상위 1% 도전을 위한 최고의 명품 일등급 문제

일등급 수학

THE FIRST CLASS MATHEMATICS

대수

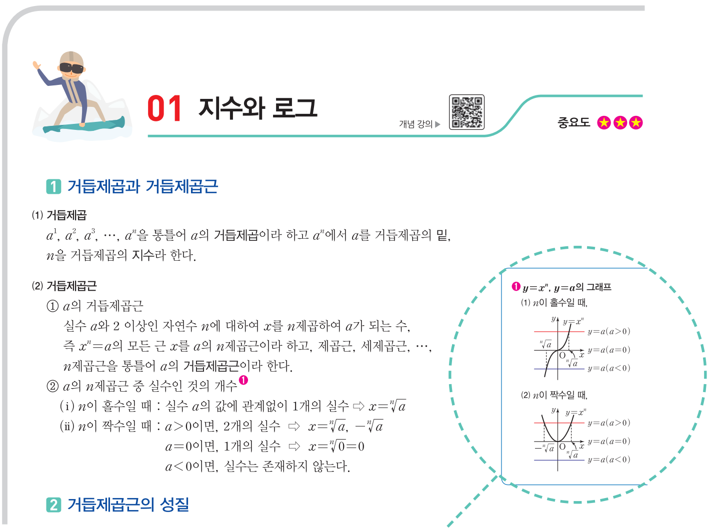
구성과 특징

학교 시험, 수능 1등급을 위한
최고의 명품 수학 문제집!
일등급 수학

1 개념 정리 – 1등급을 위한 핵심 개념과 Tip

중단원 핵심 내용을 정리하여 혹시 잊을 수 있는 개념을 다시 한 번 최종 점검해 볼 수 있습니다.

- **중요도 ★★★**
  시험에 자주 나오는 단원의 중요도 제시
- **First Class Tip**
  일등급 수학만의 명품 Tip을 제시하여 시험에서 요긴하게 사용할 수 있습니다.



01 지수와 로그

개념 강의 ▶

중요도 ★★★

1 거듭제곱과 거듭제곱근

(1) 거듭제곱

a^1, a^2, a^3, $\cdots$, a^n을 통틀어 a의 거듭제곱이라 하고 a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 거듭제곱의 지수라 한다.

(2) 거듭제곱근

① a의 거듭제곱근

실수 a와 2 이상인 자연수 n에 대하여 x를 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^n=a$의 모든 근 x를 a의 n제곱근이라 하고, 제곱근, 세제곱근, $\cdots$, n제곱근을 통틀어 a의 거듭제곱근이라 한다.

② a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수❶

(ⅰ) n이 홀수일 때 : 실수 a의 값에 관계없이 1개의 실수 ⇨ $x=\sqrt[n]{a}$

(ⅱ) n이 짝수일 때 : $a>0$이면, 2개의 실수 ⇨ $x=\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$

$a=0$이면, 1개의 실수 ⇨ $x=\sqrt[n]{0}=0$

$a<0$이면, 실수는 존재하지 않는다.

❶ $y=x^n$, $y=a$의 그래프

(1) n이 홀수일 때,

(2) n이 짝수일 때,

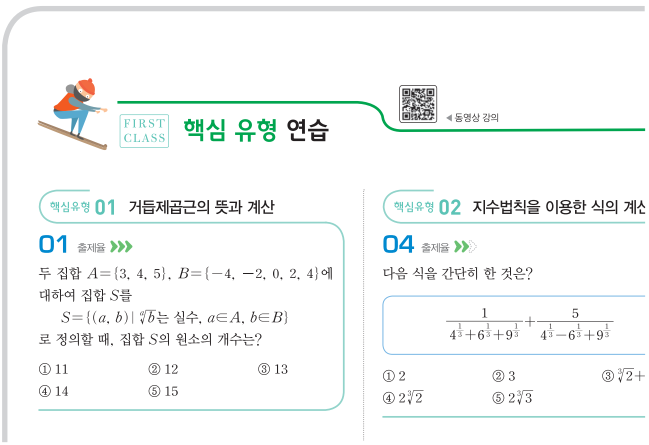
2 거듭제곱근의 성질

공식이 유도되는 과정이나 확장 개념을 보조단에 제시하였습니다.

2 핵심 유형 연습 – 가장 중요한 유형 연습

대표 문제 ➡ 유제 ➡ 발전 문제가 하나의 세트로 구성되어 있어서 핵심 유형을 효과적으로 정복할 수 있습니다.
일등급 실력으로 가는 입문 과정이므로 스스로 충분히 풀 수 있다면 수학 실력이 한층 더 업그레이드될 것입니다.

- 출제율 ≫≫
  학교시험과 학력평가, 수능에서 출제되는 정도를 표시하였습니다.



