

개념 • 공식

① 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \text{이다.}$$

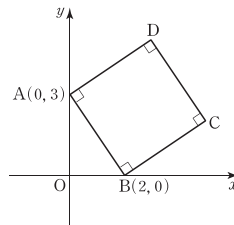
② 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는 $\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

A 17 정답 29 두 점 사이의 거리

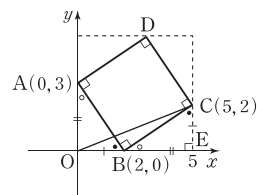
[정답 공식:] 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 사이의 거리 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 과
도형의 합동을 이용한다.

그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $A(0, 3), B(2, 0)$ 을 잇는 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD에 대하여 $\overline{OC}^2$ 의 값을 구하시오. **단서** OC의 길이의 제곱을 구하기 위해 적절히 보조선을 그어 피타고라스 정리를 이용할 수 있는지 살펴보자.

(단, O는 원점이고, 점 C는 제1사분면 위의 점이다.)



1st 삼각형의 닮음을 이용하여 점 C의 좌표를 찾고, $\overline{OC}^2$ 을 구해.



그림과 같이 점 C에서 x 축 위에 내린 수선의 발을 E라 하면

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$

수선의 발을 내리는 이유는
점 C의 좌표를 구하기 위해서야.

$$\angle OAB = \angle EBC$$

$$\angle OBA = \angle ECB$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BEC \text{ (ASA 합동)}$$

따라서 점 C의 좌표는 (5, 2)이므로

$$\overline{OC}^2 = 5^2 + 2^2 = 29 \quad \begin{aligned} \overline{OE} &= \overline{OB} + \overline{BE} = \overline{OB} + \overline{AO} = 2 + 3 = 5 \\ \overline{CE} &= \overline{BO} = 2 \end{aligned}$$

A 18 정답 ② 두 점 사이의 거리

[정답 공식:] 이차함수 $y = k(x-a)^2 + b$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (a, b) 이다.

단서 2 이차함수와 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 해가 두 점 P, Q의 x좌표임을 알 수 있어.
이차함수 $f(x) = x^2 + 4x + 3$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P가 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, k 는 상수이다.)

단서 1 직선이 점 P도 지난다는 사실을 기억해.

- ① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$
④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

1st 이차함수 $f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하여 직선의 방정식에 대입하면 k 의 값을 구할 수 있어.

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1 \text{이므로}$$

꼭짓점 P의 좌표는 $(-2, -1)$ 이다.

직선 $y = 2x + k$ 에 점 $P(-2, -1)$ 의 좌표값을 대입하면

$$-1 = 2 \times (-2) + k \quad \begin{aligned} \text{점 P는 이차함수의 그래프 위에 있는 동시에} \\ \text{직선 } y = 2x + k \text{ 위의 점이기도 해.} \end{aligned}$$

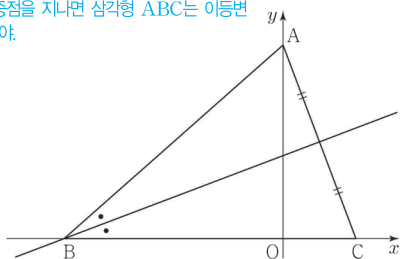
$$\therefore k = 3$$

A 67 정답 ③ 각의 이등분선의 성질

[정답 공식] $\angle ABC$ 의 이등분선이 $\overline{AC}$ 와 만나는 점을 D라 하면
 $\overline{BA} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{CD}$ 이다.

그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $A(0, a)$, $B(-3, 0)$, $C(1, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$ 의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지날 때, 양수 a 의 값은?

[단서] 삼각형 ABC에서 $\angle ABC$ 의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지나면 삼각형 ABC는 이등변 삼각형이다.



- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

1st 주어진 조건을 만족시키는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 알아보자.
삼각형 ABC에서 $\angle ABC$ 의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지나므로 삼각형 ABC는 $\overline{BA} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이다.

합정

$\angle ABC$ 의 이등분선과 만나는 선분 AC의 중점을 T라 놓자.
각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{BA} : \overline{BC} = \overline{AT} : \overline{CT}$
그런데 $\overline{AT} = \overline{CT}$ 이므로 $\overline{BA} : \overline{BC} = \overline{AT} : \overline{CT} = 1 : 1 \quad \therefore \overline{BA} = \overline{BC}$

2nd $\overline{BA} = \overline{BC}$ 가 되는 양수 a 의 값을 구하자.

세 점 $A(0, a)$, $B(-3, 0)$, $C(1, 0)$ 에서

$$\overline{BA} = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-a)^2} = \sqrt{9+a^2} \quad \text{두 점의 좌표가 } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ 일 때,}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1+3)^2 + (0-0)^2} = 4 \quad \text{두 점 사이의 거리는}$$

$$\overline{BA} = \overline{BC} \text{에서 } \sqrt{9+a^2} = 4 \text{이고 양변을 제곱하면}$$

$$9+a^2=16, a^2=7 \quad \therefore a=\sqrt{7} (\because a>0)$$



서술형 스토리

A 68 정답 $\sqrt{74}$ 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

[정답 공식] 점 C가 직선 위의 점임을 이용해 점 C의 좌표를 나타내고, 점 C가 두 점 A, B로부터 거리가 같음을 이용한다.

