고등학교 수학,
이해하고 문제 유형을 익히면 성적을 올릴 수 있습니다.

수학은 공식만 암기하면서 공부하면
성적이 오르지 않습니다.

개념과 연계된 문제 유형들을
단계별 문제를 통해서 익혀야 합니다.

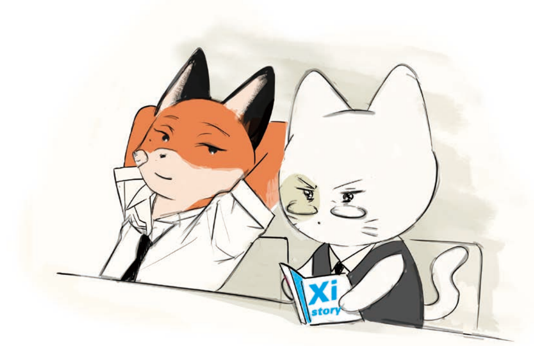
자이스토리는 새 교육과정에 맞게
최신 학교시험과 학력평가 문제를 철저히 분석해
촘촘하게 유형을 분류하고 개념을 적용시키는 유형 훈련으로
수학 실력을 탄탄하게 올릴 수 있게 만들었습니다.

또한, 자이스토리만의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설은
문제를 풀어가면서 동시에 개념과 유형을 자연스럽게
익힐 수 있도록 도와줍니다.

특별한 사람만이 수학을 좋아하고 잘하는 것이 아닙니다.
개념을 바르게 이해하고, 쉬운 문제부터 단계를 밟아 기본을 다지면
수학은 어느새 재미있는 과목이 되어 있을 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1 등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 **자이스토리** –



학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [38일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~66		월 일	월 일
2	67~106		월 일	월 일
3	107~117		월 일	월 일
4	B 01~60		월 일	월 일
5	61~103		월 일	월 일
6	104~141		월 일	월 일
7	142~166		월 일	월 일
8	C 01~75		월 일	월 일
9	76~126		월 일	월 일
10	127~160		월 일	월 일
11	161~192		월 일	월 일
12	D 01~72		월 일	월 일
13	73~121		월 일	월 일
14	122~153		월 일	월 일
15	154~178		월 일	월 일
16	E 01~79		월 일	월 일
17	80~108		월 일	월 일
18	109~116		월 일	월 일
19	F 01~85		월 일	월 일
20	86~118		월 일	월 일
21	119~146		월 일	월 일
22	147~165		월 일	월 일
23	G 01~72		월 일	월 일
24	73~124		월 일	월 일
25	125~176		월 일	월 일
26	177~194		월 일	월 일
27	H 01~78		월 일	월 일
28	79~117		월 일	월 일
29	118~147		월 일	월 일
30	148~190		월 일	월 일
31	191~222		월 일	월 일
32	I 01~92		월 일	월 일
33	93~157		월 일	월 일
34	158~178		월 일	월 일
35	J 01~111		월 일	월 일
36	112~132		월 일	월 일
37	모의 A, B, C, D, E		월 일	월 일
38	모의 F, G, H, I, J		월 일	월 일

- 나는 ____________________ 대학교 ____________________ 학과 ____________ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여자고등학교
배수나 가인아카데미
이종석 일등급 수학 저자
신건률 대치 다원교육
장철희 서울 보성고등학교
전경준 서울 풍문고등학교
전준홍 서울 압구정 Yestudy
최대철 서울 인창고등학교
홍지언 부산대학교 수학 박사과정
홍지우 안양 부흥고등학교
황광희 시흥 시흥고등학교
수경 수학 컨텐츠 연구소

[다른 풀이 집필]
강 현 경주 비상아이비츠 강현학원
곽웅수 광주 카르페영수학원
김리안 인천 수리안학원

김예진 경남 수학 전문컨설턴트
김 준 인천 쭌에듀학원
박경희 화성 대치정인학원
신은숙 서울 펜타곤학원
유대호 평촌 플랜지에듀
유재영 평택 비전고등학교
이보형 성남 매쓰코드학원
이세복 서울 일타수학학원
전승환 안양 공즐학원
정경애 대구 수투수학학원
정석균 천안 힐베르트 수학과학학원
채송화 부산 채송화수학
홍영표 안양 더큰꿈학원
황선아 수원 서나학원

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널
셀프수학

[특별 감수진]

권가영 서울 (목동)커스텀 수학학원
박수진 안산 매스탑수학학원
박경문 전주 해성중학교
박주현 서울 장훈고등학교
송은연 군포 오른수학
신창훈 광주 송원고등학교
안효진 서울 수준영재수학학원
유재영 안성 경기창조고등학교
윤지원 인천 송도일프로팀수학
이승주 인천 명신여자고등학교
이용환 원주 원주여자고등학교
이윤희 인천 숭덕여자중학교
이준형 사천 사천고등학교
장용준 의정부 상우고등학교
장정우 광주 장정우수학교실
조현정 서울 동덕여자고등학교
채희성 수원 이투스수학신영통학원
추병준 성남 깊은수학학원

[감수진]

강다은 부산 코스터디
강동호 광주 별수학학원
구재희 오산 오성학원
구주영 안양 거북선중고등수학학원
권두리 화성 (동탄)M&S학원
김대한 인천 학산학원
김두비 성남 하이탑에듀
김리안 인천 수리안학원
김상윤 의정부 골드클래스학원
김상혁 광주 프리마수학학원
김선화 화성 수학파트너학원
김소영 대구 에이블수학교습소
김예지 화성 (동탄)과수원학원
김유삼 서울 현민수학학원
김윤선 구리 국빈학원
김윤진 오산 더쌤수학학원
김정혁 서울 (대치)새론시대
김춘식 서울 (목동)엠플러스수학학원
김현익 서울 더(The)수학학원
김혜성 서울 (노원)핏클래스학원
김호연 광명 마이엠수학학원
나원선 광주 라플라스수학학원
문대승 광주 열성수학학원
문상경 대구 수아일체수학학원
문소영 창원 문소영수학관리학원
박경민 대구 학문당입시학원
박래정 광주 RJ수학
박문영 화성 (동탄)와이수학
박순지 고양 오르다입시종합학원
박승민 오산 피버수학
박영선 세종 유얼수학
박은아 울산 팍스학원
박정한 성남 (분당)수학의아침
박제이 서울 다짐수학
박진한 화성 엡실론학원
박진형 울산 송정JP수학과학학원
방선윤 울산 엘리트해법수학
배지후 세종 해밀학원
부종민 부산 부종민수학
서민재 서울 관악GMS뉴스터디학원
설성희 김포 설쌤수학학원
손태성 대구 하늘수학
송미경 영천 이루지오학원
송유헌 제주 GTS Math
신경미 서울 래미안수학전문교육원
신다혜 부천 알찬학원
신정식 서울 (목동)미래탐구학원
심혜진 인천 송도매쓰몽플러스학원
안영미 청주 라온수학
양 일 인천 비코즈수학학원
어성웅 수원 어쌤수학학원
엄시온 김포 유투엠
오상혁 서울 미듬수학학원
윤정민 부산 명진학원
윤희용 부천 매트릭스학원
이민규 인천(청라) 투스카이수학학원
이보라 부산 지혜플러스학원
이상준 부산 화명조은학원
이상철 부천 g1230 옥길
이세라 의정부 매쓰스탠다드 학원
이승진 평택(안중) 호연수학
이영주 제주 피드백수학학원
이은경 전주 시그마수학전문학원
이준택 안산 신길고등학교
이지호 양주 에이치투에스학원
이찬희 청주 (오창)미로수학
이창무 대구 531수학학원
이태권 대구 보담학원
이한빛 고양 (일산)한빛수학학원
이형림 성남 (분당)원리를깨우치는수학
임병훈 수원 웅진프라임금곡학원
임유진 대구 박진수학
장보영 인천 장보영수학연구소
장솔민 성남 우주수학학원
장준영 세종 지혜수입시학원
전준영 대구 옥수학학원
정민수 광주 정경태수학아카데미
정병보 대전 카이탑수학
정용훈 성남 (분당)일비충천수학학원
정은아 용인 별들의숲수학학원
정지민 청주 스텝업수학
정진영 인천 정선생수학연구소
조승혁 안산 뉴턴학원
조원진 평촌 RTS,안산S&T
조종희 춘천 유투엠수학
진하영 화성(기안) 위투지학원
차강일 순천 참수학학원
채송화 부산 채송화수학학원
최경희 시흥 최강수학학원
최선혜 고양 애플학원
최승호 전주 SMT아카데미학원
최영석 시흥 편한수학학원
최은미 서울 위플라이수학
한광희 전주 유나이츠학원
한철호 울산 수토바입시학원
홍의찬 고양 (일산)원수학
황미경 인천 MK수학전문학원

[My Top Secret 집필]
곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
문지원 서울대학교 의예과
석민준 서울대학교 첨단융합학과
장현준 서강대 수학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
조선하 서울대학교 자유전공학부
황대윤 서울대 수리과학부

차　례 [총 185개 유형]

Ⅰ 도형의 방정식

Ⅱ 집합과 명제

Ⅲ 함수와 그래프

Special 내신+학평 대비 단원별 모의고사

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

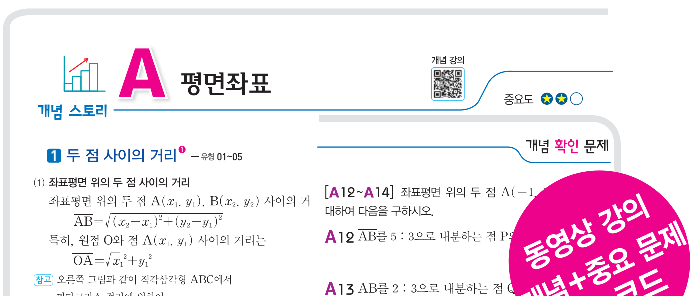
셀프수학

유형별 문제와 1등급 대비 문제 훈련으로 내신 1등급 완성

1 개념 스토리+개념 확인 문제

공통수학2에서 꼭 알아야 하는 중요한 교과서 개념을 쉽게 이해되도록 설명하였습니다. 또한, 개념과 공식을 확실히 자신의 것으로 만들 수 있는 개념 확인 문제를 함께 수록했습니다.

- **중요도 ★★★** : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- **개념 확인 문제** : 개념 하나하나에 대한 맞춤 문제로 구성

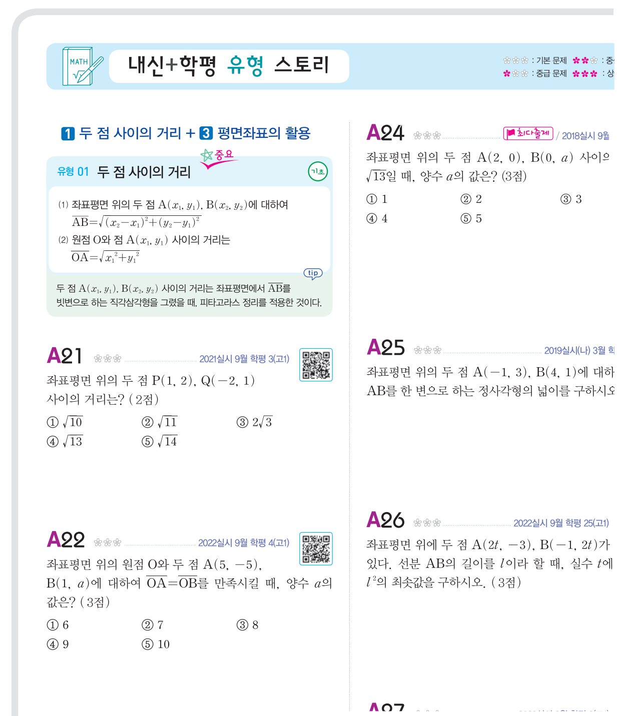


- QR 코드 : 수학 전문 강사의 생생한 개념 강의를 통해 완벽한 개념 학습을 할 수 있도록 하였습니다.

2 내신+학평 유형 스토리

개념에 따른 유형을 자세히 공부할 수 있도록 학교 시험이나 학력평가에서 출제되었던 문제들을 촘촘하게 세분화하여 개념순, 난이도 순으로 수록하였습니다.

- **유형 정리** : 시험에서 출제되었던 모든 유형을 제시하여 효과적이고 완벽한 유형 분석을 할 수 있도록 하였습니다.
- **tip** : 유형에 따라 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR 코드** : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.



- 난이도 : ❀❀❀ – 기본 문제, ✿❀❀ – 중급 문제
✿✿❀ – 중상급 문제, ✿✿✿ – 상급 문제

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2026대비 수능(나) 22번 : 2025년 11월에 실시한 수능
  - 2025실시 6월 학평 16(고1) : 2025년 6월에 실시한 학력평가
  - 2024실시 3월 학평 10(고2) : 2024년 3월에 실시한 학력평가
  - 표시 없는 문제 : 기출 변형 문제(내신, 학평)

- 최다출제 : 내신, 학평에서 가장 출제율이 높은 문제
- 신유형 : 최근 내신+학평에서 출제되는 새로운 유형의 문제
- 필수 : 유형 학습을 위해 꼭 확인 해야 하는 문제
- 중요 : 시험에 반드시 출제되는 중요 유형 체크
- 고난도 : 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형

3 서술형 스토리–단계별 문제해결 방법 제시

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계적으로 풀어 나가는 과정을 제시하여 서술형 문제에 대한 자신감을 얻을 수 있게 구성하였습니다.

4 단원별 모의고사 – 내신+학평 대비와 단원 실력 최종 점검

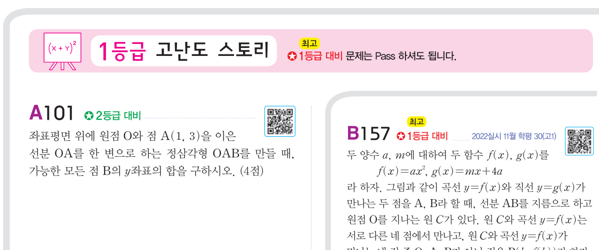
중간, 기말 학교 시험에 대비할 수 있는 단원별 모의고사를 통해 자신의 실력을 체크하고, 부족한 부분은 보충할 수 있습니다.