FIRST CLASS 핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 거듭제곱근의 뜻과 계산

01 출제율 ≫≫≫

두 집합 $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{-4, -2, 0, 2, 4\}$에 대하여 집합 S를

$S=\{(a, b) \mid \sqrt[a]{b}$는 실수, $a\in A$, $b\in B\}$

로 정의할 때, 집합 S의 원소의 개수는?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

핵심유형 02 지수법칙을 이용한 식의 계산

04 출제율 ≫≫

다음 식을 간단히 한 것은?

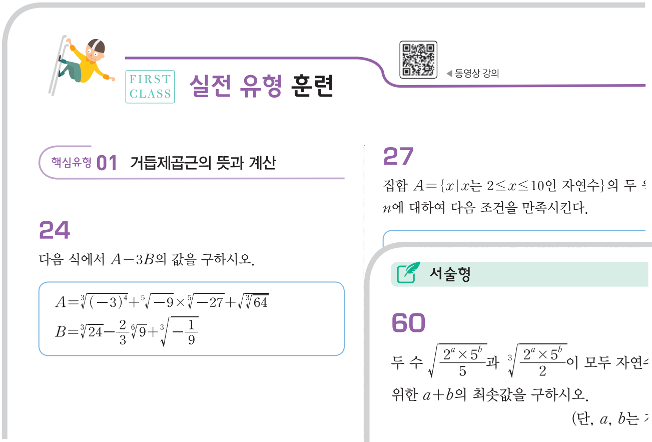
$$\frac{1}{4^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}}+\frac{5}{4^{\frac{1}{3}}-6^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}}$$

① 2 ② 3 ③ $\sqrt[3]{2}+$
④ $2\sqrt[3]{2}$ ⑤ $2\sqrt[3]{3}$

3 실전 유형 훈련 – 실전 유형을 단계적으로 파악

핵심 유형 연습에서 배운 것을 학교시험이나 수능에 어떻게 적용하는지 훈련하는 단계입니다. 단순 반복이 아닌 확장된 개념과 유형을 학습할 수 있는 문제로 구성되어 있습니다.

- **서술형**
  학교시험에서 출제되는 서술형 유형을 완벽히 분석해 구성한 문제입니다.


FIRST CLASS 실전 유형 훈련 ◀ 동영상 강의

핵심유형 01 거듭제곱근의 뜻과 계산

24
다음 식에서 $A-3B$의 값을 구하시오.

$A=\sqrt[3]{(-3)^4}+\sqrt[5]{-9}\times\sqrt[5]{-27}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}$
$B=\sqrt[3]{24}-\frac{2}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$

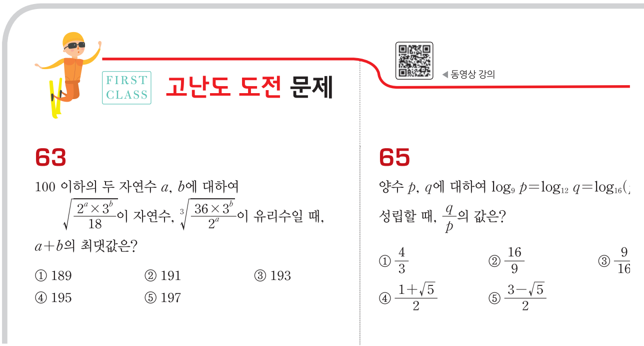
27
집합 $A=\{x|x$는 $2\le x\le10$인 자연수$\}$의 두
n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

서술형

60
두 수 $\sqrt{\frac{2^a\times5^b}{5}}$과 $\sqrt[3]{\frac{2^a\times5^b}{2}}$이 모두 자연
위한 $a+b$의 최솟값을 구하시오.
(단, a, b는

4 고난도 도전 문제 – 일등급을 위한 고난도 명품 문제

여러 개념을 종합적으로 이해하고 적용해야 풀 수 있는 명품 문제로 구성되어 있습니다. 종합적 사고력을 키울 수 있어 수학시험에서 완벽한 1등급을 받을 수 있습니다.


FIRST CLASS 고난도 도전 문제 ◀ 동영상 강의

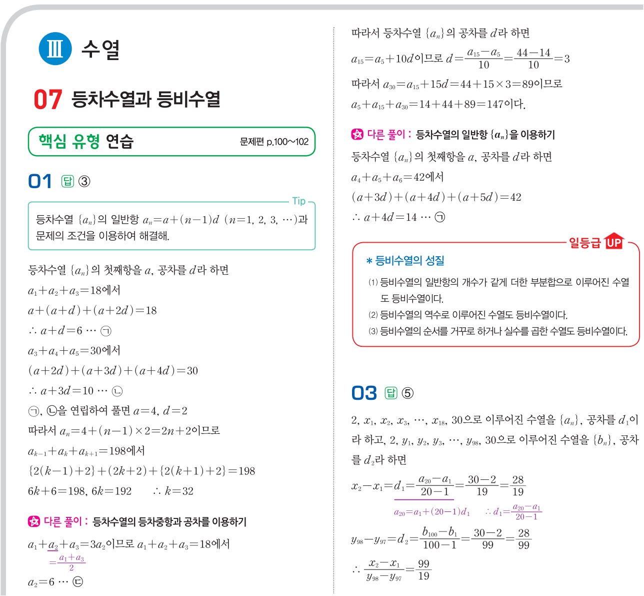
63
100 이하의 두 자연수 a, b에 대하여
$\sqrt{\frac{2^a\times3^b}{18}}$이 자연수, $\sqrt[3]{\frac{36\times3^b}{2^a}}$이 유리수일 때,
$a+b$의 최댓값은?
① 189 ② 191 ③ 193
④ 195 ⑤ 197

