학교시험에 반드시 출제되는
핵심 유형 기출 문제 1070제 수록

고교 학점제 실시
내신 5등급제 실시

자이스토리는
새로운 내신 등급에 꼭맞는 핵심 유형을
세밀하게 분류하고 자주 출제되는
기출 문제를 엄선하여 수록했습니다.
이 문제들만 충분히 연습하면
내신 1 등급은 쉽게 이룰 수 있습니다.

또한, 자이스토리만의 꼼꼼한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설은
문제를 풀어가면서 동시에 개념과 유형을 자연스럽게
익힐 수 있도록 도와줍니다.

특별한 사람만이 수학을 좋아하고 잘하는 것이 아닙니다.
개념을 바르게 이해하고, 쉬운 문제부터 단계를 밟아 기본을 다지면
수학은 어느새 재미있는 과목이 되어 있을 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1 등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 –

학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [26일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~52		월 일	월 일
2	53~81		월 일	월 일
3	B 01~57		월 일	월 일
4	58~85		월 일	월 일
5	C 01~46		월 일	월 일
6	47~77		월 일	월 일
7	D 01~51		월 일	월 일
8	52~89		월 일	월 일
9	E 01~61		월 일	월 일
10	62~98		월 일	월 일
11	F 01~54		월 일	월 일
12	55~93		월 일	월 일
13	G 01~56		월 일	월 일
14	57~94		월 일	월 일
15	H 01~46		월 일	월 일
16	47~73		월 일	월 일
17	I 01~41		월 일	월 일
18	42~71		월 일	월 일
19	72~101		월 일	월 일
20	J 01~33		월 일	월 일
21	34~59		월 일	월 일
22	K 01~48		월 일	월 일
23	49~83		월 일	월 일
24	84~112		월 일	월 일
25	L 01~64		월 일	월 일
26	65~108		월 일	월 일

- 나는 ________________대학교 ________________학과 __________학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교 · 학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여자고등학교
배수나 가인아카데미
이종석 일등급 수학 저자
신건률 대치 다원교육
장철희 서울 보성고등학교
전경준 서울 풍문고등학교
최대철 서울 인창고등학교
홍지언 부산대학교 수학 박사과정
홍지우 안양 평촌고등학교
황광희 시흥 시흥고등학교
수경 수학 컨텐츠 연구소

[다른 풀이 집필]
강 현 경주 비상아이비츠 강현학원
김리안 인천 수리안학원

김예진 경남 수능수학 전문컨설턴트
김 준 인천 쭌에듀학원
신은숙 서울 펜타곤학원
유대호 평촌 플랜지에듀
유재영 평택 비전고등학교
이보형 성남 매쓰코드학원
이세복 서울 일타수학학원
전승환 안양 공즐학원
정경애 대구 수투수학학원
정석규 천안 힐베르트 수학과학학원
채송화 부산 채송화수학

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널
셀프수학

[특별 감수진]

김주혁 대전 한빛고등학교
김진식 대구 경신고등학교
박우혁 광주 종로학원/원픽학원
안세경 서울 성남고등학교
양해영 서울 청출어람학원
윤규환 광주 석산고등학교
이승주 인천 명신여자고등학교
이춘호 익산 이리고등학교
이한샘 광명 진성고등학교
조현정 서울 동덕여자고등학교
최선락 서울 중계수학의 중심학원

[감수진]

강명식 수원 매쓰온수학학원
강민영 대구 온빛수학학원
강성철 서울 일타수학학원
강신준 수원 영통수학의아침
강지연 광주 봉선한수위수학학원
고유정 광주 연제렉스학원
곽재혁 파주 유투엠수학학원
권가영 서울 목동커스텀수학학원
김경민 천안 수학다이닝학원
김경태 서울 송파구주이배
김국철 광주 풍암필즈수학학원
김동영 서울 목동국선수학학원
김면중 서울 노원올림피아드학원
김미림 김포 우리학원
김보미 고양 유투엠향동캠퍼스
김봉조 울산 퍼스트클래스수학영어전문학원
김상현 대전 진플수학학원
김상호 전주 휴민고등수학전문학원
김석훈 순천 쿤수학학원
김선홍 군포 고밀도학원
김송림 서울 관악구 EG학원
김수정 서울 대치동합영원입시학원
김수진 광주 영재사관학원
김영득 인천 고수학학원
김정원 인천 이명학원
김진수 대전 둔산엘트학원
김춘식 서울 목동엠플러스수학학원
김태성 광주 김태성수학전문학원
김한빛 천안 한빛수학학원
김홍우 대전 송촌이룸학원
박강록 순천 베리타스수능학원
박경호 부산 MATH CLASS
박교국 서울 목동백인대장
박규진 김포 김포하이스트
박대희 제주 실전수학
박유하 부산 유일수학
박종민 성남 분당수림수학
박진만 파주 운정상승학원
박진아 대전 호동쌤수학학원
박진홍 군포 고밀도학원
박현서 김포 일타수학학원
배탐스 안양 삼성학원
서승호 서울 멘토수학학원
성정화 서울 LNS 수학학원
송승용 광주 송승용수학전문학원
신욱희 진주 창익학원
신원섭 원주 빼어난수학학원
신은숙 서울 마곡펜타곤학원
심수경 강릉 PF math
안대호 서울 말글국어더함수학학원
안유선 서울 이루트학원
안준석 부산 이든수학
양지현 성남 분당일비충천
어성웅 수원 어쌤수학학원
오성일 대구 연세EMS학원
오정민 인천 갈루아수학학원
유승범 수원 생각하는수학
유태권 세종 수학의기술
윤성길 서울 로드맵수학학원
윤성민 화성 동탄수학의품격
이관희 대전 아인스학원
이만희 대구 오르라수학전문학원
이보근 군산 미라클입시학원
이서윤 화성 동탄곰수학학원
이성근 서울 송파베리타스수학학원
이성준 인천 지담수학학원
이세복 고양 퍼스널수학
이원영 고양 일산FM수학학원
이재욱 대전 청명대입학원
이준호 성남 최상위수학학원
이진희 서울 서준학원
이한나 울산 꿈꾸는고래학원
이효상 부산 미래EMS학원
임명진 안양 서연고학원
임지은 서울 마포채움수학
장광덕 화성 동탄의수학학원
장길하 서울 새움수학학원
장성훈 서울 미독수학
장한나 부천 봄날의수학교습소
전상균 성남 분당에스메틱스학원
전찬용 부산 다이나믹학원
정민호 대구 스테듀입시원
정병보 대전 카이탑수학
정인호 성남 분당이노수학
정지민 청주 스텝업수학
정찬우 대전 우리학원
정하영 안양 정하영수학학원
정현우 부산 청담수학학원
조성근 김포 거미수학학원
조성연 서울 채움수학학원
조형우 청주 와이파이수학학원
차동희 용인 수학전문공감학원
최병헌 양산 프라임수학전문학원
한기석 김포 매쓰필수학학원
한철호 울산 혁신수학전문학원
함민호 서울 뉴파인마포고등관
홍영표 안양 평촌스카이수학학원
홍유진 안양 평촌지수학학원
홍의찬 고양 일산원수학학원
황진영 부산 진심수학

[My Top Secret 집필]
곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
황대윤 서울대 수리과학부

차 례 [총 160개 유형]

Ⅰ 다항식

Ⅱ 방정식과 부등식

Ⅲ 순열과 조합

Ⅳ 행렬

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

셀프수학

완벽한 개념 이해, 핵심 기출 유형 문제 훈련으로 내신 1등급 완성

1 개념 스토리+개념 확인 문제

공통수학1에서 꼭 알아야 하는 중요한 교과서 개념을 쉽게 이해되도록 설명하였습니다. 또한, 개념과 공식을 확실히 자신의 것으로 만들 수 있는 개념 확인 문제를 함께 수록했습니다.