★ 주요 문항 동영상 강의 제공

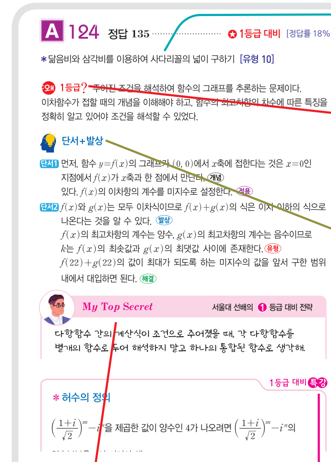
5 1등급 고난도 스토리 – 2등급 대비+1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 난이도 순으로 배열하여 종합적인 사고력과 응용력을 길러서 반드시 수학 1등급을 달성할 수 있도록 구성했습니다.

- 최고 1등급 대비 : 실제 시험장에서 손도 대지 못했던 극강의 난이도 문제 (도전해 보되, 좌절하지는 말자!)
- 1등급 대비 : 정답률이 20% 이하인 문제로, 1등급을 가르는 최고난도 문제
- 2등급 대비 : 정답률이 21%~35%인 문제로, 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 최상급 문제



6 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설



문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

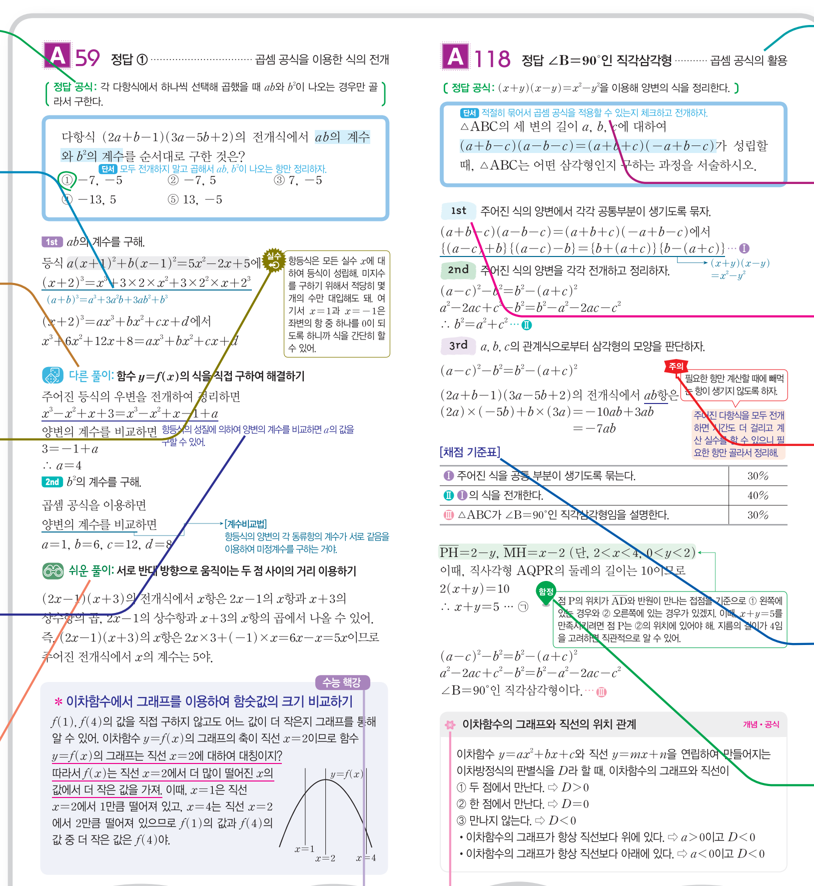
왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
- 단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
- 개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
- 유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
- 발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
- 적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
- 해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

7 입체 첨삭 해설!



정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석해서 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

적용 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빠먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

채점 기준표
서술형 문제에 대한 적절한 풀이 기준을 제시하여 중요한 포인트를 놓치지 않게 하였습니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

문항 배열 및 구성 [1791제]

❶ 개념 이해와 개념 확인 문제 [401제]

각 단원에서 배울 개념 중 중요한 것들을 자세히 설명하고 개념 하나하나에 대한 맞춤 문제를 수록하였습니다.

❷ 최신 10개년 학력평가 기출 문제 전 문항 수록 [새교육과정 1791제]

- 2022~2025 고1, 고2 3월 학력평가 전 문항 수록 (151제)
- 새교육과정에 맞는 2015~2021 학력평가 우수 문항 선별 수록 (376제)
- 새교육과정 완벽 대비를 위한 유형별 내신 기출 변형 문제 수록 (541제)
- 필수 유형 완전 학습–내신+학평 유형 스토리 [185 유형, 문제 1327제]

★ 내신 1등급을 위한 내신 기출 변형 문제 추가 수록

1. 내신 1등급을 위해 185개 문제 유형으로 세분화

수학 개념을 쉽고 빠르게 이해하는 가장 좋은 학습법은 문제 유형을 세분화해서 공부하는 것입니다.
학교 시험은 다양한 유형에서 고르게 출제되기 때문에, 철저히 분석된 유형을 충분히 연습해야 합니다.

2. 185개 유형 연습을 위한 기출 문제 + 내신 기출 변형 문제 수록

학력평가는 특별한 유형에서 많이 출제되기 때문에 어떤 유형은 기출 문제가 과하게 많고,
어떤 유형은 기출 문제가 부족합니다. 그래서 185개 유형에 맞는 내신 기출 변형 문제를 보충 수록해서
1등급을 위한 완벽한 학습이 되도록 하였습니다.

❸ 서술형 단계별 훈련을 위한 내신 기출 변형 문제 서술형 스토리 [서술형 83제]

각 단원 중 서술형 출제 방식에 적합하고 출제 비율이 높은 내신 기출 변형 서술형 문제를 구성하였습니다.

❹ 내신+학평 대비 단원별 모의고사 [기출 문제+기출 변형 문제 131제]

[공통수학2 문항 구성표]

시행연도	고1 3월 학력평가	고1 6월 학력평가	고1 9월 학력평가	고1 11월 학력평가	고2 3월 학력평가	연도별 문항 수
2025				0	14	14
2024			13	15	18	46
2023			13	16	16	45
2022			13	16	17	46
2021	출제 되지 않음		11	15	16	42
2020			14	15	15	44
2019			13	14	13	40
2018			12	15	1	28
2017	1	0	6	6	1	13
2016	1	1	8	9	5	24
2015 이전	0	1	17	20	10	48
내신 기출 변형 문제	917					
기본 개념, 서술형 문제	484					
총 수록 문항 수						1791

■ 내신 기출 변형 문제 : 185개 유형 예상 문제 수록
■ 학평 기출 : 2025~2022 학평 전부 수록, 2021~2015(7개년) 학평 선별

A 평면좌표

★ 유형 차례

단원 학습 목표

- 중학교에서 배운 수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식과 피타고라스 정리를 이용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식을 유도하고 이를 활용하여 문제를 풀 수 있다.
- 선분의 내분을 기하학적으로 이해하여 공식을 이용해 내분점의 좌표를 구하고, 이를 활용할 수 있다.

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 좌표를 이용하면 변의 길이를 식으로 나타낼 수 있기 때문에 도형의 성질을 쉽게 파악할 수 있다.
  즉, 주어진 도형을 좌표평면 위에 옮겨 두 점 사이의 거리와 내분점의 좌표를 구하는 연습을 꾸준히 한다.
- 선분의 내분점 공식에 의해 삼각형의 무게중심의 좌표도 구할 수 있다. 좌표평면 위의 도형의 활용문제에서 무게중심과 연관된 여러 성질들을 종합적으로 적용할 수 있도록 한다.

★ 자주 출제되는 개념+공식

1 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 P라 하면

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

3 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

A 평면좌표

개념 스토리

개념 강의

중요도 ★★○

1 두 점 사이의 거리[1] – 유형 01~05

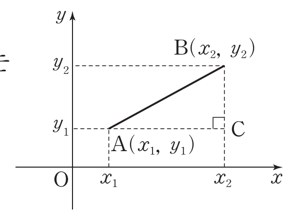
(1) **좌표평면 위의 두 점 사이의 거리**

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

특히, 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$



(2) **같은 거리에 있는 점의 좌표**[2]

(i) 구하고자 하는 점의 좌표를 미지수로 나타낸다.

예) x축 위에 있다. ⇒ $(a, 0)$ y축 위에 있다. ⇒ $(0, b)$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있다. ⇒ $(c, f(c))$

(ii) 두 점 사이의 거리 공식을 활용하여 식을 세우고 방정식을 푼다.

2 선분의 내분점 – 유형 06~08

점 P가 선분 AB 위에 있고, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n\,(m>0,\ n>0)$일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$을 **내분한다**고 하며 점 P를 선분 AB의 **내분점**이라 한다.

(1) **수직선 위의 선분의 내분점**

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로

내분하는 점을 P라 하면 $\mathbf{P}\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

(2) **좌표평면 위의 선분의 내분점**

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를

$m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P라 하면

$$\mathbf{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ 중점은 선분을 1 : 1로 내분하는 점이다.

참고 선분 AB의 내분점 P는 m, n의 값에 관계없이 항상 선분 AB 위에 있다.

3 평면좌표의 활용 – 유형 01~11

(1) **삼각형의 무게중심**[3]

① 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는

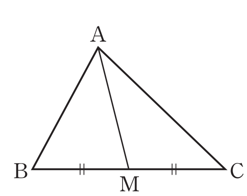
삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 $\mathbf{G}\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

② 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 할 때, 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심은 일치한다.

(2) **중선정리 (파푸스의 정리)**

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때,

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$$



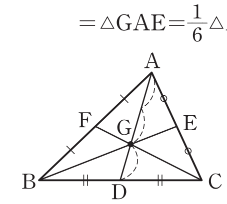
[1] 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}}=|x_2-x_1|$
특히, 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OA}}=|x_1|$

참고 왼쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$
$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

[2] **삼각형의 외심**
① 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점을 외심이라 한다.
② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.
즉, O가 삼각형 ABC의 외심이면 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$이다.

[3] 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분한다.
또한, 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여
(1) $\triangle\mathrm{GAB}=\triangle\mathrm{GBC}=\triangle\mathrm{GCA}$
$=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$
(2) $\triangle\mathrm{GAF}=\triangle\mathrm{GBF}=\triangle\mathrm{GBD}$
$=\triangle\mathrm{GCD}=\triangle\mathrm{GCE}$
$=\triangle\mathrm{GAE}=\dfrac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}$



1 두 점 사이의 거리

[A01~A02] 수직선 위의 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

A01 $A(2)$, $B(-3)$

A02 $A(-8)$, $B(1)$

[A03~A07] 좌표평면 위의 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

A03 $O(0, 0)$, $A(-6, 8)$

A04 $A(1, 7)$, $B(4, 3)$

A05 $A(-3, 1)$, $B(4, -1)$

A06 $A(-5, -2)$, $B(1, -6)$

A07 $A(6, -5)$, $B(2, 3)$

2 선분의 내분점

[A08~A10] 수직선 위의 두 점 $A(-3)$, $B(5)$에 대하여 다음을 구하시오.

A08 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점 P의 좌표

A09 $\overline{BA}$를 $3:1$로 내분하는 점 Q의 좌표

A10 $\overline{AB}$의 중점 M의 좌표

A11 수직선 위의 두 점 $A(-4)$, $B(6)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 a, $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

[A12~A14] 좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 1)$, $B(3, 7)$에 대하여 다음을 구하시오.

A12 $\overline{AB}$를 $5:3$으로 내분하는 점 P의 좌표

A13 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점 Q의 좌표

A14 $\overline{AB}$의 중점 M의 좌표

A15 좌표평면 위의 두 점 $A(a, 3)$, $B(4, b)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점 R의 좌표가 $(4, 0)$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

3 평면좌표의 활용

[A16~A18] 좌표평면 위의 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

A16 $A(3, 1)$, $B(2, 6)$, $C(7, 2)$

A17 $A(1, 8)$, $B(-2, 3)$, $C(4, -5)$

A18 $A(-1, -2)$, $B(5, -3)$, $C(-6, 8)$

[A19~A20] 좌표평면 위의 세 점 $A(0, 5)$, $B(4, -3)$, $C(p, q)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 다음과 같을 때, pq의 값을 구하시오.

A19 $G(1, 0)$

A20 $G(4, -1)$

❖ 정답 및 해설 8p

내신+학평 유형 스토리

❀❀❀ : 기본 문제 ❀❀❀ : 중상급 문제
❀❀❀ : 중급 문제 ❀❀❀ : 상급 문제

1 두 점 사이의 거리 + 3 평면좌표의 활용

유형 01 두 점 사이의 거리

중요 기초

(1) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(2) 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}$

tip
두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{AB}}$를 빗변으로 하는 직각삼각형을 그렸을 때, 피타고라스 정리를 적용한 것이다.

