상위 1% 도전을 위한 최고의 명품 일등급 문제

일등급 수학

THE FIRST CLASS MATHEMATICS

확률과 통계

구성과 특징

학교 시험, 수능 1등급을 위한
최고의 명품 수학 문제집!
일등급 수학

1 개념 정리 – 1등급을 위한 핵심 개념과 Tip

중단원 핵심 내용을 정리하여 혹시 잊을 수 있는 개념을 다시 한 번 최종 점검해 볼 수 있습니다.

- **중요도** ★★★
  시험에 자주 나오는 단원의 중요도 제시
- **First Class Tip**
  일등급 수학만의 명품 Tip을 제시하여 시험에서 요긴하게 사용할 수 있습니다.

01 순열과 조합

개념 강의 ▶ 중요도 ★★○

1 중복순열

(1) 서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열을 **중복순열**이라고 한다.

(2) **중복순열의 수**❶
서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는
$${}_n\Pi_r = n^r$$ ❷

2 같은 것이 있는 순열

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는
$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \text{ (단, } p+q+\cdots+r=n)$$ ❸

❶ ${}_n\Pi_r$의 Π는 곱을 뜻하는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라고 읽는다.

❷ ${}_nP_r$에서는 $n \ge r$이지만, ${}_n\Pi_r$에서는 중복하여 택할 수 있으므로 $n < r$일 수도 있다.

공식이 유도되는 과정이나 확장 개념을 보조단에 제시하였습니다.

2 핵심 유형 연습 – 가장 중요한 유형 연습

대표 문제 ➔ 유제 ➔ 발전 문제가 하나의 세트로 구성되어 있어서 핵심 유형을 효과적으로 정복할 수 있습니다.
일등급 실력으로 가는 입문 과정이므로 스스로 충분히 풀 수 있다면 수학 실력이 한층 더 업그레이드될 것입니다.

- 출제율 ⟫⟫⟫
  학교시험과 학력평가, 수능에서 출제되는 정도를 표시하였습니다.

FIRST CLASS 핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 중복순열

01 출제율 ⟫⟫⟫

서로 다른 과일 5개를 세 그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에 2개 이상의 과일을 담는 방법의 수를 구하시오. (단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.)

핵심유형 02 같은 것이 있는 순열

04 출제율 ⟫⟫⟫

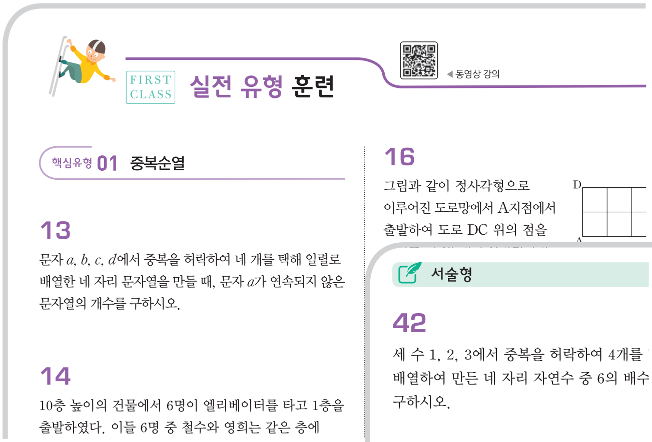
일곱 개의 문자 a, a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하려고 한다. 문자 c끼리는 이웃해도 되지만 문자 a와 b는 같은 문자끼리 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는?

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

3 실전 유형 훈련 – 실전 유형을 단계적으로 파악

핵심 유형 연습에서 배운 것을 학교시험이나 수능에 어떻게 적용하는지 훈련하는 단계입니다. 단순 반복이 아닌 확장된 개념과 유형을 학습할 수 있는 문제로 구성되어 있습니다.

- **서술형**
  학교시험에서 출제되는 서술형 유형을 완벽히 분석해 구성한 문제입니다.



FIRST CLASS 실전 유형 훈련

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 중복순열

13

문자 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 배열한 네 자리 문자열을 만들 때, 문자 a가 연속되지 않은 문자열의 개수를 구하시오.