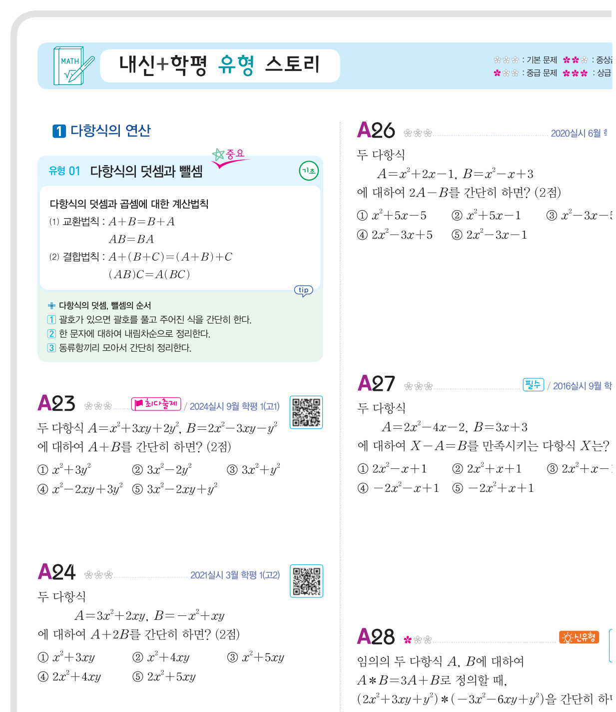
- **중요도 ★★★ :** 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- **개념 확인 문제 :** 개념 하나하나에 대한 맞춤 문제로 구성

- **QR 코드 :** 수학 전문 강사의 생생한 개념 강의를 통해 완벽한 개념 학습을 할 수 있도록 하였습니다.

2 내신+학평 유형 스토리

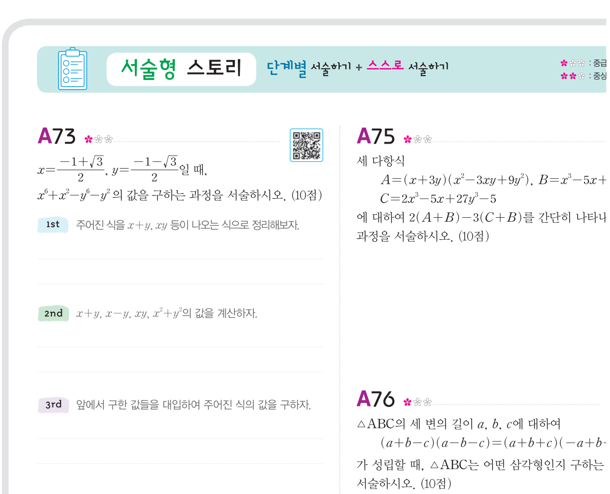
개념에 따른 유형을 자세히 공부할 수 있도록 학교 시험이나 학력평가에서 출제되었던 문제들을 촘촘하게 세분화하여 개념순, 난이도 순으로 수록하였습니다.

- **유형 정리 :** 시험에서 출제되었던 모든 유형을 제시하여 효과적이고 완벽한 유형 분석을 할 수 있도록 하였습니다.
- **tip :** 유형에 따라 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR 코드 :** 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.



3 서술형 스토리–단계별 문제해결 방법 제시

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계적으로 풀어나가는 과정을 제시하여 서술형 문제에 대한 자신감을 얻을 수 있게 구성하였습니다.



- **난이도 :** ✿✿✿ – 기본 문제, ✿✿✿ – 중급 문제
✿✿✿ – 중상급 문제, ✿✿✿ – 상급 문제

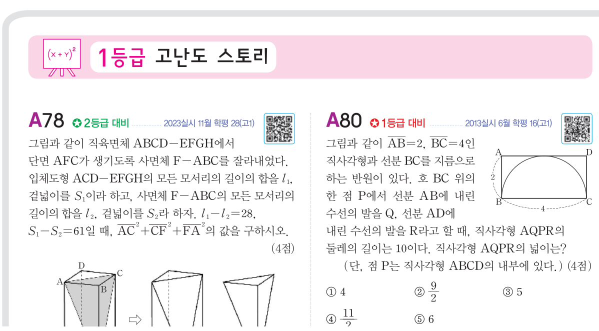
- 출제표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - **2025대비 수능(나) 22번** : 2024년 11월에 실시한 수능
  - **2024실시 6월 학평 16(고1)** : 2024년 6월에 실시한 학력평가
  - **2023실시 3월 학평 10(고2)** : 2023년 3월에 실시한 학력평가
  - **표시 없는 문제** : 기출 변형 문제

- **최다출제** : 내신, 학평에서 가장 출제율이 높은 문제
- **신유형** : 최근 내신+학평에서 출제되는 새로운 유형의 문제
- **필수** : 유형 학습을 위해 꼭 확인 해야 하는 문제
- **중요** : 시험에 반드시 출제되는 중요 유형 체크

4 1등급 고난도 스토리 – 2등급 대비+1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 난이도 순으로 배열하여 종합적인 사고력과 응용력을 길러서 반드시 수학 1등급을 달성할 수 있도록 구성했습니다.

- 1등급 대비 : 정답률이 20% 이하인 문제로, 1등급을 가르는 최고난도 문제
- 2등급 대비 : 정답률이 21%~35%인 문제로, 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 최상급 문제


1등급 고난도 스토리

A78 2등급 대비 2023실시 11월 학평 28(고1)

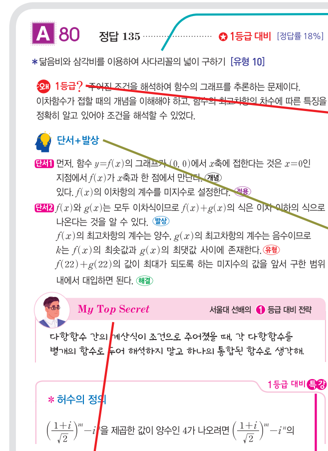
그림과 같이 직육면체 ABCD−EFGH에서 단면 AFC가 생기도록 사면체 F−ABC를 잘라내었다. 입체도형 ACD−EFGH의 모든 모서리의 길이의 합을 l_1, 겉넓이를 S_1이라 하고, 사면체 F−ABC의 모든 모서리의 길이의 합을 l_2, 겉넓이를 S_2라 하자. $l_1-l_2=28$, $S_1-S_2=61$일 때, $\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2$의 값을 구하시오. (4점)

A80 1등급 대비 2013실시 6월 학평 16(고1)

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$인 직사각형과 선분 BC를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 BC 위의 한 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 선분 AD에 내린 수선의 발을 R라고 할 때, 직사각형 AQPR의 둘레의 길이는 10이다. 직사각형 AQPR의 넓이는? (단, 점 P는 직사각형 ABCD의 내부에 있다.) (4점)