A21 ❀❀❀ 2024실시 10월 교육청 2(고1)

좌표평면 위의 두 점 $(1, 3)$, $(2, 5)$ 사이의 거리는? (2점)

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

A22 ❀❀❀ 2024실시 9월 학평 4(고1)

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1, 3)$, $\mathrm{B}(2, a)$ 사이의 거리가 $\sqrt{17}$일 때, 양수 a의 값은? (3점)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

A23 ❀❀❀ 2021실시 9월 학평 3(고1)

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(1, 2)$, $\mathrm{Q}(-2, 1)$ 사이의 거리는? (2점)

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

A24 ❀❀❀ 최다출제 / 2018실시 9월 학평 4(고1)

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(0, a)$ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$일 때, 양수 a의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A25 ❀❀❀ 2019실시(나) 3월 학평 23(고2)

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1, 3)$, $\mathrm{B}(4, 1)$에 대하여 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구하시오. (3점)

A26 ❀❀❀ 2023실시 9월 학평 3(고1)

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(a, 3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}=4$일 때, a^2의 값은? (단, O는 원점이다.) (2점)

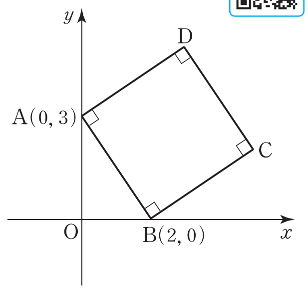
① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

A27 ❀❀❀ 2017실시(나) 3월 학평 22(고2)

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(0, 5)$에 대하여 선분 AB의 길이를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오. (3점)

A28 ✿❀❀

그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $A(0, 3)$, $B(2, 0)$을 잇는 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD에 대하여 $\overline{OC}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 C는 제1사분면 위의 점이다.) (4점)



A29 ✿❀❀ 2011실시 9월 학평 9(고1) 변형

좌표평면 위의 한 점 $A(4, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심은 변 BC 위에 있고 그 좌표가 $(-2, -1)$일 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$의 값은? (3점)

① 155 ② 160 ③ 165
④ 170 ⑤ 175

A30 ✿❀❀ 2019실시 9월 학평 13(고1)

이차함수 $f(x)=x^2+4x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, k는 상수이다.) (3점)

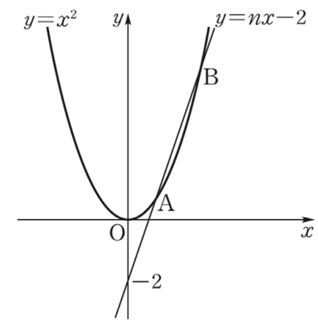
① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$
④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

A31 ✿❀❀

좌표평면 위의 정삼각형 ABC에서 꼭짓점 A의 좌표는 $A(-3, 2)$이고 무게중심 G의 좌표가 $G(1, 4)$일 때, 정삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. (3점)

A32 ✿❀❀ 2015실시(나) 3월 학평 13(고2)

그림과 같이 3 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=nx-2$가 두 점 A, B에서 만난다. 다음 물음에 답하시오. (단, O는 원점이다.)



$n=4$일 때, 선분 AB의 길이는? (3점)

① $\sqrt{17}$ ② $\sqrt{34}$ ③ $2\sqrt{17}$
④ $2\sqrt{34}$ ⑤ $4\sqrt{17}$

A33 ✿❀❀ 2011실시(나) 6월 학평 10(고2)

행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 성분을 이용하여 좌표평면 위에 두 점 (a, c), (b, d)를 정하고 이 두 점 사이의 거리를 $L(X)$라 하자. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -y_1 & -y_2 \end{pmatrix}$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (3점)

[보기]
ㄱ. $L(A)=L(B)$
ㄴ. $L(2A)=2L(A)$
ㄷ. $L(A+B)=L(A)+L(B)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 02 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

중요 이해

점 P가 두 점 A, B에서 같은 거리에 있으면 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이다.
이때, 점 P가
(1) x축 위의 점이면 $\mathrm{P}(a, 0)$
(2) y축 위의 점이면 $\mathrm{P}(0, b)$
(3) 직선 $y=mx+n$ 위의 점이면 $\mathrm{P}(a, ma+n)$
이라 좌표를 놓는다.

tip

+ 삼각형의 외심
1 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
2 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

A34

2022실시 9월 학평 4(고1)

좌표평면 위의 원점 O와 두 점 $\mathrm{A}(5, -5)$, $\mathrm{B}(1, a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$를 만족시킬 때, 양수 a의 값은? (3점)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

A35

세 점 $\mathrm{A}(-5, -7)$, $\mathrm{B}(a, -2)$, $\mathrm{C}(3, 1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$를 만족하는 a의 값은? (3점)

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

A36

최다출제

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-3, 3)$, $\mathrm{B}(4, 4)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하시오. (3점)

A37

2023실시 11월 학평 9(고1)

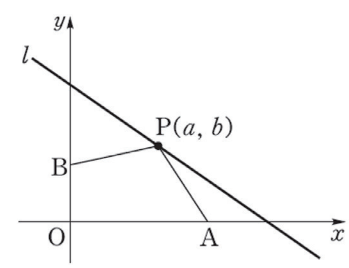
좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(2, 4)$, $\mathrm{B}(5, 1)$이 있다. 직선 $y=-x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$일 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.) (3점)

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

A38

2012실시 3월 학평 25(고2)

그림과 같이 직선 $l : 2x+3y=12$와 두 점 $\mathrm{A}(4, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2)$가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$가 되도록 직선 l 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$를 잡을 때, $8a+4b$의 값을 구하시오. (3점)



A39

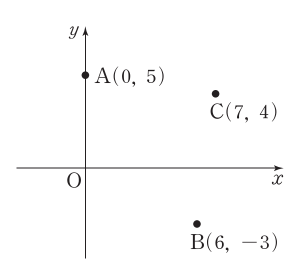
필수

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(3, 4)$, $\mathrm{B}(-3, 0)$, $\mathrm{C}(5, 0)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 외심의 좌표를 (a, b)라 할 때, ab의 값은? (3점)

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

A40

다음 그림은 A, B, C 세 아파트의 위치를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 학생들의 편의를 위해 각 아파트로부터의 거리가 같은 지점에 학교를 지으려고 할 때, 학교의 위치는 $\mathrm{P}(a, b)$이다. 이때, $a+b$의 값을 구하시오. (4점)



고난도

유형 03 두 점 사이의 거리의 활용 – 삼각형의 모양

활용

삼각형 ABC의 세 변의 길이 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$ 사이의 관계에 따라 삼각형 ABC의 모양은 다음과 같다.

(1) $c^2>a^2+b^2 \Rightarrow$ 둔각삼각형

(2) $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow \angle C=90°$인 직각삼각형

(3) c가 가장 긴 변일 때, $c^2<a^2+b^2 \Rightarrow$ 예각삼각형

(4) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a \Rightarrow$ 이등변삼각형

(5) $c^2=a^2+b^2$이고 $a=b \Rightarrow \angle C=90°$인 직각이등변삼각형

(6) $a=b=c \Rightarrow$ 정삼각형

tip

주어진 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 종류를 결정할 때에는 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 세 변의 길이를 먼저 각각 구한 뒤에 그 값들을 통해 삼각형의 모양을 알아낸다.

A41

필수

좌표평면 위의 세 점 A$(1, 3)$, B$(2, 2)$, C$(4, 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가? (3점)

① 정삼각형
② $\overline{AC}$가 빗변인 직각삼각형
③ $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형
④ $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형
⑤ $\overline{BC}$가 빗변인 직각이등변삼각형

A42

좌표평면 위에 세 점 A$(0, 2)$, B$(1, 5)$, C$(a, 1)$이 있을 때, 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? (3점)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

A43

좌표평면 위의 세 점 A(a, a), B$(3, a)$, C$(2, b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 이 정삼각형의 한 변의 길이는? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A44

좌표평면 위의 세 점 A$(3, 2)$, B$(0, 1)$, C$(1, -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는? (3점)

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

A45

2021실시 9월 학평 21(고1)

실수 k에 대하여 이차함수 $y=(x-k)^2-2$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 삼각형 AOB가 이등변삼각형이 되도록 하는 서로 다른 k의 개수를 n, k의 최댓값을 M이라 하자. $n+M$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) (4점)

① $7+\sqrt{3}$ ② $7+2\sqrt{3}$ ③ $7+3\sqrt{3}$
④ $9+2\sqrt{3}$ ⑤ $9+3\sqrt{3}$

유형 04 선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값

이해

두 점 사이의 거리의 제곱의 합의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 점 P의 좌표를 P(a, b)라 하고, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a 또는 b에 대한 이차식으로 나타낸다.

(ii) (i)에서 구한 이차식을 완전제곱 꼴로 변형하여 최솟값을 구한다.

tip

점 P(x, y)에 대하여
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=(x-p)^2+(y-q)^2+r$의 꼴로 변형했을 때
$\Rightarrow$ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 r이고 그때의 점 P의 좌표는 (p, q)이다.

A46

2022실시 9월 학평 25(고1)

좌표평면 위에 두 점 A$(2t, -3)$, B$(-1, 2t)$가 있다. 선분 AB의 길이를 l이라 할 때, 실수 t에 대하여 l^2의 최솟값을 구하시오. (3점)

❖ 정답 및 해설 12~15p

서술형 스토리

단계별 서술하기 + 스스로 서술하기

✿❀❀ : 중급 문제
✿✿❀ : 중상급 문제

A107 ✿❀❀

좌표평면 위의 두 점 A$(3, 2)$, B$(-4, 5)$에 대하여 $\overline{AC}=\overline{BC}$를 만족하는 점 C가 직선 $y=x-2$ 위의 점일 때, 원점 O에서 점 C까지의 거리를 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

1st 직선 위의 점 C의 좌표를 한 문자로 나타내보자.

2nd $\overline{AC}=\overline{BC}$임을 이용하여 점 C의 좌표를 구하자.

3rd $\overline{OC}$의 길이를 구하자.

A108 ✿❀❀

좌표평면 위의 두 점 A$(-1, 1)$, B$(4, 4)$로부터 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 C, y축 위의 점을 D라고 할 때, $\overline{CD}$의 길이를 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

1st $\overline{CA}=\overline{CB}$임을 이용하여 점 C의 좌표를 구하자.

2nd $\overline{DA}=\overline{DB}$임을 이용하여 점 D의 좌표를 구하자.

3rd $\overline{CD}$의 길이를 구하자.

A109 ✿❀❀

두 점 A$(3, 2)$, B$(-3, -1)$을 이은 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 E라 하자. 직선 $y=mx-2$가 점 E를 지날 때, 상수 m의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

A110 ✿❀❀

두 점 A$(-4, -3)$, B$(1, -1)$에 대하여 점 C(a, b)가 $3\overline{AC}=2\overline{BC}$를 만족할 때, ab의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, 점 C는 두 점 A와 B를 이은 선분 위에 있고, 점 C는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.) (10점)

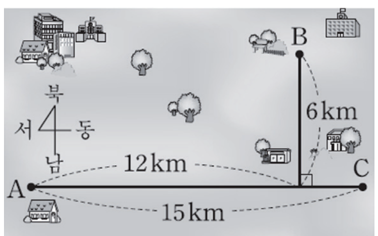
A111 ✿❀❀

좌표평면 위의 세 점 O$(0, 0)$, A$(-3, 5)$, B$(9, -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점을 P, 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 두 삼각형 OBP, OQA의 무게중심을 각각 G_1, G_2라 할 때, $\overline{G_1G_2}$의 길이를 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

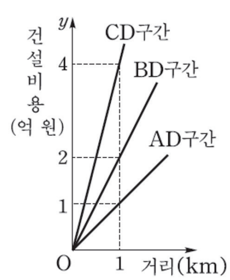
❖ 정답 및 해설 35~38p

A112 2등급 대비 .... 2009실시 11월 학평 28(고1)

그림과 같이 A, B, C 세 지점이 있다. B는 A로부터 동쪽으로 12 km만큼, 북쪽으로 6 km만큼 떨어진 곳에 있으며, C는 A로부터 동쪽으로 15 km만큼 떨어진 곳에 있다.



어떤 건설회사가 A, B, C 각 지점에서 어느 D 지점까지 도로를 건설하려고 한다. 각 구간별 건설예정인 도로의 건설비용은 아래 그림과 같이 거리에 정비례한다.



A, B, C 각 지점에서 D 지점까지의 각각의 도로 건설비용이 모두 같은 D 지점은 두 곳이다. 이 두 지점 사이의 거리를 x(km)라 할 때, x의 값을 구하시오. (단, 네 지점 A, B, C, D는 동일 평면에 위치하며 모든 도로는 두 지점을 직선으로 연결한 평면상의 도로이다.) (4점)

A113 2등급 대비

좌표평면 위에 원점 O와 점 A(1, 3)을 이은 선분 OA를 한 변으로 하는 정삼각형 OAB를 만들 때, 가능한 모든 점 B의 y좌표의 합을 구하시오. (4점)

Special

★ 내신+학평 대비

단원별 모의고사

[제한시간 40분]

A **평면좌표** – 14문항

B **직선의 방정식** – 13문항

C **원의 방정식** – 14문항

D **도형의 이동** – 13문항

E **집합의 뜻과 표현** – 12문항

F **집합의 연산** – 12문항

G **명제** – 14문항

H **함수** – 13문항

I **유리식과 유리함수** – 13문항

J **무리식과 무리함수** – 13문항

모의
A01

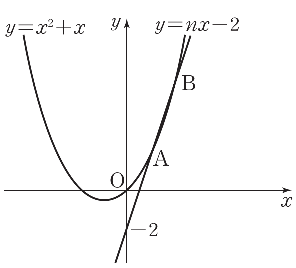
좌표평면 위의 두 점 A$(3,\ -2)$, B$(a-2,\ 4)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$일 때, 양수 a의 값은? (2점)

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

모의
A02

2015실시(가) 3월 학평 13(고2)

그림과 같이 4 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=nx-2$가 두 점 A, B에서 만난다.
$n=4$일 때, 선분 AB의 길이는? (3점)



① $\sqrt{17}$ ② $\sqrt{34}$ ③ $2\sqrt{17}$
④ $2\sqrt{34}$ ⑤ $4\sqrt{17}$

모의
A03

두 점 A$(-1,\ -3)$, B$(5,\ 7)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=-3x+4$ 위의 점 P의 좌표는? (3점)

① $(-1,\ 7)$ ② $\left(-\frac{2}{3},\ 6\right)$ ③ $\left(-\frac{1}{3},\ 5\right)$
④ $(0,\ 4)$ ⑤ $\left(\frac{1}{3},\ 3\right)$

모의
A04

2017실시 9월 학평 10(고1)

좌표평면 위의 세 점 A$(-2,\ 0)$, B$(4,\ 0)$, C$(1,\ 2)$를 지나는 원이 있다. 이 원의 중심의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값은? (3점)

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{3}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

모의
A05

2016실시 11월 학평 12(고1)

좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ -2)$, B$(5,\ a)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표가 $(b,\ 0)$일 때, $a+b$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

모의
A06

좌표평면 위의 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(0,\ 7)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $\left(-\frac{2}{3},\ a\right)$일 때, a의 값을 구하시오. (3점)

모의
A07

두 점 A$(4,\ a)$, B$(-1,\ 2)$에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, a의 값은? (3점)

① -6 ② -8 ③ -10
④ -12 ⑤ -14

모의
A08

수직선 위의 두 점 A(-4), B(6)이 있다. 선분 AB를 $4:1$로 내분하는 점을 P, 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

모의
A09 ✽❀❀

두 점 A$(6,\ -4)$, B$(1,\ 1)$을 이은 직선 AB 위의 점 C에 대하여 $2\overline{AC}=3\overline{BC}$일 때, 점 C의 좌표를 구하면?
(단, 점 C는 선분 AB 위에 존재한다.) (3점)

① $(-9,\ 11)$ ② $(9,\ -11)$ ③ $(-3,\ -1)$
④ $(3,\ -1)$ ⑤ $(9,\ 11)$

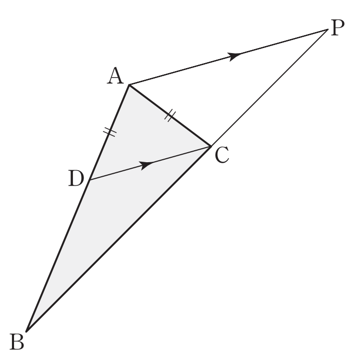
모의
A10 ✽❀❀

세 점 A$(2,\ 2)$, B$(-1,\ 3)$, C$(-3,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 변 BC 위에 점 P$(a,\ b)$가 있다. 삼각형 ABP와 삼각형 APC의 넓이의 비가 $2:3$일 때, $a+b$의 값은? (4점)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

모의
A11 ✽✽❀

세 꼭짓점의 좌표가 A$(0,\ 3)$, B$(-5,\ -9)$, C$(4,\ 0)$인 삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 $\overline{AC}=\overline{AD}$가 되도록 점 D를 선분 AB 위에 잡는다. 점 A를 지나면서 선분 DC와 평행인 직선이 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 P라 하자. 이때, 점 P의 좌표는? (4점)



① $\left(\frac{61}{8},\ \frac{29}{8}\right)$ ② $\left(\frac{65}{8},\ \frac{33}{8}\right)$ ③ $\left(\frac{69}{8},\ \frac{37}{8}\right)$
④ $\left(\frac{73}{8},\ \frac{41}{8}\right)$ ⑤ $\left(\frac{77}{8},\ \frac{45}{8}\right)$

모의
A12 ❀❀❀

꼭짓점 A의 좌표가 $(2,\ -3)$인 △ABC에서 변 BC의 중점의 좌표가 $(-1,\ 6)$일 때, △ABC의 무게중심의 좌표는? (3점)

① $(-3,\ 0)$ ② $(-2,\ 1)$ ③ $(-1,\ 2)$
④ $(0,\ 3)$ ⑤ $(1,\ 4)$

모의
A13 ✽❀❀

평행사변형 ABCD의 네 꼭짓점의 좌표가 A$(a,\ -2)$, B$(-3,\ 4)$, C$(1,\ 7)$, D$(3,\ b)$일 때, a^2+b^2의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

서술형

모의
A14 ✽❀❀

세 점 A$(0,\ 2)$, B$(4,\ -2)$, C$(3,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표를 구하는 과정을 서술하시오. (6점)

❖ 정답 및 해설 500~503p

차 례

A 평면좌표

개념 확인 문제

A 01 정답 5

$\overline{AB}=|-3-2|=5$

A 02 정답 9

$\overline{AB}=|1-(-8)|=9$

A 03 정답 10

$\overline{OA}=\sqrt{(-6-0)^2+(8-0)^2}=\sqrt{100}=10$

A 04 정답 5

$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(3-7)^2}=\sqrt{25}=5$

A 05 정답 $\sqrt{53}$

$\overline{AB}=\sqrt{\{4-(-3)\}^2+(-1-1)^2}=\sqrt{53}$

A 06 정답 $2\sqrt{13}$

$\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-5)\}^2+\{-6-(-2)\}^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

A 07 정답 $4\sqrt{5}$

$\overline{AB}=\sqrt{(2-6)^2+\{3-(-5)\}^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

A 08 정답 P(3)

$P\left(\frac{3\times5+1\times(-3)}{3+1}\right) \quad \therefore P(3)$

A 09 정답 Q(−1)

$Q\left(\frac{3\times(-3)+1\times5}{3+1}\right) \quad \therefore Q(-1)$

A 10 정답 M(1)

$M\left(\frac{-3+5}{2}\right) \quad \therefore M(1)$

A 11 정답 2

$a=\frac{1\times6+2\times(-4)}{1+2}=-\frac{2}{3},\ b=\frac{2\times6+1\times(-4)}{2+1}=\frac{8}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=2$

A 12 정답 $P\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$

$P\left(\frac{5\times3+3\times(-1)}{5+3}, \frac{5\times7+3\times1}{5+3}\right) \quad \therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$

A 13 정답 $Q\left(\frac{3}{5}, \frac{17}{5}\right)$

$Q\left(\frac{2\times3+3\times(-1)}{2+3}, \frac{2\times7+3\times1}{2+3}\right) \quad \therefore Q\left(\frac{3}{5}, \frac{17}{5}\right)$

A 14 정답 M(1, 4)

$M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+7}{2}\right) \quad \therefore M(1, 4)$

A 15 정답 5

$R\left(\frac{3\times4+1\times a}{3+1}, \frac{3\times b+1\times3}{3+1}\right)$에서 $R\left(\frac{12+a}{4}, \frac{3b+3}{4}\right)$이

R(4, 0)이어야 하므로

$\begin{cases}12+a=16 \Rightarrow a=4\\ 3b+3=0 \Rightarrow b=-1\end{cases} \quad \therefore a-b=4-(-1)=5$

A 16 정답 G(4, 3)

$G\left(\frac{3+2+7}{3}, \frac{1+6+2}{3}\right) \quad \therefore G(4, 3)$

A 17 정답 G(1, 2)

$G\left(\frac{1-2+4}{3}, \frac{8+3-5}{3}\right) \quad \therefore G(1, 2)$

A 18 정답 $G\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$

$G\left(\frac{-1+5-6}{3}, \frac{-2-3+8}{3}\right) \quad \therefore G\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$

A 19 정답 2

$G\left(\frac{0+4+p}{3}, \frac{5-3+q}{3}\right)$가 G(1, 0)이므로

$p=-1,\ q=-2 \quad \therefore pq=2$

A 20 정답 −40

$G\left(\frac{0+4+p}{3}, \frac{5-3+q}{3}\right)$가 G(4, −1)이므로

$p=8,\ q=-5 \quad \therefore pq=-40$

내신+학평 유형 스토리

A 21 정답 ① ········· 두 점 사이의 거리

정답 공식: 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

단서 두 점 사이의 거리는 좌표의 같은 위치의 값마다 x좌표와 y좌표 각각의 차를 구한 후 제곱해서 더하여 제곱근을 취하면 구할 수 있어.

좌표평면 위의 두 점 (1, 3), (2, 5) 사이의 거리는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

1st 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 거리를 구해.

구하는 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

[두 점 사이의 거리]
두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

A 22 정답 ③ ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

좌표평면 위의 두 점 $A(1, 3)$, $B(2, a)$ 사이의 거리가 $\sqrt{17}$일 때, 양수 a의 값은? 단서 이렇게 문제에서 부호를 언급할 때에는 다른 부호의 수가 나올 수도 있음을 명심하렴.

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

1st 두 점 사이의 거리 공식에 대입하자.

두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{(1-2)^2+(3-a)^2}=\sqrt{a^2-6a+10}$

이 값이 $\sqrt{17}$이므로 두 점 사이의 거리 공식은 두 점을 빗변의 양 끝점으로 하는 직각삼각형에서 피타고라스 정리를 이용하면 떠올릴 수 있어.

$\sqrt{a^2-6a+10}=\sqrt{17}$

2nd 양변을 제곱하여 양수 a의 값을 구하자.

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-6a+10=17$

$a^2-6a-7=(a-7)(a+1)=0$

따라서 양수 a의 값은 $a=7$이다.

A 23 정답 ① ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 좌표평면 위의 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리를 d라 하면 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다.

좌표평면 위의 두 점 $P(1, 2)$, $Q(-2, 1)$ 사이의 거리는?
단서 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용해.

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

1st 두 점 P, Q 사이의 거리를 구해.

두 점 $P(1, 2)$, $Q(-2, 1)$ 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

좌표평면 위의 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리를 d라 하면 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이야.

A 24 정답 ③ ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

좌표평면 위의 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, a)$ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$일 때, 양수 a의 값은? 단서 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이야.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하자.

$\overline{AB}=\sqrt{(0-2)^2+(a-0)^2}=\sqrt{13}$이므로 양변을 제곱하면

$a^2+4=13$, $a^2=9$

따라서 $a>0$이므로 $a=3$

$a^2-9=0$에서 $a=3$ 또는 $a=-3$ 조건에서 $a>0$이므로 $a=3$

A 25 정답 29 ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다.

좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 3)$, $B(4, 1)$에 대하여 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구하시오.
단서 1 두 점 사이의 거리 공식으로 선분 AB의 길이를 구해.
단서 2 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이는 a^2이지?

1st 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 선분 AB의 길이를 구하자.

두 점 $A(-1, 3)$, $B(4, 1)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(1-3)^2}$

$=\sqrt{29}$

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

이때, 두 점 사이의 거리 공식이 생각나지 않는다면 좌표평면 위에 두 점을 그려 직각삼각형을 만든 후 피타고라스 정리를 이용하여 두 점 사이의 거리를 직접 구할 수 있어.

2nd 정사각형의 넓이를 구하자.

따라서 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$\overline{AB}^2=(\sqrt{29})^2=29$

A 26 정답 ② ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다.

좌표평면 위의 점 $A(a, 3)$에 대하여 $\overline{OA}=4$일 때, a^2의 값은? (단, O는 원점이다.) 단서 두 점 사이의 거리 공식을 적용할 수 있어.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

1st 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 a의 값을 구하자.

좌표평면 위의 두 점 $O(0, 0)$, $A(a, 3)$ 사이의 거리는

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는 $\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

$\overline{OA}=\sqrt{(a-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{a^2+9}$

이때, $\overline{OA}=4$이므로 $\sqrt{a^2+9}=4$에서 $a^2+9=16$

$\therefore a^2=4^2-9=7$ 양변을 제곱해서 근호를 없애.

A 27 정답 29 ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

좌표평면 위의 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 5)$에 대하여 선분 AB의 길이를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오.
단서 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용해.

1st 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하자.

$\overline{AB}=\sqrt{(0-2)^2+(5-0)^2}=\sqrt{29}$

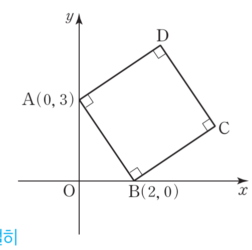
따라서 $l=\sqrt{29}$이므로 두 점 사이의 거리 공식은 두 점을 빗변의 양 끝점으로 하는 직각삼각형에서 피타고라스 정리를 이용하면 떠올릴 수 있어.

$l^2=(\sqrt{29})^2=29$

A 28 정답 29 ······ 두 점 사이의 거리

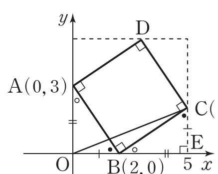
정답 공식: 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$과 도형의 합동을 이용한다.

그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 A$(0, 3)$, B$(2, 0)$을 잇는 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD에 대하여 $\overline{OC}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 C는 제1사분면 위의 점이다.)



단서 $\overline{OC}$의 길이의 제곱을 구하기 위해 적절히 보조선을 그어 피타고라스 정리를 이용할 수 있는지 살펴보자.

1st 삼각형의 닮음을 이용하여 점 C의 좌표를 찾고, $\overline{OC}^2$을 구해.



그림과 같이 점 C에서 x축 위에 내린 수선의 발을 E라 하면

수선의 발을 내리는 이유는 점 C의 좌표를 구하기 위해서야.

$\overline{AB}=\overline{BC}$

$\angle OAB=\angle EBC$

$\angle OBA=\angle ECB$

$\therefore \triangle AOB\equiv\triangle BEC$ (ASA 합동)

따라서 점 C의 좌표는 $(5, 2)$이므로

$\overline{OC}^2=5^2+2^2=29$ $\quad$ $\overline{OE}=\overline{OB}+\overline{BE}=\overline{OB}+\overline{AO}=2+3=5$, $\overline{CE}=\overline{BO}=2$

A 29 정답 ② ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$과 외심의 성질을 이용한다.

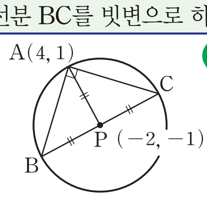
좌표평면 위의 한 점 A$(4, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심은 변 BC 위에 있고 그 좌표가 $(-2, -1)$일 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$의 값은? 단서 외심이 삼각형의 변 위에 있는 삼각형은 직각삼각형뿐이야.

① 155 ② 160 ③ 165 ④ 170 ⑤ 175

1st 직각삼각형의 외심이 빗변 위에 있음을 이용해.

직각삼각형은 외심이 빗변 위에 있어.

삼각형 ABC의 외심이 변 BC 위에 있으므로 선분 BC의 중점이 외심 P이고 삼각형 ABC는 선분 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.



함정 삼각형의 외심의 특징을 잘 이용할 줄 알아야겠지?

따라서 $\overline{PA}=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+\{1-(-1)\}^2}=2\sqrt{10}$이므로

$\overline{BC}=2\overline{PA}=4\sqrt{10}$

직각삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이 성립하므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=(4\sqrt{10})^2=160$ 직각삼각형에서 피타고라스 정리는 자주 이용돼.

