

새수능 과목 고2 대수,
개념과 유형을 촘촘히 연계해서 공부하면
수학이 쉬워집니다.

고등학교 수학은 개념이 어렵다고
공식만 암기하면서 공부하면 성적이 오르지 않습니다.
개념을 정확히 이해하고 각 개념의 필수 공식과 문제 유형들을
단계별 문제를 통해서 익혀야 합니다.

자이스토리는 새 교육과정에 맞게
최신 학교시험과 학력평가 문제를 철저히 분석해
촘촘하게 유형을 분류하고 개념을 알맞게 적용시키는
세분화된 문제 유형 훈련으로
수학 기본 실력이 탄탄하게 다져집니다.
그래서 하루가 다르게 수학 성적이 향상됨을 느낄 수 있습니다.

또한, 자이스토리의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설,
다른 풀이, 톡톡 풀이, 쉬운 풀이 등은 수학 공부에
흥미와 성취감을 북돋아 줄 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

- 대한민국 No.1 수능 문제집 **자이스토리** -



학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [40일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헛갈리는 문제 번호 적기	날짜		복습 날짜	
1	A 01~84		월	일	월	일
2	85~137		월	일	월	일
3	138~152		월	일	월	일
4	B 01~76		월	일	월	일
5	77~119		월	일	월	일
6	120~159		월	일	월	일
7	160~173		월	일	월	일
8	C 01~67		월	일	월	일
9	68~117		월	일	월	일
10	118~166		월	일	월	일
11	167~215		월	일	월	일
12	216~238		월	일	월	일
13	D 01~68		월	일	월	일
14	69~117		월	일	월	일
15	118~161		월	일	월	일
16	162~193		월	일	월	일
17	194~207		월	일	월	일
18	E 01~73		월	일	월	일
19	74~119		월	일	월	일
20	F 01~74		월	일	월	일
21	75~121		월	일	월	일
22	122~157		월	일	월	일
23	158~178		월	일	월	일
24	G 01~51		월	일	월	일
25	52~104		월	일	월	일
26	105~143		월	일	월	일
27	H 01~62		월	일	월	일
28	63~107		월	일	월	일
29	108~153		월	일	월	일
30	154~170		월	일	월	일
31	I 01~63		월	일	월	일
32	64~109		월	일	월	일
33	110~161		월	일	월	일
34	162~182		월	일	월	일
35	J 01~55		월	일	월	일
36	56~77		월	일	월	일
37	78~94		월	일	월	일
38	모의 A, B, C, D		월	일	월	일
39	모의 E, F, G		월	일	월	일
40	모의 H, I, J		월	일	월	일



- 나는 _____ 대학교 _____ 학과 _____ 학년이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)



집필진 · 감수진 선생님들



자이스토리는 내신 + 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록 수능, 모의평가, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로 수록하였습니다. 그리고 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서 명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

권순원	서울 PGA오목관	박숙녀	아산 충남삼성고등학교	이창희	서울 다원교육 고등부	조승원	수원 경기과학고등학교
김덕환	대전 대성여자고등학교	배수나	서울 가인아카데미	위경아	서울 강남대성기숙의대관	지강현	안양 신성고등학교
김대식	하남 하남고등학교	신건률	대치 다원교육	장광결	김포 김포외국어고등학교	홍지우	안양 부흥고등학교
김착한	서울 성북미래탐구	신명선	안양 신성고등학교	장경호	가평 청평중학교	홍지연	부산대 수학 박사과정
민경도	서울 강남 종로학원	신현준	안양 신성고등학교	장철희	서울 보성고등학교	수경 수학 콘텐츠 연구소	
박소희	안양 안양외국어고등학교	이종석	일등급 수학 저자	전경준	서울 풍문고등학교		

[다른 풀이 집필]

김연주	목동샘울림수학	사공 원	의정부 호연지기	장영환	제주 제로링수학교실
김호원	성남 원수학학원	유대호	평촌 플랜지에듀	정광조	서울 로드맵수학
박소영	분당 수이학원	이강수	반포 뉴파인		

[특별 감수진]

강현아	서울 (대치)매쓰테라피	양해영	서울 청출어람학원	정다원	광주 광주인성고등학교
김연지	세종 소담고등학교	윤영찬	성남 (분당)파인만수지특별관	정영	나주 봉황고등학교
김윤기	가평 가평고등학교	이동훈	서울 (대치)프레임수학(부천)최강수학	최선락	서울 중계수학의중심학원
박성중	서울 대치에스학원	이재규	파주 온정고등학교	최항석	서울 (목동)PGA전문가집단학원
박수재	창원 창원성민여자고등학교	이준호	서울 (목동)시대인재	황병규	고양 백신고등학교
박승용	문경 점촌고등학교	이한샘	광명 진성고등학교		
박우혁	광주 종로학원/원픽학원	장성훈	서울 미독수학		

[감수진]

고유정	광주 연제렉스학원	박종구	청주 코사인수학학원	이영환	부산 마린KI수학학원
곽재혁	파주 유튜브수학학원	박주은	광주 프리마수학학원	이원영	고양 (후곡)FM수학전문학원
권중우	서울 (송파)구주이배학원	방기훈	청주 엠솔루션수학학원	이유환	부산 이유헌수학학원
길정균	화성 에듀셀파수학학원	방효건	성남 시너지수학학원	이정훈	포항 일품수학학원
김기덕	서울 메가매쓰학원	백신영	서울 (목동)수학을말하다	이종호	서울 매쓰원수학학원
김기정	시흥 (배곧)엠스카이수학학원	백은진	순천 백강수학학원	이현웅	서울 (목동)웅수학학원
김남경	원주 수석학원	백현우	부산 센텀미래탐구	이효상	부산 미래EMS학원
김대중	과천 풀인매쓰학원	변지혜	인천 하이에듀학원	임동호	화성 정현고등학교
김도연	구미 그릿수학학원	서영표	대구 용산김샘학원	임희택	성남 (위례)생각의빛수학학원
김동민	서울 호크마수학학원	서정규	천안 아너스수학학원	전 일	성남 생각하는수학공간학원
김동윤	광주 티오티(TOT)수학학원	서정화	광주 제이큐수학학원	전진형	원주 한샘학원
김민정	창원 하나학원	성원모	구미 비전수학학원	정내균	부산 이젠수학학원
김병규	남양주 생각루트수학학원	성태훈	안양 (평촌)헤일로수학	정유철	포항 동지고등학교
김병제	인천 에어매쓰학원	송다빈	양산 영호교육	정재환	부산 4프로에듀수학학원
김상준	수원 엠코드수학학원	송헌해	광주 변곡수학학원	정재훈	구미 구미제일고등학교
김상호	전주 휴민고등학교	신동우	대구 학문당민음수학	조민우	인천 (남동)프리미에카학원
김선호	아산 VVS입시학원(탕정의대관)	신재민	화성 (동탄)신강수학메가스터디	조성근	김포 거미수학
김영표	포항 포스매쓰학원	심재민	용인 (수지)설연고학원	진윤지	광주 더매쓰학원
김예찬	울산 학촌학원	안경진	수원 MEster입시학원	차무근	용인 차원이다름수학학원
김유현	안양 (평촌)청솔학원	안한정	안산 디배움수학	최명옥	서울 꿈이론수학전문학원
김윤경	구리 국빈수학학원	오인성	서울 (강동)구주이배수학학원	하태웅	제주 Shin신제주캠퍼스학원
김은교	대전 제타수학전문학원	유선형	서울 (강동)전병훈수학학원	현영하	부산 서울대인학원
김인하	김포 통진고등학교	유술기	강릉 PF math수학학원	황영우	서울 명성학원
김태현	서울 SMC수학학원프라임2관	유용관	창원 인테크알수학학원	황해숙	창원 합포고등학교
노치훈	창원 매스플랜수학상남학원	유장상	인천 정탑학원		
류세정	대전 피톤치드수학학원	유창선	전주 정정일대입전문학원		
박경중	서귀포 남주고등학교	유태성	대구 (수성)학문당입시학원		
박경호	부산 MATHCLASS	윤영민	서울 에벤에셀아카데미		
박기태	부산 프리미엄수학학원	윤찬근	수원 (영통)엠코드학원		
박병신	창원 매스플랜수학학원(상남점)	윤혜진	대전 오르고수학학원		
박선영	고양 (화정)매쓰클루수학학원	이광락	의정부 마스터플랜수학전문학원		
박선일	대구 선배수학학원	이기용	서울 펜타곤학원		
박수민	창원 마산고등학교	이만희	제주 재동학원		
박장호	대구 대구해화여자고등학교	이성욱	대구 오르라수학전문학원		
박제성	청주 박제성수학(PJS Math)		하남 최상위탑수학학원		

[My Top Secret 집필]

곽지훈	서울대 수학교육과
김진형	서울대 약학과
문지원	서울대 의예과
석민준	서울대 첨단융합학과
장현준	서강대 수학과
정서린	서울대 약학과
정호재	서울대 경제학부
조선하	서울대 자유전공학부
황대윤	서울대 수리과학부

개념&문제 풀이
강의 선생님
유튜브 채널



‘셀프수학’

차례 [총 156개 유형 분류]



I 지수함수와 로그함수

A 지수 - 12개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제	10
수능 유형별 기출 문제	12
내신 유형별 서술형 문제	28
1등급 마스터 문제	30
동아리 소개 / 서울대 방그사	32

B 로그 - 16개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제	34
수능 유형별 기출 문제	36
내신 유형별 서술형 문제	58
1등급 마스터 문제	60

C 지수함수와 로그함수 - 23개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제	62
수능 유형별 기출 문제	66
내신 유형별 서술형 문제	102
1등급 마스터 문제	104
동아리 소개 / 포항공대 CHEERO	108

D 지수함수와 로그함수의 활용 - 19개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제	110
수능 유형별 기출 문제	114
내신 유형별 서술형 문제	142
1등급 마스터 문제	144

II 삼각함수

E 삼각함수 - 10개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제	146
수능 유형별 기출 문제	149
내신 유형별 서술형 문제	160
1등급 마스터 문제	162

F 삼각함수 - 17개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제	164
수능 유형별 기출 문제	167
내신 유형별 서술형 문제	190
1등급 마스터 문제	192

G 삼각함수의 활용 - 12개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제	196
수능 유형별 기출 문제	198
내신 유형별 서술형 문제	224
1등급 마스터 문제	226

Ⅲ 수열

H 등차수열과 등비수열 - 23개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제	232
수능 유형별 기출 문제	234
내신 유형별 서술형 문제	256
1등급 마스터 문제	258
동아리 소개 / 연세대 연세문학회	260

I 수열의 합 - 16개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제	262
수능 유형별 기출 문제	264
내신 유형별 서술형 문제	290
1등급 마스터 문제	292

J 수학적 귀납법 - 8개 유형 분류

핵심 개념 정리 / 개념 확인 문제	296
수능 유형별 기출 문제	298
내신 유형별 서술형 문제	314
1등급 마스터 문제	316



내신+수능 대비 단원별 모의고사

A 지수 (10문항)	320
B 로그 (10문항)	322
C 지수함수와 로그함수 (10문항)	324
D 지수함수와 로그함수의 활용 (11문항)	326
E 삼각함수 (11문항)	328
F 삼각함수의 그래프 (11문항)	330
G 삼각함수의 활용 (10문항)	332
H 등차수열과 등비수열 (13문항)	334
I 수열의 합 (10문항)	336
J 수학적 귀납법 (8문항)	338
동아리 소개 / 서울대 Caffe 人	340

빠른 정답 찾기 341

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

‘셀프수학’





새수능 유형 문제 + 서술형 문제 훈련으로 내신 + 수능 1등급 완성

1 새교육과정 핵심 개념 정리 - 쉽게 이해되는 개념과 공식

고2 수학의 각 단원에서 가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념을 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 강의하였습니다.

- **중요도** 🌟🌟🌟: 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- **+개념보충, 한걸음 더, 왜 그럴까?**: 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- **출제**: 2028 대비 예시 문제와 2026 대비 평가원 출제 경향 분석

개념 강의

중요도 🌟🌟🌟

1 거듭제곱과 거듭제곱근 - 유형 01

(1) 거듭제곱: 임의의 실수 a 와 자연수 n 에 대하여

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$$

와 같이 a 를 n 번 곱한 것을 a 의 n 제곱이라 한다.
 또, a 의 제곱, 세제곱, 네제곱, ...을 통틀어 a 의 **거듭제곱**이라 하고,
 a^n 에서 a 를 거듭제곱의 **밑**, n 을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

(2) 거듭제곱근: 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 실수 a 가 되는 방정식 $x^n = a$ 를 만족시키는 x 을 a 의 n 제곱근이라 한다.
 이때, a 의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, ...을 통틀어 a 의 **거듭제곱근**

(3) 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

(가) n 이 짝수일 때

① (" $\sqrt[n]{a}$ ")와 " $\sqrt[n]{a}$ "의 차이

n 이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a$
n 이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$ ($a > 0$)	$\sqrt[n]{a^n} = a $ ($a > 0$)

② n 이 짝수일 때

2 개념 확인 문제 - 개념에 대한 이해도 확인 문제

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지 확인할 수 있는 개념 이해 필수 문제를 수록하였습니다.