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

5 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설



문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

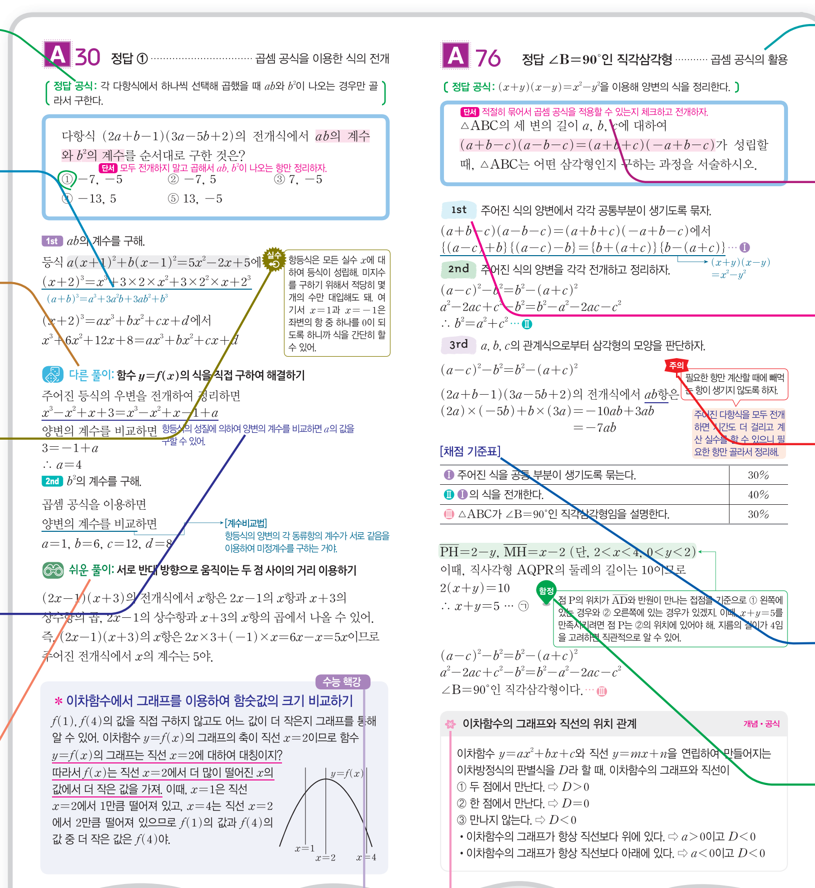
왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
- 단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
- 개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
- 유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
- 발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
- 적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
- 해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

6 입체 첨삭 해설!



정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

적용 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빠먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

채점 기준표
서술형 문제에 대한 적절한 풀이 기준을 제시하여 중요한 포인트를 놓치지 않게 하였습니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

문항 배열 및 구성 [1070제]

❶ 개념 이해와 개념 확인 문제 [267제]

각 단원에서 배울 개념 중 중요한 것들을 자세히 설명하고 개념 하나하나에 대한 맞춤 문제를 수록하였습니다.

❷ 최신 15개년 160개 유형 핵심 기출 문제 수록

- 새교육과정에 꼭 맞는 최신 고1 학력평가 핵심 기출 문제 수록(566제)
- 고2, 고3 기출 문제 중 새교육과정에 알맞은 기출 문제 선별 수록(113제)
- 새교육과정 완벽 대비를 위한 유형별 핵심 기출 변형 문제 수록(304제)
- 기출 핵심 유형 완전 학습 – 내신+학평 유형 스토리[160유형, 683제]

★ 내신 1등급을 위한 내신 기출 변형 문제 추가 수록

1. 내신 1등급을 위해 160개 문제 유형으로 세분화

수학 개념을 쉽고 빠르게 이해하는 가장 좋은 학습법은 문제 유형을 세분화해서 공부하는 것입니다.
학교 시험은 다양한 유형에서 고르게 출제되기 때문에, 유형을 세분화해서 충분히 연습해야 합니다.

2. 160개 유형 연습을 위한 기출 문제 + 내신 기출 변형 문제 수록

학력평가는 특정한 유형에서 많이 출제되기 때문에 어떤 유형은 기출 문제가 과하게 많고,
어떤 유형은 기출 문제가 부족합니다. 그래서 160개 유형에 맞는 내신 기출 변형 문제를 보충 수록해서
1등급을 위한 완벽한 학습이 되도록 하였습니다.

❸ 서술형 단계별 훈련을 위한 내신 기출 변형 문제 서술형 스토리 [서술형 60제]

각 단원 중 서술형 출제 방식에 적합하고 출제 비율이 높은 내신 기출 변형 서술형 문제를 구성하였습니다.

[공통수학1 문항 구성표]

시행연도	고1 3월 학력평가	고1 6월 학력평가	고1 9월 학력평가	고1 11월 학력평가	고2 학력평가	연도별 문항 수
2024	0	27	14	0	10	51
2023	0	19	12	9	9	49
2022	0	17	8	7	4	36
2021	0	18	12	7	8	45
2020	0	15	9	7	8	39
2019	5	12	3	5	13	38
2018	0	13	7	4	2	26
2017	1	8	2	2	2	15
2016	2	8	4	1	2	17
2015	1	6	4	2	2	15
2014 이전	1	11	10	5	15	42
고3 수능, 평가원, 학력평가	47					
내신 기출 변형 문제	322					
기본 개념, 서술형 문제	327					
총 수록 문항 수						1070

■ 내신 기출 변형 문제 : 160개 유형 예상 문제 수록
■ 학평 기출 : 핵심 기출 문제 선별 수록

A 다항식의 연산

★ 유형 차례

단원 학습 목표

- 중학교 과정에서 학습한 다항식의 뜻과 간단한 다항식을 계산하는 방법으로부터 두 개 이상의 문자를 포함한 복잡한 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.
- 중학교에서 학습한 지수법칙을 바탕으로, 단항식의 곱셈으로부터 삼차식과 항이 3개인 곱셈 공식을 알고, 이를 다항식의 연산에 활용할 수 있다.

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 다항식의 연산에서는 주어진 식을 먼저 간단히 한 후 다항식을 대입하여 계산한다. 이때, 괄호로 묶어서 대입하면 실수를 줄일 수 있는데, 괄호를 풀 때 괄호 앞의 부호에 주의한다.
- 곱셈 공식 또는 곱셈 공식의 변형을 통해 식의 값을 묻는 문제가 자주 출제되므로 반드시 정리해두도록 한다.
- (다항식)÷(다항식)은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

★ 자주 출제되는 개념+공식

1 자주 쓰이는 곱셈 공식

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(3) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

2 다항식 A를 다항식 $B\,(B\neq 0)$로 나눌 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)$<$(B의 차수))

개념 스토리

A 다항식의 연산

개념 강의

중요도 ★○○

1 다항식의 연산[1] – 유형 01~03

(1) **다항식의 덧셈과 뺄셈** : 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 동류항끼리 모아서 정리한 후 계산한다.

↳다항식에서 문자와 차수가 같은 항

① 괄호가 있는 경우 괄호를 푼다.

② 뺄셈은 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더한다.

(2) **다항식의 곱셈** : 지수법칙과 분배법칙을 이용하여 전개한다.

※ 지수법칙 : m, n이 자연수일 때

① $a^m\times a^n=a^{m+n}$　② $(a^m)^n=a^{mn}$　③ $(ab)^m=a^mb^m$

④ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$ (단, $b\neq0$)　⑤ $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n)\end{cases}$ (단, $a\neq0$)

2 곱셈 공식[2] – 유형 04~05

이미 배웠던 공식

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(4) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

새로 배우는 공식

(5) $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

(6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$[3]

(7) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(8) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(9) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

(10) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

3 곱셈 공식의 변형 – 유형 06~10

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$[4]

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,　$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(4) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

참고 (1), (2)에 a 대신 x, b 대신 $\dfrac{1}{x}$을 대입하면 다음과 같다.

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$,　$x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

4 다항식의 나눗셈 – 유형 11~12

(1) **다항식의 나눗셈** : 다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나눌 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$ (단, (R의 차수)$<$(B의 차수))

특히, $R=0$, 즉 $A=BQ$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

(2) **(다항식)÷(다항식)의 계산**[5] : (다항식)÷(다항식)은 먼저 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

+개념 보충

❶ 다항식의 정리 방법

① 내림차순 : 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내는 것

② 오름차순 : 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타내는 것

참고 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순이나 오름차순으로 정리할 때, 기준이 되는 문자를 제외한 나머지 문자는 상수로 생각한다.

