문제 유형을 촘촘히 분류해 개념을 적용시키면
수학이 쉬워집니다!

개념을 익히고 그 개념들을 단계별로
연결하여 파악하는 것이 수학 공부의 기본입니다.
만약 개념 이해 과정을 소홀히 하고, 문제만 반복하여 푼다면
개념 사이의 연계성을 파악할 수 없어
오랜 시간 공부해도 성적을 올릴 수 없습니다.

자이스토리 고3 수학은
최신 수능, 평가원, 학력평가 및 경찰대, 삼사 기출 문제를 정밀하게 분석해
개념의 연계성에 따라 문제 유형을 촘촘히 분류하였습니다.
따라서 유형별 기출 문제를 순서대로 차근차근 풀어가면
개념의 연계성이 명쾌하게 파악되어서 문제 풀이가 쉬워집니다.

또한, 자이스토리의 정확하고 자세한 단계별 해설과 풍부한 보충 첨삭은
문제를 풀어가면서 개념을 알맞게 적용하는 방법을
자연스럽게 익힐 수 있습니다.

이 책의 마지막 페이지를 넘길 때쯤 여러분은 이미
수학 1등급에 도달해 있을 것입니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 **자이스토리** –

수능 1등급 완성 학습 계획표 [35일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~59		월 일	월 일
2	60~97		월 일	월 일
3	98~121		월 일	월 일
4	B 01~53		월 일	월 일
5	54~98		월 일	월 일
6	99~137		월 일	월 일
7	C 01~50		월 일	월 일
8	51~99		월 일	월 일
9	100~147		월 일	월 일
10	148~174		월 일	월 일
11	D 01~55		월 일	월 일
12	56~99		월 일	월 일
13	100~141		월 일	월 일
14	142~172		월 일	월 일
15	E 01~55		월 일	월 일
16	56~108		월 일	월 일
17	109~156		월 일	월 일
18	157~192		월 일	월 일
19	F 01~56		월 일	월 일
20	57~99		월 일	월 일
21	G 01~57		월 일	월 일
22	58~112		월 일	월 일
23	113~158		월 일	월 일
24	159~199		월 일	월 일
25	200~230		월 일	월 일
26	H 01~52		월 일	월 일
27	53~102		월 일	월 일
28	103~151		월 일	월 일
29	152~183		월 일	월 일
30	I 01~44		월 일	월 일
31	45~87		월 일	월 일
32	88~137		월 일	월 일
33	모의 1회		월 일	월 일
34	모의 2회		월 일	월 일
35	모의 3회		월 일	월 일

- 나는 ____________ 대학교 ____________ 학과 ________ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

자이스토리 고3 수학 Ⅰ 활용법+α

❶ 개념 · 공식 학습 후 수능 출제 경향 확인!

- 각 단원에 필수적으로 알아야 하는 핵심 개념과 관련된 보충 설명을 꼼꼼히 살펴보세요.
- 최신 출제 경향을 파악하고 앞으로의 수능을 예측하세요.

❷ 수능과 모의고사에 나오는 모든 유형을 촘촘히 섭렵하자!

- 촘촘히 분류된 모든 유형을 확인하고 유형별 풀이 비법을 확인하세요.
- 유형 안에서 난이도 순으로 다시 분류된 문제를 보면서 각 유형에서 쉬운 문제는 어떻게 출제되는지, 고난도 문제는 어떻게 출제되는지 확인하세요.

❸ 부족한 유형을 다시 한 번 점검하자!

- 자신에게 부족한 유형을 찾아낸 후 부족한 부분을 여러 번 반복 학습해 보세요.
- 부족한 유형에 대한 특징과 핵심 개념을 다시 한 번 확인한 후 유형 해결 요령을 터득하세요.

❹ 1등급을 좌우하는 고난도 문항을 완벽하게 마스터하자!

- 1등급 대비 문제는 복합적인 개념을 묻기 때문에 여러 개념을 정확히 파악한 뒤 종합적 사고를 하세요.
- 1등급 문제의 핵심이 되는 단서로 조건을 파악하고 조건을 이용하여 접근하는 방법을 발상해서 문제 풀이에 적용하는 방법을 익히세요.

❺ 쉽게 이해되는 입체 첨삭 해설을 공부해서 다시는 틀리지 말자!