[단서 2] $\overline{AC} = \overline{BC}$ 을 이용하여 $\sqrt{\quad}$ 를 없애자.

좌표평면 위의 두 점 $A(3, 2)$, $B(-4, 5)$ 에 대하여

$\overline{AC} = \overline{BC}$ 를 만족하는 점 C가 직선 $y=x-2$ 위의 점일 때, 원점 O에서 점 C까지의 거리를 구하는 과정을 서술하시오.

[단서 1] 점 C의 좌표값을 직선의 방정식에 대입해도 등식이 성립해.

1st 직선 위의 점 C의 좌표를 한 문자로 나타내보자.

점 C의 좌표를 $C(a, b)$ 라 하면 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로 $b=a-2$
 $\therefore C(a, a-2) \cdots \text{①}$ 직선 위에 있는 점의 좌표를 대입하면 등식이 성립해.

2nd $\overline{AC} = \overline{BC}$ 임을 이용하여 점 C의 좌표를 구하자.

$$\overline{AC} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$(a-3)^2 + (a-2-2)^2 = (a+4)^2 + (a-2-5)^2$$

$$a^2 - 6a + 9 + a^2 - 8a + 16 = a^2 + 8a + 16 + a^2 - 14a + 49$$

$$8a = -40 \quad \therefore a = -5$$

3rd $\overline{OC}$ 의 길이를 구하자.

따라서 점 C의 좌표는 $(-5, -7)$ 이므로 $\cdots \text{②}$

$$\overline{OC} = \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{74} \cdots \text{③}$$

[채점 기준표]

① 점 C의 좌표를 문자를 사용하여 나타낸다.	40%
② 점 C의 좌표를 구한다.	40%
③ $\overline{OC}$ 의 길이를 구한다.	20%

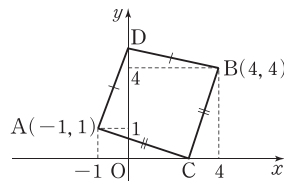
A 69 정답 $\sqrt{34}$ 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

[정답 공식] 두 점 C, D의 좌표를 각각 $C(a, 0)$, $D(0, b)$ 로 놓고 A, B로부터의 거리가 같음을 이용해 각각 좌표를 구한다.

좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 1)$, $B(4, 4)$ 로부터 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 C, y 축 위의 점을 D라고 할 때, $\overline{CD}$ 의 길이를 구하는 과정을 서술하시오.

[단서] 점 C의 y 좌표가 0, 점 D의 x 좌표가 0임을 이용하여 좌표를 정하자.

1st $\overline{CA} = \overline{CB}$ 임을 이용하여 점 C의 좌표를 구하자.



$\rightarrow$ 점 C는 x 축 위의 점이나 y 의 좌표가 0이야.

점 C의 좌표를 $C(a, 0)$ 으로 놓으면 $\overline{CA} = \overline{CB}$ 이므로

$$\sqrt{(a+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (0-4)^2}$$

$$a^2 + 2a + 2 = a^2 - 8a + 32$$

$$10a = 30 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore C(3, 0) \cdots \text{①}$$

2nd $\overline{DA} = \overline{DB}$ 임을 이용하여 점 D의 좌표를 구하자.

$\rightarrow$ 점 D는 y 축 위의 점이나 x 의 좌표가 0이야.

점 D의 좌표를 $D(0, b)$ 로 놓으면 $\overline{DA} = \overline{DB}$ 이므로

$$\sqrt{(0+1)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (b-4)^2}$$

$$b^2 - 2b + 2 = b^2 - 8b + 32$$

$$6b = 30 \quad \therefore b = 5$$

$$\therefore D(0, 5) \cdots \text{②}$$

3rd $\overline{CD}$ 의 길이를 구하자.

$$\therefore \overline{CD} = \sqrt{(0-3)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{34} \cdots \text{③}$$

[채점 기준표]

① 점 C의 좌표를 구한다.	40%
② 점 D의 좌표를 구한다.	40%
③ $\overline{CD}$ 의 길이를 구한다.	20%

A 70 정답 $\frac{14}{3}$ 선분의 내분점

[정답 공식: 내분점 공식을 이용해 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점을 구하고 이 점을 직선에 대입해 m 의 값을 구한다.]

두 점 $A(3, 2)$, $B(-3, -1)$ 을 이은 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점을 E라 하자. 직선 $y=mx-2$ 가 점 E를 지날 때, 상수 m 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.
[단서: 내분점의 공식을 이용하여 내분점을 구하여 직선의 방정식에 대입하면 돼.]

