상위 1% 도전을 위한 최고의 명품 일등급 문제

일등급 수학

THE FIRST CLASS MATHEMATICS

미적분 Ⅰ

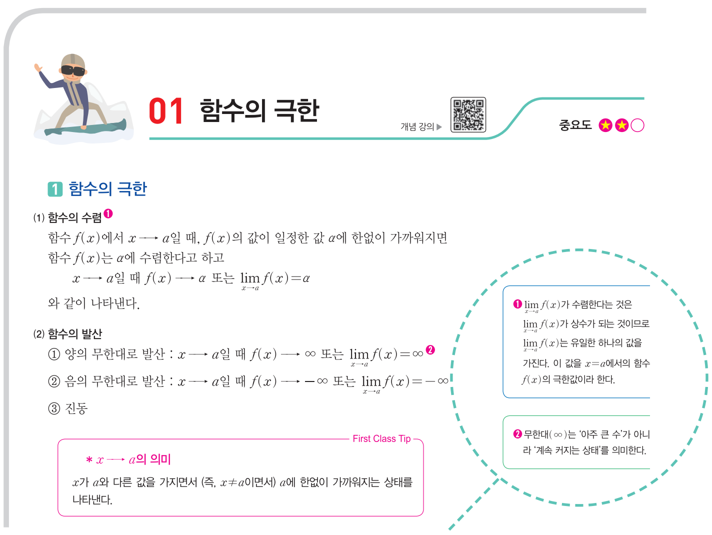
구성과 특징

학교 시험, 수능 1등급을 위한
최고의 명품 수학 문제집!
일등급 수학

1 개념 정리 – 1등급을 위한 핵심 개념과 Tip

중단원 핵심 내용을 정리하여 혹시 잊을 수 있는 개념을 다시 한 번 최종 점검해 볼 수 있습니다.

- **중요도** ★★★
  시험에 자주 나오는 단원의 중요도 제시
- **First Class Tip**
  일등급 수학만의 명품 Tip을 제시하여 시험에서 요긴하게 사용할 수 있습니다.



01 함수의 극한

개념 강의 ▶

중요도 ★★☆

1 함수의 극한

(1) 함수의 수렴 ❶

함수 $f(x)$에서 $x \longrightarrow a$일 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고

$x \longrightarrow a$일 때 $f(x) \longrightarrow \alpha$ 또는 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$

와 같이 나타낸다.

(2) 함수의 발산

① 양의 무한대로 발산 : $x \longrightarrow a$일 때 $f(x) \longrightarrow \infty$ 또는 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ❷

② 음의 무한대로 발산 : $x \longrightarrow a$일 때 $f(x) \longrightarrow -\infty$ 또는 $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

③ 진동

First Class Tip

* $x \longrightarrow a$의 의미

x가 a와 다른 값을 가지면서 (즉, $x \neq a$이면서) a에 한없이 가까워지는 상태를 나타낸다.

❶ $\lim_{x\to a} f(x)$가 수렴한다는 것은 $\lim_{x\to a} f(x)$가 상수가 되는 것이므로 $\lim_{x\to a} f(x)$는 유일한 하나의 값을 가진다. 이 값을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값이라 한다.

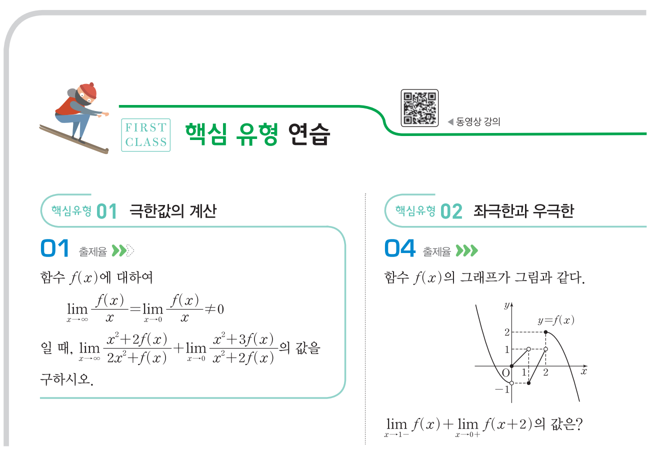
❷ 무한대(∞)는 '아주 큰 수'가 아니라 '계속 커지는 상태'를 의미한다.

공식이 유도되는 과정이나 확장 개념을 보조단에 제시하였습니다.