A 30 정답 ② ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 이차함수 $y=k(x-a)^2+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (a, b)이다.

단서 2 이차함수와 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 해가 두 점 P, Q의 x좌표임을 알 수 있어.

이차함수 $f(x)=x^2+4x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, k는 상수이다.)

단서 1 직선이 점 P도 지난다는 사실을 기억해.

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$

④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

1st 이차함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하여 직선의 방정식에 대입하면 k의 값을 구할 수 있어.

$f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$이므로

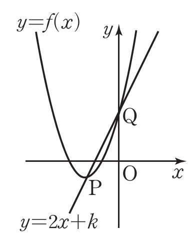
꼭짓점 P의 좌표는 $(-2, -1)$이다.

직선 $y=2x+k$에 점 P$(-2, -1)$의 좌푯값을 대입하면

$-1=2\times(-2)+k$ $\quad$ 점 P는 이차함수의 그래프 위에 있는 동시에 직선 $y=2x+k$ 위의 점이기도 해.

$\therefore k=3$

2nd 이차함수 $f(x)$와 직선의 방정식을 연립하여 점 Q의 좌표를 구하자.



이차함수 $f(x)=x^2+4x+3$과 직선 $y=2x+k$를 연립하면

$x^2+4x+3=2x+3$

$x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

즉, 점 Q의 좌표는 $(0, 3)$이다.

함정 이차방정식 $x(x+2)=0$의 해를 구하면 $x=-2$ 또는 $x=0$이지. 이때, -2는 점 P의 x좌표이므로 점 Q의 x좌표는 0임을 알 수 있어. 따라서 점 Q의 y좌표는 $f(0)=3$이야.

3rd 선분 PQ의 길이를 구하자.

따라서 두 점 P$(-2, -1)$, Q$(0, 3)$을 잇는 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{3-(-1)\}^2}$ $\quad$ 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)를 잇는 선분 AB의 길이는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}$

$=2\sqrt{5}$

이차함수의 그래프와 직선의 교점 개념·공식

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 α, β이다.

$\Rightarrow$ 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근이 α, β이다.

A 31 정답 $15\sqrt{3}$ ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 정삼각형의 성질과 삼각형의 무게중심의 성질을 이용한다.

좌표평면 위의 정삼각형 ABC에서 꼭짓점 A의 좌표는 A$(-3, 2)$이고 무게중심 G의 좌표가 G$(1, 4)$일 때, 정삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

단서 정삼각형의 한 변의 길이가 a일 때, 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이야. 이것으로 정삼각형의 넓이를 구하면 돼.

1st 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 정삼각형의 높이를 구해.

선분 BC의 중점을 D라 하면

$\overline{AG}=\sqrt{(1+3)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$이므로

$\overline{AD}=\frac{3}{2}\overline{AG}=\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ → $\overline{AD}:\overline{AG}=3:2$야.

즉, 정삼각형 ABC의 높이가 $3\sqrt{5}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=3\sqrt{5}$

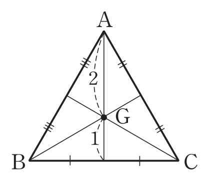
$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{15}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{15})^2=15\sqrt{3}$

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이야.

삼각형의 무게중심 개념・공식

① 정의 : 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만난다. 이 점을 삼각형의 무게중심이라 한다.
② 성질 : 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.
③ $\triangle GAB=\triangle GBC=\triangle GCA=\frac{1}{3}\triangle ABC$

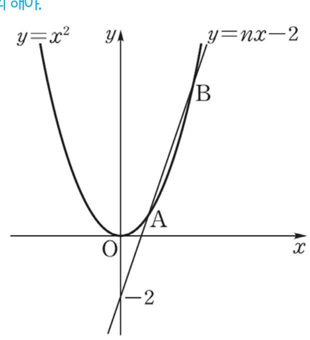


A 32 정답 ④ ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

그림과 같이 3 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=nx-2$가 두 점 A, B에서 만난다. 다음 물음에 답하시오. (단, O는 원점이다.)

단서 1 두 점 A, B의 x좌표는 곡선과 직선의 방정식을 연립한 방정식의 해야.



$n=4$일 때, 선분 AB의 길이는?

단서 2 직선의 방정식은 $y=4x-2$야.

① $\sqrt{17}$ ② $\sqrt{34}$ ③ $2\sqrt{17}$
④ $2\sqrt{34}$ ⑤ $4\sqrt{17}$

1st 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 놓고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하자.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=4x-2$의 두 교점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$A(\alpha, 4\alpha-2)$, $B(\beta, 4\beta-2)$ 두 점 A, B는 직선 $y=4x-2$ 위의 점이야.

이때, α, β는 이차방정식 $x^2=4x-2$, 즉 $x^2-4x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

2nd 선분 AB의 길이를 구하자.

$\overline{AB}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(4\beta-2)-(4\alpha-2)\}^2}$

$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+16(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{17(\beta-\alpha)^2}$

이때, $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=16-8=8$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{17\times8}=2\sqrt{34}$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$의 두 식을 변끼리 빼면 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ $\therefore (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

A 33 정답 ③ ······ 두 점 사이의 거리

정답 공식: 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

단서 $L(X)$의 정의를 잘 파악하여 [보기]의 참, 거짓을 판단해.

행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 성분을 이용하여 좌표평면 위에 두 점 (a, c), (b, d)를 정하고 이 두 점 사이의 거리를 $L(X)$라 하자. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -y_1 & -y_2 \end{pmatrix}$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $L(A)=L(B)$
ㄴ. $L(2A)=2L(A)$
ㄷ. $L(A+B)=L(A)+L(B)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별하자.

ㄱ. $L(A)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리

$L(B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(-y_2+y_1)^2}$
두 점 $(x_1, -y_1)$, $(x_2, -y_2)$ 사이의 거리

$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\therefore L(A)=L(B)$ (참)

2nd 행렬의 실수배를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별하자.

ㄴ. $2A=\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2y_1 & 2y_2 \end{pmatrix}$이므로

$L(2A)=\sqrt{(2x_2-2x_1)^2+(2y_2-2y_1)^2}$

$=\sqrt{4(x_2-x_1)^2+4(y_2-y_1)^2}$

$=2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=2L(A)$ (참)

3rd 행렬 $A+B$를 구한 후 ㄷ의 참, 거짓을 판별하자.

ㄷ. $A+B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -y_1 & -y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

이므로

$L(A+B)=2|x_2-x_1|$ x축 위의 두 점 $(2x_1, 0)$, $(2x_2, 0)$ 사이의 거리이므로 $|2x_2-2x_1|$, 즉 $2|x_2-x_1|$이야.

$\therefore \frac{1}{2}L(A+B)=|x_2-x_1|\le\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}\le\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

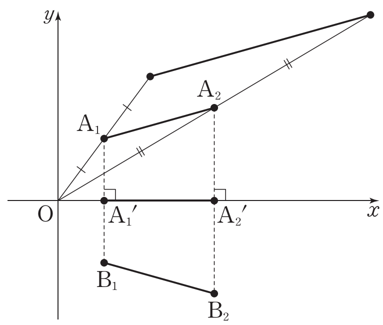
즉, $\frac{1}{2}L(A+B)\le L(A)$, $\frac{1}{2}L(A+B)\le L(B)$이므로

$L(A+B)\le L(A)+L(B)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

톡톡 풀이: 그림으로 나타내어 확인하기

$A_1(x_1,\ y_1)$, $A_2(x_2,\ y_2)$, $B_1(x_1,\ -y_1)$, $B_2(x_2,\ -y_2)$라 하고 좌표평면에 다음 그림과 같이 네 점을 나타내자.



ㄱ. $L(A)=\overline{A_1A_2}$, $L(B)=\overline{B_1B_2}$

그런데 두 선분 $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$는 x축에 대하여 서로 대칭이므로 그 길이가 같아.

$\therefore L(A)=L(B)$ (참)

ㄴ. $L(2A)$는 선분 A_1A_2를 원점을 닮음의 중심으로 하여 2배만큼 확대한 선분의 길이와 같으므로

$L(2A)=2L(A)$ (참)

ㄷ. $A+B=2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$L(A+B)=2|x_2-x_1|$에서 $\frac{1}{2}L(A+B)=|x_2-x_1|$

이때, $\frac{1}{2}L(A+B)=|x_2-x_1|$은 선분 A_1A_2의 양 끝점에서 x축에 각각 내린 두 수선의 발 A_1', A_2'을 양 끝점으로 하는 선분 $A_1'A_2'$의 길이와 같아.

즉, $\overline{A_1'A_2'}\le\overline{A_1A_2}$이므로 $\frac{1}{2}L(A+B)\le L(A)$

같은 방법으로 구하면 $\frac{1}{2}L(A+B)\le L(B)$

$\therefore L(A+B)\le L(A)+L(B)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이야.

A 34 정답 ② ······ 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

〔 정답 공식: 원점 O와 점 $P(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는 $\overline{OP}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$이다. 〕

단서 2 직선 $x=1$ 위의 점과 원점 O 사이의 거리가 선분 OA의 길이와 같은 점은 제1사분면에 1개, 제4사분면에 1개 존재해. 그 중 제1사분면에 있는 점을 구하라는 거야.

좌표평면 위의 원점 O와 두 점 $A(5,\ -5)$, $B(1,\ a)$에 대하여 $\overline{OA}=\overline{OB}$를 만족시킬 때, 양수 a의 값은?

단서 1 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 a에 대한 방정식을 세워.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

1st 두 선분의 길이가 같음을 이용하여 식을 세워.

좌표평면 위의 원점 O와 두 점 $A(5,\ -5)$, $B(1,\ a)$에 대하여

$\overline{OA}=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{50}$, $\overline{OB}=\sqrt{1^2+a^2}=\sqrt{1+a^2}$

이때, $\overline{OA}=\overline{OB}$에서 $\sqrt{50}=\sqrt{1+a^2}$

양변을 제곱하면

$50=1+a^2$, $a^2=49$ → $a^2=49$에서 $a=\pm7$이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}$를 만족시키는 점 B의 좌표는 $(1,\ 7)$ 또는 $(1,\ -7)$이야.

$\therefore a=7\,(\because a>0)$

A 35 정답 ① ······ 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

〔 정답 공식: 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 〕

세 점 $A(-5,\ -7)$, $B(a,\ -2)$, $C(3,\ 1)$에 대하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$를 만족하는 a의 값은?

단서 A, B, C의 좌표가 주어졌으니까 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$를 구하면 돼. 그리고 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이 성립하지.

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

1st 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 방정식을 만들 수 있지?

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로 → $\overline{AB}$, $\overline{BC}$에서는 $\sqrt{\ }$가 나오니까 제곱을 해서 $\sqrt{\ }$를 없애고 푸는 게 낫지.

$(a+5)^2+(-2+7)^2=(3-a)^2+3^2$

$a^2+10a+50=a^2-6a+18$

$16a=-32\quad \therefore a=-2$

A 36 정답 P(1, 0) ······ 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

〔 정답 공식: 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 〕

좌표평면 위의 두 점 $A(-3,\ 3)$, $B(4,\ 4)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하시오.

단서 점 P의 좌표를 $(x,\ 0)$으로 놓고 $\overline{PA}=\overline{PB}$를 구하면 돼.

1st x축 위의 점을 $(x,\ 0)$으로 놓고 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 방정식을 만들자.

점 P가 x축 위의 점이므로 $P(x,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\sqrt{(x+3)^2+9}=\sqrt{(x-4)^2+16}$ x축 위의 모든 점은 y의 좌표가 0이야.

$x^2+6x+18=x^2-8x+32$

$14x=14\quad\therefore x=1$ 양변을 제곱하여 $\sqrt{\ }$를 없앤 거야.

$\therefore P(1,\ 0)$

A 37 정답 ② ······ 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

〔 정답 공식: 두 점 $A(x_1,\ y_1)$과 $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다. 〕

단서 1 점 P는 직선 $y=-x$ 위의 점이므로 $(a,\ -a)$로 표현할 수 있어.

좌표평면 위에 두 점 $A(2,\ 4)$, $B(5,\ 1)$이 있다. 직선 $y=-x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$일 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

단서 2 점과 점 사이의 거리 공식을 이용하여 a를 구해.

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

1st 점 P의 좌표를 구해서 선분 OP의 길이를 구해.

점 P는 직선 $y=-x$ 위의 점이므로 $P(a,\ -a)$라 하자.

$y=f(x)$ 위의 점은 $(a,\ f(a))$로 둘 수 있어.

$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{(a-2)^2+(-a-4)^2}=\sqrt{(a-5)^2+(-a-1)^2}$

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이라고 할 수 있어.

$(a-2)^2+(-a-4)^2=(a-5)^2+(-a-1)^2$

$2a^2+4a+20=2a^2-8a+26$

$12a=6\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \overline{OP}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

1st 각의 이등분선의 성질을 이용하자.

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-2)^2+(6+6)^2}=\sqrt{169}=13$

$\overline{AC}=\sqrt{(6-2)^2+(-3+6)^2}=\sqrt{25}=5$

$\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$에서

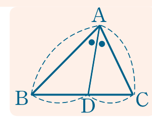
$\overline{BD}:\overline{DC}=13:5$ 각의 이등분선과 중선을 혼동하지 말자.

즉, 점 D는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 내분하는 점이므로

$D\left(\dfrac{13\cdot6+5\cdot(-3)}{13+5}, \dfrac{13\cdot(-3)+5\cdot6}{13+5}\right)$

$\therefore D\left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

[각의 이등분선]
$\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$



주의 자주 등장하는 내용이니 정리해 두자.

A 105 정답 13 ······ 각의 이등분선의 성질

정답 공식: 각의 이등분선의 성질에 의해 $\angle POQ$의 이등분선이 선분 PQ와 만나는 점 M에 대해 $\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{PM}:\overline{QM}$이다.

단서 각의 이등분선의 성질을 이용하라는 거야.