65
양수 p, q에 대하여 $\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}($
성립할 때, $\frac{q}{p}$의 값은?
① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{9}{16}$
④ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

5 정답 및 해설 – 정확하고 명쾌한 해설

일등급 수학만의 접근 방법으로 쉽고 간단하게 고난도 문제의 해답을 구하는 방법을 습득할 수 있습니다.

- **Tip**
  핵심 유형 문제의 풀이 전략에 필요한 Tip을 제시하였습니다.
- **다른 풀이**
  단순한 풀이가 아닌 사고를 전환하여 여러 관점에서 접근하는 방법을 배울 수 있습니다.
- **일등급 UP**
  개념을 확장시켜 문제에 더 쉽게 접근할 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.


Ⅲ 수열

07 등차수열과 등비수열

핵심 유형 연습 문제편 p.100~102

01 답 ③

Tip
등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n=a+(n-1)d$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$과 문제의 조건을 이용하여 해결해.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_1+a_2+a_3=18$에서
$a+(a+d)+(a+2d)=18$
$\therefore a+d=6 \cdots ㉠$
$a_3+a_4+a_5=30$에서
$(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=30$
$\therefore a+3d=10 \cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=2$
따라서 $a_n=4+(n-1)\times2=2n+2$이므로
$a_{k-1}+a_k+a_{k+1}=198$에서
$\{2(k-1)+2\}+(2k+2)+\{2(k+1)+2\}=198$
$6k+6=198$, $6k=192$ $\therefore k=32$

다른 풀이 : 등차수열의 등차중항과 공차를 이용하기
$a_1+\underbrace{a_2}_{=\frac{a_1+a_3}{2}}+a_3=3a_2$이므로 $a_1+a_2+a_3=18$에서
$a_2=6 \cdots ㉢$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_{15}=a_5+10d$이므로 $d=\frac{a_{15}-a_5}{10}=\frac{44-14}{10}=3$
따라서 $a_{30}=a_{15}+15d=44+15\times3=89$이므로
$a_5+a_{15}+a_{30}=14+44+89=147$이다.

다른 풀이 : 등차수열의 일반항 $\{a_n\}$을 이용하기
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_4+a_5+a_6=42$에서
$(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)=42$
$\therefore a+4d=14 \cdots ㉠$

일등급 UP
* 등비수열의 성질
(1) 등비수열의 일반항의 개수가 같게 더한 부분합으로 이루어진 수열도 등비수열이다.
(2) 등비수열의 역수로 이루어진 수열도 등비수열이다.
(3) 등비수열의 순서를 거꾸로 하거나 실수를 곱한 수열도 등비수열이다.

03 답 ⑤

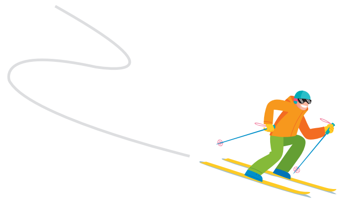
2, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{18}, 30으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 공차를 d_1이라 하고, 2, y_1, y_2, y_3, $\cdots$, y_{98}, 30으로 이루어진 수열을 $\{b_n\}$, 공차를 d_2라 하면
$x_2-x_1=d_1=\underbrace{\frac{a_{20}-a_1}{20-1}}_{a_{20}=a_1+(20-1)d_1 \quad \therefore d_1=\frac{a_{20}-a_1}{20-1}}=\frac{30-2}{19}=\frac{28}{19}$
$y_{98}-y_{97}=d_2=\frac{b_{100}-b_1}{100-1}=\frac{30-2}{99}=\frac{28}{99}$
$\therefore \frac{x_2-x_1}{y_{98}-y_{97}}=\frac{99}{19}$

차 례

Ⅰ 지수함수와 로그함수

Ⅱ 삼각함수

Ⅲ 수열



I 지수함수와 로그함수

01 지수와 로그

02 지수함수와 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 활용

지수와 로그는 실생활에 쓰이는 수에 비해 매우 큰 수나 매우 작은 수를 효율적으로 다루기 위해 탄생한 학문입니다. 아주 큰 수나 아주 작은 수가 계산에 빈번하게 쓰인다면 엄청나게 번거롭고 비효율적이 되겠지요. 하지만 지수와 로그를 배운다면 매우 큰 수나 매우 작은 수를 놀랄 만큼 단순하고 효과적으로 다룰 수 있게 됩니다.