1st AB를 2:3으로 내분하는 점의 좌표를 구하자.

선분 AB를 2:3으로 내분하는 점을 P라 하면

$$P\left(\frac{2 \cdot (-3) + 3 \cdot 3}{2+3}, \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2}{2+3}\right) = P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \cdots \textcircled{I}$$

2nd 앞에서 구한 점을 직선의 방정식에 대입하자.

직선 $y=mx-2$ 가 점 $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 를 지나므로

$$\frac{4}{5} = \frac{3}{5}m - 2, \quad 3m - 10 = 4 \quad \text{점 P의 좌표값을 직선의 방정식에 대입하자.}$$

3rd m 의 값을 구하자.

$$\therefore m = \frac{14}{3} \cdots \textcircled{II}$$

[채점 기준표]

① 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점의 좌표를 구한다.	50%
② 상수 m 의 값을 구한다.	50%

A 71 정답 $\frac{22}{5}$ 선분의 내분점

[정답 공식: 점 C는 선분 AB의 내분점이므로, 내분점의 공식을 이용한다.]

[단서: $\overline{AC} : \overline{BC}$ 를 구하고, 점 C를 그것에 맞추어 구하자.]
두 점 $A(-4, -3)$, $B(1, -1)$ 에 대하여 점 $C(a, b)$ 가 $3\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 를 만족할 때, ab 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, 점 C는 두 점 A와 B를 이은 선분 위에 있고, 점 C는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.)

1st $3\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 로부터 점 C의 위치를 파악하자.

$3\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 이므로 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 3$ 이다.

따라서 점 $C(a, b)$ 는 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점이다. $\cdots \textcircled{I}$

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여

선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

2nd 점 C의 좌표를 구하자.

$$a = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4)}{2+3} = -2$$

$$b = \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3)}{2+3} = -\frac{11}{5} \cdots \textcircled{II}$$

3rd ab 를 구하자.

$$\therefore ab = (-2) \cdot \left(-\frac{11}{5}\right) = \frac{22}{5} \cdots \textcircled{III}$$

[채점 기준표]

① 점 C가 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점임을 안다.	50%
② 점 C의 좌표를 값을 각각 구한다.	30%
③ ab 의 값을 구한다.	20%

A 72 정답 $\sqrt{5}$ 선분의 내분점과 삼각형의 무게중심

[정답 공식: 내분점의 공식을 이용해 두 점 P, Q의 좌표를 구한 뒤, 무게중심의 공식을 이용해 G_1 , G_2 의 좌표를 각각 구해 $\overline{G_1G_2}$ 의 길이를 구한다.]

좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(-3, 5)$, $B(9, -1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에 대하여 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 P, 선분 AB를 3:1로 내분하는 점을 Q라 하자. 두 삼각형 OBP, OQA의 무게중심을 각각 G_1 , G_2 라 할 때, $\overline{G_1G_2}$ 의 길이를 구하는 과정을 서술하시오.

[단서: 무게중심을 구하기 위해 두 점 P와 Q의 좌표를 먼저 구해야 해.]

1st 내분점 공식을 이용하여 점 P, Q의 좌표를 구하자.

점 P는 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{1 \cdot 9 + 3 \cdot (-3)}{1+3}, \frac{1 \cdot (-1) + 3 \cdot 5}{1+3}\right) = P\left(0, \frac{7}{2}\right)$$

점 Q는 선분 AB를 3:1로 내분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{3 \cdot 9 + 1 \cdot (-3)}{3+1}, \frac{3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5}{3+1}\right) = Q\left(6, \frac{1}{2}\right) \cdots \textcircled{I}$$

2nd 무게중심 공식을 이용하여 G_1 , G_2 의 좌표를 구하자.

삼각형 OBP의 무게중심 G_1 의 좌표는

$$G_1\left(\frac{0+9+0}{3}, \frac{0+(-1)+\frac{7}{2}}{3}\right) = G_1\left(3, \frac{5}{6}\right)$$

삼각형 OQA의 무게중심 G_2 의 좌표는

$$G_2\left(\frac{0+6+(-3)}{3}, \frac{0+\frac{1}{2}+5}{3}\right) = G_2\left(1, \frac{11}{6}\right) \cdots \textcircled{II}$$

3rd $\overline{G_1G_2}$ 의 길이를 구하자.

$$\therefore \overline{G_1G_2} = \sqrt{(3-1)^2 + \left(\frac{5}{6} - \frac{11}{6}\right)^2} = \sqrt{5} \cdots \textcircled{III}$$

[채점 기준표]

① 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.	40%
② 무게중심 G_1 , G_2 의 좌표를 구한다.	40%
③ $\overline{G_1G_2}$ 의 길이를 구한다.	20%

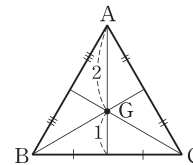
삼각형의 무게중심

개념 · 공식

① 정의: 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만난다. 이 점을 삼각형의 무게중심이라 한다.