좌표평면 위의 두 점 $P(3, 4)$, $Q(12, 5)$에 대하여 $\angle POQ$의 이등분선과 선분 PQ와의 교점의 x좌표를 $\dfrac{b}{a}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 O는 원점이고, a와 b는 서로소인 자연수이다.)

1st 각의 이등분선의 성질을 이용하자.

두 점 P, Q의 좌표가 각각 $P(3, 4)$, $Q(12, 5)$이므로

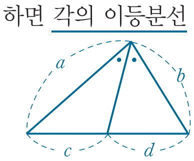
$\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

이때, $\angle POQ$의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 M이라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{PM}:\overline{MQ}=\overline{OP}:\overline{OQ}=5:13$

즉, 점 M은 선분 PQ를 $5:13$으로 내분하는 점이므로 점 M의 x좌표는

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{5\times12+13\times3}{5+13}=\dfrac{99}{18}=\dfrac{11}{2}$ $\quad\therefore a+b=13$



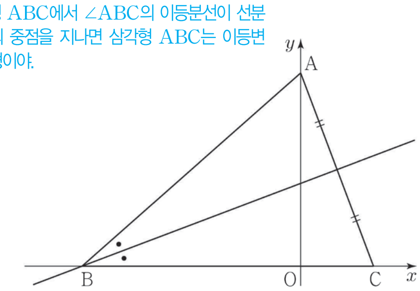
$a:b=c:d$

A 106 정답 ③ ······ 각의 이등분선의 성질

정답 공식: $\angle ABC$의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 D라 하면 $\overline{BA}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{CD}$이다.

그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $A(0, a)$, $B(-3, 0)$, $C(1, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지날 때, 양수 a의 값은?

단서 삼각형 ABC에서 $\angle ABC$의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지나면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이야.



① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

1st 주어진 조건을 만족시키는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 알아보자.

삼각형 ABC에서 $\angle ABC$의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지나므로 삼각형 ABC는 $\overline{BA}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

함정 $\angle ABC$의 이등분선과 만나는 선분 AC의 중점을 T라 놓자.
각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{BA}:\overline{BC}=\overline{AT}:\overline{CT}$
그런데 $\overline{AT}=\overline{CT}$이므로 $\overline{BA}:\overline{BC}=\overline{AT}:\overline{CT}=1:1$ $\quad\therefore \overline{BA}=\overline{BC}$

2nd $\overline{BA}=\overline{BC}$가 되는 양수 a의 값을 구하자.

세 점 $A(0, a)$, $B(-3, 0)$, $C(1, 0)$에서

$\overline{BA}=\sqrt{(-3-0)^2+(0-a)^2}=\sqrt{9+a^2}$ 두 점의 좌표가 (x_1, y_1), (x_2, y_2)일 때, 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(1+3)^2+(0-0)^2}=4$

$\overline{BA}=\overline{BC}$에서 $\sqrt{9+a^2}=4$이고 양변을 제곱하면

$9+a^2=16$, $a^2=7$ $\quad\therefore a=\sqrt{7}$ ($\because a>0$)

서술형 스토리

A 107 정답 $\sqrt{74}$ ······ 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

정답 공식: 점 C가 직선 위의 점임을 이용해 점 C의 좌표를 나타내고, 점 C가 두 점 A, B로부터 거리가 같음을 이용한다.

단서2 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$을 이용하여 $\sqrt{}$를 없애자.

좌표평면 위의 두 점 $A(3, 2)$, $B(-4, 5)$에 대하여 $\overline{AC}=\overline{BC}$를 만족하는 점 C가 직선 $y=x-2$ 위의 점일 때, 원점 O에서 점 C까지의 거리를 구하는 과정을 서술하시오.

단서1 점 C의 좌푯값을 직선의 방정식에 대입해도 등식이 성립해.

1st 직선 위의 점 C의 좌표를 한 문자로 나타내보자.

점 C의 좌표를 $C(a, b)$라 하면 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로 $b=a-2$

직선 위에 있는 점의 좌표를 대입하면 등식이 성립해.

$\therefore C(a, a-2)$ ··· Ⅰ

2nd $\overline{AC}=\overline{BC}$임을 이용하여 점 C의 좌표를 구하자.

$\overline{AC}=\overline{BC} \Rightarrow \overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a-3)^2+(a-2-2)^2=(a+4)^2+(a-2-5)^2$

$a^2-6a+9+a^2-8a+16=a^2+8a+16+a^2-14a+49$

$8a=-40$ $\quad\therefore a=-5$

3rd $\overline{OC}$의 길이를 구하자.

따라서 점 C의 좌표는 $(-5, -7)$이므로 ··· Ⅱ

$\overline{OC}=\sqrt{(-5)^2+(-7)^2}=\sqrt{74}$ ··· Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ 점 C의 좌표를 문자를 사용하여 나타낸다.	40%
Ⅱ 점 C의 좌표를 구한다.	40%
Ⅲ $\overline{OC}$의 길이를 구한다.	20%

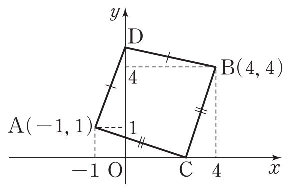
A 108 정답 $\sqrt{34}$ ······ 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

정답 공식: 두 점 C, D의 좌표를 각각 $C(a, 0)$, $D(0, b)$로 놓고 A, B로부터의 거리가 같음을 이용해 각각 좌표를 구한다.

좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 1)$, $B(4, 4)$로부터 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 C, y축 위의 점을 D라고 할 때, $\overline{CD}$의 길이를 구하는 과정을 서술하시오.

단서 점 C의 y좌표가 0, 점 D의 x좌표가 0임을 이용하여 좌표를 정하자.

1st $\overline{CA}=\overline{CB}$임을 이용하여 점 C의 좌표를 구하자.



점 C는 x축 위의 점이니까 y의 좌표가 0이야.

점 C의 좌표를 $C(a,\ 0)$으로 놓으면

$\overline{CA}=\overline{CB}$이므로

$\sqrt{(a+1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(a-4)^2+(0-4)^2}$

$a^2+2a+2=a^2-8a+32$

$10a=30 \qquad \therefore a=3$

$\therefore C(3,\ 0)$ ··· Ⅰ

2nd $\overline{DA}=\overline{DB}$임을 이용하여 점 D의 좌표를 구하자.

점 D는 y축 위의 점이니까 x의 좌표가 0이야.

점 D의 좌표를 $D(0,\ b)$로 놓으면

$\overline{DA}=\overline{DB}$이므로

$\sqrt{(0+1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(0-4)^2+(b-4)^2}$

$b^2-2b+2=b^2-8b+32$

$6b=30$

$\therefore b=5$

$\therefore D(0,\ 5)$ ··· Ⅱ

3rd $\overline{CD}$의 길이를 구하자.

$\therefore \overline{CD}=\sqrt{(0-3)^2+(5-0)^2}=\sqrt{34}$ ··· Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ 점 C의 좌표를 구한다.	40%
Ⅱ 점 D의 좌표를 구한다.	40%
Ⅲ $\overline{CD}$의 길이를 구한다.	20%

A 109 정답 $\frac{14}{3}$ ························ 선분의 내분점

정답 공식: 내분점 공식을 이용해 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 구하고 이 점을 직선에 대입해 m의 값을 구한다.

> 두 점 $A(3,\ 2)$, $B(-3,\ -1)$을 이은 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 E라 하자. 직선 $y=mx-2$가 점 E를 지날 때, 상수 m의 값을 구하는 과정을 서술하시오.
>
> 단서 내분점의 공식을 이용하여 내분점을 구하여 직선의 방정식에 대입하면 돼.

1st $\overline{AB}$를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표를 구하자.

선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 P라 하면

$P\left(\frac{2\cdot(-3)+3\cdot3}{2+3},\ \frac{2\cdot(-1)+3\cdot2}{2+3}\right)=P\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ ··· Ⅰ

2nd 앞에서 구한 점을 직선의 방정식에 대입하자.

직선 $y=mx-2$가 점 $P\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$를 지나므로

점 P의 좌푯값을 직선의 방정식에 대입하자.

$\frac{4}{5}=\frac{3}{5}m-2,\ 3m-10=4$

3rd m의 값을 구하자.

$\therefore m=\frac{14}{3}$ ··· Ⅱ

[채점 기준표]

Ⅰ 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표를 구한다.	50%
Ⅱ 상수 m의 값을 구한다.	50%

A 110 정답 $\frac{22}{5}$ ························ 선분의 내분점

[정답 공식: 점 C는 선분 AB의 내분점이므로, 내분점의 공식을 이용한다.]

> 단서 $\overline{AC}:\overline{BC}$를 구하고, 점 C를 그것에 맞추어 구하자.
>
> 두 점 $A(-4,\ -3)$, $B(1,\ -1)$에 대하여 점 $C(a,\ b)$가 $3\overline{AC}=2\overline{BC}$를 만족할 때, ab의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, 점 C는 두 점 A와 B를 이은 선분 위에 있고, 점 C는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.)

1st $3\overline{AC}=2\overline{BC}$로부터 점 C의 위치를 파악하자.

$3\overline{AC}=2\overline{BC}$이므로 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$이다.

따라서 점 $C(a,\ b)$는 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이다. ··· Ⅰ

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

2nd 점 C의 좌표를 구하자.

$a=\frac{2\cdot1+3\cdot(-4)}{2+3}=-2$

$b=\frac{2\cdot(-1)+3\cdot(-3)}{2+3}=-\frac{11}{5}$ ··· Ⅱ

3rd ab를 구하자.

$\therefore ab=(-2)\cdot\left(-\frac{11}{5}\right)=\frac{22}{5}$ ··· Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ 점 C가 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점임을 안다.	50%
Ⅱ 점 C의 좌표를 값을 각각 구한다.	30%
Ⅲ ab의 값을 구한다.	20%

A 111 정답 $\sqrt{5}$ ··········· 선분의 내분점과 삼각형의 무게중심

정답 공식: 내분점의 공식을 이용해 두 점 P, Q의 좌표를 구한 뒤, 무게중심의 공식을 이용해 G_1, G_2의 좌표를 각각 구해 $\overline{G_1G_2}$의 길이를 구한다.

> 좌표평면 위의 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(-3,\ 5)$, $B(9,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점을 P, 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 두 삼각형 OBP, OQA의 무게중심을 각각 G_1, G_2라 할 때, $\overline{G_1G_2}$의 길이를 구하는 과정을 서술하시오.
>
> 단서 무게중심을 구하기 위해 두 점 P와 Q의 좌표를 먼저 구해야 해.

1st 내분점 공식을 이용하여 점 P, Q의 좌표를 구하자.

점 P는 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

$P\left(\frac{1\cdot9+3\cdot(-3)}{1+3},\ \frac{1\cdot(-1)+3\cdot5}{1+3}\right)=P\left(0,\ \frac{7}{2}\right)$

점 Q는 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$Q\left(\frac{3\cdot9+1\cdot(-3)}{3+1},\ \frac{3\cdot(-1)+1\cdot5}{3+1}\right)=Q\left(6,\ \frac{1}{2}\right)$ ··· Ⅰ

2nd 무게중심 공식을 이용하여 G_1, G_2의 좌표를 구하자.

삼각형 OBP의 무게중심 G_1의 좌표는

$$G_1\left(\frac{0+9+0}{3}, \frac{0+(-1)+\frac{7}{2}}{3}\right)=G_1\left(3, \frac{5}{6}\right)$$

세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

삼각형 OQA의 무게중심 G_2의 좌표는

$$G_2\left(\frac{0+6+(-3)}{3}, \frac{0+\frac{1}{2}+5}{3}\right)=G_2\left(1, \frac{11}{6}\right) \cdots \text{Ⅱ}$$

3rd $\overline{G_1G_2}$의 길이를 구하자.

$$\therefore \overline{G_1G_2}=\sqrt{(3-1)^2+\left(\frac{5}{6}-\frac{11}{6}\right)^2}=\sqrt{5} \cdots \text{Ⅲ}$$

[채점 기준표]

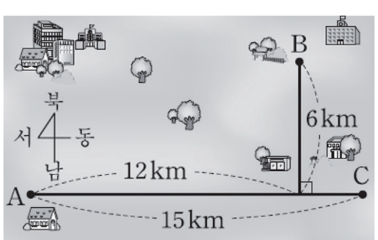
Ⅰ 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.	40%
Ⅱ 무게중심 G_1, G_2의 좌표를 구한다.	40%
Ⅲ $\overline{G_1G_2}$의 길이를 구한다.	20%

1등급 고난도 스토리

A 112 정답 8 ✪2등급 대비 [정답률 35%]

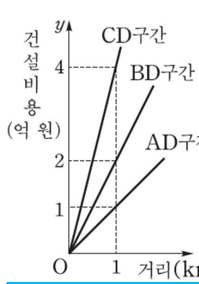
정답 공식: 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

그림과 같이 A, B, C 세 지점이 있다. B는 A로부터 동쪽으로 12 km만큼, 북쪽으로 6 km만큼 떨어진 곳에 있으며, C는 A로부터 동쪽으로 15 km만큼 떨어진 곳에 있다.



단서 1 세 지점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타낸 후 D 지점의 좌표를 (a, b)로 나타내.

어떤 건설회사가 A, B, C 각 지점에서 어느 D 지점까지 도로를 건설하려고 한다. 각 구간별 건설예정인 도로의 건설비용은 아래 그림과 같이 거리에 정비례한다.

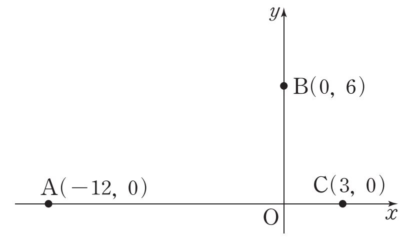


단서 2 AD구간, BD구간, CD구간의 $\frac{(\text{건설비용})}{(\text{거리})}$은 각각 4, 2, 1로 일정해.

A, B, C 각 지점에서 D 지점까지의 각각의 도로 건설비용이 모두 같은 D 지점은 두 곳이다. 이 두 지점 사이의 거리를 x(km)라 할 때, x의 값을 구하시오. (단, 네 지점 A, B, C, D는 동일 평면에 위치하며 모든 도로는 두 지점을 직선으로 연결한 평면상의 도로이다.)