1 거듭제곱과 거듭제곱근

[A01~02] 다음 거듭제곱근을 구하시오.

A01 -1의 세제곱근

A02 16의 네제곱근

[A03~04] 다음 거듭제곱근 중 실수인 것을 구하시오.

3 지수의 확장

[A17~20] 다음 값을 구하시오.

A17 $(-3)^8$

A18 5^{-2}

A19 $(\frac{1}{2})^{-5}$

A20 $(\frac{4}{3})^{-3}$

[A21~23] 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0$)

3 내신 유형별 서술형 문제 - 단계별 문제 해결 방법 제시

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계별 풀이 과정을 훈련해서 서술형 문제에 대한 자신감을 키울 수 있게 구성하였습니다.

문제에서 단서를 찾고 풀이 방법을 생각해 냅니다

A138 ☆☆☆ 유형 01

2 이상 30 이하인 자연수 n 에 대하여 $n-9$ 의 n 제곱근 중 양의 실수가 존재하고, $n-20$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n 의 개수를 구하고 그 과정을

A140 ☆☆☆ 동식

$$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-1}-2^{-1}+2^{-1}-2^{-1}}{2^1+2^1+2^1+2^1+2^1} \right)^{-3} \times (\sqrt[3]{4})^2$$

● **1st, 2nd, 3rd**: 풀이의 시작과 끝을 막힘없이 따라갈 수 있게 도와주는 단계별 접근을 제시하였습니다.

4 새수능 유형별 기출 문제 - 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 출제 유형을 촘촘하게 세분화하여 유형순, 개념순, 난이도순으로 문항을 배열하였습니다.

- **tip**: 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR 코드**: 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.

[2점, 3점, 쉬운 4점] Pass 쉬운 유형별 패스 하세요

1 거듭제곱과 거듭제곱근

유형 01 거듭제곱근의 정의

(1) 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 실수 a 가 되는 수 x 를 a 의 n 제곱근이라 한다.

(2) 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

tip

a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는

(1) n 이 짝수일 때에는 a 의 부호에 따라 0개, 1개, 2개가 될 수 있다.

A36 ☆☆☆ 2020실시 11월 학평 11

양수 k 의 세제곱근 중 실수인 것을 a 라 할 때, a^9 제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[3]{4}$ 이다. k 의 값은? (3점)

① 16 ② 32 ③ 64
 ④ 128 ⑤ 256

- **유형 분류**: 빈칸 - 시험에서 자주 출제되는 유형
- 고난도 - 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- **대표**: 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.

- **난이도**: 기본 문제 중급 문제
- 중상급 문제
- **Pass**: 중복되는 간단한 계산 문제로 패스해도 되는 문제입니다.

- **출처표시**: 수능, 평가원 - 대비연도, 학력평가 - 실시연도
- **2025대비 수능(출) 1(고3)**: 2024년 11월에 실시한 수능
- **2026대비 6월 모평 2(고3)**: 2025년 6월에 실시한 평가원
- **2025실시 7월 학평 3(고3)**: 2025년 7월에 실시한 학력평가
- **표시 없는 문제**: 기출 변형 문제

5 내신+수능 대비 단원별 모의고사 - 최종 실력 점검

중단원별 학교시험 필수 문제와 수능형 문항, 서술형 문항을 수록하여 학교시험을 더욱 충실히 대비할 수 있습니다.

A 지수

모의 A01 ☆☆☆

-216의 세제곱근 중 실수인 것을 a , $\frac{1}{81}$ 의 네제곱근 중 실수인 것을 b 라 할 때, a 의 최댓값을 구하시오. (3점)

모의 A04 ☆☆☆ 2013대비(나) 수능 28

$2 \leq n \leq 100$ 인 자연수 n 에 대하여 $(\sqrt[3]{n})^2$ 이 어떤 자연수 n 의 제곱근이 되도록 하는 n 의 개수를 구하

개념 하나하나에 대한 맞춤 확인 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초실력을 쌓도록 구성하였습니다.

② 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문제 [156유형, 문제 1219제]

- 최신 6개년 고2 학력평가 전문항 수록+2019~2005 고2 학력평가 문제 선별 수록 [640제]
- 고2 난이도에 맞는 고3 수능+평가원+학력평가 문제 선별 수록 [570제]
- 고2 난이도에 맞는 고1 학력평가 문제 선별 수록 [9제]

③ 학교시험+수능 대비를 위한 수능 기출 변형 문제 [116제]

수능에 적합한 개념과 공식을 이해하고 활용할 수 있도록 수능 기출 문제를 변형하여 추가 수록하였습니다.

4 서술형 단계별 훈련 - 내신 기출 변형 서술형 문제 [100제]

각 단위 중 서술형 출제 방식에 적합하고 출제 비율이 높은 내신 기출 변형 문제를 새롭게 구성하였습니다.

5 내신+수능 단원별 모의고사 [기출 문제+수능 기출 변형 문제 104제]

각 단원에 출제 빈도가 높은 문제를 최신 출제 경향에 따라 구성하였습니다.

[고2 대수 문항 구성표]

	고1, 2(실시 연도)				고3(실시 연도) - 고2 난이도 수준							
연도	3월 학평	6월 학평	9월 학평	10, 11월 학평	3월 학평	4,5월 학평	6월 모평	7월 학평	9월 모평	10월 학평	수능	합계
2025	0	30	26	0	0	0	10	0	7	0	0	73
2024	0	30	26	21	0	0	9	0	11	0	9	106
2023	0	29	25	16	0	0	8	0	9	0	10	97
2022	0	30	27	19	0	0	0	0	0	0	0	76
2021	0	24	22	19	6	4	6	5	2	1	3	92
2020	0	23	23	18	5	6	5	2	5	6	3	96
2019	0	41	26	29	10	4	4	3	4	0	1	122
2018	2	3	12	9	11	8	6	7	3	0	4	65
2018 이전	30	33	17	10	68	50	64	41	58	29	63	463
2028, 2022, 2014 , 2005 대비 예비 평가 문항 수												29
수능 기출 변형 문항 수 (156개 유형 수능 기출 변형 문제)												116
개념 확인 문항 수												325
서술형 문항 수												100
총 문항 수												1760



지수

★ 유형 차례

유형 01 거듭제곱근의 정의



유형 02 거듭제곱근의 성질

유형 03 지수법칙 - 밑이 같은 계산



유형 04 지수법칙 - 밑이 다른 계산 (곱셈)

유형 05 지수법칙 - 밑이 다른 계산 (덧셈)

유형 06 거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건

유형 07 지수법칙의 활용 - 문자로 표현하기

유형 08 지수법칙의 활용 - 식 변형

유형 09 지수법칙의 활용 - $a^x + a^{-x}$ 꼴

유형 10 지수법칙의 활용 - $\frac{a^{kx} \pm a^{-kx}}{a^x + a^{-x}}$ 꼴

유형 11 지수법칙의 활용 **고난도**

유형 12 지수법칙의 실생활 응용



★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2028	예시	유형 03 지수법칙 - 밑이 같은 계산	***
	수능		
2026	9월	유형 03 지수법칙 - 밑이 같은 계산	***
	6월	유형 03 지수법칙 - 밑이 같은 계산	***
	수능	유형 03 지수법칙 - 밑이 같은 계산	***
2025	9월	유형 03 지수법칙 - 밑이 같은 계산	***
	6월	유형 03 지수법칙 - 밑이 같은 계산	***
	수능	유형 04 지수법칙 - 밑이 다른 계산 (곱셈)	***
2024	9월	유형 03 지수법칙 - 밑이 같은 계산	***
	6월	유형 04 지수법칙 - 밑이 다른 계산 (곱셈)	***

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 최근 거듭제곱근의 성질을 이용하여 거듭제곱근이 자연수가 되도록 하는 자연수를 구하는 유형의 문제의 출제 빈도가 높아지고 있다. 기본적인 거듭제곱근에 대한 성질을 정확히 알고 있으면 풀리는 문제들이다. 그리고 거듭제곱근으로 나오는 실근의 개수에 대한 문제도 종종 나오고 있으므로 거듭제곱근의 해에 대한 지식이 필요하다.
- 지수법칙을 이용하는 간단한 계산문제는 지수의 여러 가지 성질과 함께 출제될 가능성이 높다. 쉬운 문제이지만 계산 실수에 주의하여야 하고 지수법칙을 정확히 알고 있어야 한다.
- 지수를 포함한 등식의 활용 문제는 곱셈 공식, 인수분해, 유리식이나 비례식 등을 활용하여 변형하는 연습이 충분히 되어야 한다. 고1 수학에서 배웠던 내용도 한 번 더 정리하자.
- 지수를 사용하여 정의된 식이 주어지는 실생활 문제의 출제 비율이 높으므로 문제의 문자가 의미하는 것을 바르게 파악하여 주어진 식에 정확히 대입하도록 충분한 연습이 필요하다.



A 지수

개념 강의



중요도 ★★★★★

1 거듭제곱과 거듭제곱근 ¹ — 유형 01

(1) 거듭제곱: 임의의 실수 a 와 자연수 n 에 대하여

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{개}}$$

$2^3 \leftarrow$ 지수
 $\uparrow$
밑

와 같이 a 를 n 번 곱한 것을 a 의 n 제곱이라 한다.

또, a 의 제곱, 세제곱, 네제곱, ...을 통틀어 a 의 거듭제곱이라 하고,

a^n 에서 a 를 거듭제곱의 밑, n 을 거듭제곱의 지수라 한다.

(2) 거듭제곱근: 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 실수 a 가 되는 수, 즉 방정식 $x^n = a$ 를 만족시키는 x 를 a 의 n 제곱근이라 한다.

이때, a 의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, ...을 통틀어 a 의 거듭제곱근이라 한다.

(3) 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다. ²

① n 이 짝수일 때

$a > 0$ 이면 양수 $\sqrt[n]{a}$ 와 음수 $-\sqrt[n]{a}$ 의 2개가 있고,

그 절댓값은 같다.

$a = 0$ 이면 $\sqrt[n]{0}$, 즉 0뿐이다.

$a < 0$ 이면 없다.

② n 이 홀수일 때

a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ 오직 하나뿐이다.

$n \backslash a$	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 홀수일 때	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n 이 짝수일 때	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

2 거듭제곱근의 성질 ³ — 유형 02

$a > 0$, $b > 0$ 이고 m, n 이 양의 정수일 때

- ① $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ⑤ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p 는 자연수)

3 지수의 확장 ⁴ — 유형 03~12

출제

2028대비 예시 1번, 2026대비 9월 모평 1번
2026대비 6월 모평 1번

(1) 지수가 0 또는 음의 정수인 경우

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{단, } a \neq 0, n \text{은 자연수})$$

(2) 지수가 유리수인 경우

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (\text{단, } a > 0, m, n \text{은 정수, } n > 0)$$

(3) 지수법칙 ⁵

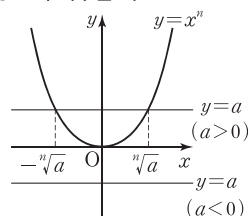
$a > 0$, $b > 0$ 이고 x, y 가 실수일 때,

- ① $a^x a^y = a^{x+y}$ 예) $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
② $a^x \div a^y = a^{x-y}$ 예) $3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$
③ $(a^x)^y = a^{xy}$ 예) $(5^2)^4 = 5^{2 \times 4} = 5^8$
④ $(ab)^x = a^x b^x$ 예) $(7 \times 11)^2 = 7^2 \times 11^2$

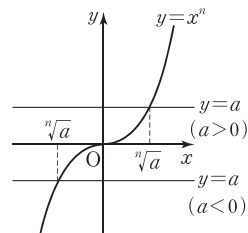
¹ $(\sqrt[n]{a})^n$ 과 $\sqrt[n]{a^n}$ 의 차이

n 이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a$
n 이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$ ($a > 0$)	$\sqrt[n]{a^n} = a $

² ① n 이 짝수일 때



② n 이 홀수일 때



³ $a > 0$ 이고 n 이 2 이상의 자연수일 때,
 $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a$

⁴ $a^{\frac{m}{n}}$ 과 같이 지수가 유리수인 경우,

a 가 자연수일 때, $a^{\frac{m}{n}}$ 이 자연수가 되기 위한 조건은 m 이 n 의 배수 또는 n 이 m 의 약수일 때이다.

⁵ 밑이 같을 때와 다를 때를 구분하자. 간단한 계산 문제뿐만 아니라 문장제 문제도 꼭 하나씩 출제된다. 지수법칙을 이용할 때는 먼저 밑이 같은지 다른지를 확인하고 같은 밑에 대해서 지수끼리 더할지, 곱할지를 정확하게 계산하자.