14

10층 높이의 건물에서 6명이 엘리베이터를 타고 1층을 출발하였다. 이들 6명 중 철수와 영희는 같은 층에

16

그림과 같이 정사각형으로 이루어진 도로망에서 A지점에서 출발하여 도로 DC 위의 점을

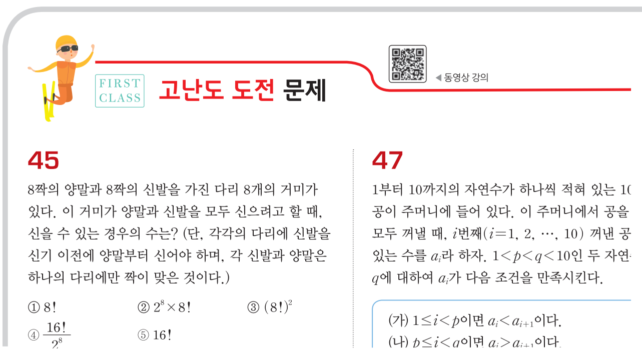
서술형

42

세 수 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 4개를 배열하여 만든 네 자리 자연수 중 6의 배수 구하시오.

4 고난도 도전 문제 – 일등급을 위한 고난도 명품 문제

여러 개념을 종합적으로 이해하고 적용해야 풀 수 있는 명품 문제로 구성되어 있습니다. 종합적 사고력을 키울 수 있어 수학시험에서 완벽한 1등급을 받을 수 있습니다.



FIRST CLASS 고난도 도전 문제

◀ 동영상 강의

45

8짝의 양말과 8짝의 신발을 가진 다리 8개의 거미가 있다. 이 거미가 양말과 신발을 모두 신으려고 할 때, 신을 수 있는 경우의 수는? (단, 각각의 다리에 신발을 신기 이전에 양말부터 신어야 하며, 각 신발과 양말은 하나의 다리에만 짝이 맞은 것이다.)

① $8!$ ② $2^8\times 8!$ ③ $(8!)^2$ ④ $\frac{16!}{2^8}$ ⑤ $16!$

47

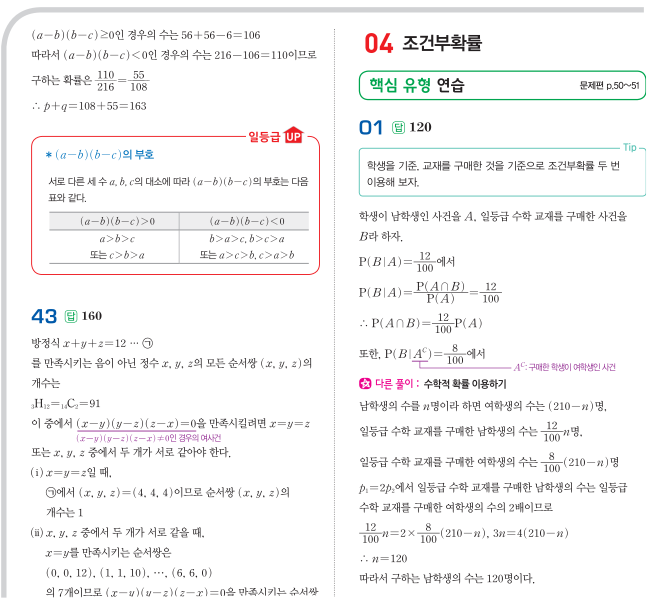
1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 1(공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 모두 꺼낼 때, i번째($i=1, 2, \cdots, 10$) 꺼낸 공 있는 수를 a_i라 하자. $1<p<q<10$인 두 자연 q에 대하여 a_i가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1\le i<p$이면 $a_i<a_{i+1}$이다.
(나) $p\le i<q$이면 $a_i>a_{i+1}$이다.

5 정답 및 해설 – 정확하고 명쾌한 해설

일등급 수학만의 접근 방법으로 쉽고 간단하게 고난도 문제의 해답을 구하는 방법을 습득할 수 있습니다.