예) 다항식 $x^2+3xy-y^2-2x+5y+4$에 대하여

① x에 대하여 내림차순 정리
$x^2+(3y-2)x-y^2+5y+4$

② x에 대하여 오름차순 정리
$-y^2+5y+4+(3y-2)x+x^2$

+개념 확장

❷ 다항식의 덧셈과 곱셈에 대한 계산법칙

다항식 A, B, C에 대하여

① 교환법칙 : $A+B=B+A$
$AB=BA$

② 결합법칙 :
$(A+B)+C=A+(B+C)$
$(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙 :
$A(B+C)=AB+AC$
$(A+B)C=AC+BC$

+개념 Tip

❸ $(a-b)^3$
$=\{a+(-b)\}^3$
$=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

❹ $(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$에서
$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

+개념 보충

❺ 예) $(2x^2+3x+4)\div(x-1)$의 계산

$$\begin{array}{r l}
2x+5 & \Leftarrow \text{몫} \\
x-1\overline{\big)\,2x^2+3x+4} & \\
2x^2-2x & \Leftarrow (x-1)\times 2x \\
\hline
5x+4 & \\
5x-5 & \Leftarrow (x-1)\times 5 \\
\hline
9 & \Leftarrow \text{나머지}
\end{array}$$

1 다항식의 연산

[A01~A02] 두 다항식 $A=x^3-3x^2+2x+4$, $B=-2x^3+4x^2-x$에 대하여 다음을 계산하시오.

A01 $A+B$

A02 $3A-2B$

[A03~A04] 다음 식을 간단히 하시오.

A03 $-2ax^2\times5a^2x$

A04 $(-a^3b^2)^3\div(-2a^2b^4)^2$

[A05~A06] 다음 식을 전개하시오.

A05 $3x(2x^2-3x+4)$

A06 $(a^2+b)(a^2-2b-3)$

2 곱셈 공식

[A07~A16] 곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

A07 $(3x+1)^2$

A08 $(4x+y)(4x-y)$

A09 $(x+2)(x+5)$

A10 $(2x-5)(3x+2)$

A11 $(x+1)(x+3)(x+6)$

A12 $(x+2)^3$

A13 $(2a-1)(4a^2+2a+1)$

A14 $(a-2b+c)^2$

A15 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

A16 $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$

3 곱셈 공식의 변형

A17 $a+b=3$, $ab=-2$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) a^2+b^2　　(2) a^3+b^3

A18 $x+\dfrac{1}{x}=3$일 때, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$의 값을 구하시오.

4 다항식의 나눗셈

[A19~A20] 다음 식을 계산하시오.

A19 $(6x^3+15x^2-3x)\div3x$

A20 $(4a^2b^3+8a^3b-10ab^2)\div2ab$

[A21~A22] 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

A21 $(x^3+4x^2-5)\div(x-2)$

A22 $(2x^3-x^2-6x+1)\div(x+1)$

❖ 정답 및 해설 2p

❀❀❀ : 기본 문제 ✿✿❀ : 중상급 문제
✿❀❀ : 중급 문제 ✿✿✿ : 상급 문제

1 다항식의 연산

유형 01 다항식의 덧셈과 뺄셈 중요 기초

다항식의 덧셈과 곱셈에 대한 계산법칙

(1) 교환법칙 : $A+B=B+A$

$AB=BA$

(2) 결합법칙 : $A+(B+C)=(A+B)+C$

$(AB)C=A(BC)$

tip

✚ 다항식의 덧셈, 뺄셈의 순서

1 괄호가 있으면 괄호를 풀고 주어진 식을 간단히 한다.

2 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

3 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

A23 ❀❀❀ 최다출제 / 2024실시 9월 학평 1(고1)

두 다항식 $A=x^2+3xy+2y^2$, $B=2x^2-3xy-y^2$ 에 대하여 $A+B$를 간단히 하면? (2점)

① x^2+3y^2 ② $3x^2-2y^2$ ③ $3x^2+y^2$
④ $x^2-2xy+3y^2$ ⑤ $3x^2-2xy+y^2$

A24 ❀❀❀ 2021실시 3월 학평 1(고2)

두 다항식

$A=3x^2+2xy$, $B=-x^2+xy$

에 대하여 $A+2B$를 간단히 하면? (2점)

① x^2+3xy ② x^2+4xy ③ x^2+5xy
④ $2x^2+4xy$ ⑤ $2x^2+5xy$

A25 ❀❀❀ 2024실시 6월 학평 2(고1)

두 다항식 $A=3x^2-5x+1$, $B=2x^2+x+3$에 대하여 $A-B$를 간단히 하면? (2점)

① x^2-4x-2 ② x^2-4x+2 ③ x^2-4x+4
④ x^2-6x-2 ⑤ x^2-6x+2

A26 ❀❀❀ 2020실시 6월 학평 2(고1)

두 다항식

$A=x^2+2x-1$, $B=x^2-x+3$

에 대하여 $2A-B$를 간단히 하면? (2점)

① x^2+5x-5 ② x^2+5x-1 ③ x^2-3x-5
④ $2x^2-3x+5$ ⑤ $2x^2-3x-1$

A27 ❀❀❀ 필수 / 2016실시 9월 학평 2(고1)

두 다항식

$A=2x^2-4x-2$, $B=3x+3$

에 대하여 $X-A=B$를 만족시키는 다항식 X는? (2점)

① $2x^2-x+1$ ② $2x^2+x+1$ ③ $2x^2+x-1$
④ $-2x^2-x+1$ ⑤ $-2x^2+x+1$

A28 ✿❀❀ 신유형

임의의 두 다항식 A, B에 대하여
$A*B=3A+B$로 정의할 때,
$(2x^2+3xy+y^2)*(-3x^2-6xy+y^2)$을 간단히 하면? (3점)

① $-2x^2-12xy+y^2$ ② $-2x^2-12xy+3y^2$
③ $3x^2-3xy-4y^2$ ④ $3x^2+3xy+4y^2$
⑤ $9x^2-3xy+4y$

서술형 스토리

단계별 서술하기 + 스스로 서술하기

★☆☆ : 중급 문제
★★☆ : 중상급 문제

A73 ★☆☆

$x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$일 때,
$x^6+x^2-y^6-y^2$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

1st 주어진 식을 $x+y$, xy 등이 나오는 식으로 정리해보자.

2nd $x+y$, $x-y$, xy, x^2+y^2의 값을 계산하자.

3rd 앞에서 구한 값들을 대입하여 주어진 식의 값을 구하자.

A74 ★☆☆

실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=\sqrt{3}$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=3\sqrt{3}$일 때, abc의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

1st $ab+bc+ca$의 값을 구하자.

2nd $a^3+b^3+c^3$과 abc가 있는 곱셈 공식을 떠올리자.

3rd abc의 값을 구하자.