01 지수와 로그

개념 강의 ▶

중요도 ★★★

1 거듭제곱과 거듭제곱근

(1) 거듭제곱

a^1, a^2, a^3, $\cdots$, a^n을 통틀어 a의 **거듭제곱**이라 하고 a^n에서 a를 거듭제곱의 **밑**, n을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

(2) 거듭제곱근

① a의 거듭제곱근

실수 a와 2 이상인 자연수 n에 대하여 x를 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^n=a$의 모든 근 x를 a의 n제곱근이라 하고, 제곱근, 세제곱근, $\cdots$, n제곱근을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.

② a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수[1]

(i) n이 홀수일 때 : 실수 a의 값에 관계없이 1개의 실수 ⇨ $x=\sqrt[n]{a}$

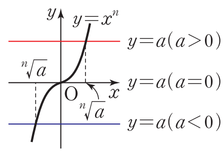
(ii) n이 짝수일 때 : $a>0$이면, 2개의 실수 ⇨ $x=\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$

$a=0$이면, 1개의 실수 ⇨ $x=\sqrt[n]{0}=0$

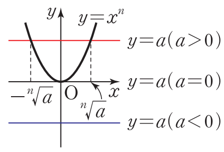
$a<0$이면, 실수는 존재하지 않는다.

[1] $y=x^n$, $y=a$의 그래프

(1) n이 홀수일 때,



(2) n이 짝수일 때,



2 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ ⑤ $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, k는 자연수)

First Class Tip

* $\sqrt[n]{a^n}$과 $(\sqrt[n]{a})^n$의 비교

$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & (n\text{이 홀수}) \\ |a| & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$, $(\sqrt[n]{a})^n=a$

3 지수의 확장과 지수법칙[2]

(1) 0 또는 음의 지수의 정의

$a\neq0$이고, n이 자연수일 때,

① $a^0=1$ ② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

(2) 유리수 지수의 정의

$a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 자연수일 때,

① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(3) 확장된 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,

① $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$ ④ $(ab)^m=a^mb^m$

[2] 지수와 밑에 따른 표현 주의

지수	밑	표현 불가
자연수	모든 실수	
정수	0이 아닌 실수	0^0, 0^{-2}
유리수 실수	양의 실수	$(-2)^{\frac{1}{3}}$

예를 들어, $\sqrt[3]{-8}=-2$로 실수이지만 $\sqrt[3]{-8}=(-8)^{\frac{1}{3}}$으로 표현하지 않는다.

$(-1)^{\frac{10}{2}}=(-1)^5=-1$이지만 $\sqrt{(-1)^{10}}=\sqrt{1^{10}}=1$이므로 $(-1)^{\frac{10}{2}}\neq\sqrt{(-1)^{10}}$

4 로그의 정의[3]

$a>0$, $a\neq1$일 때, 임의의 양수 b에 대하여 $a^x=b$를 만족시키는 실수 x를 $x=\log_a b$로 나타내며, a를 밑으로 하는 b의 로그라 한다. 이때, b를 $\log_a b$의 진수라 한다.

$\boldsymbol{a^x=b \Longleftrightarrow x=\log_a b}$ (단, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$)

5 로그의 성질

(1) 로그의 기본 성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

① $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$

② $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

③ $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

④ $\log_a x^n=n\log_a x$ (단, n은 실수)

(2) 로그의 밑의 변환 공식[4]

$a>0$, $a\neq1$이고, $x>0$일 때,

① $\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

② $\log_a x=\dfrac{1}{\log_x a}$ (단, $x\neq1$)

(3) 로그의 주요 공식

$a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq1$, $b\neq1$, m, n은 실수일 때,

① $\log_{a^n} b^n=\log_a b$, $\log_{a^m} a^n=\dfrac{n}{m}$ (단, $m\neq0$)

② $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, $m\neq0$)

③ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$, $a^{\log_a b}=b$

First Class Tip

*** 로그의 계산 시 유의점**

$x>0$인 조건이 주어지지 않은 경우

$A=\log x^2 \not\Longrightarrow A=2\log x$, $A=\log_{a^2} x^2 \not\Longrightarrow A=\log_a x$

$A=\log x^2 \Longleftrightarrow A=2\log|x|$, $A=\log x^3 \Longleftrightarrow A=3\log x$

6 상용로그

(1) 상용로그

밑을 10으로 하는 로그를 **상용로그**라 하며, 보통 밑 10을 생략한다.

$\log_{10} x \Longleftrightarrow \log x$

(2) 상용로그표[5]

상용로그의 근삿값을 나타낸 표로 큰 수나 계산이 복잡한 식의 값을 근사적으로 구할 때 쓴다.

[3] 로그의 표현

$2^x=3$을 만족하는 양의 실수 x가 존재한다.

이 실수 x가 유리수라 가정하여 $x=\dfrac{m}{n}$ (m, n은 자연수)라 하면

$2^{\frac{m}{n}}=3 \Rightarrow 2^m=3^n$

즉, (짝수)=(홀수)로 모순이다.

따라서 x는 무리수이므로 로그는 무리수의 표현이다.