② 성질: 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 꼭짓점으로부터 각각 2:1로 나눈다.

③ $\triangle GAB = \triangle GBC = \triangle GCA = \frac{1}{3} \triangle ABC$



A 73 정답 3 ★2등급 대비 [정답률 34%]

[정답 공식: B(x, y)라 놓고 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}$ 인 점 B의 좌표를 모두 구한다.]

단서 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}$ 인 정삼각형의 변의 길이를 생각하자.
좌표평면 위에 원점 O와 점 A(1, 3)을 이은 선분 OA를 한 변으로 하는 정삼각형 OAB를 만들 때, 가능한 모든 점 B의 y좌표의 합을 구하시오.

1st B(x, y)로 놓고 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}$ 임을 이용하여 방정식을 구해보자.

삼각형 OAB가 정삼각형이므로

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}$$

이때, 조건을 만족하는 정삼각형 OAB는 그림과 같이 2개이다.

점 B의 좌표를 B(x, y)라 하면

$$\overline{OA} = \overline{OB} \text{에서 } \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 \text{이므로}$$

$$1^2 + 3^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 10 \dots \textcircled{1}$$

$$\overline{OB} = \overline{AB} \text{에서 } \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 \text{이므로}$$

$$x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$$

$$x^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$

$$\therefore x = -3y + 5 \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(-3y+5)^2 + y^2 = 10$$

$$9y^2 - 30y + 25 + y^2 = 10$$

$$\therefore 2y^2 - 6y + 3 = 0 \dots \textcircled{3}$$

따라서 점 B의 y좌표를 y_1, y_2 라 하면 y_1, y_2 는 ③의 해이므로

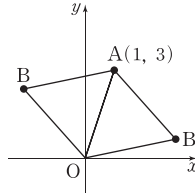
구하는 모든 y좌표의 합은 근과 계수의 관계에 의해

$$y_1 + y_2 = -\frac{-6}{2} = 3$$

[이차방정식의 근과 계수의 관계]

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,

$$(1) \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad (2) \alpha\beta = \frac{c}{a}$$



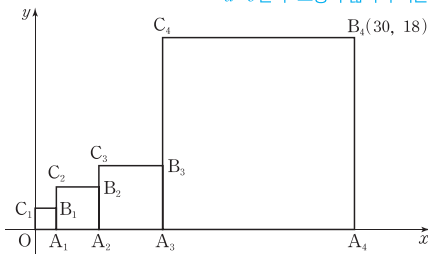
원점과 점 A의 좌표는 정해진 것이므로 점 B가 그림처럼 정해질 때 정삼각형이 될 수 있어.

한 밑변에 대하여 그릴 수 있는 정삼각형은 2개임을 파악할 수 있어야 해.

A 74 정답 116 ★2등급 대비 [정답률 30%]

[정답 공식: 닮음비를 이용해 각 정사각형의 한 변의 길이를 구한다.]

그림과 같이 x축 위의 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4 에 대하여 $\overline{OA_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}$ 를 각각 한 변으로 하는 정사각형 $OA_1B_1C_1, A_1A_2B_2C_2, A_2A_3B_3C_3, A_3A_4B_4C_4$ 가 있다. 점 B_4 의 좌표가 (30, 18)이고 정사각형 $OA_1B_1C_1, A_1A_2B_2C_2, A_2A_3B_3C_3$ 의 넓이의 비가 1 : 4 : 9일 때, $\overline{B_1B_3}$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) 단서 모든 정사각형은 닮은꼴이야. 또, 닮음비가 a : b인 두 도형의 넓이의 비는 $a^2 : b^2$ 이야.



1st 닮은 도형에서 넓이의 비가 $a^2 : b^2 : c^2$ 이면 닮음비는 $a : b : c$ 야.

정사각형 $OA_1B_1C_1, A_1A_2B_2C_2, A_2A_3B_3C_3$ 의 넓이의 비가 1 : 4 : 9이므로 세 정사각형의 닮음비는 1 : 2 : 3이다.

즉, 양수 a에 대하여 두 도형의 닮음비가 a : b이면 넓이의 비는 $a^2 : b^2$ 이고, 부피의 비는 $a^3 : b^3$ 이야.

$$\overline{OA_1} = a, \overline{A_1A_2} = 2a, \overline{A_2A_3} = 3a \text{라 하면}$$

$$\overline{OA_4} = 30, \overline{A_3A_4} = \overline{A_4B_4} = 18$$

$$\text{즉, } \overline{OA_3} = \overline{OA_4} - \overline{A_3A_4} \text{에서}$$

$$a + 2a + 3a = 30 - 18$$

$$6a = 12 \quad \therefore a = 2$$

2nd 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용해.