- **Tip**
  핵심 유형 문제의 풀이 전략에 필요한 Tip을 제시하였습니다.
- **다른 풀이**
  단순한 풀이가 아닌 사고를 전환하여 여러 관점에서 접근하는 방법을 배울 수 있습니다.
- **일등급 UP**
  개념을 확장시켜 문제에 더 쉽게 접근할 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.



$(a-b)(b-c)\ge 0$인 경우의 수는 $56+56-6=106$
따라서 $(a-b)(b-c)<0$인 경우의 수는 $216-106=110$이므로
구하는 확률은 $\frac{110}{216}=\frac{55}{108}$
$\therefore p+q=108+55=163$

일등급 UP

* $(a-b)(b-c)$의 부호

서로 다른 세 수 a, b, c의 대소에 따라 $(a-b)(b-c)$의 부호는 다음 표와 같다.

$(a-b)(b-c)>0$	$(a-b)(b-c)<0$
$a>b>c$ 또는 $c>b>a$	$b>a>c$, $b>c>a$ 또는 $a>c>b$, $c>a>b$

43 답 160

방정식 $x+y+z=12$ ⋯ ㉠
를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_2=91$
이 중에서 $\underbrace{(x-y)(y-z)(z-x)=0}_{(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0\text{인 경우의 여사건}}$을 만족시킬려면 $x=y=z$ 또는 x, y, z 중에서 두 개가 서로 같아야 한다.
(i) $x=y=z$일 때,
㉠에서 $(x, y, z)=(4, 4, 4)$이므로 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 1
(ii) x, y, z 중에서 두 개가 서로 같을 때,
$x=y$를 만족시키는 순서쌍은
$(0, 0, 12)$, $(1, 1, 10)$, $\cdots$, $(6, 6, 0)$
의 7개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍

04 조건부확률

핵심 유형 연습 문제편 p.50~51

01 답 120

Tip
학생을 기준, 교재를 구매한 것을 기준으로 조건부확률 두 번 이용해 보자.

학생이 남학생인 사건을 A, 일등급 수학 교재를 구매한 사건을 B라 하자.
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{12}{100}$에서
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{12}{100}$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{12}{100}\mathrm{P}(A)$
또한, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{8}{100}$에서
A^C: 구매한 학생이 여학생인 사건

다른 풀이 : 수학적 확률 이용하기
남학생의 수를 n명이라 하면 여학생의 수는 $(210-n)$명,
일등급 수학 교재를 구매한 남학생의 수는 $\frac{12}{100}n$명,
일등급 수학 교재를 구매한 여학생의 수는 $\frac{8}{100}(210-n)$명
$p_1=2p_2$에서 일등급 수학 교재를 구매한 남학생의 수는 일등급 수학 교재를 구매한 여학생의 수의 2배이므로
$\frac{12}{100}n=2\times\frac{8}{100}(210-n)$, $3n=4(210-n)$
$\therefore n=120$
따라서 구하는 남학생의 수는 120명이다.

차 례

Ⅰ 경우의 수

Ⅱ 확률

Ⅲ 통계

05 확률분포

06 정규분포

07 통계적 추정

I 경우의 수

01 순열과 조합

02 이항정리

순열과 조합은 경우의 수를 구할 때 사용되며, 자리의 배치, 수의 배열, 물건의 배분, 경로 계산 등 경우의 수를 계산할 때 광범위하게 쓰입니다. 또한, 이항정리는 두 항의 거듭제곱을 전개하는 방법을 나타내는 공식입니다. 이항정리를 응용하면 복잡한 식을 간단하게 나타낼 수 있으며, 경우의 수를 구하는 중요한 방법 중 하나입니다.

01 순열과 조합

개념 강의 ▶

중요도 ★★☆

1 중복순열

(1) 서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열을 **중복순열**이라고 한다.

(2) **중복순열의 수**❶

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n\Pi_r = n^r$$ ❷

❶ ${}_n\Pi_r$의 Π는 곱을 뜻하는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라고 읽는다.

❷ ${}_nP_r$에서는 $n \ge r$이지만, ${}_n\Pi_r$에서는 중복하여 택할 수 있으므로 $n < r$일 수도 있다.