A75 ★☆☆

세 다항식

$A=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$, $B=x^3-5x+1$,
$C=2x^3-5x+27y^3-5$

에 대하여 $2(A+B)-3(C+B)$를 간단히 나타내는 과정을 서술하시오. (10점)

A76 ★☆☆

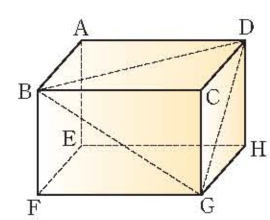
$\triangle$ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

$$(a+b-c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a+b-c)$$

가 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인지 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

A77 ★☆☆

오른쪽 그림과 같은 직육면체의 겉넓이가 46이고, $\triangle$BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 108일 때, 이 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구하는 과정을 서술하시오. (10점)

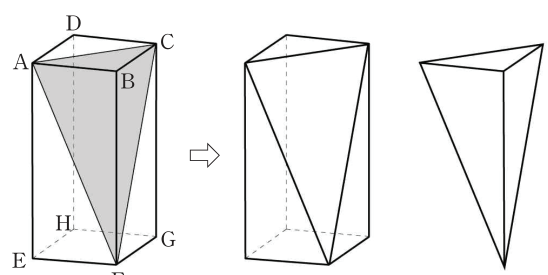


❖ 정답 및 해설 14~16p

1등급 고난도 스토리

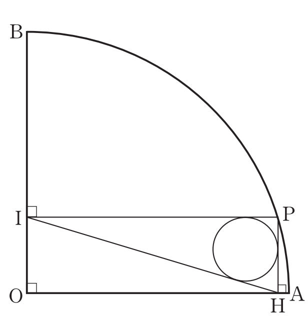
A78 ✪2등급 대비 2023실시 11월 학평 28(고1)

그림과 같이 직육면체 ABCD−EFGH에서 단면 AFC가 생기도록 사면체 F−ABC를 잘라내었다. 입체도형 ACD−EFGH의 모든 모서리의 길이의 합을 l_1, 겉넓이를 S_1이라 하고, 사면체 F−ABC의 모든 모서리의 길이의 합을 l_2, 겉넓이를 S_2라 하자. $l_1-l_2=28$, $S_1-S_2=61$일 때, $\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2$의 값을 구하시오. (4점)



A79 ✪2등급 대비 2020실시 11월 학평 19(고1)

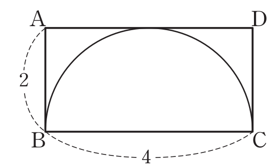
그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 두 선분 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자. 삼각형 PIH에 내접하는 원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$일때, $\overline{PH}^3+\overline{PI}^3$의 값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.) (4점)



① 56 ② $\frac{115}{2}$ ③ 59 ④ $\frac{121}{2}$ ⑤ 62

A80 ✪1등급 대비 2013실시 6월 학평 16(고1)

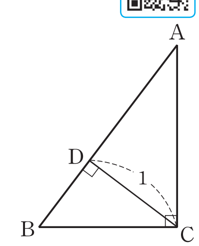
그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$인 직사각형과 선분 BC를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 BC 위의 한 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 선분 AD에 내린 수선의 발을 R라고 할 때, 직사각형 AQPR의 둘레의 길이는 10이다. 직사각형 AQPR의 넓이는?
(단, 점 P는 직사각형 ABCD의 내부에 있다.) (4점)



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

A81 ✪1등급 대비 2015실시 6월 학평 21(고1)

∠C=90°인 직각삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 점 D는 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발이고 $\overline{CD}=1$이다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 5일 때, 선분 AB의 길이는? (4점)



① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{23}{12}$ ③ $\frac{25}{12}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{29}{12}$

❖ 정답 및 해설 16~19p

A 다항식의 연산

개념 확인 문제

A 01 정답 $-x^3+x^2+x+4$

A 02 정답 $7x^3-17x^2+8x+12$

A 03 정답 $-10a^3x^3$

A 04 정답 $-\dfrac{a^5}{4b^2}$

A 05 정답 $6x^3-9x^2+12x$

A 06 정답 $a^4-a^2b-3a^2-2b^2-3b$

A 07 정답 $9x^2+6x+1$

A 08 정답 $16x^2-y^2$

A 09 정답 $x^2+7x+10$

A 10 정답 $6x^2-11x-10$

A 11 정답 $x^3+10x^2+27x+18$

A 12 정답 $x^3+6x^2+12x+8$

A 13 정답 $8a^3-1$

A 14 정답 $a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$

A 15 정답 $x^4+4x^2y^2+16y^4$

A 16 정답 $a^3+b^3-c^3+3abc$

A 17 정답 (1) 13 (2) 45

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times(-2)=9+4=13$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\times(-2)\times3=27+18=45$

A 18 정답 7

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=9-2=7$$

A 19 정답 $2x^2+5x-1$

A 20 정답 $2ab^2+4a^2-5b$

A 21 정답 몫 : $x^2+6x+12$, 나머지 : 19

A 22 정답 몫 : $2x^2-3x-3$, 나머지 : 4

내신+학평 유형 스토리

A 23 정답 ③ ······ 다항식의 덧셈과 뺄셈

정답 공식: 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 동류항끼리 모아서 정리한 후 계산한다.

두 다항식 $A=x^2+3xy+2y^2$, $B=2x^2-3xy-y^2$에 대하여 $A+B$를 간단히 하면?

단서 다항식의 덧셈은 동류항끼리 계산하자.

① x^2+3y^2 ② $3x^2-2y^2$ ③ $3x^2+y^2$
④ $x^2-2xy+3y^2$ ⑤ $3x^2-2xy+y^2$

1st 동류항끼리 계산하여 $A+B$를 간단히 해.

$A+B$에서 A, B를 x, y에 대한 다항식으로 나타내면

$A+B=(x^2+3xy+2y^2)+(2x^2-3xy-y^2)$이다.

2nd 동류항끼리 계산하여 답을 구하자.

이때, 동류항끼리 묶어서 계산하면

$A+B=\underline{(1+2)x^2+(3-3)xy+(2-1)y^2=3x^2+y^2}$

이때 xy항의 계수가 0이면 그 항은 0이 되니 사라져.

A 24 정답 ② ······ 다항식의 연산

정답 공식: 동류항끼리 모아서 동류항의 계수의 덧셈으로 계산한다.

두 다항식

$A=3x^2+2xy$, $B=-x^2+xy$

에 대하여 $A+2B$를 간단히 하면?

단서 두 다항식의 동류항을 찾아서 계산해.

① x^2+3xy ② x^2+4xy ③ x^2+5xy
④ $2x^2+4xy$ ⑤ $2x^2+5xy$

1st 두 다항식의 덧셈과 실수배를 계산하자.

$A+2B=(3x^2+2xy)+2(-x^2+xy)$

$=3x^2+2xy-2x^2+2xy$

$=x^2+4xy$

x^2항끼리, xy항끼리 정리해.
즉, $3x^2-2x^2=(3-2)x^2=x^2$이고
$2xy+2xy=(2+2)xy=4xy$야.

A 25 정답 ④ ······ 다항식의 덧셈과 뺄셈

정답 공식: 동류항끼리 모아서 동류항의 계수의 뺄셈으로 계산한다.

두 다항식 $A=3x^2-5x+1$, $B=2x^2+x+3$에 대하여 $A-B$를 간단히 하면?

단서 다항식의 뺄셈을 하려면 동류항끼리 모아야겠지?

① x^2-4x-2 ② x^2-4x+2 ③ x^2-4x+4
④ x^2-6x-2 ⑤ x^2-6x+2

1st 다항식의 뺄셈을 계산해.

$A-B=(3x^2-5x+1)-(2x^2+x+3)$

$=3x^2-5x+1-2x^2-x-3$

$=\underline{(3-2)x^2-(5+1)x+(1-3)}$

$=x^2-6x-2$

동류항끼리 묶어서 계산할 때 '−'부호가 있으니까 부호 실수를 하지 않도록 주의해.

A 26 정답 ① ···················· 다항식의 연산

(정답 공식: $A(B+C)=AB+AC$)

두 다항식

$A=x^2+2x-1$, $B=x^2-x+3$

에 대하여 $2A-B$를 간단히 하면?

단서 두 다항식이 주어져 있으니까 대입하여 동류항끼리 계산하자.

① x^2+5x-5 ② x^2+5x-1 ③ x^2-3x-5
④ $2x^2-3x+5$ ⑤ $2x^2-3x-1$

1st 주어진 두 다항식을 대입하여 계산하자.