따라서 두 점 B_1, B_3 의 좌표는 각각 (2, 2), (12, 6)이므로

$$\overline{B_1B_3}^2 = (12-2)^2 + (6-2)^2 = 116$$

함정

넓이의 비를 이용해 길이의 비를 알아내야 해.

A 75 정답 ③ ★2등급 대비 [정답률 34%]

[정답 공식: 내부의 정사각형의 한 점에서 직사각형의 두 변에 각각 수선의 발을 내려 길이를 각각 a, b라 한 후, 각 대각선의 길이를 a, b, k를 이용해 나타낸다.]

단서 1 직사각형 ABCD를 점 B를 원점으로 하고 $\overline{BC}, \overline{AB}$ 를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면 위에 나타내 보자.

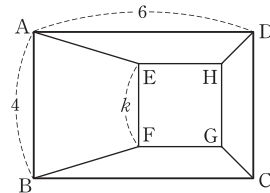
그림은 가로의 길이, 세로의 길이가 각각 6, 4인 직사각형

ABCD의 내부에 한 변의 길이가 k (0 < k < 4)인 정사각형

EFGH를 $\overline{AB}$ 와 $\overline{EF}$ 가 평행하도록 그린 것이다. [보기] 중

옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 단서 2 점 F의 좌표를 (a, b)라 하고 점 E, G, H를 a, b, k로 나타내봐.

(단, 두 사각형 ABCD와 EFGH는 만나지 않는다.)



[보기]

단서 3 각 꼭짓점들의 좌표를 이용하여 두 점 사이의 거리 공식으로 참, 거짓을 판단해보자.

ㄱ. k의 값에 관계없이 $\overline{AE}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{DH}^2$ 을 만족시킨다.

단서 4 좌표들을 이용하여 방정식을 세워봐. 이때, 내부의 정사각형 EFGH가 직사각형 ABCD와 만나지 않으려면 점 F(또는 G)의 y좌표가 3보다 작아야 함에 주의하자.

ㄴ. k=1일 때, $\overline{AE} = \overline{DH} = \sqrt{\frac{13}{2}}$ 이면 $\overline{BF} = \frac{5}{2}$ 이다.

ㄷ. k=2일 때, 두 사다리꼴 ABFE와 CDHG의 넓이의

합은 12이다. 단서 5 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times ((\text{윗변의 길이}) + (\text{아랫변의 길이})) \times (\text{높이}) \text{야.}$$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

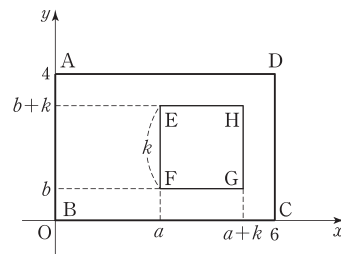
1st 주어진 도형을 좌표평면 위에 나타내고 ㄱ의 참, 거짓을 판별하자.

점 B를 원점으로 하고 $\overline{BC}, \overline{AB}$ 를 각각 x축, y축으로 놓으면 사각형 ABCD의 각 꼭짓점의 좌표는 다음과 같다.

$$A(0, 4), B(0, 0), C(6, 0), D(6, 4)$$

한편, 점 F의 좌표를 (a, b) (0 < a < 6, 0 < b < 4)라 하면

$E(a, b+k), G(a+k, b), H(a+k, b+k)$ 이다.



$$\begin{aligned} \neg. \overline{AE}^2 &= a^2 + (b+k-4)^2, \overline{BF}^2 = a^2 + b^2, \\ \overline{CG}^2 &= (a+k-6)^2 + b^2, \overline{DH}^2 = (a+k-6)^2 + (b+k-4)^2 \\ \text{에서} \quad \overline{AE}^2 + \overline{CG}^2 &= a^2 + (b+k-4)^2 + (a+k-6)^2 + b^2 \\ &= a^2 + b^2 + (a+k-6)^2 + (b+k-4)^2 \\ &= \overline{BF}^2 + \overline{DH}^2 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 사이의 거리

2nd $k=1$ 일 때, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 $\neg$ 의 참, 거짓을 판단하자.

$\neg$. $k=1$ 일 때, $E(a, b+1), H(a+1, b+1)$ 이다.

$$\overline{AE}^2 = \overline{DH}^2 = \frac{13}{2} \text{에서}$$

(단, $0 < a < 5, 0 < b < 3$)
두 사각형 ABCD와 EFGH가 만나지 않기 위한 조건이야.

$$a^2 + (b-3)^2 = (a-5)^2 + (b-3)^2 = \frac{13}{2}$$

이때, $a^2 = (a-5)^2$ 에서 $\rightarrow a=a-5$ 를 만족시키는

$$a = -(a-5) \quad \therefore a = \frac{5}{2} \text{ 실수 } a \text{의 값은 없어.}$$

주의
조건을 만족시키는 a, b 의 범위를 잊지 말고 구해두자.