2 같은 것이 있는 순열

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$ ❸

First Class Tip

＊ 순서가 정해져 있는 순열의 수

a, b, c, d, e에서 b는 항상 c보다 앞에 있도록 배열하는 방법의 수는 순서가 정해진 두 문자 b와 c를 같은 문자 k로 간주하고 a, k, k, d, e를 배열하는 방법의 수 $\frac{5!}{2!}$과 같다.

각 배열에서 앞의 k에는 b를, 뒤의 k에는 c를 넣으면 되므로 순서가 정해져 있는 문자는 모두 같은 문자로 치환하여 생각한다.

즉, k, a, e, k, d로 된 배열은 b, a, e, c, d이다.

❸ a_1, a_2, a_3을 배열하는 $3!$가지의 순열은 번호의 구별이 없으면 모두 aaa와 같은 순열이다. 즉, $3!$개만큼 중복된다.

a_1, a_2, a_3, b, c

순열의 수: $5!$

⇩

a, a, a, b, c

순열의 수: $\frac{5!}{\boxed{3!}}$

중복되는 만큼 제외

3 중복조합

(1) 서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 **중복조합**이라고 한다.

(2) **중복조합의 수**❹

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$ ❺

First Class Tip

＊ 중복조합 ${}_3H_n$의 활용

① 방정식 $a+b+c=n$의 음이 아닌 정수해 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수

② $(x+y+z)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수

③ 3명에게 같은 종류의 사탕 n개를 나누어 주는 방법의 수

❹ ${}_nH_r$의 H는 같은 차수를 뜻하는 homogeneous의 첫 글자이다.

❺ ${}_nC_r$에서는 $n \ge r$이지만, ${}_nH_r$에서는 중복하여 택할 수 있으므로 $n < r$일 수도 있다.

4 함수의 개수

두 집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\}$일 때,
함수 $f: A \longrightarrow B$에 대하여

(1) 모든 함수 f의 개수 : ${}_n\Pi_m$
(2) $m \le n$일 때, 일대일 함수 f의 개수 : ${}_nP_m$
(3) $n=m$일 때, 일대일대응 f의 개수 : $n!$
(4) $m \le n$일 때, $a<b$이면 $f(a)<f(b)$인 함수 f의 개수 : ${}_nC_m$
(5) $a<b$이면 $f(a) \le f(b)$인 함수 f의 개수 : ${}_nH_m$

(6) 치역과 공역이 같은 함수의 개수

① 포함배제의 원리를 이용하는 방법[6]

$$n^m - {}_nC_1(n-1)^m + {}_nC_2(n-2)^m - {}_nC_3(n-3)^m + \cdots + (-1)^{n-1} \times {}_nC_{n-1}\{n-(n-1)\}^m$$

② 조 나누기를 이용하는 방법

정의역의 m개의 원소를 n개의 묶음으로 나눈 후, 각 묶음을 공역의 원소에 대응시키면 된다.

예 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3\}$일 때, 함수 $f: A \longrightarrow B$ 중 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

① 포함배제의 원리를 이용하는 방법

$3^5 - {}_3C_1 \times 2^5 + {}_3C_2 \times 1^5 = 150$

② 조 나누기를 이용하는 방법

집합 A의 원소 5개를 (3개, 1개, 1개)의 묶음으로 나눌 때,

$\left({}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}\right) \times 3! = 60$

(2개, 2개, 1개)의 묶음으로 나눌 때,

$\left({}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}\right) \times 3! = 90$

(7) 치역의 원소가 r개인 함수의 개수

공역의 n개의 원소 중에서 치역의 원소 r개를 택한 후, (6)의 방법을 적용한다.