$2A-B=2(x^2+2x-1)-(x^2-x+3)$
$=2x^2+4x-2-x^2+x-3$
$=x^2+5x-5$

주의 다항식의 계산에서 분배법칙을 이용하여 괄호를 없앨 때 실수하기 쉬워. 특히 $-$를 분배할 때 부호를 실수하기 쉬우니까 주의해야 해.

A 27 정답 ① ···················· 다항식의 덧셈과 뺄셈

(정답 공식: $X=A+B$이므로 A, B를 대입해 동류항끼리 모아 정리한다.)

두 다항식 $A=2x^2-4x-2$, $B=3x+3$에 대하여 $X-A=B$를 만족시키는 다항식 X는?

단서 $X-A=B$에서 $X=A+B$이므로 두 다항식 A, B의 합을 x에 대한 내림차순으로 구하면 되겠지!

① $2x^2-x+1$ ② $2x^2+x+1$ ③ $2x^2+x-1$
④ $-2x^2-x+1$ ⑤ $-2x^2+x+1$

1st $X=A+B$이므로 A와 B의 식을 대입해서 정리할 수 있지?

$X-A=B$에서 $X=A+B$이므로
$X=A+B$
$=\underbrace{(2x^2-4x-2)+(3x+3)}_{2x^2+(-4+3)x+(-2+3)}$
$=2x^2-x+1$

A 28 정답 ④ ···················· 다항식의 덧셈과 뺄셈

(정답 공식: 주어진 기호의 정의에 따라 식을 세우고, 동류항끼리 모아 정리한다.)

임의의 두 다항식 A, B에 대하여 $A*B=3A+B$로 정의할 때, $(2x^2+3xy+y^2)*(-3x^2-6xy+y^2)$을 간단히 하면?

① $-2x^2-12xy+y^2$ ② $-2x^2-12xy+3y^2$
③ $3x^2-3xy-4y^2$ ④ $3x^2+3xy+4y^2$
⑤ $9x^2-3xy+4y^2$

단서 $A*B$는 A에 3배하고 B를 더하는 것으로 약속한 거야.

1st 연산의 정의대로 계산해보자.

$(2x^2+3xy+y^2)*(-3x^2-6xy+y^2)$
$=3(2x^2+3xy+y^2)+(-3x^2-6xy+y^2)$

여기서 $2x^2+3xy+y^2=A$, $-3x^2-6xy+y^2=B$로 놓고 생각해보자.

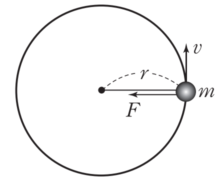
$=6x^2+9xy+3y^2-3x^2-6xy+y^2=3x^2+3xy+4y^2$

A 29 정답 ④ ···················· 다항식의 연산의 실생활에서의 활용

(정답 공식: 등식의 양변에 같은 수를 곱해도 등식이 성립하고 0이 아닌 같은 수로 나누어도 등식이 성립한다.)

물체가 등속 원운동을 하기 위해 원의 중심방향으로 작용하는 일정한 크기의 힘을 구심력이라 한다. 질량이 m인 물체가 반지름의 길이가 r인 원의 궤도를 따라 v의 속력으로 등속 원운동을 할 때 작용하는 구심력의 크기 F는 다음과 같다.

$$F=m\frac{v^2}{r}$$



물체 A와 물체 B는 반지름의 길이가 각각 r_A, r_B인 원의 궤도를 따라 등속 원운동을 한다. 물체 A의 질량은 물체 B의 질량의 3배이고, 물체 A의 속력은 물체 B의 속력의 $\frac{1}{2}$배이다. 물체 A와 물체 B의 구심력의 크기가 같을 때, $\frac{r_A}{r_B}$의 값은?

단서 물체 A의 질량과 속도를 물체 B의 질량과 속도를 이용해서 나타내 봐.

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

1st 물체 A의 질량과 속도를 물체 B의 질량과 속도를 이용하여 나타내 봐.

두 물체 A, B의 질량을 각각 m_A, m_B라 하면 물체 A의 질량은 물체 B의 질량의 3배이므로 $m_A=3m_B$ ⋯ ㉠

a가 b의 k배이면 $a=bk$가 성립해.

또, 두 물체 A, B의 속력을 각각 v_A, v_B라 하면 물체 A의 속력은 물체 B의 속력의 $\frac{1}{2}$배이므로 $v_A=\frac{1}{2}v_B$ ⋯ ㉡

2nd 두 물체의 구심력의 크기를 구해.

두 물체 A, B의 구심력의 크기를 각각 F_A, F_B라 하면

$$F_A=m_A\frac{{v_A}^2}{r_A}=3m_B\frac{\left(\frac{1}{2}v_B\right)^2}{r_A}=3m_B\frac{{v_B}^2}{4r_A}\ (\because ㉠, ㉡)$$

$$F_B=m_B\frac{{v_B}^2}{r_B}$$

3rd $\frac{r_A}{r_B}$의 값을 구해.

이때, 두 물체 A, B의 구심력의 크기가 같으므로 $F_A=F_B$에서

$$3m_B\frac{{v_B}^2}{4r_A}=m_B\frac{{v_B}^2}{r_B}$$

따라서 양변에 $\frac{r_A}{m_B{v_B}^2}$를 곱하면 $\frac{r_A}{r_B}=\frac{3}{4}$

수능 핵강

＊ 실생활에의 활용 문제 해결법

실생활과 관련된 소재를 이용한 다항식의 연산의 활용 문제는 최근 학력평가에 꾸준히 나오고 있는 유형이야.
이 유형은 문제의 글을 읽고 제시된 식에 적절한 수 또는 문자를 대입하여 계산하면 돼.
문제가 길고 내용이 생소하여 어렵게 느껴질 수 있지만 각 문자에 대응하는 수 또는 문자만 잘 찾으면 쉽게 계산할 수 있는 유형이니 겁먹지 말고 글을 차근차근 읽으며 식을 세우고 정리하도록 해.

1st $\overline{BH}=x$를 구하자.

두 삼각형 AHC, CHB가 서로 닮음이므로

$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$

$\therefore\ \overline{CH}^2=\overline{AH}\times\overline{BH}$

$\angle CAH=90^\circ-\angle ACH$, $\angle BCH=90^\circ-\angle ACH$에서 $\angle CAH=\angle BCH$이고 $\angle AHC=\angle CHB=90^\circ$이므로 AA 닮음이야.

이때, $\overline{CH}=1$이고 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{4}{3}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times1=\frac{4}{3}$에서

$\overline{AB}=\frac{8}{3}$

$\overline{BH}=x$이고 $\overline{AH}=\overline{AB}-\overline{BH}=\frac{8}{3}-x$이므로

$\overline{CH}^2=\overline{AH}\times\overline{BH}$에서

$1^2=\left(\frac{8}{3}-x\right)x$, $3x^2-8x+3=0$ … ㉠

→ 이차방정식의 짝수 근의 공식을 이용해.

$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

그런데 $0<x<1$이므로 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ … ㉡

2nd ㉠을 이용하여 다항식 $3x^3-5x^2+4x+7$을 간단히 하자.

$3x^3-5x^2+4x+7$을 다항식 $3x^2-8x+3$으로 나누면 몫은 $x+1$이고 나머지는 $9x+4$이다.

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))이다.

$3x^3-5x^2+4x+7=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$

이때, $3x^2-8x+3=0$이므로

$3x^3-5x^2+4x+7=9x+4$ … ㉢

3rd 구하는 값을 구하자.

따라서 ㉡, ㉢에 의하여 구하는 값은

$9x+4=9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4=16-3\sqrt{7}$이다.

서술형 스토리

A 73 정답 $-\frac{19\sqrt{3}}{4}$ ········ 곱셈 공식의 변형

정답 공식: $x^2=X$, $y^2=Y$로 치환해 주어진 식을 정리하고, X, Y의 값을 구해 대입한다.