**1 거듭제곱과 거듭제곱근**

[A01~02] 다음 거듭제곱근을 구하시오.

A 01 -1 의 세제곱근

A 02 16 의 네제곱근

[A03~04] 다음 거듭제곱근 중 실수인 것을 구하시오.

A 03 -8 의 세제곱근

A 04 81 의 네제곱근

[A05~08] 다음 값을 구하시오.

A 05 $\sqrt[3]{8}$

A 06 $-\sqrt[4]{16}$

A 07 $\sqrt[5]{(-5)^5}$

A 08 $\sqrt[4]{256}$

2 거듭제곱근의 성질

[A09~12] 다음 식을 간단히 하시오.

A 09 $\sqrt[3]{5} \sqrt[3]{25}$

A 10 $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$

A 11 $(\sqrt[8]{100})^4$

A 12 $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

[A13~14] 다음 식을 간단히 하시오.

A 13 $\sqrt[3]{3\sqrt{4}} \times \sqrt[6]{\frac{16}{9}}$

A 14 $\frac{\sqrt[6]{27} \times \sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}$

[A15~16] 다음 거듭제곱근의 값을 구하시오.

A 15 $\sqrt{\frac{9^7 + 3^{11}}{9^4 + 3^5}}$

A 16 $\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}$

3 지수의 확장

[A17~20] 다음 값을 구하시오.

A 17 $(-3)^0$

A 18 5^{-2}

A 19 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

A 20 $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

[A21~23] 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0$)

A 21 $a^4 \times a^3 \div a^6$

A 22 $(a^{-2})^4 \times (a^{-3})^{-5}$

A 23 $\frac{(a^{-6})^3 \times (a^3)^6}{a^3 \times a^{-6}}$

[A24~26] 다음 식을 간단히 하시오.

A 24 $2^{-2} \times 8^{\frac{7}{3}}$

A 25 $(5^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}} \div 125$

A 26 $9^{\frac{1}{2}} \times 3^{-3} \div 27^{-\frac{2}{3}}$

[A27~28] $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{3}$ 일 때, 다음 거듭제곱을 a , b 를 이용하여 나타내시오.

A 27 $\sqrt[6]{12}$

A 28 6^6

[A29~31] 곱셈공식을 이용하여 다음 식을 간단히 하시오.

(단, a , b 는 양수)

A 29 $(a-b) \div (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$

A 30 $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

A 31 $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$

A 32 두 실수 x , y 에 대하여 $15^x = 25$, $375^y = 125$ 일 때,

$\frac{2}{x} - \frac{3}{y}$ 의 값을 구하시오.

A 33 $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값을 구하시오.



1 거듭제곱과 거듭제곱근

유형 01 거듭제곱근의 정의

- (1) 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 실수 a 가 되는 수 x 를 a 의 n 제곱근이라 한다.
 (2) 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

tip

a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는

- ① n 이 짝수일 때에는 a 의 부호에 따라 0개, 1개, 2개가 될 수 있다.
 ② n 이 홀수일 때에는 항상 1개이다.

A34 대표 2024실시 9월 학평 14(고2)



$2 \leq n \leq 10$ 인 자연수 n 에 대하여 $n^2 + 1$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$, $n^2 - 8n + 12$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$ 이라 하자. $f(n) = 2g(n)$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은? (4점)

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

A35 * 2016실시(나) 11월 학평 13(고2)

실수 a, b 에 대하여 a 는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$ 는 b 의 네제곱근일 때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$ 의 값은? (3점)

- ① 2 ② 4 ③ 8
 ④ 16 ⑤ 32

A36 * 2020실시 11월 학평 11(고2)



양수 k 의 세제곱근 중 실수인 것을 a 라 할 때, a 의 네제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[3]{4}$ 이다. k 의 값은? (3점)

- ① 16 ② 32 ③ 64
 ④ 128 ⑤ 256

A37 * 2023실시 11월 학평 14(고2)



자연수 $n(n \geq 2)$ 에 대하여 $m - 2n$ 의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(2) + f(3) + f(4) = 3$ 을 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합은? (4점)

- ① 18 ② 23 ③ 28
 ④ 33 ⑤ 38

A38 * 2025실시 6월 학평 27(고2)



다음 조건을 만족시키는 두 자연수 m, n 에 대하여 모든 m 의 값의 합을 구하시오. (3점)

- (가) m 의 양의 제곱근은 n 의 양의 네제곱근의 2배이다.
 (나) $\frac{3m}{n}$ 은 자연수이다.



내신 유형별 서술형 문제



문제에서 단서를 찾고
풀이 방법을 생각해 냅니다!



A138 ***

유형 01



2 이상 30 이하인 자연수 n 에 대하여 $n-9$ 의 n 제곱근 중 양의 실수가 존재하고, $n-20$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n 의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st $n-9$ 의 n 제곱근 중 양의 실수가 존재하는 n 의 조건을 구한다.

2nd $n-20$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하는 n 의 조건을 구한다.

3rd 자연수 n 의 개수를 구한다.

A139 ***

유형 06



2 이상의 두 자연수 m, n 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$(x^m - 2^6)(x^n + 2^9) = 0$$

이 서로 다른 세 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 을 가진다. 세 수 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이 모두 정수일 때, $m+n=k$ 를 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st 세 실근을 가지기 위한 m, n 의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 을 구한다.

2nd $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이 서로 다른 정수가 되기 위한 m, n, k 의 값을 각각 구한다.

A140 ***

유형 11



등식

$$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1} \right)^{-3} \times (\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3} = (2^a+2^b)^3$$

을 만족시키는 유리수 a, b 에 대하여 $3a+b$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $a > b$) (10점)

1st $\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1} \right)^{-3}$ 의 값을 구한다.

2nd $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$ 의 값을 구한다.

3rd $3a+b$ 의 값을 구한다.

A141 ***

유형 02



1이 아닌 세 양수 a, b, c 가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) a 는 b 의 5제곱근이다.

(나) c 는 $\sqrt[3]{a}$ 의 네제곱근이다.

$\frac{b}{c} = a^x$ 일 때, 실수 x 의 값을 $\frac{q}{p}$ 라 하자. $q-p$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) (10점)

1st 거듭제곱근의 정의를 활용해서 a, b, c 의 관계를 구한다.

2nd a, b, c 를 한 문자로 표현하여 x 의 값을 구한다.

A142 ***

유형 08



0이 아닌 네 실수 a, b, c, k 가 다음 조건을 만족시킬 때, k 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

$$(가) 27^a = 25^b = 15^c$$

$$(나) kab = (2b + 3a)c$$

A143 ***

유형 11



x 에 대한 이차방정식

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x^2 - 18x + \sqrt{a} \times {}^{2 \times 3}\sqrt{a} \times {}^{3 \times 4}\sqrt{a} = 0$$

의 서로 다른 두 실근 α, β 에 대하여 $\alpha \times \beta$ 의 값이 정수가 되도록 하는 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A144 ***

유형 09



1이 아닌 두 양수 a, b 와 두 실수 x, y 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) a^{\frac{b}{a}} = b^a = (ab)^{ab}$$

$$(나) a^{\frac{2}{x}} = 3$$

$$(다) b^{2y} + 1 = 6b^{y+1}$$

$36 \times 3^x - \frac{2 + b^{2y} + b^{-2y}}{3^x - 1}$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A145 ***

유형 06



$\left(\frac{n}{18}\right)^{\frac{n}{12}}$ 이 자연수가 되도록 하는 500보다 작은 모든 자연수 n 의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A146 ***

유형 06



$x = \frac{1}{2}(3^{10} - 2 \times 3^{-10})$ 일 때, $\sqrt[n]{x + \sqrt{x^2 + 2}}$ 가

자연수가 되는 1보다 큰 자연수 n 의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A147 ***

유형 12



사람의 몸 안에 들어온 방사성 물질 세슘 137은 신체 대사 작용을 통해 시간이 지남에 따라 일정한 비율로 몸 밖으로 빠져나간다. 이때 이 물질이 절반만큼 몸 밖으로 빠져나가는 데 걸리는 시간을 세슘 137의 생물학적 반감기라 하고 세슘 137의 생물학적 반감기는 110일이다. 세슘 137이 몸 안에 들어왔을 때 응급약인 프러시안 블루를 처방하면 세슘 137의 생물학적 반감기를 30일로 줄일 수 있다고 한다. 어떤 사고로 A와 B의 몸 안에 세슘 137이 각각 320 mg, 20 mg이 들어와서 응급조치가 필요한 A에게만 프러시안 블루를 처방하였을 때, A의 체내 세슘 137의 양이 B의 세슘 137의 양과 같아지는 시점은 사고일로부터 n 일 후라고 한다. 자연수 n 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, n 은 자연수) (10점)



1등급 마스터 문제

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]



A148 *** 2022대비 6월 모평 21(고3)



다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인
이차함수 $f(x)$ 가 존재하도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을
구하시오. (4점)

- (가) x 에 대한 방정식 $(x^n - 64)f(x) = 0$ 은 서로 다른 두
실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 음의 정수이다.

A149 *** 2019실시(가) 6월 학평 21(고2)



자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 이 다음과 같다.

$$f(n) = \begin{cases} \sqrt[4]{9 \times 2^{n+1}} & (n \text{이 홀수}) \\ \sqrt[4]{4 \times 3^n} & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q 에 대하여 $f(p) \times f(q)$ 가 자연수가
되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는? (4점)

- ① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

A150 *** 2017실시(가) 6월 학평 17(고2)



두 집합 $A = \{3, 4\}$, $B = \{-9, -3, 3, 9\}$ 에 대하여 집합 X 를

$$X = \{x \mid x^a = b, a \in A, b \in B, x \text{ 는 실수}\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

$$\neg, \sqrt[3]{-9} \in X$$

ㄴ. 집합 X 의 원소의 개수는 8이다.

ㄷ. 집합 X 의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 $\sqrt[4]{3}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[1등급 대비+2등급 대비]

A151 ☆2등급 대비 2017실시(나) 3월 학평 21(고3)



자연수 m 에 대하여 집합 A_m 을

$$A_m = \left\{ (a, b) \mid 2^a = \frac{m}{b}, a, b \text{ 는 자연수} \right\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

$$\neg, A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

ㄴ. 자연수 k 에 대하여 $m = 2^k$ 이면 $n(A_m) = k$ 이다.

ㄷ. $n(A_m) = 1$ 이 되도록 하는 두 자리 자연수 m 의 개수는 23이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A152 ☆2등급 대비 2016대비(A) 수능 16(고3)



어느 금융상품에 초기자산 W_0 을 투자하고 t 년이 지난 시점에서의 기대자산 W 가 다음과 같이 주어진다고 한다.

$$W = \frac{W_0}{2} \times 10^{at} (1 + 10^{at})$$

(단, $W_0 > 0$, $t \geq 0$ 이고, a 는 상수이다.)

이 금융상품에 초기자산 w_0 을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 w_0 을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k 배일 때, 실수 k 의 값은? (단, $w_0 > 0$) (4점)

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13



모의

A01

-216의 세제곱근 중 실수인 것을 a , $\frac{1}{81}$ 의 네제곱근 중 실수인 것을 b 라 할 때, ab 의 최댓값을 구하시오. (3점)

모의

A02

$3 \times \sqrt[3]{16} + 2 \times \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{k}$ 를 만족시키는 자연수 k 에 대하여 $\frac{k}{48}$ 의 값은? (4점)

- ① 12 ② 36 ③ 54
④ 72 ⑤ 96

모의

A03

2017실시(나) 3월 학평 3(고2)

$8^{\frac{2}{3}} \times 27^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? (2점)

- ① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

모의

A04

2013대비(나) 수능 26(고3)



$2 \leq n \leq 100$ 인 자연수 n 에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$ 이 어떤 자연수의 n 제곱근이 되도록 하는 n 의 개수를 구하시오. (4점)

모의

A05

2007대비(나) 9월 모평 20(고3)

세 양수 a, b, c 에 대하여 $a^6=3, b^5=7, c^2=11$ 일 때, $(abc)^n$ 이 자연수가 되는 최소의 자연수 n 의 값을 구하시오. (3점)

모의

A06

2015실시(A) 3월 학평 7(고3)

두 실수 a, b 에 대하여 $2^a=3, 3^b=\sqrt{2}$ 가 성립할 때, ab 의 값은? (3점)

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

모의

A07



2010대비(나) 6월 모평 4(고3)

실수 a 가 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$ 를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a} 의 값은? (3점)

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{17}{4}$
 ④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

모의

A08



2005실시(나) 3월 학평 22(고3)

$f(n)=a^{\frac{1}{n}}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)일 때,

$$f(2\times 3)\times f(3\times 4)\times \cdots \times f(9\times 10)=f(k)$$

를 만족하는 상수 k 에 대하여 $10k$ 의 값을 구하시오. (4점)

모의

A09



2009실시(가) 3월 학평 16(고3)



원기둥 모양의 수도관에서 단면인 원의 넓이를 S ,
 원의 둘레의 길이를 L 이라 하고, 수도관의 기울기를 I 라 하자.
 이 수도관에서 물이 가득 찬 상태로 흐를 때 물의 속력을 v 라 하면

$$v=c\left(\frac{S}{L}\right)^{\frac{2}{3}}\times I^{\frac{1}{2}} \text{ (단, } c \text{는 상수이다.)}$$

이 성립한다고 한다.