2 핵심 유형 연습 – 가장 중요한 유형 연습

대표 문제 ➡ 유제 ➡ 발전 문제가 하나의 세트로 구성되어 있어서 핵심 유형을 효과적으로 정복할 수 있습니다.
일등급 실력으로 가는 입문 과정이므로 스스로 충분히 풀 수 있다면 수학 실력이 한층 더 업그레이드될 것입니다.

- 출제율 ❯❯❯
  학교시험과 학력평가, 수능에서 출제되는 정도를 표시하였습니다.



FIRST CLASS 핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 극한값의 계산

01 출제율 ❯❯❯

함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\neq 0$$

일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2f(x)}{2x^2+f(x)}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3f(x)}{x^2+2f(x)}$의 값을 구하시오.

핵심유형 02 좌극한과 우극한

04 출제율 ❯❯❯

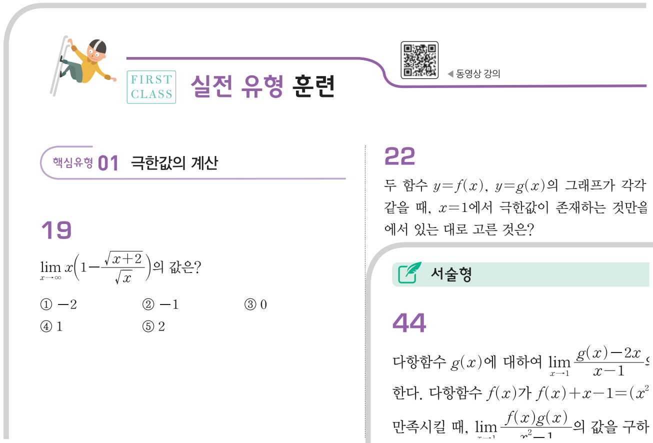
함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 0+} f(x+2)$의 값은?

3 실전 유형 훈련 – 실전 유형을 단계적으로 파악

핵심 유형 연습에서 배운 것을 학교시험이나 수능에 어떻게 적용하는지 훈련하는 단계입니다. 단순 반복이 아닌 확장된 개념과 유형을 학습할 수 있는 문제로 구성되어 있습니다.

- 서술형
  학교시험에서 출제되는 서술형 유형을 완벽히 분석해 구성한 문제입니다.



FIRST CLASS 실전 유형 훈련 ◀동영상 강의

핵심유형 01 극한값의 계산

19

$\lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}\right)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

22

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 … 같을 때, $x=1$에서 극한값이 존재하는 것만을 … 에서 있는 대로 고른 것은?

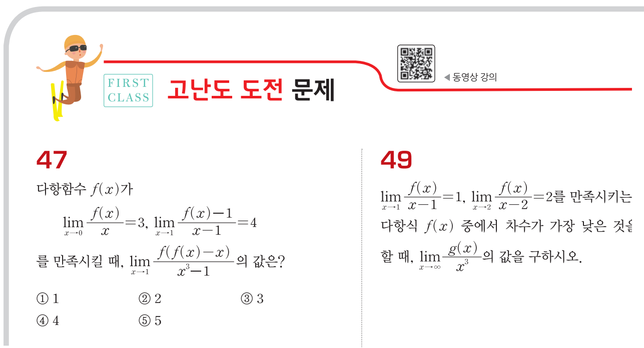
서술형

44

다항함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$ … 한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x^2$ … 만족시킬 때, $\lim \frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값을 구하…

4 고난도 도전 문제 – 일등급을 위한 고난도 명품 문제

여러 개념을 종합적으로 이해하고 적용해야 풀 수 있는 명품 문제로 구성되어 있습니다. 종합적 사고력을 키울 수 있어 수학시험에서 완벽한 1등급을 받을 수 있습니다.