또한, $a = \frac{5}{2}$ 를 $a^2 + (b-3)^2 = \frac{13}{2}$ 에 대입하면

$$(b-3)^2 = \frac{1}{4}, b-3 = \pm \frac{1}{2} \quad \therefore b = \frac{5}{2} \quad (\because 0 < b < 3)$$

$$\therefore \overline{BF} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad (\text{거짓}) \rightarrow B(0, 0) \text{과 } F\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ 사이의 거리야.}$$

3rd 두 사다리꼴의 높이를 각각 h_1, h_2 라 하고 $\neg$ 의 참, 거짓을 판단하자.

$\neg$. 두 사다리꼴 ABFE와 CDHG의 높이를 각각 h_1, h_2 라 하면

$$k=2 \text{일 때 } h_1 + h_2 = 6 - 2 = 4 \text{이다.}$$

$$h_1 + h_2 + k = \overline{BC} = 6 \text{이지?}$$

즉, 두 사다리꼴 ABFE와 CDHG의 넓이의 합은

$$\frac{1}{2} \times (4+2) \times h_1 + \frac{1}{2} \times (4+2) \times h_2$$

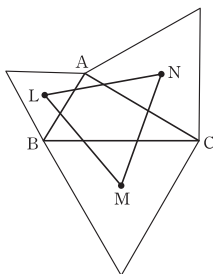
$$= 3(h_1 + h_2) = 3 \times 4 = 12 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

A 76 정답 $6\sqrt{21}$ 2등급 대비 [정답률 30%]

[정답 공식: 세 점 L, M, N 중 두 점의 좌표를 구해 두 점 사이의 거리를 구하고, $\triangle LMN$ 이 정삼각형임을 이용해 둘레의 길이를 구한다.]

다음은 나폴레옹의 삼각형에 대한 설명이다.

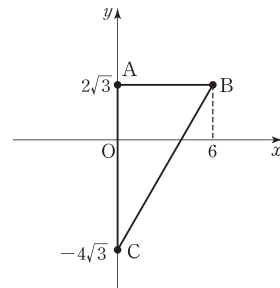


임의의 삼각형 ABC의 외부에 변 AB, BC, CA를 한 변으로 하는 정삼각형을 덧그리고 각 정삼각형의 무게 중심을 L, M, N이라 하면 삼각형 LMN은 정삼각형이다. 이때, 삼각형 LMN을 나폴레옹의 삼각형이라 한다. (단, 모든 점은 같은 평면 위에 있다.)

좌표평면 위의 세 점 $(0, 2\sqrt{3}), (6, 2\sqrt{3}), (0, -4\sqrt{3})$ 을 연결한 삼각형에서 만들어지는 나폴레옹의 삼각형의 둘레의 길이를 구하시오. [단서 나폴레옹의 삼각형은 정삼각형이니가 한 변의 길이만 알면 둘레의 길이를 구할 수 있어. 좌표평면 위에 주어진 점들을 나타낸 후 세 변을 각각 한 변으로 하는 정삼각형을 외부에 그려보자.]

1st 좌표평면에 세 점을 표시해보자.

주어진 세 점 $(0, 2\sqrt{3}), (6, 2\sqrt{3}), (0, -4\sqrt{3})$ 을 차례로 A, B, C라 하고, 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



2nd 선분 AB를 한 변으로 하고 주어진 삼각형의 외부에 덧그려지는 정삼각형의 무게중심을 찾아보자.

함정

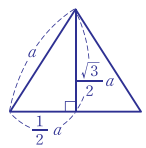
정삼각형의 둘레의 길이는 한 변의 길이만 구하면 돼. 즉, 세 꼭짓점 중 두 꼭짓점의 좌표만 알면 되니까 상대적으로 구하기 쉬운 두 점을 정하고 정삼각형의 성질을 이용해 그 좌표를 구하는 것이 중요해.

선분 AB를 한 변으로 하고 주어진 삼각형의 외부에 덧그려지는

정삼각형의 나머지 한 꼭짓점을 D라 하자. $\rightarrow$ 한 변의 길이가

점 D는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있으므로 점 D의 x좌표는 선분 AB의

중점의 x좌표인 $\frac{0+6}{2} = 3$ 이다.



또한, 선분 AB의 길이 6을 한 변의 길이로 하는 정삼각형의 높이는

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \text{이므로 점 D의 y좌표는 } 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{이다.}$$

$$\therefore D(3, 5\sqrt{3})$$

$\rightarrow$ 세 꼭짓점이 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 인 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

따라서 정삼각형 ABD의 무게중심 L의 좌표는

$$L\left(\frac{0+6+3}{3}, \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{3}\right) \text{에서 } L(3, 3\sqrt{3})$$

3rd 선분 AC를 한 변으로 하고 주어진 삼각형의 외부에 덧그려지는 정삼각형의 무게중심을 찾아보자.

선분 AC를 한 변으로 하고 주어진 삼각형의 외부에 덧그려지는 정삼각형의 나머지 한 꼭짓점을 E라 하자.