단면인 원의 반지름의 길이가 각각 a , b 인 원기둥 모양의 두
 수도관 A, B에서 물이 가득 찬 상태로 흐르고 있다. 두 수도관
 A, B의 기울기가 각각 0.01, 0.04이고, 흐르는 물의 속력을 각각
 v_A , v_B 라고 하자. $\frac{v_A}{v_B}=2$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은? (단, 두 수도관 A,
 B에 대한 상수 c 의 값은 서로 같다.) (4점)

- ① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 8
 ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 16

서술형

모의

A10



어떤 생물의 개체수를 측정하기 시작하여
 시각 t 에서의 개체수를 $N(t)$ 라 할 때, 다음 관계식이
 성립한다고 한다.

$$N(t)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-bt}} \text{ (단, } a, b, c \text{는 양의 상수)}$$

이때, K 는 이 생물의 최대개체량이다.

이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=5$ 일 때의 개체수는

최대개체량의 $\frac{1}{2}$ 이었고, $t=7$ 일 때의 개체수는 최대개체량의

$\frac{3}{4}$ 이었다. 이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=9$ 일 때의

개체수를 $\frac{q}{p}K$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는

서로소인 자연수이다.) (10점)

모의고사



A 지수



개념 확인 문제

A 01 정답 $-1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ *거듭제곱과 거듭제곱근

-1 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -1$ 이므로
 $x^3 + 1 = 0, (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

따라서 -1 의 세제곱근은 $-1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 이다.

A 02 정답 $\pm 2i, \pm 2$ *거듭제곱과 거듭제곱근

16 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 16$ 이므로
 $x^4 - 16 = 0, (x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$
 $(x + 2i)(x - 2i)(x + 2)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = \pm 2i$ 또는 $x = \pm 2$

따라서 16 의 네제곱근은 $\pm 2i, \pm 2$ 이다.

A 03 정답 -2 *거듭제곱과 거듭제곱근

-8 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -8$ 이므로
 $x^3 + 8 = 0, (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$
 이때, $x^2 - 2x + 4 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로 $x + 2 = 0$ 에서 $x = -2$
 따라서 -8 의 세제곱근 중 실근인 것은 -2 이다.

A 04 정답 $-3, 3$ *거듭제곱과 거듭제곱근

81 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 81$ 이므로
 $x^4 - 81 = 0, (x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$
 이때, $x^2 + 9 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로 $x^2 - 9 = 0$ 에서
 $(x+3)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -3$ 또는 $x = 3$
 따라서 81 의 네제곱근 중 실근인 것은 $-3, 3$ 이다.

A 05 정답 2 *거듭제곱과 거듭제곱근

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

A 06 정답 -2 *거듭제곱과 거듭제곱근

$$-\sqrt[4]{16} = -\sqrt[4]{2^4} = -2$$

A 07 정답 -5 *거듭제곱과 거듭제곱근

$$\sqrt[5]{(-5)^5} = -5$$

A 08 정답 4 *거듭제곱과 거듭제곱근

$$\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = 4$$

A 09 정답 5 *거듭제곱근의 성질

$$\sqrt[3]{5} \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \times 25} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

A 10 정답 3 *거듭제곱근의 성질

$$\sqrt[4]{\frac{729}{9}} = \sqrt[4]{\frac{729}{9}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

A 11 정답 10 *거듭제곱근의 성질

$$(\sqrt[8]{100})^4 = \sqrt[8]{100^4} = \sqrt[8]{10^8} = 10$$

A 12 정답 2 *거듭제곱근의 성질

$$\sqrt[3]{\sqrt[6]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

A 13 정답 2 *거듭제곱근의 성질

$$\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4}} \times \sqrt[6]{\frac{16}{9}} = \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{6 \times \frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

A 14 정답 1 *거듭제곱근의 성질

$$\frac{\sqrt[6]{27} \times \sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[12]{3^2}}{\sqrt[6]{3^4}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{3^4}} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \times 3}{3^4}} = \sqrt[6]{\frac{3^4}{3^4}} = \sqrt[6]{1} = 1$$

A 15 정답 27 *거듭제곱근의 성질

$$\sqrt{\frac{9^7 + 3^{11}}{9^4 + 3^5}} = \sqrt{\frac{3^{14} + 3^{11}}{3^8 + 3^5}} = \sqrt{\frac{3^{11}(3^3 + 1)}{3^5(3^3 + 1)}} = \sqrt{3^6} = 3^3 = 27$$

A 16 정답 16 *거듭제곱근의 성질

$$\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}} = \sqrt{\frac{2^{30} + 2^{20}}{2^{12} + 2^{22}}} = \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10} + 1)}{2^{12}(1 + 2^{10})}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$$

A 17 정답 1 *지수의 확장

$$(-3)^0 = 1$$

A 18 정답 $\frac{1}{25}$ *지수의 확장

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

A 19 정답 32 *지수의 확장

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 32$$

A 20 정답 $\frac{27}{64}$ *지수의 확장

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

A 21 정답 a *지수의 확장

$$a^4 \times a^3 \div a^6 = a^{4+3-6} = a$$

A 22 정답 a^7 *지수의 확장

$$(a^{-2})^4 \times (a^{-3})^{-5} = a^{-8} \times a^{15} = a^{-8+15} = a^7$$

A 23 정답 a^3 *지수의 확장

$$\frac{(a^{-6})^3 \times (a^3)^6}{a^3 \times a^{-6}} = \frac{a^{-18} \times a^{18}}{a^{3+(-6)}} = \frac{a^{(-18)+18}}{a^{-3}} = a^{0-(-3)} = a^3$$

A 24 정답 32 *지수의 확장

$$2^{-2} \times 8^{\frac{7}{3}} = 2^{-2} \times (2^3)^{\frac{7}{3}} = 2^{-2} \times 2^7 = 2^{-2+7} = 2^5 = 32$$

A 25 정답 5 *지수의 확장

$$(5^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}} \div 125 = 5^{\sqrt{16}} \div 5^3 = 5^4 \div 5^3 = 5^{4-3} = 5$$

A 26 정답 1 *지수의 확장

$$\begin{aligned} 9^{\frac{1}{2}} \times 3^{-3} \div 27^{-\frac{2}{3}} &= (3^2)^{\frac{1}{2}} \times 3^{-3} \div (3^3)^{-\frac{2}{3}} \\ &= 3 \times 3^{-3} \div 3^{-2} \\ &= 3^{1+(-3)-(-2)} = 3^0 = 1 \end{aligned}$$

A 27 정답 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ *지수의 확장

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, b = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \text{이므로} \\ \sqrt[6]{12} &= 12^{\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} \times (3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

A 28 정답 $a^{12}b^{18}$ *지수의 확장

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, b = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \text{이므로} \\ 6^6 &= 2^6 \times 3^6 = (2^{\frac{1}{2}})^{12} \times (3^{\frac{1}{3}})^{18} = a^{12}b^{18} \end{aligned}$$

A 29 정답 $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ *지수의 확장

$$(a-b) \div (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = \frac{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$$

A 30 정답 $a+b$ *지수의 확장

$$(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = (a^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}})^3 = a + b$$

A 31 정답 $a-b$ *지수의 확장

$$\begin{aligned} (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) &= \{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) \\ &= (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) \\ &= (a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2 \\ &= a - b \end{aligned}$$

A 32 정답 -2 *지수의 확장

$$\begin{aligned} 25^{\frac{1}{x}} &= 5^{\frac{2}{x}} = 15, 125^{\frac{1}{y}} = 5^{\frac{3}{y}} = 375 \text{이므로} \\ 5^{\frac{2}{x}} \div 5^{\frac{3}{y}} &= 5^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} = \frac{15}{375} = \frac{1}{25} = 5^{-2} \\ \therefore \frac{2}{x} - \frac{3}{y} &= -2 \end{aligned}$$

A 33 정답 $2\sqrt{2}-1$ *지수의 확장

분모, 분자에 a^x 을 각각 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} &= \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}-1}}{(\sqrt{2}-1) + 1} \\ &= \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} - 2}{2} = 2\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$



수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 34 정답 ③ *거듭제곱근의 정의 [정답률 74%]

정답 공식: a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 $a > 0$ 일 때 n 이 홀수이면 1, 짝수이면 2이고, $a < 0$ 일 때 n 이 홀수이면 1, 짝수이면 0이다.

$2 \leq n \leq 10$ 인 자연수 n 에 대하여 n^2+1 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$, $n^2-8n+12$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$ 이라 하자. $f(n)=2g(n)$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은? (4점)

단서: a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 a 의 부호에 따라 n 이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 생각해.

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

1st $f(n)$ 을 구해.

$2 \leq n \leq 10$ 인 자연수 n 에 대하여 $n^2+1 > 0$ 이므로 n^2+1 의 n 제곱근 중 실수인 것은 n 이 홀수일 때 1개, n 이 짝수일 때 2개이다.

n^2+1 의 n 제곱근 중 실수인 것은 n 이 홀수이면 $\sqrt[n]{n^2+1}$ 이고 n 이 짝수이면 $\pm \sqrt[n]{n^2+1}$ 이다.

$$\therefore f(n) = \begin{cases} 1 & (n=3, 5, 7, 9) \\ 2 & (n=2, 4, 6, 8, 10) \end{cases}$$

2nd $g(n)$ 을 구해.

$$n^2-8n+12 = (n-2)(n-6) \text{이므로}$$

$n < 2$ 또는 $n > 6$ 일 때, $n^2-8n+12 > 0$

$n = 2$ 또는 $n = 6$ 일 때, $n^2-8n+12 = 0$

$2 < n < 6$ 일 때, $n^2-8n+12 < 0$

따라서 $n^2-8n+12$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은

(i) $n < 2$ 또는 $n > 6$ 일 때, n 이 홀수이면 1개, n 이 짝수이면 2개이다.

$n^2-8n+12 > 0$ 이므로 $n^2-8n+12$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 n 이 홀수이면 $\sqrt[n]{n^2-8n+12}$,

(ii) $n = 2$ 또는 $n = 6$ 일 때, 1개이다. n 이 짝수이면 $\pm \sqrt[n]{n^2-8n+12}$ 이다.

$n^2-8n+12 = 0$ 이고 0의 n 제곱근은 0이다.

(iii) $2 < n < 6$ 일 때, n 이 홀수이면 1개, n 이 짝수이면 0개이다.

$n^2-8n+12 < 0$ 이므로 $n^2-8n+12$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 n 이 홀수이면 $\sqrt[n]{n^2-8n+12}$, n 이 짝수이면 없어.

$$(i) \sim (iii) \text{에 의하여 } g(n) = \begin{cases} 0 & (n=4) \\ 1 & (n=2, 3, 5, 6, 7, 9) \\ 2 & (n=8, 10) \end{cases}$$

3rd $f(n)=2g(n)$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값을 구해.

$f(n)=2g(n)$ 을 만족시켜야 하므로 $f(n)=2$, $g(n)=1$ 이다.

$f(n)=1$ 이면 $g(n)=\frac{1}{2}$, $f(n)=2$ 이면 $g(n)=1$ 이어야 해. 그런데 $g(n)$ 으로 가능한 값은

0, 1, 2이므로 $f(n)=2g(n)$ 을 만족시키는 경우는 $f(n)=2$, $g(n)=1$ 뿐이다.

즉, 이것을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값은 2, 6이고 그 합은

$2+6=8$ 이다.

A 51 정답 15 *거듭제곱근의 성질 [정답률 62%]

정답 공식: $a < 0$ 일 때, n 이 짝수이면 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 없고, n 이 홀수이면 실수인 것은 음수 한 개뿐이다.

단서 $\sqrt[n]{a}$ 에서 n 이 홀수이면 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 한 개뿐이고 음수가 되기 위해서는 $a < 0$ 이어야 하지
모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$ 가 음수가 되도록 하는 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하시오. (3점)

1st 세제곱근이 음수가 되기 위해서는 세제곱근 안의 값이 음수일 때밖에 없지? 모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$ 가 음수가 되려면 $-x^2+2ax-6a < 0$ 세제곱근 $\sqrt[3]{\quad}$ 이 음수가 되기 위해서 근호 안의 값이 음수가 되어야 해.
 $x^2-2ax+6a > 0$

2nd 모든 실수 x 에 대하여 (이차식) > 0 이 되기 위해서는 (이차식) $= 0$ 의 판별식이 음수일 때야.