FIRST CLASS 고난도 도전 문제 ◀동영상 강의

47

다항함수 $f(x)$가

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=4$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(f(x)-x)}{x^3-1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

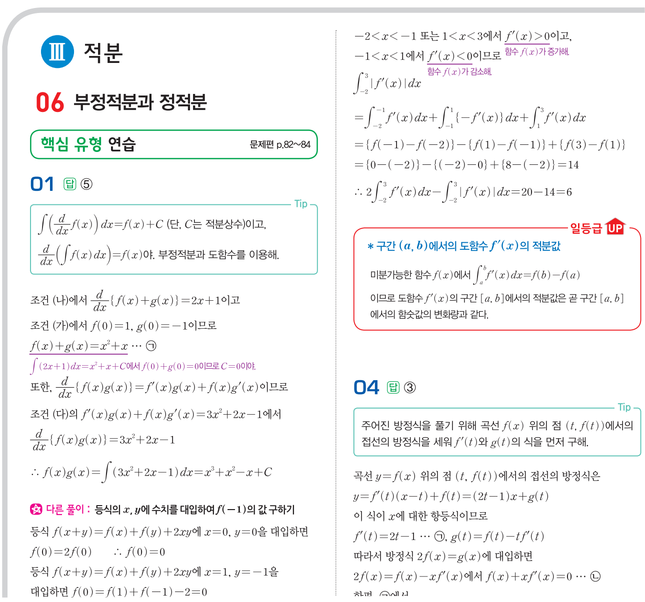
49

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=2$를 만족시키는 다항식 $f(x)$ 중에서 차수가 가장 낮은 것을 … 할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3}$의 값을 구하시오.

5 정답 및 해설 – 정확하고 명쾌한 해설

일등급 수학만의 접근 방법으로 쉽고 간단하게 고난도 문제의 해답을 구하는 방법을 습득할 수 있습니다.

- Tip
  핵심 유형 문제의 풀이 전략에 필요한 Tip을 제시하였습니다.
- 다른 풀이
  단순한 풀이가 아닌 사고를 전환하여 여러 관점에서 접근하는 방법을 배울 수 있습니다.
- 일등급 UP
  개념을 확장시켜 문제에 더 쉽게 접근할 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.



Ⅲ 적분

06 부정적분과 정적분

핵심 유형 연습 문제편 p.82~84

01 답 ⑤

Tip $\int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)이고, $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$야. 부정적분과 도함수를 이용해.

조건 (나)에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1$이고

조건 (가)에서 $f(0)=1$, $g(0)=-1$이므로

$f(x)+g(x)=x^2+x$ ⋯ ㉠

또한, $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

조건 (다)의 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=3x^2+2x-1$에서

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+2x-1$

$\therefore f(x)g(x)=\int(3x^2+2x-1)dx=x^3+x^2-x+C$

다른 풀이: 등식의 x, y에 수치를 대입하여 $f(-1)$의 값 구하기

등식 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)$ $\therefore f(0)=0$

등식 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=1$, $y=-1$을 대입하면 $f(0)=f(1)+f(-1)-2=0$

$-2<x<-1$ 또는 $1<x<3$에서 $f'(x)>0$이고, $-1<x<1$에서 $f'(x)<0$이므로

$=\int_{-2}^{-1}f'(x)dx+\int_{-1}^{1}\{-f'(x)\}dx+\int_{1}^{3}f'(x)dx$

$=\{f(-1)-f(-2)\}-\{f(1)-f(-1)\}+\{f(3)-f(1)\}$

$=\{0-(-2)\}-\{(-2)-0\}+\{8-(-2)\}=14$

$\therefore 2\int_{-2}^{3}f'(x)dx-\int_{-2}^{3}|f'(x)|dx=20-14=6$

일등급 UP

* 구간 (a, b)에서의 도함수 $f'(x)$의 적분값

미분가능한 함수 $f(x)$에서 $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$이므로 도함수 $f'(x)$의 구간 $[a, b]$에서의 적분값은 곧 구간 $[a, b]$에서의 함숫값의 변화량과 같다.

04 답 ③

Tip 주어진 방정식을 풀기 위해 곡선 $f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식을 세워 $f'(t)$와 $g(t)$의 식을 먼저 구해.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)=(2t-1)x+g(t)$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$f'(t)=2t-1$ ⋯ ㉠, $g(t)=f(t)-tf'(t)$

따라서 방정식 $2f(x)=g(x)$에 대입하면

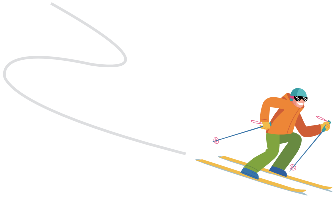
$2f(x)=f(x)-xf'(x)$에서 $f(x)+xf'(x)=0$ ⋯ ㉡

차 례

Ⅲ 적분

06 부정적분과 정적분

07 정적분의 활용



I 함수의 극한과 연속

어떤 지역에서 남녀가 태어날 확률이 같을 때 부부가 남자아이를 낳을 때까지 계속 아이를 낳고, 남자아이를 낳은 후 더 이상 아이를 가지지 않는다고 하면 그 지역의 남자아이와 여자아이의 성비는 1 : 1이 됩니다. 극한은 접근의 방식을 적용한 학문으로 통계나 미적분학 등의 기초가 되는 매우 중요한 개념입니다.