[4] 로그의 밑의 변환 공식의 확장

① $\dfrac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b=\dfrac{\log_a c}{\log_b c}$

② $\log_a x\times\log_b y$
$=\log_b x\times\log_a y$

③ $\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1$

④ $\log_a b=\log_{a^2} b^2=\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}$
$=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{b}$

(단, 모든 밑은 1이 아닌 양수이고 진수는 양수이다.)

[5] 상용로그표

수	0	1	⋯	7
1.0	.0000	.0043	⋯	.0294
1.1	.0414	.0453	⋯	.0682
⋮	⋮	⋮	⋯	⋮
5.0	.6990	.6998	⋯	.7050
5.1	.7076	.7084	⋯	.7135

FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 거듭제곱근의 뜻과 계산

01 출제율

두 집합 $A=\{3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{-4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4\}$에 대하여 집합 S를

$$S=\{(a,\ b)\,|\,\sqrt[a]{b}\text{는 실수},\ a\in A,\ b\in B\}$$

로 정의할 때, 집합 S의 원소의 개수는?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

02 출제율

1이 아닌 양수 x, y에 대하여

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{y}}{x\sqrt{y}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{y}}{x\sqrt{y}}}\div\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\times\sqrt[6]{\frac{x^8}{\sqrt{y}}}=\sqrt[n]{x}$$

를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

03 출제율

집합 $X=\{-4,\ -2,\ 2,\ 4\}$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{\sqrt[3]{x}\,|\,x\in X,\ \sqrt[3]{x}\text{는 실수}\},$$
$$B=\{\sqrt[4]{x}\,|\,x\in X,\ \sqrt[4]{x}\text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 곱은?

① $2\sqrt[3]{4}$ ② $4\sqrt[3]{4}$ ③ $2\sqrt[4]{8}$
④ $4\sqrt[4]{8}$ ⑤ 8

핵심유형 02 지수법칙을 이용한 식의 계산

04 출제율

다음 식을 간단히 한 것은?

$$\frac{1}{4^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}}+\frac{5}{4^{\frac{1}{3}}-6^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}}$$

① 2 ② 3 ③ $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$
④ $2\sqrt[3]{2}$ ⑤ $2\sqrt[3]{3}$

05 출제율

두 집합 $A=\{2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 집합 X, Y를

$$X=\{x\,|\,x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x\text{는 실수}\},$$
$$Y=\{y\,|\,y=b^{\frac{1}{a}},\ a\in A,\ b\in B,\ y\text{는 실수}\}$$

라 할 때, $n(X-Y)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 출제율

1이 아닌 양의 실수 a, b에 대하여 $E(a,\ b)$를

$$E(a,\ b)=a^b$$

으로 정의할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $E(a,\ 4)=E(4,\ a)$이면 $E(a,\ 2)=E(2,\ a)$이다.

ㄴ. $E\left(E\left(a,\ -\frac{1}{b}\right),\ c\right)=E\left(E(a,\ -c),\ \frac{1}{b}\right)$

ㄷ. $E(E(a,\ b),\ E(b,\ a))=E(a^b,\ a+1)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

FIRST CLASS

실전 유형 훈련

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 거듭제곱근의 뜻과 계산

24

다음 식에서 $A-3B$의 값을 구하시오.

$$A=\sqrt[3]{(-3)^4}+\sqrt[5]{-9}\times\sqrt[5]{-27}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}$$
$$B=\sqrt[3]{24}-\frac{2}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$$

25

$2\le n\le 10$인 자연수 n에 대하여 $(n-2)(n-7)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$, $(n-4)(n-10)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n)=2g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

26

$a<0$일 때, [보기]에서 거듭제곱근에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, n은 자연수이다.)

| 보기 |

ㄱ. $(\sqrt[n]{a^2})^n=a^2$

ㄴ. $\sqrt[n]{a^n}=|a|$

ㄷ. $\sqrt[n]{a^n}+\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27

집합 $A=\{x\,|\,x$는 $2\le x\le 10$인 자연수$\}$의 두 원소 m, n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$(-2)^m$의 n제곱근 중 실수인 것이 -8이거나 실수인 것을 모두 곱한 값이 -8이다.

이때, 가능한 모든 경우에서의 $m+n$의 값들의 합은?

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

핵심유형 02 지수법칙을 이용한 식의 계산

28

다음 중 계산 과정이 옳지 않은 것은?

① $(\sqrt[3]{-3})^3=(-\sqrt[3]{3})^3=-(\sqrt[3]{3})^3=-3$

② $(\sqrt[3]{-3})^6=\{(-\sqrt[3]{3})^3\}^2=\{-(\sqrt[3]{3})^3\}^2=(-3)^2$

③ $(\sqrt[3]{-3})^3=\{(-3)^{\frac{1}{3}}\}^3=(-3)^{\frac{1}{3}\times 3}=-3$

④ $(\sqrt[3]{-3})^6=\{(-\sqrt[3]{3})^2\}^3=\{(-3^{\frac{1}{3}})^2\}^3=3^{\frac{2}{3}\times 3}=3^2$

⑤ $(\sqrt[3]{-3})^3=(-3^{\frac{1}{3}})^3=-3^{\frac{1}{3}\times 3}=-3$

29

$f(x)=\dfrac{x^{-1}+x^{-3}+x^{-5}+\cdots+x^{-21}}{1+x^2+x^4+\cdots+x^{20}}$일 때, $f\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)$의 값을 구하시오.