1st 세 지점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내자.

그림과 같이 두 지점 A, C를 지나는 직선을 x축으로 하고, 지점 B를 지나면서 x축에 수직인 직선을 y축이라 하면, 각 지점 A, B, C의 좌표는 $A(-12, 0)$, $B(0, 6)$, $C(3, 0)$이다.



2nd 각 구간별 거리와 건설비용 사이의 관계를 이용하여 점 D의 좌표를 구하자.

AD구간, BD구간, CD구간의 건설비용을 t라 하면 주어진 그래프에서

문제에서 세 구간 각각의 도로 건설비용이 모두 같은 D 지점을 구한다고 했으므로 도로 건설비용을 일정한 문자 t로 둔 거야.

$\frac{t}{\overline{AD}}=1$이므로 $\overline{AD}=t$

$\frac{t}{\overline{BD}}=2$이므로 $\overline{BD}=\frac{1}{2}t$

$\frac{t}{\overline{CD}}=4$이므로 $\overline{CD}=\frac{1}{4}t$

$\therefore \overline{AD}:\overline{BD}:\overline{CD}=t:\frac{1}{2}t:\frac{1}{4}t=4:2:1$

구하는 D 지점의 좌표를 $D(a, b)$라 하자.

(i) $\overline{AD}:\overline{BD}=4:2=2:1$에서 $2\overline{BD}=\overline{AD}$이므로

$4\overline{BD}^2=\overline{AD}^2$

$4\{a^2+(b-6)^2\}=(a+12)^2+b^2$

$\therefore a^2-8a+b^2-16b=0 \cdots ㉠$

(ii) $\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$에서 $2\overline{CD}=\overline{BD}$이므로

$4\overline{CD}^2=\overline{BD}^2$

$4\{(a-3)^2+b^2\}=a^2+(b-6)^2$

$\therefore a^2-8a+b^2+4b=0 \cdots ㉡$

㉡−㉠을 하면

$20b=0 \quad \therefore b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$a^2-8a=0$, $a(a-8)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=8$

따라서 D 지점이 될 수 있는 두 지점의 좌표는 $(0, 0)$, $(8, 0)$이므로 이 두 지점 사이의 거리는 8 km이다.

x축 위의 두 점 $(0, 0)$, $(8, 0)$ 사이의 거리는 $|8-0|=8$

$\therefore x=8$

A 113 정답 3 ✪2등급 대비 [정답률 34%]

정답 공식: $B(x, y)$라 놓고 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$인 점 B의 좌표를 모두 구한다.

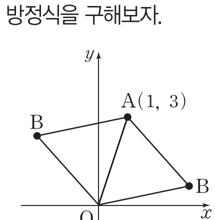
단서 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$인 정삼각형의 변의 길이를 생각하자.

좌표평면 위에 원점 O와 점 $A(1, 3)$을 이은 선분 OA를 한 변으로 하는 정삼각형 OAB를 만들 때, 가능한 모든 점 B의 y좌표의 합을 구하시오.

1st $B(x, y)$로 놓고 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$임을 이용하여 방정식을 구해보자.

삼각형 OAB가 정삼각형이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$



이때, 조건을 만족하는 정삼각형 OAB는 그림과 같이 2개이다.

원점과 점 A의 좌표는 정해진 것이므로 점 B가 그림처럼 정해질 때 정삼각형이 될 수 있어.

함정 한 밑변에 대하여 그릴 수 있는 정삼각형은 2개임을 파악할 수 있어야 해.

점 B의 좌표를 B(x, y)라 하면

$\overline{OA}=\overline{OB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로

$1^2+3^2=x^2+y^2$

$\therefore x^2+y^2=10 \cdots$ ㉠

$\overline{OB}=\overline{AB}$에서 $\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$이므로

$x^2+y^2=(x-1)^2+(y-3)^2$

$x^2+y^2=x^2-2x+1+y^2-6y+9$

$\therefore x=-3y+5 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(-3y+5)^2+y^2=10$

$9y^2-30y+25+y^2=10$

$\therefore 2y^2-6y+3=0 \cdots$ ㉢

따라서 점 B의 y좌표를 y_1, y_2라 하면 y_1, y_2는 ㉢의 해이므로 구하는 모든 y좌표의 합은 근과 계수의 관계에 의해

$y_1+y_2=-\frac{-6}{2}=3$

[이차방정식의 근과 계수의 관계]
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
(1) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ (2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

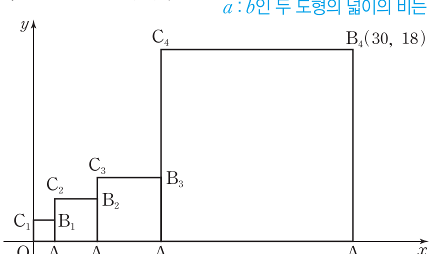
A 114 정답 116

2등급 대비 [정답률 30%]

[정답 공식: 닮음비를 이용해 각 정사각형의 한 변의 길이를 구한다.]

그림과 같이 x축 위의 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4에 대하여 $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$를 각각 한 변으로 하는 정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$, $A_3A_4B_4C_4$가 있다. 점 B_4의 좌표가 $(30, 18)$이고 정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$의 넓이의 비가 $1:4:9$일 때, $\overline{B_1B_3}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

단서 모든 정사각형은 닮은꼴이야. 또, 닮음비가 $a:b$인 두 도형의 넓이의 비는 $a^2:b^2$이야.



1st 닮은 도형에서 넓이의 비가 $a^2:b^2:c^2$이면 닮음비는 $a:b:c$야.

정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$의 넓이의 비가 $1:4:9$이므로 세 정사각형의 닮음비는 $1:2:3$이다.

즉, 양수 a에 대하여 두 도형의 닮음비가 $a:b$이면 넓이의 비는 $a^2:b^2$이고, 부피의 비는 $a^3:b^3$이야.

$\overline{OA_1}=a$, $\overline{A_1A_2}=2a$, $\overline{A_2A_3}=3a$라 하면

$\overline{OA_4}=30$, $\overline{A_3A_4}=\overline{A_4B_4}=18$

즉, $\overline{OA_3}=\overline{OA_4}-\overline{A_3A_4}$에서

$a+2a+3a=30-18$

$6a=12 \qquad \therefore a=2$

함정 넓이의 비를 이용해 길이의 비를 알아내야 해.

2nd 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용해.

따라서 두 점 B_1, B_3의 좌표는 각각 $(2, 2)$, $(12, 6)$이므로

$\overline{B_1B_3}^2=(12-2)^2+(6-2)^2=116$

A 115 정답 ③

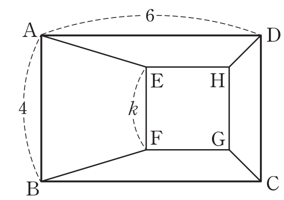
2등급 대비 [정답률 34%]

[정답 공식: 내부의 정사각형의 한 점에서 직사각형의 두 변에 각각 수선의 발을 내려 길이를 각각 a, b라 한 후, 각 대각선의 길이를 a, b, k를 이용해 나타낸다.]

단서 1 직사각형 ABCD를 점 B를 원점으로 하고 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면 위에 나타내 보자.

그림은 가로의 길이, 세로의 길이가 각각 6, 4인 직사각형 ABCD의 내부에 한 변의 길이가 $k\ (0<k<4)$인 정사각형 EFGH를 $\overline{AB}$와 $\overline{EF}$가 평행하도록 그린 것이다. [보기] 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 두 사각형 ABCD와 EFGH는 만나지 않는다.)

단서 2 점 F의 좌표를 (a, b)라 하고 점 E, G, H를 a, b, k로 나타내봐.



[보기]

단서 3 각 꼭짓점들의 좌표를 이용하여 두 점 사이의 거리 공식으로 참, 거짓을 판단해보자.

ㄱ. k의 값에 관계없이 $\overline{AE}^2+\overline{CG}^2=\overline{BF}^2+\overline{DH}^2$을 만족시킨다.

단서 4 좌표들을 이용하여 방정식을 세워봐. 이때, 내부의 정사각형 EFGH가 직사각형 ABCD와 만나지 않으려면 점 F(또는 G)의 y좌표가 3보다 작아야 함에 주의하자.

ㄴ. $k=1$일 때, $\overline{AE}=\overline{DH}=\sqrt{\frac{13}{2}}$이면 $\overline{BF}=\frac{5}{2}$이다.

ㄷ. $k=2$일 때, 두 사다리꼴 ABFE와 CDHG의 넓이의 합은 12이다.

단서 5 사다리꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\{(\text{윗변의 길이})+(\text{아랫변의 길이})\}\times(\text{높이})$야.

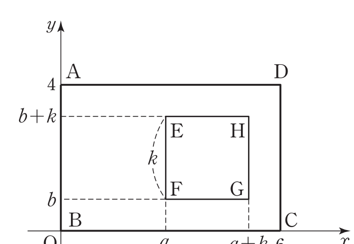
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 주어진 도형을 좌표평면 위에 나타내고 ㄱ의 참, 거짓을 판별하자.

점 B를 원점으로 하고 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$를 각각 x축, y축으로 놓으면 사각형 ABCD의 각 꼭짓점의 좌표는 다음과 같다.

A$(0, 4)$, B$(0, 0)$, C$(6, 0)$, D$(6, 4)$

한편, 점 F의 좌표를 $(a, b)\ (0<a<6,\ 0<b<4)$라 하면 E$(a, b+k)$, G$(a+k, b)$, H$(a+k, b+k)$이다.



ㄱ. $\overline{AE}^2=a^2+(b+k-4)^2$, $\overline{BF}^2=a^2+b^2$,

$\overline{CG}^2=(a+k-6)^2+b^2$, $\overline{DH}^2=(a+k-6)^2+(b+k-4)^2$

에서

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\overline{AE}^2+\overline{CG}^2=a^2+(b+k-4)^2+(a+k-6)^2+b^2$

$=a^2+b^2+(a+k-6)^2+(b+k-4)^2$

$=\overline{BF}^2+\overline{DH}^2$ (참)

2nd $k=1$일 때, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판단하자.

ㄴ. $k=1$일 때, E$(a, b+1)$, H$(a+1, b+1)$이다.

(단, $0<a<5$, $0<b<3$)

두 사각형 ABCD와 EFGH가 만나지 않기 위한 조건이야.

$\overline{AE}^2=\overline{DH}^2=\frac{13}{2}$에서

$a^2+(b-3)^2=(a-5)^2+(b-3)^2=\frac{13}{2}$

이때, $a^2=(a-5)^2$에서

$a=a-5$를 만족시키는 실수 a의 값은 없어.

주의 조건을 만족시키는 a, b의 범위를 잊지 말고 구해두자.

$a=-(a-5) \qquad \therefore a=\dfrac{5}{2}$

또한, $a=\dfrac{5}{2}$를 $a^2+(b-3)^2=\dfrac{13}{2}$에 대입하면

$(b-3)^2=\dfrac{1}{4},\ b-3=\pm\dfrac{1}{2} \qquad \therefore b=\dfrac{5}{2}\ (\because 0<b<3)$

$\therefore \overline{\mathrm{BF}}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (거짓) → $\mathrm{B}(0,\ 0)$과 $\mathrm{F}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$ 사이의 거리야.

3rd 두 사다리꼴의 높이를 각각 h_1, h_2라 하고 ㄷ의 참, 거짓을 판단하자.

ㄷ. 두 사다리꼴 ABFE와 CDHG의 높이를 각각 h_1, h_2라 하면 $k=2$일 때 $\underline{h_1+h_2=6-2=4}$이다.
$h_1+h_2+k=\overline{\mathrm{BC}}=6$이지?

즉, 두 사다리꼴 ABFE와 CDHG의 넓이의 합은

$\dfrac{1}{2}\times(4+2)\times h_1+\dfrac{1}{2}\times(4+2)\times h_2$

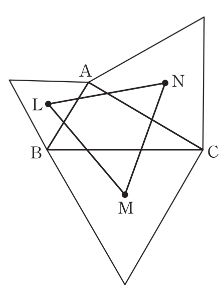
$=3(h_1+h_2)=3\times4=12$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

A 116 정답 $6\sqrt{21}$ ······················ ✪2등급 대비 [정답률 30%]

정답 공식: 세 점 L, M, N 중 두 점의 좌표를 구해 두 점 사이의 거리를 구하고, △LMN이 정삼각형임을 이용해 둘레의 길이를 구한다.

다음은 나폴레옹의 삼각형에 대한 설명이다.

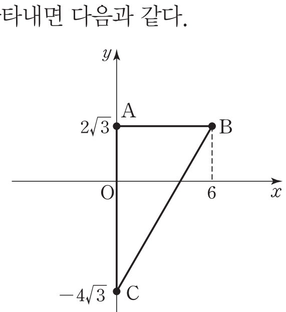


임의의 삼각형 ABC의 외부에 변 AB, BC, CA를 한 변으로 하는 정삼각형을 덧그리고 각 정삼각형의 무게중심을 L, M, N이라 하면 삼각형 LMN은 정삼각형이다. 이때, 삼각형 LMN을 나폴레옹의 삼각형이라 한다. (단, 모든 점은 같은 평면 위에 있다.)

좌표평면 위의 세 점 $(0,\ 2\sqrt{3})$, $(6,\ 2\sqrt{3})$, $(0,\ -4\sqrt{3})$을 연결한 삼각형에서 만들어지는 나폴레옹의 삼각형의 둘레의 길이를 구하시오. **단서** 나폴레옹의 삼각형은 정삼각형이니까 한 변의 길이만 알면 둘레의 길이를 구할 수 있어. 좌표평면 위에 주어진 점들을 나타낸 후 세 변을 각각 한 변으로 하는 정삼각형을 외부에 그려보자.

1st 좌표평면에 세 점을 표시해보자.