> $x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$일 때, $x^6+x^2-y^6-y^2$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.
>
> 단서 $(x^6-y^6)+(x^2-y^2)$으로 놓고 인수분해해보자.

1st 주어진 식을 $x+y$, xy 등이 나오는 식으로 정리해보자.

→ 주어진 두 수 x, y는 $\sqrt{3}$ 앞에 있는 부호만 다르므로 $x+y$와 xy를 구하기가 쉬워.

$x^6+x^2-y^6-y^2$

$=(x^6-y^6)+(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)+(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4+1)$

$=(x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)^2-x^2y^2+1\}$ … ㉠ … Ⅰ

2nd $x+y$, $x-y$, xy, x^2+y^2의 값을 계산하자.

$x+y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}=-1$

$x-y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{-1-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$xy=\frac{(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})}{2\times2}=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1-2\left(-\frac{1}{2}\right)=2$ … Ⅱ

3rd 앞에서 구한 값들을 대입하여 주어진 식의 값을 구하자.

따라서 ㉠에 이 값들을 대입하면 구하는 식의 값은

$(-1)\times\sqrt{3}\times\left(2^2-\frac{1}{4}+1\right)=-\frac{19\sqrt{3}}{4}$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ 주어진 식을 정리한다.	30%
Ⅱ $x+y$, xy 등의 식의 값을 구한다.	40%
Ⅲ Ⅰ의 식에 Ⅱ를 대입하여 주어진 식의 값을 구한다.	30%

A 74 정답 $-\sqrt{3}$ ········ 곱셈 공식의 변형

정답 공식: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$이므로 $a+b+c$와 $a^2+b^2+c^2$에서 $ab+bc+ca$의 값을 구해서, abc의 값을 구한다.

> 단서 $a^3+b^3+c^3-3abc$의 인수분해 공식을 기억하자.
>
> 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=\sqrt{3}$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=3\sqrt{3}$일 때, abc의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

1st $ab+bc+ca$의 값을 구하자.

$a+b+c=\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면 $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=3$

$a^2+b^2+c^2=5$이므로

$5+2(ab+bc+ca)=3$ $\quad\therefore\ ab+bc+ca=-1$ … Ⅰ

2nd $a^3+b^3+c^3$과 abc가 있는 곱셈 공식을 떠올리자.

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서

$a^3+b^3+c^3=3\sqrt{3}$이므로

→ $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$의 값이 주어졌으니까 이 등식을 이용하면 abc의 값을 구하기 쉬워.

3rd abc의 값을 구하자.

$3\sqrt{3}-3abc=\sqrt{3}\cdot\{5-(-1)\}$

$3abc=-3\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ abc=-\sqrt{3}$ … Ⅱ

[채점 기준표]

Ⅰ $ab+bc+ca$의 값을 구한다.	40%
Ⅱ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$를 이용하여 abc의 값을 구한다.	60%

A 75 정답 $-5x^3-27y^3+20x+14$ ····· 다항식의 덧셈과 뺄셈

정답 공식: A를 곱셈 공식을 이용해 전개한 후, A, B, C를 대입해 정리한다.

> 단서1 무조건 전개하지 말고 곱셈 공식을 적용할 수 있는지 체크하자.
>
> 세 다항식 $A=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$, $B=x^3-5x+1$, $C=2x^3-5x+27y^3-5$에 대하여 $2(A+B)-3(C+B)$를 간단히 나타내는 과정을 서술하시오.
>
> 단서2 식부터 간단히 정리하고 A, B, C를 대입하여 정리하자.

1st $2(A+B)-3(C+B)$를 전개하여 간단히 나타내자.

$A=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)=x^3+27y^3$ … Ⅰ

$(x+3y)\{x^2-x\cdot3y+(3y)^2\}=x^3+(3y)^3$임을 이용한 거야.

$2(A+B)-3(C+B)$

$=2A+2B-3C-3B$

$=2A-B-3C$ … Ⅱ

실수 주어진 식을 먼저 간단히 정리하면 계산 과정에서 실수를 줄일 수 있어.

2nd 앞에서 구한 식에 A, B, C의 식을 대입하자.

$=2(x^3+27y^3)-(x^3-5x+1)-3(2x^3-5x+27y^3-5)$

$=2x^3+54y^3-x^3+5x-1-6x^3+15x-81y^3+15$

3rd 내림차순으로 정리해보자.

$=-5x^3-27y^3+20x+14$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ A를 곱셈 공식을 이용하여 정리한다.	20%
Ⅱ $2(A+B)-3(C+B)$를 정리한다.	30%
Ⅲ Ⅱ의 식에 A, B, C를 대입하여 정리한다.	50%

A 76 정답 ∠B=90°인 직각삼각형 ············ 곱셈 공식의 활용

(정답 공식: $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$을 이용해 양변의 식을 정리한다.)

단서 적절히 묶어서 곱셈 공식을 적용할 수 있는지 체크하고 전개하자.

△ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여
$(a+b-c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a+b-c)$가 성립할 때, △ABC는 어떤 삼각형인지 구하는 과정을 서술하시오.

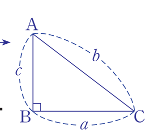
1st 주어진 식의 양변에서 각각 공통부분이 생기도록 묶자.

$(a+b-c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a+b-c)$에서
$\{(a-c)+b\}\{(a-c)-b\}=\{b+(a+c)\}\{b-(a+c)\}$ ··· Ⅰ

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

2nd 주어진 식의 양변을 각각 전개하고 정리하자.

$(a-c)^2-b^2=b^2-(a+c)^2$
$a^2-2ac+c^2-b^2=b^2-a^2-2ac-c^2$
$\therefore b^2=a^2+c^2$ ··· Ⅱ



3rd a, b, c의 관계식으로부터 삼각형의 모양을 판단하자.

따라서 △ABC는 b를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로 ∠B=90°인 직각삼각형이다. ··· Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ 주어진 식을 공통 부분이 생기도록 묶는다.	30%
Ⅱ Ⅰ의 식을 전개한다.	40%
Ⅲ △ABC가 ∠B=90°인 직각삼각형임을 설명한다.	30%

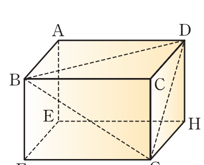
자주 쓰이는 곱셈 공식 개념 • 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
③ $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$
④ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

A 77 정답 40 ············ 곱셈 공식의 활용

(정답 공식: 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이고, △BGD의 각 변의 길이의 제곱은 a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+a^2이다.)

오른쪽 그림과 같은 직육면체의 겉넓이가 46이고, △BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 108일 때, 이 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구하는 과정을 서술하시오.



단서 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 문자로 나타내보자.

1st $\overline{AD}=a$, $\overline{AB}=b$, $\overline{AE}=c$라 하고, 겉넓이가 46임을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구하자.

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 겉넓이가 46이므로
직육면체는 마주보는 면끼리 서로 같으니까 2를 곱한 거야.
$2(ab+bc+ca)=46$
$\therefore ab+bc+ca=23$ ··· Ⅰ

2nd 세 변의 길이의 제곱의 합에서 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하자.

또, △BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 108이므로
$(\sqrt{a^2+b^2})^2+(\sqrt{b^2+c^2})^2+(\sqrt{c^2+a^2})^2=108$
$a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2=108$
$\therefore a^2+b^2+c^2=54$ ··· Ⅱ
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$(a+b+c)^2=54+2\cdot 23=100$
$\therefore a+b+c=10$ ($\because a+b+c>0$)

주의 길이는 0보다 큰 값만 가지므로 제곱의 형태를 풀 때 주의해.