[6] 공통수학2에서 합집합의 원소의 개수를 구하는 방법도 포함배제의 원리이다. 즉,
$n(A \cup B \cup C)$
$= n(A) + n(B) + n(C)$
$- n(A \cap B) - n(B \cap C)$
$- n(C \cap A)$
$+ n(A \cap B \cap C)$

First Class Tip

＊ 조 나누기[7]

서로 다른 6개를 2개, 2개, 2개로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!}$

서로 다른 10개를 3개, 3개, 2개, 2개로 나누는 방법의 수는

${}_{10}C_3 \times {}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times \frac{1}{2!}$

[7] A, B, C, D, E, F를 2개, 2개, 2개의 세 묶음으로 나눌 때,

(A, B), (C, D), (E, F)
(A, B), (E, F), (C, D)
(C, D), (A, B), (E, F)
⋮
(E, F), (C, D), (A, B)

3!가지가 모두 같은 조 나누기

⇩

${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \boxed{\frac{1}{3!}}$

FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 중복순열

01 출제율

서로 다른 과일 5개를 세 그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에 2개 이상의 과일을 담는 방법의 수를 구하시오. (단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.)

02 출제율

세 자연수 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 다섯 자리 자연수를 만들려고 한다. 다섯 자리 자연수에 1과 2를 반드시 포함한다고 할 때, 만들 수 있는 자연수의 개수는?

① 150　② 180　③ 210
④ 240　⑤ 270

03 출제율

서로 다른 공 5개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣으려고 할 때, 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있도록 넣는 경우의 수는? (단, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.)

① 900　② 901　③ 902
④ 903　⑤ 904

핵심유형 02 같은 것이 있는 순열

04 출제율

일곱 개의 문자 a, a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하려고 한다. 문자 c끼리는 이웃해도 되지만 문자 a와 b는 같은 문자끼리 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는?

① 100　② 110　③ 120
④ 130　⑤ 140

05 출제율

다음 조건을 만족시키는 네 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d=8$
(나) $a\times b\times c\times d$는 8의 배수이다.

06 출제율

빨간 공 3개, 파란 공 3개, 노란 공 3개가 있다. 이 9개의 공을 모두 일렬로 나열할 때, 빨간 공끼리는 어느 것도 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공끼리는 구별하지 않는다.)

핵심유형 01 중복순열

13

문자 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 배열한 네 자리 문자열을 만들 때, 문자 a가 연속되지 않은 문자열의 개수를 구하시오.

14

10층 높이의 건물에서 6명이 엘리베이터를 타고 1층을 출발하였다. 이들 6명 중 철수와 영희는 같은 층에 내릴 수 없을 때, 6명이 각 층에 내리는 방법의 수는?

① 9^5 ② 2×9^5 ③ 4×9^5
④ 6×9^5 ⑤ 8×9^5

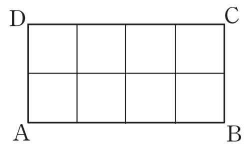
15

세 수 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다섯 개의 수를 택한 후 일렬로 배열하여 다섯 자리 자연수를 만들 때, 다음 조건을 만족시키는 다섯 자리 자연수의 개수를 구하시오. (예를 들어 12321은 조건을 만족시키는 자연수이고, 11223은 조건을 만족시키지 않는 자연수이다.)

(가) 홀수이다.
(나) 각 자리 수에서 1은 서로 이웃하지 않는다.

16

그림과 같이 정사각형으로 이루어진 도로망에서 A지점에서 출발하여 도로 DC 위의 점을 적어도 한 번 지나 B지점까지 가는 경로의 수를 구하시오. (단, 왼쪽으로 움직일 수 없고, 한 번 지난 길을 다시 지나지 않는다.)



17

네 자리 전화번호는 0000에서 9999까지 모두 10^4가지가 있다. 이 중 0001, 1168과 같이 같은 숫자가 두 개 이상 연속으로 나오면서 숫자 1을 포함하고 있는 전화번호의 개수를 구하시오.

18

모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 개수를 구하시오.

(가) $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
(나) $a_n = a_{n+6}$
(다) $a_{2n} = a_{3n}$

19

9개의 자연수 1, 2, 3, ⋯, 9 중에서 중복을 허락하여 5개를 뽑아 임의로 나열하는 순열에서 두 수 x, y를 다음과 같이 정의한다.

> x : 홀수 번째 자리에는 반드시 홀수가 있는 순열의 개수
> y : 홀수가 반드시 홀수 번째 자리에 있는 순열의 개수

이때, $\frac{1}{9^2}\times(y-x)$의 값을 구하시오.