01 함수의 극한

개념 강의 ▶

중요도 ★★☆

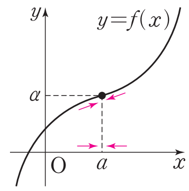
1 함수의 극한

(1) 함수의 수렴[1]

함수 $f(x)$에서 $x \longrightarrow a$일 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고

$$x \longrightarrow a\text{일 때 } f(x) \longrightarrow \alpha \text{ 또는 } \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

와 같이 나타낸다.



[1] $\lim_{x\to a} f(x)$가 수렴한다는 것은 $\lim_{x\to a} f(x)$가 상수가 되는 것이므로 $\lim_{x\to a} f(x)$는 유일한 하나의 값을 가진다. 이 값을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값이라 한다.

(2) 함수의 발산

① 양의 무한대로 발산 : $x \longrightarrow a$일 때 $f(x) \longrightarrow \infty$ 또는 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$[2]

② 음의 무한대로 발산 : $x \longrightarrow a$일 때 $f(x) \longrightarrow -\infty$ 또는 $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

③ 진동

[2] 무한대(∞)는 '아주 큰 수'가 아니라 '계속 커지는 상태'를 의미한다.

First Class Tip

*** $x \longrightarrow a$의 의미**

x가 a와 다른 값을 가지면서 (즉, $x\neq a$이면서) a에 한없이 가까워지는 상태를 나타낸다.

2 좌극한과 우극한

(1) 좌극한과 우극한

① $\boldsymbol{x \longrightarrow a-}$ (좌극한)

x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워지는 상태

② $\boldsymbol{x \longrightarrow a+}$ (우극한)

x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워지는 상태

(2) 극한의 존재[3]

① $x=a$에서의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 같을 때, $x=a$에서의 극한이 존재한다.

② $x=a$에서의 좌극한과 우극한이 서로 다르면 $x=a$에서의 극한이 존재하지 않는다.

[3] $\lim_{x\to a} f(x)$에서 $\lim_{x\to a+} f(x)$의 값과 $\lim_{x\to a-} f(x)$의 값을 구하고 두 값을 비교하였을 때 같으면 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다고 하고, 그 값을 $\lim_{x\to a} f(x)$의 극한값이라 한다.

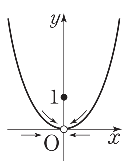
First Class Tip

*** 함숫값과 극한값**

함수 $f(x)$의 극한을 생각할 때, $x=a$에서 함숫값이 존재하지 않아도 $x \longrightarrow a$일 때의 극한값이 존재할 수도 있고, $x=a$에서의 함숫값과 $x \longrightarrow a$일 때의 극한값은 다를 수 있다.

예 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$에서

$f(0)=1$이지만 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$이다.



3 함수의 극한의 성질

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

① $\lim_{x\to a} kf(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

② $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$ (복부호동순)

③ $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

④ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq 0$)

(2) 함수의 극한의 대소 관계

① $f(x)<g(x)$이고, $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$이면 $\alpha\leq\beta$

② $f(x)<h(x)<g(x)$이고, $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$

4 부정형의 극한의 계산[4], [5]

(1) $\dfrac{0}{0}$의 꼴

① 분수식 : 분모, 분자를 인수분해한 후 약분한다.

② 무리식 : 분모 또는 분자를 유리화한다.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$의 꼴 : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

(3) $0\times\infty$의 꼴 : $\dfrac{\infty}{\infty}$ 또는 $\dfrac{0}{0}$의 꼴로 변형한다.

(4) $\infty-\infty$의 꼴 : 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

5 미정계수의 결정

(1) 미정계수의 결정

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때,

① $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} f(x)=0$

② $\alpha\neq 0$이고 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} g(x)=0$

(2) 함수의 결정[6]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때,

① $\alpha\neq 0$이면

(i) (분자의 차수)=(분모의 차수)

(ii) $\alpha=\dfrac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})}$

② $\alpha=0$이면 (분자의 차수)<(분모의 차수)

[4] 수렴하는 함수의 극한을 이용하여 다른 함수의 극한을 구할 때에는 수렴하는 함수를 치환하고, 극한을 구하고자 하는 함수를 치환한 함수로 정리하여 구하는 것이 일반적이다.