점 E는 선분 AC의 수직이등분선 위에 있으므로 점 E의 y좌표는 선분

$$AC \text{의 중점의 y좌표인 } \frac{2\sqrt{3} + (-4\sqrt{3})}{2} = -\sqrt{3} \text{이다.}$$

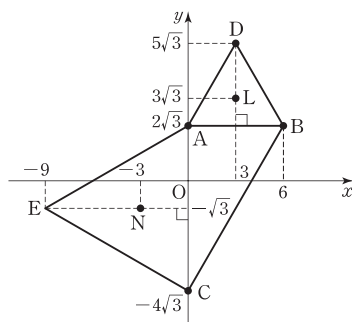
또한, 선분 AC의 길이 $6\sqrt{3}$ 을 한 변의 길이로 하는 정삼각형의 높이는

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\sqrt{3} = 9 \text{이므로 점 E의 x좌표는 } -9 \text{이다.}$$

$$\therefore E(-9, -\sqrt{3})$$

따라서 정삼각형 ACE의 무게중심 N의 좌표는

$$N\left(\frac{0+0+(-9)}{3}, \frac{2\sqrt{3}+(-4\sqrt{3})+(-\sqrt{3})}{3}\right) \text{에서 } N(-3, -\sqrt{3})$$



4th $\overline{LN}$ 의 길이를 한 번으로 하는 정삼각형의 둘레의 길이를 구하자.

$$\overline{LN} = \sqrt{\{3 - (-3)\}^2 + \{3\sqrt{3} - (-\sqrt{3})\}^2}$$

$$= \sqrt{36 + 48} = 2\sqrt{21}$$

따라서 구하는 나폴레옹의 삼각형의 둘레의 길이는
 $3 \times 2\sqrt{21} = 6\sqrt{21}$

A 77 정답 ① ★1등급 대비 [정답률 19%]

* 중선정리와 삼각형에서의 여러 가지 성질을 이용하여 삼각형의 넓이의 비 구하기
 [유형 05+08+09+11]

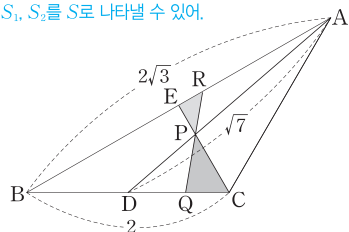
단서1 삼각형 ABC에서 점 D는 $\overline{BC}$ 의 중점이므로 중선정리를 이용해서 $\overline{AC}$ 의 길이를 구할 수 있어.

$\overline{AB} = 2\sqrt{3}$, $\overline{BC} = 2$ 인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 D라 할 때, $\overline{AD} = \sqrt{7}$ 이다. 각 ACB의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 E, 선분 CE와 선분 AD가 만나는 점을 P, 각 APE의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 R, 선분 PR의 연장선이 선분 BC와 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PRE

의 넓이를 S_1 , 삼각형 PQC의 넓이를 S_2 라 할 때, $\frac{S_2}{S_1} = a + b\sqrt{7}$

이다. ab 의 값은? (단, a, b 는 유리수이다.)

단서2 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면 길이의 비를 이용해서 S_1, S_2 를 S 로 나타낼 수 있어.



- ① -16 ② -14 ③ -12
 ④ -10 ⑤ -8

오해 1등급? 이 문제는 삼각형의 중선과 각의 이등분선으로 이루어진 삼각형의 넓이의 비를 구하는 문제이다.

이를 위해서 이등변삼각형의 특징을 정확히 알고, 삼각형의 무게중심은 중선을 일정한 비율로 내분한다는 점, 각의 이등분선의 성질 등을 통해 삼각형의 변의 길이의 비를 찾아내는 것이 어려웠다.

단서+발상

단서1 삼각형 ABC에서 점 D는 $\overline{BC}$ 의 중점이므로 중선정리를 활용할 수 있다. (개념)
 즉, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AD} = \sqrt{7}$, $\overline{CD} = 1$ 이고, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2)$ 이므로 $\overline{AC}$ 의 길이를 구할 수 있다. (적용)

단서2 구하고자 하는 값은 S_1 과 S_2 의 비율이므로 S_1 과 S_2 를 직접 구할 필요는 없고, 삼각형 ABC의 넓이와 길이의 비를 활용해서 S_1 과 S_2 의 비를 구할 수 있다. (발상)
 즉, 각의 이등분선의 성질, 무게중심의 성질을 종합적으로 활용하여 S_1 과 S_2 를 삼각형 ABC의 넓이에 대한 식으로 나타내자. (해결)

주의 중선정리를 이용해 $\overline{AC}$ 의 길이를 구해서 삼각형 ABC가 이등변삼각형임을 알아내야 풀이 과정의 전개가 가능하다.

그리고, 각의 이등분선의 성질을 통해 각 선분의 길이의 비를 나타내어 길이를 직접 구하지 않고 넓이의 비를 구할 수 있다.