3rd 위에서 구한 값을 이용하여 모든 모서리의 길이의 합 $4(a+b+c)$를 구하자.

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4\times 10=40$이다. ··· Ⅲ
a, b, c가 각각 4개씩이므로 $4(a+b+c)$가 돼.

[채점 기준표]

Ⅰ 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 놓고 겉넓이를 구하는 식을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.	30%
Ⅱ △BGD의 세 모서리의 길이의 제곱의 합을 구하는 식을 이용하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구한다.	30%
Ⅲ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구한다.	40%

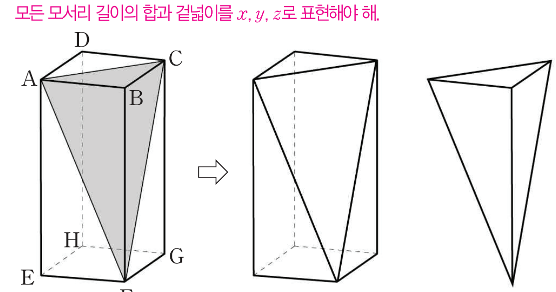
1등급 고난도 스토리

A 78 정답 148 ············ 2등급 대비 [정답률 32%]

(정답 공식: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$)

그림과 같이 직육면체 ABCD−EFGH에서 단면 AFC가 생기도록 사면체 F−ABC를 잘라내었다. 입체도형 ACD−EFGH의 모든 모서리의 길이의 합을 l_1, 겉넓이를 S_1이라 하고, 사면체 F−ABC의 모든 모서리의 길이의 합을 l_2, 겉넓이를 S_2라 하자. $l_1-l_2=28$, $S_1-S_2=61$일 때, $\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2$의 값을 구하시오.

단서 직육면체의 각 모서리의 길이를 x, y, z로 설정해서 모든 모서리 길이의 합과 겉넓이를 x, y, z로 표현해야 해.



단서+발상 [유형 10]

단서 직육면체의 모서리는 가로, 세로, 높이로 나눌 수 있으므로 각각 x, y, z로 놓는다. 발상
이를 이용하여 l_1, l_2, S_1, S_2를 x, y, z에 대한 식으로 표현할 수 있다. 해결

[문제 풀이 순서]

1st 모서리의 길이를 문자로 설정해서 l_1-l_2, S_1-S_2를 구해.

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$, $\overline{AE}=z$라 하면

$l_1=3x+3y+3z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}$

$l_2=x+y+z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}$

이므로 $l_1-l_2=2x+2y+2z=28$에서

$x+y+z=14$

삼각형 AFC의 넓이를 A라 하자.

삼각형 AFC의 넓이를 x, y, z로 표현하려고 하면 풀이가 많이 복잡해져.
l_1-l_2에서 $\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA}$가 소거되는 걸 보고 S_1-S_2에서 x, y, z로 표현하기 힘든 삼각형 AFC의 넓이가 소거될 걸 예상할 수 있어. 이럴 땐, 일단 문자로 설정하고 문제를 풀어봐.

$S_1=xy+yz+zx+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zx+A$

$S_2=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zx+A$

이므로 $S_1-S_2=xy+yz+zx=61$

2nd $\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2$의 값을 구해.

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2&=(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)\\&=2(x^2+y^2+z^2)\\&=2\{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\}\\&=2\times(14^2-2\times61)\\&=2\times74=148\end{aligned}$$

My Top Secret 서울대 선배의 1 등급 대비 전략

l_1과 l_2에 겹치는 모서리가 존재하고 S_1과 S_2에 겹치는 넓이가 존재한다는 것을 알 수 있어. 그런데 구하고자 하는 값은 l_1-l_2와 S_1-S_2이므로 겹치는 부분은 굳이 구할 필요가 없어. 이처럼 꼭 제외해야 하는 부분 또는 꼭 포함시켜야 하는 부분이 등급을 가르는 문제에 종종 나오므로 주의해야 해.

A 79 정답 ② ✪2등급 대비 [정답률 34%]

정답 공식: 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c이고 내접원의 반지름의 길이가 r일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times r\times(a+b+c)$이다.

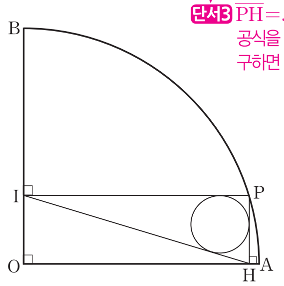
단서1 사각형 OHPI는 직사각형이야.

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 두 선분 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자. 삼각형 PIH에 내접하는 원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$일 때, $\overline{PH}^3+\overline{PI}^3$의 값은?

단서2 내접원의 반지름의 길이가 주어진 거야.

(단, 점 P는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.)

단서3 $\overline{PH}=x$, $\overline{PI}=y$라 하고 곱셈 공식을 이용하여 x^3+y^3의 값을 구하면 돼.



① 56 ② $\frac{115}{2}$ ③ 59

④ $\frac{121}{2}$ ⑤ 62

1st $\overline{PH}=x$, $\overline{PI}=y$라 하고 $x+y$, xy의 값을 각각 구해.

부채꼴 OAB의 중심각의 크기가 90°이고 점 P에서 두 선분 OA, OB에 내린 수선의 발이 각각 H, I이므로 사각형 OHPI는 직사각형이다.

이때, 부채꼴 OAB의 반지름의 길이가 4이므로 $\overline{HI}=\overline{OP}=4$이다.

직사각형의 두 대각선의 길이는 서로 같아.

한편, $\overline{PH}=x$, $\overline{PI}=y$라 하면 직각삼각형 PIH에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{PH}^2+\overline{PI}^2=\overline{HI}^2$에서

$x^2+y^2=4^2=16$ ⋯ ㉠

또한, 삼각형 PIH의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 내접원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\pi r^2=\frac{\pi}{4}$에서

$r^2=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

따라서 삼각형 PIH의 넓이에 의하여

$\frac{1}{2}\times\overline{PH}\times\overline{PI}=\frac{1}{2}\times r\times(\overline{PH}+\overline{PI}+\overline{HI})$에서

$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(x+y+4)$

$2xy=x+y+4$

$\therefore x+y=2xy-4$ ⋯ ㉡

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 ㉠, ㉡에서

$(2xy-4)^2-2xy=16$

$4x^2y^2-18xy=0$

$2x^2y^2-9xy=0$

$xy(2xy-9)=0$

$\therefore xy=\frac{9}{2}$ ($\because xy\neq0$) ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x+y=2\times\frac{9}{2}-4=5$ ⋯ ㉣

$(2xy-4)^2-2xy=16$을 정리하면
$2(xy-2)^2-(xy-2)-10=0$이고
$xy-2=X$라 하면
$2X^2-X-10=0$, $(X+2)(2X-5)=0$
$(xy-2+2)(2xy-4-5)=0$
$\therefore xy(2xy-9)=0$
이렇게 치환을 이용하여 정리할 수도 있어.

x, y는 각각 두 선분 PH, PI의 길이이므로 양수야. 따라서 $x>0$, $y>0$이므로 $xy\neq0$이야.

2nd $\overline{PH}^3+\overline{PI}^3$의 값을 구해.

$$\begin{aligned}\therefore \overline{PH}^3+\overline{PI}^3&=x^3+y^3\\&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=5^3-3\times\frac{9}{2}\times5\ (\because ㉢, ㉣)\\&=\frac{115}{2}\end{aligned}$$

수능 핵강

* 곱셈 공식의 변형

다음과 같은 곱셈 공식의 변형은 문제 해결에 자주 사용돼.

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$\quad=(a-b)^2+2ab$

② $a^3\pm b^3=(a\pm b)^3\mp3ab(a\pm b)$ (복호동순)

③ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

④ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$