핵심유형 02 같은 것이 있는 순열

20

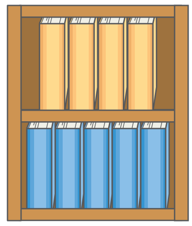
소수 3455.6에 대하여 이 수의 숫자를 다시 배열한 후 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 네 자리 정수로 만들 때, 만들 수 있는 정수의 개수를 구하시오.

21

다섯 자리의 자연수 N의 각 자리 수를 a, b, c, d, e라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수를 구하시오.

> (가) $1\le a, b, c, d, e\le 9$
> (나) $a\times b\times c\times d\times e=2^4\times5^3$

22



그림과 같은 2단 책장에 희귀본 고서가 각각 5권, 4권씩 총 9권이 꽂혀 있다. 이 책을 도서전시회에 전람하기 위하여 운반함에 옮겨 담으려고 한다. 책이 낡은 관계로 두 책 사이에 있는 책은 먼저 뽑지 않고서 가장자리의 책부터 조심스레 옮겨 담을 때, 옮겨 담는 방법의 수는 $k\times2^n$이다. $k+n$의 값을 구하시오. (단, k는 홀수, n은 자연수이다.)

23

한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 8 이상의 짝수인 경우의 수는?

① 170 ② 171 ③ 172
④ 173 ⑤ 174

24

A, A, B, B, C, D, D의 7개의 문자를 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 문자끼리는 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 맨 앞에 놓인 문자는 A 또는 B이다.
> (나) 문자 B 가운데 적어도 하나는 문자 C보다 앞에 놓여 있고, 문자 D 가운데 적어도 하나는 문자 C보다 뒤에 놓여 있다.

◇ 정답 및 해설 7~9p

◀ 동영상 강의

45

8짝의 양말과 8짝의 신발을 가진 다리 8개의 거미가 있다. 이 거미가 양말과 신발을 모두 신으려고 할 때, 신을 수 있는 경우의 수는? (단, 각각의 다리에 신발을 신기 이전에 양말부터 신어야 하며, 각 신발과 양말은 하나의 다리에만 짝이 맞은 것이다.)

① $8!$　② $2^8\times 8!$　③ $(8!)^2$　④ $\dfrac{16!}{2^8}$　⑤ $16!$

46

흰 공 5개와 검은 공 5개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

(가) 학생 A가 받는 공의 개수는 1 이상 2 이하이다.
(나) 학생 B가 받는 공의 개수는 3 이상이다.

47

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i번째$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$ 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i라 하자. $1<p<q<10$인 두 자연수 p, q에 대하여 a_i가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1\le i<p$이면 $a_i<a_{i+1}$이다.
(나) $p\le i<q$이면 $a_i>a_{i+1}$이다.
(다) $q\le i<10$이면 $a_i<a_{i+1}$이다.

이때, $a_1=4$, $a_p=8$인 모든 경우의 수를 구하시오.

48

집합 $X=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \longrightarrow X$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1)\times f(9)$는 9의 배수이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

I 경우의 수

01 순열과 조합

핵심 유형 연습

문제편 p.10~11

01 답 131

Tip
서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r$이야.

서로 다른 과일 5개를 세 그릇 A, B, C에 남김없이 담는 방법의 수는 ${}_3\Pi_5=3^5=243$

(i) 그릇 A에 1개의 과일만 담는 방법의 수

과일 1종류를 선택하는 방법이 ${}_5C_1$가지이고, 나머지 과일 4개를 B, C 그릇에 담는 방법이 ${}_2\Pi_4=2^4$(가지)이므로 $5\times16=80$

(ii) 그릇 A에 과일을 담지 않는 방법의 수

과일 5개를 B, C 그릇에 담는 방법의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 방법의 수는 $243-80-32=131$