[5] $\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$

(단, 역은 성립하지 않는다.)

예 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1+}\dfrac{1}{x-1}=\infty \\ \lim_{x\to 1-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty \end{cases}$

[6] 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 $\dfrac{0}{0}$의 꼴이면 함수의 최저차항이 극한을 결정한다.

(2) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 $\dfrac{\infty}{\infty}$의 꼴이면 함수의 최고차항이 극한을 결정한다.

FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 극한값의 계산

01 출제율

함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a \text{ (단, } a\neq 0\text{인 상수)}$$

일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2f(x)}{2x^2+f(x)}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3f(x)}{x^2+2f(x)}$의 값을 구하시오.

02 출제율

$a>2$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{|x-a|-(a-2)}{x-2}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

03 출제율

서로 다른 두 실수 a, b와 자연수 n에 대하여

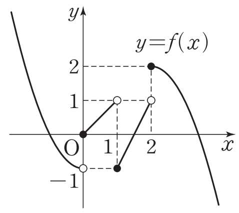
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+4x^2+a^2}+b}{x^n}=\frac{1}{2}$$

일 때, $a-b+n$의 값을 구하시오.

핵심유형 02 좌극한과 우극한

04 출제율

함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

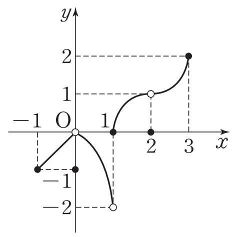


$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x+2)$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

05 출제율

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 극한값이 존재하는 것만을 [보기]에서 있는 대로 고르시오.



| 보기 |

ㄱ. $\lim_{x\to 1}f(x)$

ㄴ. $\lim_{x\to 0}f(x^2+1)$

ㄷ. $\lim_{x\to 1}f(x-1)f(x)$

06 출제율

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}|x|\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=a,\ \lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.)

핵심유형 01 극한값의 계산

19

$\lim_{x \to \infty} x\left(1-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}\right)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

20

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 f(x)+2g(x)}{2x^2 f(x)-g(x)}$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여
$x^2\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+g(x)-x^2=0$
이 성립한다.
(나) $\lim_{x \to 0} f(x)=6$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

21

집합 $A=\{x \mid |x| \le 10, x\text{는 정수}\}$의 세 원소 a, b, c가

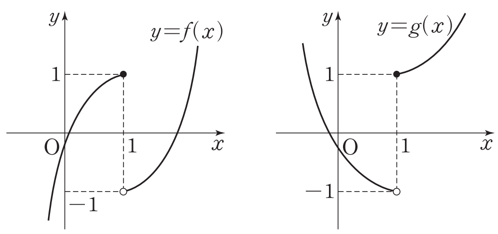
$$\lim_{x \to 1} \frac{4x^2-5x+a}{(x-a)(x-b)}=c$$

를 만족시킬 때, $|a \times b \times c|$의 최댓값을 구하시오.

핵심유형 02 좌극한과 우극한

22

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 그림과 같을 때, $x=1$에서 극한값이 존재하는 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



| 보기 |

ㄱ. $f(x)+g(x)$ ㄴ. $f(x)g(x)$
ㄷ. $\frac{f(x)}{g(x)}$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23

$x=1$에서 극한값이 존재하는 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

| 보기 |

ㄱ. $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$

ㄴ. $g(x)=\begin{cases} x+1 & (x \ne 1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$

ㄷ. $h(x)=\frac{[x-1]}{x-1}$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 및 해설 7~9p

24

함수

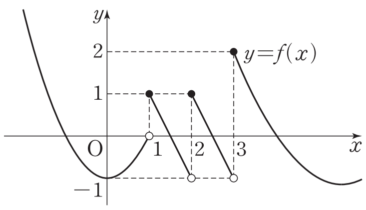
$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3 & (x\le 1) \\ ax+b & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 $f(k)+\lim_{x\to k+} f(x)=6$을 만족시키는 실수 k의 개수가 4이고, 이 네 실수의 합이 3이다.
이때, $f(\alpha)+\lim_{x\to\alpha} f(x)=12$를 만족하는 모든 실수 α의 값들의 합 S에 대하여 $a+b+S$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

25

함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $g(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x\le k) \\ bx+c & (x>k) \end{cases}$에 대하여

$$\lim_{x\to 1} f(x)g(x),\ \lim_{x\to 2} f(x)g(x),\ \lim_{x\to 3} f(x)g(x)$$

가 모두 존재할 때, $a+b+c+k$의 값은?

① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

26

두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} (x+a)^2 & (x\le 0) \\ (x+b)^2 & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> $\lim_{t\to k-} g(t)\ne\lim_{t\to k+} g(t)$와 $\lim_{t\to 4k-} g(t)\ne\lim_{t\to 4k+} g(t)$를 모두 만족시키는 양수 k가 존재한다.

$\lim_{t\to 16-} g(t)+\lim_{t\to 16+} g(t)=5$가 되도록 하는 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a\times b$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

핵심유형 03 극한의 성질

27

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)=1$이면 $f(0)=1$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1} f(x)=0$이면 $\lim_{x\to\infty} f\left(1+\frac{2}{x}\right)=0$이다.

ㄷ. $\lim_{x\to\infty} f\left(1+\frac{2}{x}\right)=0$이면 $\lim_{x\to 1} f(x)=0$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

47

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=3,\ \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-1}{x-1}=4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(f(x)-x)}{x^3-1}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

48

n이 자연수일 때, $\lim_{x \to 0} \frac{1-x^n-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$의 극한값이 존재하기 위한 n의 최솟값은 α이고, 그때의 극한값은 β이다. 이때, $\alpha+2\beta$의 값을 구하시오.

49

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=1$, $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2}=2$를 만족시키는 x에 대한 다항식 $f(x)$ 중에서 차수가 가장 낮은 것을 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x^3}$의 값을 구하시오.

50

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M \times m$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \to \infty} x\left|f\left(\frac{x+1}{x}\right)-3\right| = \lim_{x \to -\infty} x\left|f\left(\frac{x+1}{x}\right)-3\right|$

(나) $x>1$인 실수 x에 대하여 $f(x) \geq -x+4$, $x<1$인 실수 x에 대하여 $f(x) \leq -x+4$이다.

정답 및 해설 14~17p

Ⅰ 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

핵심 유형 연습

문제편 p.10~12

01 답 2

Tip

주어진 식을 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 꼴로 변형해.

함수의 극한에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0}x=0$이야.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a$ (단, $a\neq0$인 상수)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2f(x)}{2x^2+f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}{2+\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}=\frac{1+2a\times0}{2+a\times0}=\frac{1}{2}$$

또, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+3f(x)}{x^2+2f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\frac{3f(x)}{x}}{x+\frac{2f(x)}{x}}=\frac{0+3a}{0+2a}=\frac{3}{2}$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2f(x)}{2x^2+f(x)}+\lim_{x\to0}\frac{x^2+3f(x)}{x^2+2f(x)}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$$

02 답 ②

$$\lim_{x\to2}\frac{|x-a|-(a-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{|x-a|-(a-2)}{x-2}\times\frac{|x-a|+(a-2)}{|x-a|+(a-2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{|x-a|^2-(a-2)^2}{(x-2)(|x-a|+a-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2ax+a^2-(a^2-4a+4)}{(x-2)(|x-a|+a-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-2a+2)}{(x-2)(|x-a|+a-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2a+2}{|x-a|+a-2}$$
$$=\frac{-2a+4}{|2-a|+a-2}=\frac{-2(a-2)}{2(a-2)}\ (\because a>2)=-1$$

03 답 10

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^4+4x^2+a^2}+b}{x^n}$이 수렴하고 $\lim\limits_{x\to0}x^n=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x^4+4x^2+a^2}+b)=\sqrt{a^2}+b=|a|+b=0$

$\therefore b=-a\ (\because a\neq b)$

즉,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^4+4x^2+a^2}+b}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^4+4x^2+a^2}-a}{x^n}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^4+4x^2}{x^n(\sqrt{x^4+4x^2+a^2}+a)}=\frac{1}{2}$$

이때, $n=2$이므로

분자의 차수와 분모의 차수가 같아야 해.

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2(x^2+4)}{x^2(\sqrt{x^4+4x^2+a^2}+a)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+4}{\sqrt{x^4+4x^2+a^2}+a}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{a^2}+a}=\frac{2}{a}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=4,\ b=-4\ (\because b=-a)$

따라서 $a-b+n=4-(-4)+2=10$이다.