정답 공식: 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 D라 하면 중선정리에 의해 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2)$ 이다.
 또한, 삼각형의 세 중선의 교점을 무게중심이라 하며, 무게중심은 세 중선의 길이를 꼭짓점으로부터 각각 2:1로 내분한다.

[문제 풀이 순서]

1st 삼각형 ABC에서 중선정리를 이용하여 $\overline{AC}$ 의 길이를 구해.

점 D가 선분 BC의 중점이므로 중선정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2) \quad \overline{BC} = 2 \text{이므로 } \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$(2\sqrt{3})^2 + \overline{AC}^2 = 2\{(\sqrt{7})^2 + 1^2\}$$

$$\overline{AC}^2 = 4 \quad \therefore \overline{AC} = 2 (\because \overline{AC} > 0)$$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{CA} = \overline{CB}$ 인 이등변삼각형이다.

2nd 점 P가 무게중심을 이용해.

이등변삼각형 CAB에서 선분 CE가 $\angle ACB$ 의 이등분선이므로

선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다. 이등변삼각형의 꼭짓각의 이등분선은 밑변을 수직이등분해.

즉, 직각삼각형 CEB에서 $\overline{BE} = \sqrt{3}$ 이므로

피타고라스 정리에 의해

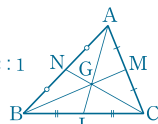
$$\overline{CE} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{BE}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$$

한편, 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 무게중심의 성질에 의해 점 P는 삼각형 ABC의 두 중선 AD, CE의 교점이다.

$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$ 에서 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 꼭짓점으로부터 각각 2:1로 내분해, 즉,

$$\overline{AP} = \frac{2\sqrt{7}}{3}, \overline{PD} = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \overline{AG} : \overline{GL} = \overline{BG} : \overline{GM} = \overline{CG} : \overline{GN} = 2 : 1$$

$$\overline{CP} : \overline{PE} = 2 : 1 \text{에서 } \overline{CP} = \frac{2}{3}, \overline{PE} = \frac{1}{3}$$



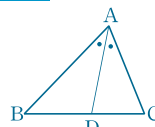
3rd 각의 이등분선의 성질을 이용해서 $\overline{AR}$ 과 $\overline{ER}$, $\overline{DQ}$ 와 $\overline{CQ}$ 의 길이의 비를 구해.

삼각형 EPA에서 선분 PR가 $\angle APE$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AR} : \overline{ER} = \overline{PA} : \overline{PE} = \frac{2\sqrt{7}}{3} : \frac{1}{3} = 2\sqrt{7} : 1$$

삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$



이때, 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

삼각형 EPA의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 이므로

점 P가 삼각형 ABC의 무게중심이므로 무게중심 P와 두 중선 AD, CE에 의해 나뉘는 삼각형의 넓이는 같아.

$$\therefore \triangle PAE = \triangle PBE = \triangle PBD = \triangle PCD = \frac{1}{6} \triangle ABC$$

$$S_1 = S \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2\sqrt{7}+1} \quad \rightarrow \triangle PAR \text{과 } \triangle PRE \text{의 밑변을 각각 } \overline{AR}, \overline{ER} \text{라 하면 높이가 같으므로}$$

$$\triangle PAR : \triangle PRE = \overline{AR} : \overline{ER} = 2\sqrt{7} : 1$$

$$\overline{DQ} : \overline{CQ} = \overline{PD} : \overline{PC} = \frac{\sqrt{7}}{3} : \frac{2}{3} = \sqrt{7} : 2$$

이고, 삼각형 PDC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$S_2 = S \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{\sqrt{7}+2} \quad \begin{matrix} \triangle PDQ \text{와 } \triangle PQC \text{의 밑변을} \\ \text{각각 } \overline{DQ}, \overline{CQ} \text{라 하면 높이가 같으므로} \\ \triangle PDQ : \triangle PQC = \overline{DQ} : \overline{CQ} = \sqrt{7} : 2 \end{matrix}$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{S \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{\sqrt{7}+2}}{S \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2\sqrt{7}+1}} = \frac{2(12-3\sqrt{7})}{3} = 8-2\sqrt{7} = a+b\sqrt{7}$$

$$\therefore ab = 8 \times (-2) = -16$$



My Top Secret

서울대 선배의 1등급 대비 전략

이 문제를 보고 선분 AC의 길이를 구할 때 중선정리가 떠오르지 않아 막막할 수도 있어. 이때, 삼각형을 잘 관찰해보면 점 A에서 직선 BC에 수선의 발을 내려 직각삼각형을 만든 뒤 피타고라스 정리를 이용할 수 있다는 생각이 들 거야. 이 수선의 발을 H라 하면, $\overline{CH}$ 와 $\overline{AH}$ 를 각각 미지수로 나타내고 직각삼각형 ADH와 ABH에서 피타고라스 정리를 사용해 각 값을 구할 수도 있어.