30

a, b는 0이 아닌 실수이고, $2^{\frac{b}{a}} \times 2^{\frac{a}{b}} = 2^{2\sqrt{2}}$일 때, $4^{\left|\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right|}$의 값은?

① $8\sqrt{2}$　② 16　③ $16\sqrt{2}$　④ 32　⑤ $32\sqrt{2}$

31

함수 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$에서 $f(m)=\dfrac{1}{2}$, $f(n)=\dfrac{1}{3}$일 때, $f(m+n)$의 값은? (단, a는 $a>0$인 실수이다.)

① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{3}{5}$　③ $\dfrac{4}{5}$　④ $\dfrac{5}{6}$　⑤ $\dfrac{5}{7}$

32

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\left\{(a,\ b)\,\middle|\,2^a=\frac{m}{b},\ a,\ b\text{는 자연수}\right\}$$

라 할 때, $n(A_6)+n(A_7)+n(A_8)$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

핵심유형 03 조건식을 이용한 식의 값 구하기

33

1이 아닌 양수 a, b가

$$a^b=b^a=(ab)^{ab}$$

을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

34

두 실수 a, b에 대하여 $2^a=3$, $6^b=10$일 때, $(2^{a+1})^{b+1}$의 값은?

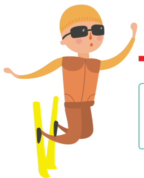
① 15　② 30　③ 45　④ 60　⑤ 75

35

좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지나는 직선 위를 움직일 때, 4^a+2^b의 최솟값은?

① 4　② 8　③ 12　④ 16　⑤ 20

정답 및 해설 8~10p



63

100 이하의 두 자연수 a, b에 대하여

$\sqrt{\dfrac{2^a \times 3^b}{18}}$이 자연수, $\sqrt[3]{\dfrac{36 \times 3^b}{2^a}}$이 유리수일 때,

$a+b$의 최댓값은?

① 189 ② 191 ③ 193
④ 195 ⑤ 197

64

함수 $f(x)=\dfrac{3^x}{3^x+1}$에 대하여

$a=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$,
$b=f(-1)+f(-2)+f(-3)+\cdots+f(-100)$

이라 할 때, $a+b$의 값은?

① $\dfrac{1}{2^{100}}+2^{100}$ ② 100×2^{100} ③ $100 \times \dfrac{1}{2^{100}}$
④ 100 ⑤ $\dfrac{1}{100}$

65

양수 p, q에 대하여 $\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)$가 성립할 때, $\dfrac{q}{p}$의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{16}{9}$ ③ $\dfrac{9}{16}$
④ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

66

어느 도시의 도심지역의 평균기온 u(℃), 외곽지역의 평균기온 r(℃), 도심지역의 넓이 $a(\mathrm{km}^2)$ 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$u=r+0.05+1.6\log a$

이 도시의 도심지역의 넓이가 매년 8 %씩 확장되고 외곽지역의 평균기온은 변하지 않는다고 할 때, 도시의 도심지역의 평균기온이 1 ℃ 상승하는데 약 몇 년이 걸리는가? (단, 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하며, 도심지역의 중심의 위치는 항상 같고, $\log 2=0.301$, $\log 3=0.477$로 계산한다.)

① 15년 ② 17년 ③ 19년
④ 21년 ⑤ 23년

정답 및 해설 14~16p

I 지수함수와 로그함수

01 지수와 로그

핵심 유형 연습

문제편 p.10~13

01 답 ③

Tip
$\sqrt[n]{a}$가 실수이기 위해서는 n이 홀수일 때, a는 모든 실수이고 n이 짝수일 때, a는 0 이상이어야 해.

(i) a가 홀수인 경우
모든 실수 b에 대하여 $\sqrt[a]{b}$는 실수이므로
$2\times5=10$(개)
(ii) a가 짝수인 경우
$b\geq0$일 때에만 $\sqrt[a]{b}$는 실수이므로
$1\times3=3$(개)
(i), (ii)에 의하여 집합 S의 원소의 개수는
$n(S)=10+3=13$