이차방정식 $x^2-2ax+6a=0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6a = a(a-6) < 0$$

$y = x^2 - 2ax + 6a$ 라 하면 이차함수의 그래프가 x 축보다 위에 있어야 하므로 x 축과 만나지 않아야 해.
즉, 이차방정식 $x^2 - 2ax + 6a = 0$ 은 실근을 가지지 않아야 하므로 판별식 $D < 0$ 이어야.

$$\therefore 0 < a < 6$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$$1+2+3+4+5=15$$

A 52 정답 2 *거듭제곱근의 성질 [정답률 71%]

정답 공식: 괄호 안의 제일 안쪽 근호부터 정리하여 밑을 2로 바꾼다.)

$(\sqrt{2^3\sqrt{4}})^3$ 보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? (3점)

단서 $\sqrt[n]{\quad}$ 꼴은 근호를 줄여나가야 해. 이때, 이 수보다 큰 자연수를 찾자.

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

1st 거듭제곱근을 지수로 바꿔 간단히 정리하여 값을 구해.

$$(\sqrt{2^3\sqrt{4}})^3 = (2 \times \sqrt[3]{4})^3 = (2 \times 2^{\frac{2}{3}})^3 = (2^{\frac{5}{3}})^3 = 2^5 = \sqrt{32}$$

$$= (2^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{4}}$$

이때, $5 = \sqrt{25} < \sqrt{32} < \sqrt{36} = 6$ 이므로

$(\sqrt{2^3\sqrt{4}})^3$ 보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

6, 7, 8, ...

다른 풀이: 거듭제곱근을 지수로 고친 뒤, 자연수 n 에 대한 부등식으로 바꾸고, 부등식의 성질 및 지수법칙을 이용하여 값 찾기

$$(\sqrt{2^3\sqrt{4}})^3 = 2^{\frac{5}{2}} \text{이므로 자연수 } n \text{에 대하여 } n > 2^{\frac{5}{2}} \text{이라 하면 } n^2 > 2^5$$

$$\therefore n = 6, 7, \dots$$

따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

A 53 정답 3 *거듭제곱근의 성질 [정답률 55%]

정답 공식: $x^n = a$ 를 만족시키는 실근의 개수는
 n 이 짝수이면 $\begin{cases} a > 0 \text{ (2개)} \\ a = 0 \text{ (1개)} \\ a < 0 \text{ (0개)} \end{cases}$
 n 이 홀수이면 a 의 값에 관계없이 항상 1개임을 적용한다.

단서 자연수 n 에 대하여 $x^3 = n(n-4)$ 를 만족시키는 x 의 개수를 구하는 거야.
자연수 n 에 대하여 $n(n-4)$ 의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하고, $n(n-4)$ 의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$ 이라 하자. $f(n) > g(n)$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은? (4점)

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

1st 세제곱근의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구해.

자연수 n 에 대하여 $n(n-4)$ 의 세제곱근은

$$x^3 = n(n-4) \quad a \text{의 세제곱근은 } x^3 = a \text{를 만족시키는 } x \text{를 구하는 것이고 } a \text{의 세제곱은 } a^3 \text{이야. 혼동하지 말자!}$$

이때, $y = x^3$ 이라 하면 원점에 대하여 대칭이므로

$n(n-4)$ 의 값이 음수이든 양수이든 항상 실수인 것은 1개이다.

$$\therefore f(n) = 1 \quad \begin{aligned} &\rightarrow f(x) = x^3 \text{에서 } f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \text{이므로} \\ &y = x^3 \text{은 원점에 대하여 대칭인 그래프야.} \end{aligned}$$

2nd 네제곱근의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구해.

자연수 n 에 대하여 $n(n-4)$ 의 네제곱근은

$$x^4 = n(n-4)$$

이때, $y = x^4$ 이라 하면 y 축에 대하여 대칭이므로

$$g(n) = \begin{cases} 0 & (n(n-4) < 0) \\ 1 & (n(n-4) = 0) \\ 2 & (n(n-4) > 0) \end{cases} \quad \begin{aligned} &f(x) = x^4 \text{에서 } f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x) \text{이므로} \\ &y = x^4 \text{은 } y \text{축에 대하여 대칭인 그래프야.} \end{aligned}$$

3rd $f(n) > g(n)$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구해.

$f(n) > g(n)$ 을 만족시키는 경우는 $g(n) = 0$ 일 때이므로

$$n(n-4) < 0$$

$$\therefore 0 < n < 4$$

따라서 자연수 n 은 1, 2, 3으로 합은

$$1+2+3=6$$

특목 풀이: n 이 짝수 또는 홀수일 때, 방정식 $x^n = a$ 의 실근의 개수의 특징을 이용하여 합 구하기

자연수 n 의 값에 상관없이 $n(n-4)$ 의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로 $f(n) = 1$

$f(n) = 1 > g(n)$ 이 성립하는 경우는 $n(n-4)$ 의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.

$$n(n-4) < 0$$

$$\therefore 0 < n < 4$$

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2, 3이므로 합은

$$1+2+3=6$$

* 거듭제곱근의 성질

개념 · 공식

$a > 0, b > 0$ 이고 m, n 이 양의 정수일 때,

- ① $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ⑤ $\sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p 는 자연수)

A 54 정답 ④ *거듭제곱근의 성질 [정답률 68%]

(정답 공식: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ 임을 이용한다.)

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - \sqrt[3]{81}x + a = 0$ 의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$ 과 b 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) (4점)

단서 이차방정식에서 두 근이 주어졌으니 근과 계수의 관계를 이용해.

- ① 6 ② $3\sqrt[3]{9}$ ③ $6\sqrt[3]{3}$
 ④ 12 ⑤ $6\sqrt[3]{9}$

1st 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 에 관한 식을 구해.

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - \sqrt[3]{81}x + a = 0$ 의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$ 과 b 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 a, b 이면

$$\sqrt[3]{3} + b = \sqrt[3]{81}, \sqrt[3]{3}b = a \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

2nd a, b 에 관한 식을 이용하여 ab 를 계산해야 해.

$$b = \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$a = \sqrt[3]{3}b = \sqrt[3]{3} \times 2\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3^2} \rightarrow \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \times 3} = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3} = 3 \times \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\therefore ab = \frac{2\sqrt[3]{3^2} \times 2\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3^2} \times 2\sqrt[3]{3}} = \frac{4\sqrt[3]{3^3}}{4\sqrt[3]{3^3}} = 4 \times 3 = 12$$

A 55 정답 ② *거듭제곱근의 성질 [정답률 67%]

(정답 공식: $A = 10^{\frac{1}{6}}, B = 5^{\frac{1}{2}} = 125^{\frac{1}{6}}, C = 28^{\frac{1}{6}}$ 이다.)

세 수 $A = \sqrt[6]{10}, B = \sqrt{5}, C = \sqrt[6]{28}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? (3점)

단서 지수법칙을 이용하여 지수를 통일하여 크기를 비교해 보라.

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
 ④ $B < C < A$ ⑤ $C < A < B$

1st 지수법칙을 이용하여 거듭제곱근 A, B, C 의 지수를 통일해 보라.

$$A = \sqrt[6]{10} = 10^{\frac{1}{6}}, B = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}, C = \sqrt[6]{28} = 28^{\frac{1}{6}}$$

이 세 수를 각각 6제곱하면 이 지수인 $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ 을 통분하기 위해서 6, 2, 6의 최소공배수를 곱해.

$$\therefore A^6 < C^6 < B^6 \Rightarrow A < C < B (\because A > 0, B > 0, C > 0)$$

양수의 거듭제곱근이니까.

다른 풀이: 거듭제곱근의 성질 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ 임을 이용하여 계산하기

세 수 A, B, C 를 같은 거듭제곱근인 $\sqrt[6]{\quad}$ 으로 나타내 보라.

$$A = \sqrt[6]{10} = \sqrt[6]{10}, B = \sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}, C = \sqrt[6]{28} = \sqrt[6]{28}$$

$$\therefore A < C < B \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

지수법칙

개념·공식

$a > 0, b > 0$ 이고, x, y 가 실수일 때

- ① $a^x a^y = a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y = a^{x-y}$
 ③ $(a^x)^y = a^{xy}$ ④ $(ab)^x = a^x b^x$

A 56 정답 ③ *지수법칙 - 밑이 같은 계산 [정답률 92%]

(정답 공식: $a^x \times a^y = a^{x+y}, (a^x)^y = a^{xy}$)

$(3^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? (2점)

단서 $\sqrt{3}$ 을 밑이 3인 자수로 나타내어 계산해.

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 주어진 식의 값을 구해.

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \text{이므로} \rightarrow \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$(3^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = (3^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (3^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \times \frac{1}{2}} = 3$$

A 57 정답 ④ *지수법칙 - 밑이 같은 계산 [정답률 95%]

(정답 공식: 지수법칙을 이용하여 밑을 같게 만든다.)

$2^3 \times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? (2점)

단서 $4 = 2^2$ 임을 이용하면 밑을 같게 만들 수 있어.

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

1st 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구해.

$$4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{2 \times (-\frac{1}{2})} = 2^{-1} \text{이므로}$$

$$2^3 \times 4^{-\frac{1}{2}} = 2^3 \times 2^{-1} = 2^{3+(-1)} = 2^2 = 4$$

A 58 정답 ② *지수법칙 - 밑이 같은 계산 [정답률 93%]

(정답 공식: $a^m \times a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}$ 임을 이용한다.)

$(2^{\sqrt{2}+1})^{-1} \times 2^{\sqrt{2}}$ 의 값은? (2점)

단서 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구해.

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

1st 지수법칙을 이용하여 값을 구해.

$$\frac{(2^{\sqrt{2}+1})^{-1} \times 2^{\sqrt{2}}}{(a^m)^n = a^{mn}} = \frac{2^{-\sqrt{2}-1} \times 2^{\sqrt{2}}}{a^m \times a^n = a^{m+n}} = \frac{2^{(-\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}}}{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} = \frac{2^{-1}}{a^{-n}} = \frac{1}{2}$$

A 59 정답 ② *지수법칙 - 밑이 같은 계산 [정답률 93%]

(정답 공식: 지수법칙을 이용할 때에는 밑을 통일한다.)

$4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? (2점)

단서 밑을 2로 통일해야 지수법칙을 이용할 수 있어.

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

1st 지수법칙을 이용하여 밑을 2로 바꿔.

$$\text{지수법칙에 의해 } 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{2 \times \frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

2nd 지수법칙을 이용해 식의 값을 구해.

$$\therefore 4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2^1 = 2$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

A 60 정답 25 *지수법칙 - 밑이 같은 계산 [정답률 93%]

(정답 공식: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ 임을 이용한다.)

$\sqrt[6]{25^2} \times \sqrt[3]{5^4}$ 의 값을 구하시오. (3점)

답서 5의 거듭제곱으로 나타내어 계산해.

1st 주어진 식의 값을 구해.

$$25^2 = (5^2)^2 = 5^{4} \text{이므로}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\sqrt[6]{25^2} \times \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[6]{5^4} \times \sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{6}} \times 5^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} = 5^2 = 25$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

A 61 정답 ⑤ *지수법칙 - 밑이 같은 계산 [정답률 93%]

(정답 공식: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$)

$\sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? (2점)

답서 밑을 5로 통일한 후 지수법칙을 이용하여 계산해.

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 지수법칙을 이용하여 값을 구해.

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}, 25^{\frac{1}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{2 \times \frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}} \text{이므로}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 5^1 = 5$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$



이지원 | 고려대 생명과학부 2025년 입학 · 대구 성화여고 졸
1번 문제의 전형적인 지수법칙 문제야. 밑을 통일시키고, 세제곱근 형태가 아닌 지수 형태로 나타내면 암산도 가능하지! $\sqrt[3]{5}$ 를 $5^{\frac{1}{3}}$ 로, $25^{\frac{1}{3}}$ 을 $5^{\frac{2}{3}}$ 로 바꾸고 계산하면 돼. 시험장에서 가장 첫 번째로 푸는 문제인 만큼 실수하지 말고 제대로 풀자!

A 62 정답 ③ *지수법칙 - 밑이 같은 계산 [정답률 93%]

(정답 공식: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$)

→ 답서 밑을 2로 통일한 후 지수법칙을 이용하여 계산해.

$(\sqrt[3]{4})^2 \times 2^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? (2점)

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

1st 지수법칙을 이용하여 값을 구해.

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} \text{이므로}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$(\sqrt[3]{4})^2 \times 2^{\frac{2}{3}} = (2^{\frac{2}{3}})^2 \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

A 63 정답 ② *지수법칙 - 밑이 같은 계산 [정답률 93%]

(정답 공식: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$)

$\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}}$ 의 값은? (2점)

답서 2의 거듭제곱으로 나타내.