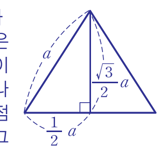
주어진 세 점 $(0,\ 2\sqrt{3})$, $(6,\ 2\sqrt{3})$, $(0,\ -4\sqrt{3})$을 차례로 A, B, C라 하고, 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



2nd 선분 AB를 한 변으로 하고 주어진 삼각형의 외부에 덧그려지는 정삼각형의 무게중심을 찾아보자.

함정 정삼각형의 둘레의 길이는 한 변의 길이만 구하면 돼. 즉, 세 꼭짓점 중 두 꼭짓점의 좌표만 알면 되니까 상대적으로 구하기 쉬운 두 점을 정하고 정삼각형의 성질을 이용해 그 좌표를 구하는 것이 중요해.

선분 AB를 한 변으로 하고 주어진 삼각형의 외부에 덧그려지는 정삼각형의 나머지 한 꼭짓점을 D라 하자. → 한 변의 길이가 a인 정삼각형은 각 변의 수직이등분선 위에 나머지 한 꼭짓점이 위치하고, 그 길이는 그림과 같아.



점 D는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있으므로 점 D의 x좌표는 선분 AB의 중점의 x좌표인 $\dfrac{0+6}{2}=3$이다.

또한, 선분 AB의 길이 6을 한 변의 길이로 하는 정삼각형의 높이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$이므로 점 D의 y좌표는 $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$이다.

$\therefore \mathrm{D}(3,\ 5\sqrt{3})$

따라서 정삼각형 ABD의 무게중심 L의 좌표는 → 세 꼭짓점이 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$인 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

$\mathrm{L}\left(\dfrac{0+6+3}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{3}\right)$에서 $\mathrm{L}(3,\ 3\sqrt{3})$

3rd 선분 AC를 한 변으로 하고 주어진 삼각형의 외부에 덧그려지는 정삼각형의 무게중심을 찾아보자.

선분 AC를 한 변으로 하고 주어진 삼각형의 외부에 덧그려지는 정삼각형의 나머지 한 꼭짓점을 E라 하자.

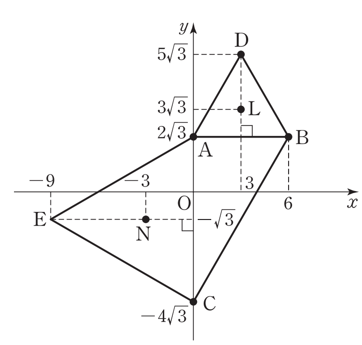
점 E는 선분 AC의 수직이등분선 위에 있으므로 점 E의 y좌표는 선분 AC의 중점의 y좌표인 $\dfrac{2\sqrt{3}+(-4\sqrt{3})}{2}=-\sqrt{3}$이다.

또한, 선분 AC의 길이 $6\sqrt{3}$을 한 변의 길이로 하는 정삼각형의 높이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times6\sqrt{3}=9$이므로 점 E의 x좌표는 -9이다.

$\therefore \mathrm{E}(-9,\ -\sqrt{3})$

따라서 정삼각형 ACE의 무게중심 N의 좌표는

$\mathrm{N}\left(\dfrac{0+0+(-9)}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}+(-4\sqrt{3})+(-\sqrt{3})}{3}\right)$에서 $\mathrm{N}(-3,\ -\sqrt{3})$



4th $\overline{\mathrm{LN}}$의 길이를 한 변으로 하는 정삼각형의 둘레의 길이를 구하자.

$\overline{\mathrm{LN}}=\sqrt{\{3-(-3)\}^2+\{3\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\}^2}$

$=\sqrt{36+48}=2\sqrt{21}$

따라서 구하는 나폴레옹의 삼각형의 둘레의 길이는

$3\times2\sqrt{21}=6\sqrt{21}$

모의 I 13 정답 -7 ······ 유리함수의 합성함수와 역함수

정답 공식: 유리함수 $y=\frac{cx+d}{ax+b}$ $(a\neq0,\ ad-bc\neq0)$의 역함수는 $y=\frac{-bx+d}{ax-c}$임을 이용한다.

함수 $f(x)=\frac{2x+k}{x+1}$에 대하여 $f^{-1}(x)=(f\circ f)(x)$를 만족시키는 상수 k의 값을 구하는 과정을 서술하시오.
단서 $f^{-1}(x)$, $(f\circ f)(x)$를 구해서 각 항의 계수를 비교해 봐.

1st $f^{-1}(x)$를 구해보자.

$y=\frac{2x+k}{x+1}$라 하면

$y(x+1)=2x+k$ → 분수함수의 정의에서 분모 $x+1$은 0이 될 수 없으니까 양변에 똑같이 곱해줄 수 있어.

$(y-2)x=-y+k$

$\therefore x=\frac{-y+k}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{-x+k}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-x+k}{x-2}$ ⋯ Ⅰ

2nd $f(f(x))$를 구해보자.

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$$=\frac{2\left(\frac{2x+k}{x+1}\right)+k}{\frac{2x+k}{x+1}+1}$$

실수 계산이 복잡해서 실수하기 좋은 부분이므로 차근차근 풀어야 해.

$$=\frac{4x+2k+k(x+1)}{2x+k+x+1}$$

$$=\frac{(k+4)x+3k}{3x+k+1}$$ ⋯ Ⅱ

3rd $f^{-1}(x)=(f\circ f(x))$를 만족시키는 상수 k의 값을 구해.

실수 전체의 집합에서 함수 $f^{-1}(x)$와 $(f\circ f)(x)$가 같으려면 두 함수식이 같아야 한다.

$\frac{-x+k}{x-2}=\frac{(k+4)x+3k}{3x+k+1}$

좌변의 분자, 분모에 3을 곱하면 → 우변의 분모에서 x의 계수가 3이니까 좌변의 분모와 비교하기 쉽게 하기 위해서 곱해주는 거야.

$\frac{-3x+3k}{3x-6}=\frac{(k+4)x+3k}{3x+k+1}$

따라서 $k+4=-3$, $k+1=-6$이므로

$k=-7$ ⋯ Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ $f^{-1}(x)$를 구한다.	40%
Ⅱ $(f\circ f)(x)$를 구한다.	40%
Ⅲ k의 값을 구한다.	20%

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$의 그래프 개념·공식

① 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
② 정의역은 $\{x|x\neq p$인 실수$\}$이고, 치역은 $\{y|y\neq q$인 실수$\}$이다.
③ 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.
④ 점근선은 두 직선 $x=p$, $y=q$이다.

J 내신+학평 대비 단원별 모의고사

문제편 p. 320

모의 J 01 정답 ④ ······ 제곱근의 성질

정답 공식: 주어진 조건에서 a의 범위를 구하고, $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & (x\geq0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$을 이용한다.

단서 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$가 될 때의 a, b의 값의 부호를 생각해 봐.

$\sqrt{a-3}\sqrt{1-a}=-\sqrt{(a-3)(1-a)}$를 만족시키는 실수 a에 대하여 $\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a-4)^2}$을 간단히 하면? (단, $a\neq1$, $a\neq3$, $a\neq4$)

① $-2a$ ② $-2a+3$ ③ 2
④ 3 ⑤ $2a-5$

1st $\sqrt{A}\sqrt{B}=-\sqrt{AB}$이면 $A<0$, $B<0$임을 이용하여 a의 값의 범위를 구해.

$\sqrt{a-3}\sqrt{1-a}=-\sqrt{(a-3)(1-a)}$이므로

$a-3<0$이고 $1-a<0$ $\quad\therefore 1<a<3$

2nd $\sqrt{\square^2}=|\square|$임을 이용하여 식을 간단히 하자.

따라서 $a-1>0$, $a-4<0$이므로 → $1<a<3$에서 a가 3보다 작으므로 $a<4$이지?

$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a-4)^2}=a-1-(a-4)=3$

$a>0$이면 $\sqrt{a^2}=a$이고 $a<0$이면 $\sqrt{a^2}=-a$

음수의 제곱근의 성질 개념·공식

a, b가 실수일 때

① $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ ② $a>0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

모의 J 02 정답 ④ ······ 분모의 유리화

정답 공식: $\frac{1}{f(x)}$를 분모의 유리화를 통해 정리하고, 규칙성을 이용해 식의 값을 계산한다.

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$일 때, 단서 $\frac{1}{f(x)}$을 구해서 분모를 유리화해 봐.

$\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\cdots+\frac{1}{f(50)}$의 값은?

① $6\sqrt{2}$ ② $7-\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{2}-1$ ⑤ -7

1st $\frac{1}{f(x)}$의 분모를 유리화 해.

$f(x)$의 역수를 구하면 → 주어진 식이 $\frac{1}{f(x)}$의 꼴이니까 $\frac{1}{f(x)}$을 먼저 구하고 수를 차례대로 대입해 가는 게 좋아.

$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

2nd 식의 값을 구하자.

$\frac{1}{f(x)}=-\sqrt{x-1}+\sqrt{x}$에 $x=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 50$을 대입하여 더하면

$\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\cdots+\frac{1}{f(49)}+\frac{1}{f(50)}$

$=(-\sqrt{1}+\cancel{\sqrt{2}})+(-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(-\cancel{\sqrt{48}}+\cancel{\sqrt{49}})+(-\cancel{\sqrt{49}}+\sqrt{50})$

$=-1+\sqrt{50}=5\sqrt{2}-1$

실수 맨 앞의 항이 남았으니까 맨 뒤의 항이 남는 거야.

모의

J 03 정답 ② ······ 무리식의 값

정답 공식: x, y를 포함한 식을 먼저 분모의 유리화를 통해 간단히 하고, x, y를 대입해 식의 값을 계산한다.

$x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$일 때, $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$의 값은?

① $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}-1$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$

단서 x, y의 값이 간단치 않으니까 주어진 식의 분모를 유리화해서 간단히 나타낸 뒤 x, y의 값을 대입해.

1st 주어진 식의 분모를 유리화 해.

주어진 식의 분모를 유리화해서 간단히 하면

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$$

2nd x, y의 숫자를 주어진 식에 대입하자.

$xy=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$이므로

주어진 식에 바로 대입하기보다 이렇게 미리 구해서 대입하는 것이 편리해.

$$(\text{주어진 식})=\frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)-2\times1}{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}$$
$$=\sqrt{2}-1$$

모의

J 04 정답 ① ······ 무리수의 정수 부분과 소수 부분

정답 공식: 무리수의 소수 부분 b는 $0\le b<1$임을 이용해 a, b의 값을 구하고 식에 대입해 계산한다.

단서 먼저 분모의 유리화를 통해 구하는 무리수를 간단히 한 후 이 무리수의 값의 범위를 찾아.

$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $(a-3)^2-(b+3)^2$의 값은?

① 1 ② 4 ③ 7

④ 10 ⑤ 13

1st 주어진 수의 분모를 유리화한 후, 정수 부분과 소수 부분을 구하자.

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$$

실수 $3^2<15<4^2$이니까 $3<\sqrt{15}<4$가 되는 거야.

이때, $3<\sqrt{15}<4$에서 $7<4+\sqrt{15}<8$이므로

$4+\sqrt{15}$의 정수 부분은 7, 소수 부분은 $\sqrt{15}-3$

$(4+\sqrt{15})-7=\sqrt{15}-3$

2nd 식의 값을 구해.

따라서 $a=7$, $b=\sqrt{15}-3$이므로

$$(a-3)^2-(b+3)^2=(7-3)^2-(\sqrt{15}-3+3)^2$$
$$=16-15=1$$

무리수의 정수 부분과 소수 부분 개념·공식

무리수 A를 $A=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha\le1$)로 나타낼 때,

① (A의 정수 부분)$=n$

② (A의 소수 부분)$=A-n=\alpha$

모의

J 05 정답 ③ ······ 무리함수의 평행이동

정답 공식: 함수 $y=\sqrt{x}$를 평행이동한 식과 함수 $y=\sqrt{x+2}+9$를 비교하여 a, b의 값을 구한다.

단서 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입하자.

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 무리함수 $y=\sqrt{x+2}+9$의 그래프와 일치하였다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

1st 평행이동한 함수의 식을 구해 봐.

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 함수의 식은

함수 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 함수의 식은 $f(x-a, y-b)=0$

$y=\sqrt{x-a}+b$

무리함수 $y=\sqrt{x+2}+9$의 그래프와 일치하므로

$a=-2$, $b=9$

$\therefore a+b=7$

모의

J 06 정답 ④ ······ 무리함수

정답 공식: 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축으로 c만큼 평행이동한 그래프임을 이용한다.

[보기]의 함수 중 그 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐지는 것만을 있는 대로 고른 것은?

단서 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 겹쳐지는 함수는 평행이동 또는 대칭이동을 했을 때 근호 안의 x의 계수의 절댓값이 a의 절댓값과 같아야 해.

[보기]

ㄱ. $y=-\sqrt{x}$ ㄴ. $y=\sqrt{-3x}$

ㄷ. $y=-\sqrt{2-x}$ ㄹ. $y=\dfrac{1}{3}\sqrt{9x-1}+2$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

1st $y=\sqrt{-x}$를 평행이동 또는 대칭이동 하여 [보기]의 함수들을 이 나올 수 있는지 체크해보자.

ㄱ. $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{2-x}=-\sqrt{-(x-2)}$

$-\sqrt{2-x}$를 $-\sqrt{-(x-2)}$의 꼴로 변형시키면 x축의 방향으로 얼마만큼 평행이동했는지 쉽게 알게 돼.

따라서 $y=-\sqrt{2-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄹ. $y=\dfrac{1}{3}\sqrt{9x-1}+2=\sqrt{\dfrac{1}{9}(9x-1)}+2=\sqrt{x-\dfrac{1}{9}}+2$

$\dfrac{1}{3}=\sqrt{\dfrac{1}{9}}$

함정 x의 계수가 9인 것만 보고 아니라고 생각하면 안 돼. 근호 밖의 $\dfrac{1}{9}$을 근호 안으로 넣은 후의 x의 계수를 봐야하는 거야.

따라서 $y=\dfrac{1}{3}\sqrt{9x-1}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{9}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.