02 답 3

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{y}}{x\sqrt{y}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{y}}{x\sqrt{y}}}\div\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\times\sqrt[6]{\frac{x^8}{\sqrt{y}}}$$
$$=\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[4]{x}\sqrt[8]{y}}\times\frac{\sqrt[8]{y}}{\sqrt{x}\sqrt[4]{y}}\div\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}}\times\frac{\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[12]{y}}$$
$$=\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[4]{x}\sqrt[8]{y}}\times\frac{\sqrt[8]{y}}{\sqrt{x}\sqrt[4]{y}}\times\frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}}\times\frac{\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[12]{y}}$$
$$=\frac{\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[4]{x}\sqrt{x}\sqrt[4]{x}}=\frac{\sqrt[12]{x^{16}}}{\sqrt[12]{x^3}\sqrt[12]{x^6}\sqrt[12]{x^3}}$$
$$=\sqrt[12]{\frac{x^{16}}{x^3x^6x^3}}$$
$$=\sqrt[12]{x^4}=\sqrt[3]{x}$$
$\therefore n=3$

03 답 ④

$A=\{\underbrace{\sqrt[3]{-4},\ \sqrt[3]{-2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}}_{\sqrt[3]{x}\text{에서 }x\text{는 모든 실수에서 성립해.}}\}$, $B=\{\underbrace{\sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{4}}_{\sqrt[4]{x}\text{에서 }x\text{는 }x\geq0\text{일 때 성립해.}}\}$이므로
$A\cup B=\{\sqrt[3]{-4},\ \sqrt[3]{-2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{4}\}$
따라서 $A\cup B$의 모든 원소의 곱은
$\sqrt[3]{(-4)\times(-2)\times2\times4}\times\sqrt[4]{2\times4}$
$=\sqrt[3]{2^6}\times\sqrt[4]{8}$
$=2^2\times\sqrt[4]{8}$
$=4\sqrt[4]{8}$

04 답 ⑤

Tip
$a>0$이고, m, n이 실수일 때, $(a^m)^n=a^{mn}$이야.
복잡한 다항식의 경우에는 다항식의 곱셈공식을 이용하여 정리할 수 있어.

$$\frac{1}{4^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}}+\frac{5}{4^{\frac{1}{3}}-6^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}}$$
$$=\frac{1}{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2+2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2}+\frac{5}{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2-2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}}{\underbrace{\left(2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2+2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}}_{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}}+\frac{5\left(2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)}{\underbrace{\left(2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2-2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}}_{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}}$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}}{2-3}+\frac{5\left(2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)}{2+3}$$
$$=2\times3^{\frac{1}{3}}=2\sqrt[3]{3}$$

05 답 ④

집합 X에서 a가 짝수인 경우는 $b\geq0$일 때 실수 x가 존재하고 x는 다음과 같다.
$x^2=1,\ 2\qquad\therefore x=\underbrace{\pm1}_{=\pm\sqrt{1}},\ \pm\sqrt{2}$
$x^4=1,\ 2\qquad\therefore x=\underbrace{\pm1}_{=\pm\sqrt[4]{1}},\ \pm\sqrt[4]{2}$
a가 홀수인 경우는 실수 x의 값에 관계없이 1개의 실수가 존재하고 x는 다음과 같다.
$x^3=-2,\ -1,\ 1,\ 2\qquad\therefore x=\sqrt[3]{-2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2}$
따라서 집합 X는
$X=\{1,\ -1,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{-2},\ \sqrt[4]{2},\ -\sqrt[4]{2}\}$
집합 Y에서 지수가 유리수이므로 $b>0$이어야 한다.
따라서 집합 Y는
$Y=\{\underbrace{1}_{=1^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{3}}=1^{\frac{1}{4}}},\ 2^{\frac{1}{2}},\ 2^{\frac{1}{3}},\ 2^{\frac{1}{4}}\}=\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{2}\}$
$\therefore n(X-Y)=4$

06 답 ②

ㄱ. $E(a,\ 4)=E(4,\ a)$에서 $a^4=4^a$, $(a^2)^2-(2^a)^2=0$
$(a^2-2^a)(a^2+2^a)=0$
a는 1이 아닌 양수이므로 $a^2=2^a$
$\therefore E(a,\ 2)=E(2,\ a)$ (참)

ㄴ. $E\left(E\left(a,\ -\frac{1}{b}\right),\ c\right)=E\left(a^{-\frac{1}{b}},\ c\right)=\left(a^{-\frac{1}{b}}\right)^c=a^{-\frac{c}{b}}$
$E\left(E(a,\ -c),\ \frac{1}{b}\right)=E\left(a^{-c},\ \frac{1}{b}\right)=(a^{-c})^{\frac{1}{b}}=a^{-\frac{c}{b}}$
$\therefore E\left(E\left(a,\ -\frac{1}{b}\right),\ c\right)=E\left(E(a,\ -c),\ \frac{1}{b}\right)$ (참)

ㄷ. $E(E(a, b), E(b, a))=E(a^b, b^a)=(a^b)^{b^a}=a^{b\times b^a}$

$E(a^b, a+1)=(a^b)^{a+1}=a^{ab+b}$

$\therefore E(E(a, b), E(b, a))\neq E(a^b, a+1)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 답 90

Tip

3^a, 5^b를 하나의 미지수로 나타낸 다음, 주어진 조건을 적용할 수 있어. 조건을 적용할 때, 지수법칙 $a^m\times a^n=a^{m+n}$을 이용해.