04 답 ⑤

Tip

그래프를 통해 좌극한과 우극한을 확인하면 돼.
$x\to0+$는 우극한이므로 $x+2$는 2보다 큰 값을 가지면서 2에 한없이 가까워지는 상태야.

$x+2=t$라 하면 $x\to0+$일 때 $t\to2+$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x+2)=\lim\limits_{t\to2+}f(t)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to0+}f(x+2)=1+2=3$

05 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=0$

즉, 좌극한과 우극한이 다르므로 극한값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $x^2+1=t$라 하면 $x\to0$일 때, $t\to1+$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x^2+1)=\lim\limits_{t\to1+}f(t)=0$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1}f(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x-1)f(x)=0\times(-2)=0$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x-1)f(x)=0\times0=0$

즉, 좌극한과 우극한이 같으므로 극한값이 존재한다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

06 답 5

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+cx+d$ (c, d는 상수)라 하면

$\lim\limits_{x\to0}|x|\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=a$이므로

$$\lim_{x\to0+}x\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=\lim_{x\to0-}(-x)\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}$$
$$=a$$

(i) $\lim_{x\to0+} x\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=a$에서

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x\longrightarrow 0+$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+} x\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(2t)-f(-2t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2+2ct+d)-(4t^2-2ct+d)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{4ct}{t}=4c$$

(ii) $\lim_{x\to0-}(-x)\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=a$에서

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x\longrightarrow 0-$일 때 $t\longrightarrow-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0-}(-x)\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=\lim_{t\to-\infty}\frac{f(2t)-f(-2t)}{-t}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{(4t^2+2ct+d)-(4t^2-2ct+d)}{-t}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{4ct}{-t}=-4c$$

(i), (ii)에 의하여 $4c=-4c=a$에서 $c=0$, $a=0$

$\therefore f(x)=x^2+d$

또, $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=1$에서

$$\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+d\right)}_{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0}=d=1$$

따라서 $f(x)=x^2+1$이므로 $f(2)=2^2+1=5$이다.

07 답 ②

> **Tip**
> $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$에서 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이지만 $\lim_{x\to a}g(x)\neq0$인 경우와 $x=a$에서의 좌극한과 우극한이 서로 다른 경우에는 $x=a$에서의 극한이 존재하지 않아.

ㄱ. 【반례】 $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{x}$이라 하면 $\lim_{x\to0}f(x)=0$,

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$으로 극한값이 존재하지만

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\times\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to a}g(x)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta \text{ (참)}$$

ㄷ. 【반례】 $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이라 하면

$\lim_{x\to0}f(x)=0$이고,

$\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이지만

$\lim_{x\to0}g(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

08 답 ③

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-2g(x)\}=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-3g(x)}{5f(x)-2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{2}f(x)+\frac{3}{2}\{f(x)-2g(x)\}}{4f(x)+\{f(x)-2g(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\left\{\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)}\right\}}{4+\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)}}=\frac{5}{8}$$

09 답 1

(i) $x>2$일 때,

$x-2>0$이므로 부등호는 변하지 않아.

$$\frac{x^2-3x+2}{x-2}\leq\frac{f(x)}{x-2}\leq\frac{2x^2-7x+6}{x-2}\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to2+}(x-1)\leq\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{x-2}\leq\lim_{x\to2+}(2x-3)$$

$$1\leq\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{x-2}\leq1 \qquad \therefore \lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{x-2}=1$$

(ii) $x<2$일 때,

$x-2<0$이므로 부등호는 변해.

$$\frac{x^2-3x+2}{x-2}\geq\frac{f(x)}{x-2}\geq\frac{2x^2-7x+6}{x-2}\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to2-}(x-1)\geq\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{x-2}\geq\lim_{x\to2-}(2x-3)$$

$$1\geq\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{x-2}\geq1 \qquad \therefore \lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{x-2}=1$$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{x-2}=1$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=1$이다.

10 답 ①

> **Tip**
> $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이야.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

따라서 $f(x)=(x-1)g(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)g(x)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x+1}=\frac{g(1)}{2}=2\text{에서 } g(1)=4$$

또한, $f(x)=(x-1)g(x)$이므로

$f(x+2)=\{(x+2)-1\}g(x+2)=(x+1)g(x+2)$

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{f(x+2)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)g(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{g(x+2)}{x-1}=\frac{g(1)}{-2}=\frac{4}{-2}=-2$$