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

1st 지수법칙을 이용하여 값을 구해.

$$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}, \sqrt[8]{4} = \sqrt[8]{2^2} = 2^{\frac{2}{8}} = 2^{\frac{1}{4}} \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}} = \frac{2^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} = 2^1 = 2$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

★ 지수법칙

개념 · 공식

$a > 0, b > 0$ 이고, x, y 가 실수일 때

- ① $a^x a^y = a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y = a^{x-y}$
③ $(a^x)^y = a^{xy}$ ④ $(ab)^x = a^x b^x$

A 64 정답 ④ *지수법칙 - 밑이 같은 계산 [정답률 92%]

(정답 공식: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$)

$(\frac{5}{\sqrt[3]{25}})^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? (2점)

답서 5의 거듭제곱으로 나타내.

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1
④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

1st 지수법칙을 이용하여 값을 구해.

$$(\frac{5}{\sqrt[3]{25}})^{\frac{3}{2}} = (\frac{5}{\sqrt[3]{5^2}})^{\frac{3}{2}} = (\frac{5}{5^{\frac{2}{3}}})^{\frac{3}{2}} = (5^{1-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = (5^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{3} \times \frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \quad a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

A 65 정답 ⑤ *지수법칙 - 밑이 같은 계산 [정답률 95%]

(정답 공식: $a^m \times a^n = a^{m+n}$)

$3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}}$ 의 값은? (2점)

답서 밑이 같은 지수의 곱셈을 계산하는 거야.

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 9

1st 지수법칙을 이용하여 주어진 값을 구해.

$$3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}} = 3^{(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})} = 3^2 = 9$$

밑이 같은 지수의 곱셈은 지수끼리의 합으로 계산하면 돼

A 136 정답 ② *지수법칙의 실생활 응용 [정답률 65%]

[정답 공식: 부패지수가 각각 P_1 , $4P_1$ 일 때 관계식의 각 문자에 해당하는 값을 대입하고, 두 식을 나눠서 구하고자 하는 값을 찾는다.]

어떤 물질의 부패지수 P 와 일평균 습도 $H(\%)$, 일평균 기온 $t(^{\circ}\text{C})$ 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$P = \frac{H-65}{14} \times (1.05)^t \dots \textcircled{a}$$

① 일평균 습도가 72%, 일평균 기온이 10°C 인 날에 이 물질의 부패지수를 P_1 이라 하자. ② 일평균 습도가 79%, 일평균 기온이 $x^{\circ}\text{C}$ 인 날에 이 물질의 부패지수가 $4P_1$ 일 때, x 의 값은? (단, $1.05^{14}=2$ 로 계산한다.) (4점) [단서] ②를 가지고 ①과 ②의 자료를 대입하여 정리해 이때, ②는 ①의 4배이지?

- ① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

1st 주어진 식에 조건을 각각 대입해.

P_1 일 때 $H=72(\%)$, $t=10(^{\circ}\text{C})$ 이므로

$$P_1 = \frac{72-65}{14} \times (1.05)^{10} = \frac{1}{2} \times (1.05)^{10} \dots \textcircled{1}$$

$4P_1$ 일 때 $H=79(\%)$, $t=x(^{\circ}\text{C})$ 이므로

$$4P_1 = \frac{79-65}{14} \times (1.05)^x = (1.05)^x \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $\rightarrow \textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 의 4배이니까 $4 \times \textcircled{1} = \textcircled{2}$

$$4 \times \left\{ \frac{1}{2} \times (1.05)^{10} \right\} = (1.05)^x \rightarrow a^m = a^n \text{일 때 } a^m \div a^n = 1, \text{ 즉 } a^{m-n} = 1$$

$$(1.05)^{x-10} = 2$$

그런데 $1.05^{14}=2$ 이므로 $(1.05)^{x-10}=1.05^{14}$
 $x-10=14 \quad \therefore x=24$ [단서] 밑이 1.05로 같으니까 지수를 비교해

A 137 정답 ③ *지수법칙의 실생활 응용 [정답률 71%]

[정답 공식: 2006년도 인구를 구하고 그 값의 2배가 될 때, t 의 값은 어떻게 될지 구해본다.]

어느 도시의 t 년도 인구를 $P \times 10^6$ (명)이라 하면

$$P = 5 \times 2^{\frac{t-2001}{15}} \quad t=2006 \text{을 대입} \quad \text{[단서] 2006년의 인구를 구한 뒤, 그 2배가 되는 해를 찾자.}$$

인 관계가 성립한다고 한다. 이 도시의 인구가 2006년 인구의 2배가 되는 해는? (3점)

- ① 2017년 ② 2019년 ③ 2021년
 ④ 2023년 ⑤ 2025년

1st 먼저 2006년도의 인구 P 를 구해야겠지?

2006년도의 인구를 $P \times 10^6$ (명)이라 하면

$$P = 5 \times 2^{\frac{2006-2001}{15}} = 5 \times 2^{\frac{5}{15}} = 5 \times 2^{\frac{1}{3}} \dots \textcircled{1}$$

2nd 인구가 2배가 되는 해를 구하자.

이 도시의 인구 $P' \times 10^6$ (명)이 2006년 인구의 2배가 되는 해를 t 라 하자.

$$P' = 5 \times 2^{\frac{t-2001}{15}} = 2P$$

$\textcircled{1}$ 에서 $2P = 2 \times 5 \times 2^{\frac{1}{3}} = 5 \times 2^{\frac{4}{3}}$ 이므로 지수를 비교하면

$$\frac{4}{3} = \frac{t-2001}{15}, \quad 20 = t-2001 \quad \text{[지수법칙] } a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\therefore t = 2021$$



내신 유형별 서술형 문제

A 138 정답 10 *거듭제곱근의 정의 [정답률 67%]

[정답 공식: a 의 n 제곱근 중 실수는 x 에 대한 방정식 $x^n=a$ 의 실근이다.]

[단서] n 의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 각 경우에서의 부호에 따른 실근을 조사해. 2 이상 30 이하인 자연수 n 에 대하여 $n-9$ 의 n 제곱근 중 양의 실수가 존재하고, $n-20$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n 의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

단서+발상

[단서] a 의 n 제곱근 중 실수는 x 에 대한 방정식 $x^n=a$ 의 실근과 같다. a 의 n 제곱근 중 양의 실근이 존재하기 위해서 $a>0$ 이어야 하고, a 의 n 제곱근 중 음의 실근이 존재하기 위해서 $a>0$ 이고 n 은 짝수이거나, $a<0$ 이고 n 은 홀수이어야 한다.

[개념]

따라서 n 의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 $n-9$ 와 $n-20$ 의 부호에 따른 실수가 존재하는 n 의 조건을 구할 수 있다. [적용]

--- [문제 풀이 순서] ---

1st $n-9$ 의 n 제곱근 중 양의 실수가 존재하는 n 의 조건을 구하자.

$n-9$ 의 n 제곱근 중 양의 실수가 존재하기 위해서는

$$n-9>0 \text{이어야 한다.} \quad \therefore n>9 \dots \textcircled{1}$$

2nd $n-20$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하는 n 의 조건을 구하자.

$n-20$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하기 위해서는

[a 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하는 경우]
 $a>0$, n 이 짝수인 경우 $x^n=a$ 의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$, $x=-a^{\frac{1}{n}}$ 이고 $-a^{\frac{1}{n}}<0$ 이어야.

$a<0$, n 이 홀수인 경우 $x^n=a$ 의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$ 이고 $a^{\frac{1}{n}}<0$ 이어야.

n 이 홀수이고 $n-20<0$ 이거나 n 이 짝수이고 $n-20>0$ 이어야 한다.

따라서 자연수 n 은

$$n<20 \text{인 홀수 또는 } n>20 \text{인 짝수이다.} \dots \textcircled{2}$$

3rd 자연수 n 의 개수를 구하자.

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 의하여 30 이하인 자연수 n 은 $9<n<20$ 인 홀수 또는 $20<n\leq 30$ 인 짝수이다.

(i) n 이 $9<n<20$ 인 홀수 $\Rightarrow n=11, 13, 15, 17, 19$ 이므로 5개이다.

(ii) n 이 $20<n\leq 30$ 인 짝수

$$n=22, 24, 26, 28, 30 \text{이므로 5개이다.}$$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 자연수 n 의 개수는 10이다.

[채점 기준표]

1st	$n-9$ 의 n 제곱근 중 양의 실수가 존재하는 n 의 조건을 구한다.	3점
2nd	$n-20$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하는 n 의 조건을 구한다.	4.5점
3rd	자연수 n 의 개수를 구한다.	2.5점

A 139 정답 20 * 거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 57%]

[정답 공식:] 양수 a 와 짝수인 자연수 n 에 대하여 a 의 n 제곱근 중 실근은 $\sqrt[n]{a}$ 또는 $-\sqrt[n]{a}$ 이다.

[단서] 서로 다른 실근이 3개 가지고 있음을 알 수 있고, m, n 의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 실근의 개수를 확인해 보자.

2 이상의 두 자연수 m, n 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$(x^m - 2^6)(x^n + 2^9) = 0$$

이 서로 다른 세 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 을 가진다. 세 수 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이 모두 정수일 때, $m+n=k$ 를 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

단서+발상

[단서] $x^n = a$ 의 실근에서 n 이 짝수인 경우 실수 a 에 대하여 $a > 0$ 이면 a 의 n 제곱근 중 실근은 $\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$ 이고, n 이 홀수인 경우 a 의 n 제곱근 중 실근은 $\sqrt[n]{a}$ 이다. **[개념]** 방정식 $(x^m - 2^6)(x^n + 2^9) = 0$ 의 해는 방정식 $x^m = 2^6$ 또는 $x^n = -2^9$ 의 해와 같고, 이때 x 의 지수 m, n 의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 각 경우의 실근의 개수를 구할 수 있다. **[적용]** 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 에서 같은 근이 생기는 m, n 의 값이 존재하는지 확인하여 자연수 k 의 값을 구할 수 있다. **[해결]**

--- [문제 풀이 순서] ---

1st 세 실근을 가지기 위한 m, n 의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 을 구하자.

방정식 $(x^m - 2^6)(x^n + 2^9) = 0$ 이라면 $x^m = 2^6$ 또는 $x^n = -2^9$ 이다.

n 이 짝수이면 방정식 $x^n = -2^9$ 의 실근은 존재하지 않는다.

n 이 짝수일 때, 방정식 $x^n = a$ 에서 $a \geq 0$ 이어야 실근이 존재해.

방정식 $x^m = 2^6$ 의 실근은 최대 2개이므로

방정식 $(x^m - 2^6)(x^n + 2^9) = 0$ 이 세 실근을 가질 수 없다.

따라서 n 은 홀수이다.

n 은 홀수이므로 방정식 $x^n = -2^9$ 의 실근은 $x = -2^{\frac{9}{n}}$ 으로 1개.

n 이 홀수일 때, 실수 a 에 대해 방정식 $x^n = a$ 의 실근은 항상 1개다.

방정식 $(x^m - 2^6)(x^n + 2^9) = 0$ 의 실근은 3개이므로

방정식 $x^m = 2^6$ 의 실근은 2개이다.

따라서 m 은 짝수이고 방정식 $x^m = 2^6$ 의 실근은 $x = 2^{\frac{6}{m}}$ 또는 $x = -2^{\frac{6}{m}}$ 이다.

$$a > 0, n \text{이 짝수인 경우 } x^n = a \text{의 실근은 } \sqrt[n]{a} \text{ 또는 } x = -\sqrt[n]{a}$$

$$\therefore \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \left\{ -2^{\frac{9}{n}}, 2^{\frac{6}{m}}, -2^{\frac{6}{m}} \right\}$$

2nd $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이 서로 다른 정수가 되기 위한 m, n, k 의 값을 각각 구하자.

$2^{\frac{6}{m}}, -2^{\frac{6}{m}}$ 이 정수이므로 $m=2, 6$

$-2^{\frac{9}{n}}$ 이 정수이므로 $n=3, 9$ $\rightarrow m$ 이 2 이상인 자연수 중 짝수이면 6의 약수는 2, 6이다.

조건을 만족시키는 m, n 의 값을 순서쌍 (m, n) 으로 나타내자.

(i) (2, 3)인 경우

방정식 $x^m = 2^6$ 의 실근은 $2^3, -2^3$

방정식 $x^n = -2^9$ 의 실근은 -2^3

따라서 방정식 $(x^m - 2^6)(x^n + 2^9) = 0$ 의 실근은 $2^3, -2^3$ 으로 서로 다른 세 정수가 될 수 없다.

(ii) (2, 9)인 경우

방정식 $x^m = 2^6$ 의 실근은 $2^3, -2^3$

방정식 $x^n = -2^9$ 의 실근은 -2

따라서 방정식 $(x^m - 2^6)(x^n + 2^9) = 0$ 의 실근은 $2^3, -2^3, -2$ 이므로 서로 다른 세 정수이다.

$$\therefore m+n=11$$

(iii) (6, 3)인 경우

방정식 $x^m = 2^6$ 의 실근은 $2, -2$

방정식 $x^n = -2^9$ 의 실근은 -2^3

따라서 방정식 $(x^m - 2^6)(x^n + 2^9) = 0$ 의 실근은 $2, -2, -2^3$ 이므로 서로 다른 세 정수이다.

$$\therefore m+n=9$$

(iv) (6, 9)인 경우

방정식 $x^m = 2^6$ 의 실근은 $2, -2$

방정식 $x^n = -2^9$ 의 실근은 -2

따라서 방정식 $(x^m - 2^6)(x^n + 2^9) = 0$ 의 실근은 서로 다른 세 정수가 될 수 없다.