02 답 ②

(i) 1, 2, 3을 사용하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

n개 중 r개 중복하여 택하는 순열의 수 ${}_n\Pi_r=n^r$

3^5 ⋯ ㉠

(ii) 2, 3을 사용하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

2^5 ⋯ ㉡

(iii) 1, 3을 사용하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

2^5 ⋯ ㉢

1과 2를 반드시 포함하는 경우는 ㉠에서 ㉡, ㉢을 제외하는 경우이다. 이때, 33333은 ㉡, ㉢에 모두 포함되므로 구하는 자연수의 개수는 $3^5-(2^5+2^5-1)=180$

03 답 ①

서로 다른 상자 4개에 서로 다른 5개의 공을 넣는 모든 방법의 수는 ${}_4\Pi_5=4^5=1024$

서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 1인 경우가 하나도 없는 것은 넣은 공의 개수가 5, 0, 0, 0 또는 3, 2, 0, 0인 경우이므로

(i) 넣은 공의 개수가 5, 0, 0, 0인 경우

5개의 공 모두 들어갈 상자를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_1=4$

(ii) 넣은 공의 개수가 3, 2, 0, 0인 경우

공이 들어갈 상자 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

서로 다른 5개의 공을 3개, 2개의 묶음으로 나누는 방법의 수는 ${}_5C_2=10$

${}_5C_2\times{}_3C_3={}_5C_2$

두 묶음을 서로 다른 2개의 상자에 넣는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $1024-(4+6\times10\times2)=900$

04 답 ②

Tip
문자 a와 b도 이웃하는 경우를 생각하여 여사건을 이용하자.

일곱 개의 문자 a, a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{7!}{2!2!3!}=210$

(i) a, a가 이웃하는 경우

a, a를 하나의 묶음으로 하여 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!3!}=60$

(ii) b, b가 이웃하는 경우

(i)과 마찬가지 방법으로 하면 구하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!3!}=60$

(iii) a, a와 b, b가 각각 이웃하는 경우

a, a와 b, b를 각각 한 묶음으로 하여 나열하면 되므로 이때의

A, B, c, c, c를 나열하는 경우와 같아.

경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!}=20$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$210-(60+60-20)=110$

포함배제의 원리를 이용해.

05 답 13

네 자연수의 합이 8인 경우는

$1+1+1+5$, $1+1+2+4$, $1+1+3+3$, $1+2+2+3$, $2+2+2+2$의 5가지이다. 이 중 네 수의 곱이 8의 배수인 경우는 $1+1+2+4$, $2+2+2+2$이므로

1, 1, 2, 4를 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

2, 2, 2, 2를 배열하는 방법의 수는 1

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $12+1=13$

06 답 700

파란 공 3개와 노란 공 3개를 먼저 나열한 후 양 끝과 사이 7곳 중 3곳을 택하여 빨간 공을 배치하면 된다.

파란 공 3개와 노란 공 3개를 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{6!}{3!3!}=20$

양 끝과 사이 7곳 중 3곳을 택하는 방법의 수는 ${}_7C_3=35$

따라서 구하는 방법의 수는 $20\times35=700$

07 답 165

Tip
네 개의 상자에 9개 공을 나누어 넣는 경우의 수를 알아보자.

각 자리의 숫자의 합이 9가 되는 자연수의 개수는 서로 다른 4개의 상자에 9개의 공을 넣는 방법의 수와 같다. 이때, 천의 자리의 숫자가 0이 되지 않아야 하므로 천의 자리에 한 개의 공을 먼저 넣고 4개의 상자에 8개의 공을 중복을 허락하여 넣는 방법의 수와 같다.

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

08 답 ④

(i) 1 이상 10 이하의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개를 택한 후 작은 순서대로 x, y, z로 정하면 $1\le \underline{x<y<z}\le 10$을 만족시킨다.

순서가 정해짐

$\therefore n(A)={}_{10}C_3=120$

(ii) $1\le \underline{x\le y}<z\le 10$에서

등호가 없는 부등호를 만들어 조합의 수 이용해.

$1\le x<(y+1)<(z+1)\le 11$

이때, $y+1=y'$, $z+1=z'$이라 하면, y와 y' 그리고 z와 z'은 각각 일대일대응이므로 y', z'이 결정되면 y와 z도 유일하게 결정된다.