조건 (나)에서 $3^a=5^b=k$라 하면

$3^a=k$에서 $3=k^{\frac{1}{a}}$

$\therefore 3^2=9=k^{\frac{2}{a}}$ … ㉠

$5^b=k$에서 $5=k^{\frac{1}{b}}$ … ㉡

㉠, ㉡을 같은 변끼리 곱하면 $45=k^{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}$

이때, 조건 (가)에서 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$이므로 $45=k^{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}=k$

따라서 $3^a=5^b=k=45$이므로

$3^a+5^b=90$

08 답 ②

$2^a=12$에서 $2^{a-2}=3$

$3^b=12$에서 $3^{b-1}=4$

이때, $2^{(a-2)(b-1)}=(2^{a-2})^{b-1}=3^{b-1}=4=2^2$

$\therefore (a-2)(b-1)=2$

09 답 64

이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$이고

$\alpha^2-2\alpha-4=0$에서 $\alpha^2-2\alpha=4$

$$\therefore \frac{8^\alpha\times 2^\beta}{(2^\alpha\times 4^\beta)^\alpha}=\frac{2^{3\alpha}\times 2^\beta}{2^{\alpha^2}\times 4^{\alpha\beta}}=\frac{2^{3\alpha+\beta}}{2^{\alpha^2+2\alpha\beta}}$$

$$=2^{3\alpha+\beta-\alpha^2-2\alpha\beta}=2^{(\alpha+\beta)-2\alpha\beta-(\alpha^2-2\alpha)}$$

$$=2^{2+8-4}=2^6=64$$

10 답 207

Tip

식의 변수를 파악해 각 변수에 주어진 값을 대입하여 k의 값을 구할 수 있어.

10년 동안 두 회사 A, B의 연평균 성장률을 각각 R_{A}, R_{B}라 하면

$$R_{\mathrm{A}}=\left(\frac{400}{200}\right)^{\frac{1}{10}}-1=2^{\frac{1}{10}}-1$$

$$R_{\mathrm{B}}=\left(\frac{320}{80}\right)^{\frac{1}{10}}-1=4^{\frac{1}{10}}-1$$

$$\therefore k=\frac{R_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{A}}}=\frac{4^{\frac{1}{10}}-1}{2^{\frac{1}{10}}-1}=\frac{(2^{\frac{1}{10}}+1)(2^{\frac{1}{10}}-1)}{2^{\frac{1}{10}}-1}=2^{\frac{1}{10}}+1$$

이때, $2^{\frac{11}{10}}=2\times 2^{\frac{1}{10}}=2.14$이므로 $2^{\frac{1}{10}}=1.07$이다.

따라서 $k=2^{\frac{1}{10}}+1=1.07+1=2.07$이다.

$\therefore 100k=207$

11 답 4

$t=0$일 때, $\frac{p}{10}$개의 파일이 바이러스에 감염되어

있으므로 $f(0)=\frac{p}{1+c}=\frac{p}{10}$에서 $c=9$

$$\therefore f(t)=\frac{p}{1+9e^{-kt}}$$

또, 2시간 후에 전체 파일의 $\frac{1}{4}$이 감염될 것으로 판단되므로

$$f(2)=\frac{p}{1+9e^{-2k}}=\frac{p}{4}\text{에서 } \underbrace{e^{-2k}=\frac{1}{3}}_{(e^{-2k})^2=\frac{1}{3^2}} \cdots ㉠$$

이때, n시간 후에 전체 파일의 $\frac{1}{2}$이 감염된다고 하면

$$f(n)=\frac{p}{1+9e^{-kn}}=\frac{p}{2}\text{에서 } e^{-kn}=\frac{1}{9} \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 $n=4$

12 답 ①

Tip

로그의 정의에서 밑의 조건과 진수의 조건을 알아야 해. 밑은 0보다 크면서 1이 아니어야 하고, 진수는 0보다 커야 해.

로그의 정의에서 밑은 1이 아닌 양수이고, 진수는 양수이어야 한다.

ㄱ. $a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}$이고 $a^2+1\geq 1$이므로 밑과 진수의 조건을 모두 만족시킨다.

즉, a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있다.

ㄴ. $a=0$일 때, $2|a|+1=1$에서 $a=0$일 때는 밑의 조건을 만족시키지 않으므로 로그가 정의될 수 없다.

ㄷ. $a=1$일 때, $a^2-2a+1=0$에서 $a=1$일 때는 진수의 조건을 만족시키지 않으므로 로그가 정의될 수 없다.

따라서 실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것은 ㄱ이다.

13 답 ①

$a^3b^2=1$의 양변에 a를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^3b^2=\log_a 1$, $\log_a a^3+\log_a b^2=0$

$3+2\log_a b=0$ $\quad\therefore \log_a b=-\frac{3}{2}$

$$\therefore \log_a a^2b^3=\log_a a^2+\log_a b^3=2+3\log_a b$$

$$=2+3\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}$$