(i)~(iv)에 의해 모든 자연수 k 의 값의 합은 $11+9=20$

서로 다른 근이 나오는지 확인하기 위해 가능한 경우의 자연수 m, n 을 대입해 보아 해.

[채점 기준표]

1st	세 실근을 가지기 위한 m, n 의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 을 구한다.	4점
2nd	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 가 서로 다른 정수가 되기 위한 m, n, k 의 값을 각각 구한다.	6점

A 140 정답 21 * 지수법칙의 활용 [정답률 68%]

[정답 공식:] $(ab)^n = a^n b^n, a^{-1} = \frac{1}{a}, (x+1)(x^2-x+1) = x^3+1$

[단서1] 분자의 항이 복잡하므로 분모와 분자에 일정한 값을 곱하여 식을 간단히 만들 수 있어.

$$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1} \right)^{-3} \times (\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3} = (2^a+2^b)^3$$

[단서2] 곱셈공식을 활용해 식을 변형하여 계산할 수 있어.

을 만족시키는 유리수 a, b 에 대하여 $3a+b$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $a > b$) (10점)

단서+발상

[단서1] 분자가 계산이 번거로운 2^{-k} 꼴의 항들로 이루어져 있으므로 분모와 분자에 2^5 를 곱하여 식을 간단히 만들고 같은 부호의 항끼리 묶어 계산할 수 있다. **[발상]**

[단서2] $\sqrt[3]{2} = A$ 라 하면 $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$ 는 $A^2 - A + 1$ 로 나타낼 수 있다. **[발상]** 곱셈공식 $(A+1)(A^2-A+1) = A^3+1$ 을 활용해 식을 변형하여 계산할 수 있다. **[적용]**

--- [문제 풀이 순서] ---

1st $\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1} \right)^{-3}$ 의 값을 구하자.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1} \right)^{-1} \\ &= \frac{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}} \left(\frac{1+2+2^2+2^3+2^4+2^5}{2^5-2^4+2^3-2^2+2-1} \right) \\ &= 2^5 \left\{ \frac{1+2+2^2+2^3+2^4+2^5}{2(1+2^2+2^4)-(1+2^2+2^4)} \right\} = 2^5 \left\{ \frac{3(1+2^2+2^4)}{1+2^2+2^4} \right\} = 3 \times 2^5 \\ &\therefore \left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1} \right)^{-3} = (3 \times 2^5)^3 \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

2nd $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$ 의 값을 구하자.

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3} &= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1} \right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3+1} \right)^3 \\ &= \frac{(\sqrt[3]{2}+1)^3}{27} \cdots \textcircled{8} \rightarrow \left\{ \frac{\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)} \right\}^3 \end{aligned}$$

**A 148** 정답 24 *거듭제곱근의 활용 [정답률 41%]

[정답 공식: n 이 짝수일 때 양수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 2이고 n 이 홀수일 때 실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 1이다.]

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 존재하도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. (4점)

탄서 2 탄서 1에서 찾은 $f(x)=0$ 의 실근이 모두 방정식 $x^n-64=0$ 의 실근이 되어야 각각의 실근이 중근이 돼

(가) x 에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.

(나) 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 음의 정수이다.

탄서 1 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음의 정수이므로 방정식 $f(x)=0$ 의 실근을 가질 수 있고, 그들도 모두 중근이어야 조건 (가)를 만족시켜.

1st 자연수 n 의 조건을 찾아내.

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음의 정수이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

최고차항의 계수가 양수인 이차함수의 그래프는 아래로 볼록한 포물선이다. 그런데 $f(x)$ 의 최솟값이 음수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다. 따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가져.

이때, $(x^n-64)f(x)=0$ 에서 $x^n-64=0$ 또는 $f(x)=0$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근이 방정식 $x^n-64=0$ 의 실근과 동일해야 α, β 라 하자.

중근이 되어 조건 (가)를 만족시킨다. α, β 를 근으로 가져야하므로 n 은 짝수야. α, β 이외의 근을 가질 수 있고, 그들도 모두 중근이어야 조건 (가)를 만족시켜.

(i) n 이 홀수일 때,

$x^n-64=0$ 의 실근은 $x=\sqrt[n]{64}$ 로 1개이다.

따라서 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$ 의 실근이 모두 중근일 수 없다.

$x=\sqrt[n]{64}$ 가 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이면 $x=\sqrt[n]{64}$ 는 중근이 돼. 그런데 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 또 하나 있고 그 실근은 중근이 될 수 없지?

(ii) n 이 짝수일 때,

$x^n-64=0$ 의 실근은 $x=\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}$ 로 2개이다.

따라서 $x=\sqrt[n]{64}$, $x=-\sqrt[n]{64}$ 가 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이면 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$ 의 실근이 모두 중근일 수 있다.

(i), (ii)에 의하여 n 은 짝수이다.

2nd 함수 $f(x)$ 를 구하고 $f(x)$ 의 최솟값이 음의 정수가 되기 위한 자연수 n 의 값을 모두 구해.

(ii)에 의하여

$x=\sqrt[n]{64}$, $x=-\sqrt[n]{64}$ 가 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 되어야 하므로

$f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$

$= (x-2^{\frac{6}{n}})(x+2^{\frac{6}{n}})$

이어야 한다.

이때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(0)=-2^{\frac{6}{n}} \times 2^{\frac{6}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$ 이고 이 값이 음 이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭이지? 그리고 최고차항의 계수가 양수인 이차함수는 꼭짓점에서 최솟값을 가져. 이때, 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 $x=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{n}}$ 이므로 $f(x)$ 는

$x=2^{\frac{6}{n}}+(-2^{\frac{6}{n}})=0$ 에서 최솟값을 가져.

의 정수이어야 하므로 $\frac{12}{n}$ 는 자연수가 되어야 한다.

즉, 자연수 n 은 12의 약수이면서 짝수이어야 하므로 가능한 n 의 값은 2, 4, 6, 12이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$2+4+6+12=24$ 이다.

A 149 정답 5 *거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 --- [정답률 32%]

[정답 공식: $\sqrt[n]{a^m}$ 이 자연수가 되기 위해서는 m 이 n 의 배수(n 이 m 의 약수)이어야 한다.]

자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases} \sqrt[4]{9 \times 2^{n+1}} & (n \text{이 홀수}) \\ \sqrt[4]{4 \times 3^n} & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q 에 대하여 $f(p) \times f(q)$ 가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는? (4점)

탄서 자연수가 되기 위해서는 거듭제곱근의 근호가 없어져야 하지.

- ① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

1st p, q 가 모두 홀수일 때, 순서쌍 (p, q) 의 개수를 구하자.

(i) p, q 가 모두 홀수일 때, $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} (a>0, b>0)$

$$f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{9 \times 2^{p+1}} \times \sqrt[4]{9 \times 2^{q+1}} = \sqrt[4]{81 \times 2^{p+q+2}} \\ = \sqrt[4]{81} \times \sqrt[4]{2^{p+q+2}} = 3 \times \sqrt[4]{2^{p+q+2}}$$

여기서 $p+q+2$ 가 4의 배수일 때, $f(p) \times f(q)$ 는 자연수이다.

두 자연수 p, q 가 각각 10 이하의 홀수이므로 조건에 맞는 순서쌍 (p, q) 는 $p+q+2=4m (m \text{은 자연수})$ 이면

i) $p+q+2=4$ 일 때, $p+q=2$ 이므로 $(1, 1)$

ii) $p+q+2=8$ 일 때, $p+q=6$ 이므로 $(1, 5), (3, 3), (5, 1)$

iii) $p+q+2=12$ 일 때, $p+q=10$ 이므로 $(1, 9), (3, 7), (5, 5), (7, 3), (9, 1)$

iv) $p+q+2=16$ 일 때, $p+q=14$ 이므로 $(5, 9), (7, 7), (9, 5)$

v) $p+q+2=20$ 일 때, $p+q=18$ 이므로 $(9, 9)$

즉, 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 $1+3+5+3+1=13$ 이다.

2nd p 가 홀수, q 가 짝수일 때, 순서쌍 (p, q) 의 개수를 구하자.

(ii) p 는 홀수, q 는 짝수일 때,

$$f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{9 \times 2^{p+1}} \times \sqrt[4]{4 \times 3^q} = \sqrt[4]{2^{p+3} \times 3^{q+2}} = \sqrt[4]{2^{p+3}} \times \sqrt[4]{3^{q+2}}$$

여기서 $p+3$ 과 $q+2$ 가 각각 4의 배수일 때,

$f(p) \times f(q)$ 는 자연수이다. $p+3$ 과 $q+2$ 가 각각 4의 배수이어야 $\sqrt[4]{2^{p+3}}, \sqrt[4]{3^{q+2}}$ 이 각각 자연수가 되지.

두 자연수 p, q 가 각각 10 이하의 홀수, 짝수이므로

$p+3$ 은 4, 8, 12이고, $q+2$ 는 4, 8, 12

즉, p 는 1, 5, 9 중 하나이고, q 는 2, 6, 10 중 하나이다.

조건에 맞는 순서쌍 (p, q) 는 p 가 될 수 있는 수가 1, 5, 9이고 q 가 될 수 있는 수가 2, 6, 10이므로 순서쌍 (p, q) 의 개수는 $3 \times 3=9$ 이다.

$(1, 2), (1, 6), (1, 10), (5, 2), (5, 6), (5, 10), (9, 2), (9, 6),$

$(9, 10)$ 이므로 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 9이다.

3rd p 가 짝수, q 가 홀수일 때, 순서쌍 (p, q) 의 개수를 구하자.

(iii) p 는 짝수, q 는 홀수일 때,

$$f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{4 \times 3^p} \times \sqrt[4]{9 \times 2^{q+1}}$$

$$= \sqrt[4]{2^{p+3}} \times 3^{\frac{p+2}{2}}$$

$$= \sqrt[4]{2^{p+3}} \times \sqrt[4]{3^{p+2}}$$

여기서 $q+3$ 과 $p+2$ 가 각각 4의 배수일 때,

$f(p) \times f(q)$ 는 자연수이다.

두 자연수 p, q 가 각각 10 이하의 짝수, 홀수이므로 $p+2$ 는 4, 8, 12

이고, $q+3$ 은 4, 8, 12

즉, p 는 2, 6, 10 중 하나이고, q 는 1, 5, 9 중 하나이다.

조건에 맞는 순서쌍 (p, q) 는

$(2, 1), (2, 5), (2, 9), (6, 1), (6, 5), (6, 9), (10, 1), (10, 5),$

$(10, 9)$ 이므로 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 9이다.

4th p, q 가 모두 짝수일 때, 순서쌍 (p, q) 의 개수를 구하자.

(iv) p, q 가 모두 짝수일 때,

$$\begin{aligned} f(p) \times f(q) &= \sqrt[4]{4 \times 3^p} \times \sqrt[4]{4 \times 3^q} \\ &= \sqrt[4]{16 \times 3^{p+q}} \\ &= \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{3^{p+q}} \\ &= 2 \times \sqrt[4]{3^{p+q}} \end{aligned}$$

여기서 $p+q$ 가 4의 배수일 때, $f(p) \times f(q)$ 는 자연수이다.

두 자연수 p, q 가 각각 10 이하의 짝수이므로 조건에 맞는

순서쌍 (p, q) 는

i) $p+q=4$ 일 때, $(2, 2)$

ii) $p+q=8$ 일 때, $(2, 6), (4, 4), (6, 2)$

iii) $p+q=12$ 일 때, $(2, 10), (4, 8), (6, 6), (8, 4), (10, 2)$

iv) $p+q=16$ 일 때, $(6, 10), (8, 8), (10, 6)$

v) $p+q=20$ 일 때, $(10, 10)$

즉, 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 $1+3+5+3+1=13$ 이다.

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 $13+9+9+13=44$ 이다.

A 150 정답 ⑤ *지수법칙의 활용 [정답률 36%]

(정답 공식: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^m \times a^n = a^{m+n}$)

두 집합 $A = \{3, 4\}$, $B = \{-9, -3, 3, 9\}$ 에 대하여 집합 X 를

$$X = \{x \mid x^a = b, a \in A, b \in B, x \text{는 실수}\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

단서1 a 대신 3, 4를 대입하고, b 대신 $-9, -3, 3, 9$ 를 대입해서 집합 X 의 원소를 모두 찾아보자.