따라서 $1\le x\le y<z\le 10$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $1\le x<y'<z'\le 11$을 만족시키는 순서쌍 (x, y', z')의 개수와 같다.

$\therefore n(B)={}_{11}C_3=165$

(iii) $1\le x\le y\le z\le 10$에서

등호가 없는 부등호를 만들어 조합의 수 이용해.

$1\le x<(y+1)<(z+2)\le 12$

이때, $y+1=y'$, $z+2=z'$이라 하면, y와 y' 그리고 z와 z'은 각각 일대일대응이므로 y', z'이 결정되면 y와 z도 유일하게 결정된다.

따라서 $1\le x\le y\le z\le 10$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $1\le x<y'<z'\le 12$를 만족시키는 순서쌍 (x, y', z')의 개수와 같다.

$\therefore n(C)={}_{12}C_3=220$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$n(A)+n(B)-n(C)=120+165-220=65$

다른 풀이 : $x\le y\le z$인 경우 중복조합 이용하기

(iii) $1\le x\le y\le z\le 10$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 10개의 정수에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$n(C)={}_{10}H_3={}_{12}C_3=220$

09 답 84

$\underline{x\ge 1,\ y\ge 3,\ z\ge 4}$에서

x, y, z를 음이 아닌 정수로 만들어 중복조합을 이용하자.

$x-1=x'$, $y-3=y'$, $z-4=z'$이라 하면 $x'\ge 0$, $y'\ge 0$, $z'\ge 0$

$x+y+z\le 14$에서 $(x-1)+(y-3)+(z-4)\le 6$

즉, $x'+y'+z'\le 6$

따라서 부등식 $x+y+z\le 14$를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 부등식 $x'+y'+z'\le 6$을 만족시키는 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같다.

이때, 부등식 $x'+y'+z'\le 6$을 만족시키는 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 음이 아닌 정수 w에 대하여 방정식 $x'+y'+z'+w=6$의 음이 아닌 정수해 (x', y', z', w)의 개수와 같으므로 구하는 순서쌍의 개수는 ${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

10 답 189

Tip
조건 (가)에서 함숫값이 주어져 있으므로 이 경우로 나누자.

조건 (가)에서 $f(2)=3$ 또는 $f(4)=4$이므로 조건 (나)에 의하여

(i) $f(2)=3$인 경우

정의역의 원소 1의 함숫값은 1, 2, 3 중 하나이고 3, 4, 5, 6의 함숫값은 3, 4, 5, 6 중에서 4개를 중복하여 택한 후 $f(a)\le f(b)$가 되도록 대응시키면 되므로 구하는 경우의 수는

$3\times {}_4H_4=3\times {}_7C_4=105$

(ii) $f(4)=4$인 경우

정의역의 원소 1, 2, 3의 함숫값은 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 중복하여 택하고, 5, 6의 함숫값은 4, 5, 6 중에서 2개를 중복하여 택한 후 $f(a)\le f(b)$가 되도록 대응시키면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_4H_3\times {}_3H_2={}_6C_3\times {}_4C_2=120$

(iii) $f(2)=3$, $f(4)=4$인 경우

정의역의 원소 1의 함숫값은 1, 2, 3 중 하나이고, 원소 3의 함숫값은 3, 4 중 하나이다. 또한, 5, 6의 함숫값은 4, 5, 6 중에서 2개를 중복하여 택한 후 $f(a)\le f(b)$가 되도록 대응시키면 되므로 구하는 경우의 수는

$3\times 2\times {}_3H_2=3\times 2\times {}_4C_2=36$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$\underline{105+120-36=189}$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

11 답 60

문제의 조건에서 $|f(x)-f(y)|\ge 2$를 만족시키는 치역의 원소는 그 값의 차이가 2 이상인 서로 다른 세 수, 즉 연속하지 않은 세 수이다. 연속하지 않은 세 수를 정하는 방법의 수는 다음과 같이 4개의 × 의 사이와 양 끝인 5곳 중에서 3개를 택하여 ○를 집어넣은 후 순서대로 1, 2, 3, ⋯, 7을 배정하는 방법의 수와 같으므로 ${}_5C_3$