[보기]

ㄱ. $\sqrt[3]{-9} \in X$ 단서2 집합 X 의 원소는 b 의 a 제곱근 중 실수인 것만 해당되므로 $\pm \sqrt[a]{b}$ 의 값 중 실수인 것이 몇 개인지 찾아야 해.

ㄴ. 집합 X 의 원소의 개수는 8이다.

ㄷ. 집합 X 의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 $\sqrt[4]{3^7}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st $a=3, 4$ 를 대입하고, $b=-9, -3, 3, 9$ 를 대입해서 집합 X 의 원소를 모두 찾아보자.

→ x 에 대한 방정식 $x^a = b$ 의 근 중 실수인 것은
① a 가 짝수, b 가 양수일 때 $x = \pm \sqrt[a]{b}$ (두 개) ② a 가 짝수, b 가 음수일 때 없다.
집합 X 의 원소는 ③ a 가 홀수일 때, b 의 값에 관계없이 $x = \sqrt[a]{b}$ (한 개)

$a \backslash b$	-9	-3	3	9
3	$\sqrt[3]{-9}$	$\sqrt[3]{-3}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{9}$
4	없다.	없다.	$\pm \sqrt[4]{3}$	$\pm \sqrt[4]{9}$

이므로

$$X = \{\sqrt[3]{-9}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{9}\}$$

ㄱ. $\sqrt[3]{-9} \in X$ (참)

ㄴ. 집합 X 의 원소의 개수는 8이다. (참)

ㄷ. 집합 X 의 원소 중 양수인 것은 $x = \sqrt[a]{b}$ 에서 x 가 양수이려면 b 가 양수이어야 해.

$\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{9}$ 이므로 양수인 모든 원소의 곱은

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{9} &= 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{2}{4}} \\ &= 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4}} = 3^{\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt[4]{3^7} \text{ (참)}$$

단서3 $\frac{a^m \times a^n = a^{m+n}}{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$
 $\sqrt[n]{a}$ 는 $a^{\frac{1}{n}}$ 로 나타낼 수 있어. 지수법칙을 잘 지켜서 계산하도록 하자.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

A 151 정답 ⑤ *2등급 대비 [정답률 15%]

* m 의 값에 따라 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 순서쌍의 개수 구하기

[유형 06]

자연수 m 에 대하여 집합 A_m 을

$$A_m = \{(a, b) \mid 2^a = \frac{m}{b}, a, b \text{는 자연수}\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ 단서1 $m=4$ 를 직접 대입해서 A_4 의 원소를 나타내봐.

ㄴ. 자연수 k 에 대하여 $m=2^k$ 이면 $n(A_m)=k$ 이다.

ㄷ. $n(A_m)=1$ 이 되도록 하는 두 자리 자연수 m 의 개수는 23이다. 단서2 $n(A_m)=1$ 이 되도록 하는 집합 A_m 의 원소 (a, b) 에 대하여 a, b 의 조건을 따져보자.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

오해 2등급? 이 문제는 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 순서쌍의 개수를 구하는 문제이다.

m 을 소인수분해할 때 2의 지수가 얼마인지 따져볼 수 있어야 한다.

단서+발상

단서1 $m=4$ 를 대입하여 $2^a \times b = 4$ 가 되도록 하는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구한다. 이때 a 가 지수에 있으므로 $a=1$ 부터 차례대로 b 가 자연수가 될 수 있는지 따져본다. (적용)

단서2 $b = \frac{m}{2^a}$ 을 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수가 10이 되도록 하는 m 의 조건을 따져볼 수 있다. (적용)

$a=1$ 부터 차례대로 b 가 자연수가 될 수 있는지 따져보면서 순서쌍의 개수를 세었으므로 $a=1$ 일 때만 되도록 하는 m 의 조건을 구할 수 있다. (해결)

주의: $b = \frac{m}{2^a}$ 에서 $a=p$ 일 때, b 가 자연수가 아니면 $a > p$ 일 때도 b 가 자연수가 될 수 없으므로 $a=1$ 일 때부터 차례대로 따져본다.

(핵심 정답 공식: $2^a \times b = m$, $m=2^k$ 이면 a 는 1부터 k 까지 가능하다.)

[문제 풀이 순서]

1st $m=4$ 를 대입하여 ㄱ의 진위를 판단하자.

ㄱ. 집합 A_4 는 $2^a = \frac{4}{b}$ 에서 $4=2^a \times b$ 인 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 원소로 갖는 집합이므로 $4=2^1 \times 2$, $4=2^2 \times 1$
 $\therefore A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ (참)

2nd $m=2^k$ 을 대입하여 집합 A_m 을 직접 구해보자.

ㄴ. $m=2^k$ 일 때, $A_m = A_{2^k}$

$$A_{2^k} \text{은 } 2^a = \frac{2^k}{b} \text{에서}$$

지수법칙에 의해 $2^{k-a} = b$
 $2^k = 2^a \times b$ 인 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 원소로 갖는 집합이므로

$$A_m = \{(1, 2^{k-1}), (2, 2^{k-2}), (3, 2^{k-3}), \dots, (k, 2^0)\}$$

$\therefore n(A_m) = k$ (참)

3rd $n(A_m)=10$ 이 되기 위한 조건을 따져보고 두 자리 자연수 m 의 개수를 구하자.

ㄷ. $2^a = \frac{m}{b}$ 에서 $m=2^a \times b$ 인 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 가 존재한다고

하자.

단서3

b '은 자연수이고 b 가 짝수일 때 $b=2b'$ 으로 나타낼 수 있고 b 가 홀수일 때 $b=2b'-1$ 로 나타낼 수 있어.



A 내신+수능 대비 단원별 모의고사 문제편 p. 320

모의

A 01 정답 2 * 거듭제곱근의 정의 [정답률 89%]

(정답 공식: $a > 0$ 일 때, n 이 홀수이면 $\sqrt[n]{a}$ 이고, n 이 짝수이면 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ 이다.)

① -216의 세제곱근 중 실수인 것을 a , ② $\frac{1}{81}$ 의 네제곱근 중 실수인 것
단서 거듭제곱근의 정의를 알아야 해. 이때, ①은 음수, ②는 실수의 거듭제곱근이므로 주의하자.
을 b 라 할 때, ab 의 최댓값을 구하시오. (3점)

1st 거듭제곱근의 정의를 이용하여 두 실수 a , b 의 값을 각각 구하자.

-216의 세제곱근을 x 라 하면

$$x^3 = -216 \text{ 이므로 } x^3 + 216 = 0$$

$$(x+6)(x^2-6x+36) = 0$$

이때, $x^2-6x+36=0$ 은 실근을 갖지 않으므로

$$x+6=0 \text{ 에서 } x=-6 \rightarrow x^2-6x+36=0 \text{ 에서 } x=3 \pm 3\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\therefore a = -6$$

$\frac{1}{81}$ 의 네제곱근을 x 라 하면

$$x^4 = \frac{1}{81} \text{ 이므로 } 81x^4 - 1 = 0$$

$$(3x+1)(3x-1)(9x^2+1) = 0$$

이때, $9x^2+1=0$ 은 실근을 갖지 않으므로

$$(3x+1)(3x-1)=0 \text{ 에서 } x=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=\frac{1}{3} \rightarrow 9x^2+1=0 \text{ 에서 } x^2 \geq 0 \text{ 이므로 모든 실수 } x \text{ 에 대}$$

$$\therefore b = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } b = \frac{1}{3}$$

2nd ab 의 최댓값을 구하자.

$$ab = -6 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \text{ 또는 } ab = -6 \times \frac{1}{3} = -2 \text{ 이므로}$$

ab 의 최댓값은 2이다.

모의

A 02 정답 4 * 거듭제곱근의 성질 [정답률 87%]

(정답 공식: $\sqrt[n]{a^n} = a (a > 0)$)

$3 \times \sqrt[3]{16} + 2 \times \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{k}$ 를 만족시키는 자연수 k 에 대하여 $\frac{k}{48}$ 의
단서 $a > 0$ 일 때, $\sqrt[n]{a^n} = a$ 임을 이용하자.
값은? (4점)

- ① 12 ② 36 ③ 54
④ 72 ⑤ 96

1st $a > 0$ 일 때, $\sqrt[n]{a^n} = a$ 지?

$$\begin{aligned} 3 \times \sqrt[3]{16} + 2 \times \sqrt[3]{54} &= 3 \times \sqrt[3]{2^3 \times 2} + 2 \times \sqrt[3]{3^3 \times 2} \\ &= 6 \times \sqrt[3]{2} + 6 \times \sqrt[3]{2} \\ &= 12 \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{12^3 \times 2} \end{aligned}$$

따라서 $k = 12^3 \times 2$ 이므로

$$\frac{k}{48} = \frac{12^3 \times 2}{48} = \frac{12^3 \times 2}{12 \times 2^2} = \frac{144}{2} = 72$$

모의

A 03 정답 2 * 지수법칙 - 밑이 다른 계산(곱셈) [정답률 92%]

(정답 공식: $(a^n)^m = a^{nm}$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 임을 이용한다.)

$8^{\frac{2}{3}} \times 27^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? (2점)

단서 $8=2^3$, $27=3^3$ 임을 이용하자.

- ① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

1st 지수법칙을 이용하자.

$$\begin{aligned} 8^{\frac{2}{3}} \times 27^{-\frac{1}{3}} &= (2^3)^{\frac{2}{3}} \times (3^3)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 2^2 \times 3^{-1} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (a^n)^m = a^{nm} \\ a^{-1} = \frac{1}{a} \end{array}$$

모의

A 04 정답 16 * 거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 67%]

(정답 공식: 어떤 자연수의 n 제곱근은 n 제곱을 했을 때 자연수가 나옴을 의미한다.)

$2 \leq n \leq 100$ 인 자연수 n 에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$ 이 어떤 자연수의 n 제
곱근이 되도록 하는 n 의 개수를 구하시오. (4점)

단서 어떤 자연수를 N 이라 하면 $\sqrt[n]{N}$ 이지? 이때, n 은 자연수이고 $2 \leq n \leq 100$ 이야.

1st 어떤 자연수를 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$ 으로 나타내.

어떤 자연수를 N 이라 하면 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$ 이 자연수 N 의 n 제곱근이므로
 x 가 a 의 n 제곱근이면 $x^n = a$ 이야.

$$\left\{ (\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}} \right\}^n = \left\{ (3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}} \right\}^n = 3^{\frac{5n}{6}} = N$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a \quad n = 6k \text{ (} k \text{는 자연수)라 하면 } \frac{5}{6}n = \frac{5}{6} \times 6k = 5k \text{도 자연수야.}$$

2nd N , n 이 자연수이니까 $2 \leq n \leq 100$ 에서 n 의 개수를 구해.

n 이 6의 배수이면 N 은 3의 거듭제곱으로 자연수가 된다.

즉, n 의 개수는 100 이하의 자연수 중 6의 배수의 개수와 같다.

$$\text{따라서 자연수 } n \text{의 개수는 16이다. } \frac{100}{6} = 16 \times \times \times$$

모의

A 05 정답 30 * 지수법칙의 활용 [정답률 69%]

(정답 공식: 최소의 자연수 n 은 2, 5, 6의 최소공배수가 되어야 한다.)

세 양수 a , b , c 에 대하여 $a^6=3$, $b^5=7$, $c^2=11$ 일 때, $(abc)^n$ 이
자연수가 되는 최소의 자연수 n 의 값을 구하시오. (3점)

단서 $(abc)^n$ 이 자연수가 되려면 (abc) 의 자수가 0, 1, 2, ...가 되어야 해. 이때, a , b , c 는
자수가 유리수인 수니까 그 곱의 자수가 자연수가 되는 경우를 생각해 보자.

1st 세 양수 a , b , c 를 자수가 유리수인 수로 간단히 나타내.

$$\begin{aligned} a^6 &= 3 \text{ 에서 } a = 3^{\frac{1}{6}} \\ a^6 &= 3 \text{ 이면 } a \text{는 3의 6제곱근이지? 즉, } a = \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{6}} \text{이야.} \end{aligned}$$

$$b^5 = 7 \text{ 에서 } b = 7^{\frac{1}{5}}$$

$$c^2 = 11 \text{ 에서 } c = 11^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore (abc)^n = (3^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{1}{5}} \times 11^{\frac{1}{2}})^n \cdots \textcircled{1}$$

실수

$(a^n \times b^m)^l = a^{n \times l} \times b^{m \times l}$ 이므로
6, 5, 2의 최소공배수를 구해야 해.

2nd 주어진 값이 자연수가 되기 위한 조건을 생각하여 n 의 값을 구해.

①이 자연수가 되려면 n 은 6, 5, 2의 공배수가 되어야 한다.

세 수 a , b , c 를 곱한 수의 자수가 0 또는 자연수이어야 해. 즉 ①의 자수로 자연수를 만들어야 하니까
자수의 분수를 통분해야 해.

따라서 최소의 자연수 n 은 6, 5, 2의 최소공배수이므로 30이다.
공배수 중에서 가장 작은 것을 최소공배수라 해.