- [첨삭 해설]과 [실수, 함정, 주의 첨삭]을 따라가다 보면 풀이 과정에서 놓치기 쉬운 부분이나 이해가 어려운 부분을 쉽게 풀어 주어 해설을 완벽하게 이해할 수 있어요.
- 쉬운 풀이, 톡톡 풀이, 다른 풀이를 꼼꼼히 읽어서 시간을 줄일 수 있는 풀이법을 찾아보세요.
- 문제 해결 과정에 사용된 개념 · 공식을 다시 한 번 확인하여 놓치고 있었던 내용이 없는지 확인하세요.
- 수능 핵강으로 문제에 대한 개념을 완벽하게 이해하세요.

❻ 오답노트를 만들어 100% 활용하자!

- 반드시 오답노트를 만들어 보세요. 해설에 제시된 단서 또는 접근법도 같이 기록하여 풀어 봤던 문제는 다시는 틀리지 않도록 여러 번 풀어보세요.
- 시간이 지난 후 오답노트를 읽어 보며 해설의 아이디어를 바탕으로 풀이를 따라가 보고 자신만의 풀이도 추가해 보세요.

단원별 핵심 문제 + 최신 · 중요 문제
동영상 강의 QR코드

1. 개념 강의로 핵심 개념을 이해하고 개념이 문제에 적용되는 것을 확인해 보세요!
2. 동영상 문제 풀이로 해설을 좀 더 빠르게 이해할 수 있어요!
3. 해설의 풀이를 읽어보고 동영상 강의를 시청하면 더 쉽게 이해될 거예요!
4. 풀기 어려운 고난도 문제는 동영상 강의를 여러 번 반복 시청해 보세요!

차 례 [총 159개 유형 분류]

다른 풀이, 쉬운, 톡톡 풀이 대폭 강화

1등급 문제 단서, 발상, 적용 단계별 해설

Ⅰ 지수함수와 로그함수

A 지수 – 12개 유형 분류

B 로그 – 15개 유형 분류

C 지수함수와 로그함수 – 22개 유형 분류

D 지수함수와 로그함수의 활용 – 19개 유형 분류

Ⅱ 삼각함수

E 삼각함수 – 29개 유형 분류

F 삼각함수의 활용 – 13개 유형 분류

Ⅲ 수열

G 등차수열과 등비수열 – 24개 유형 분류

H 수열의 합 – 15개 유형 분류

I 수학적 귀납법 – 10개 유형 분류

Special 수학 Ⅰ 실전 기출 모의고사

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

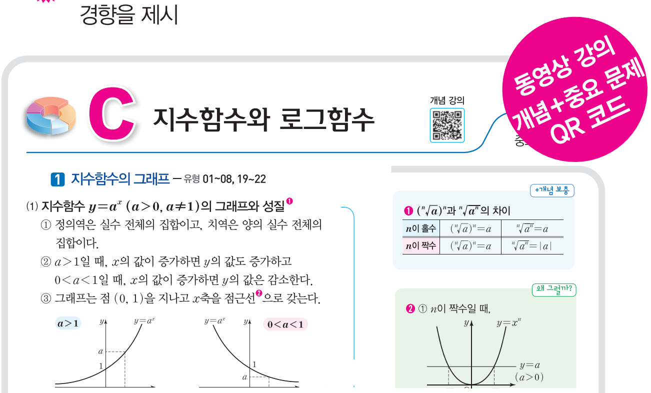
셀프수학

개념 총정리 + 촘촘한 유형 분류 기출 문제 = 수능 1등급

1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

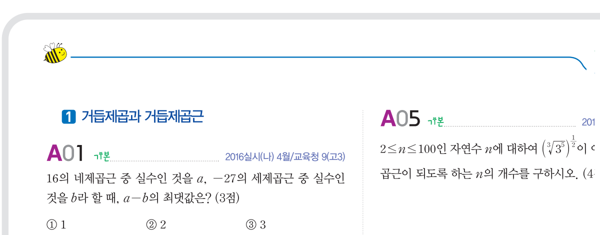
가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 제공되는 강의와 보충 설명으로 개념과 공식의 이해를 돕고 실전 문제에서 적절하게 개념을 사용할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

- 중요도 ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요도 제시
- +개념 보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2025학년도 수능과 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시



2 기본 기출 문제 – 쉬운 기출 문제로 개념 점검

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 기본 개념과 공식을 확인하는 기출 문제를 수록하였습니다. 이는 개념 이해를 강화하고 응용 문제를 풀 수 있는 초석을 쌓는 과정입니다.



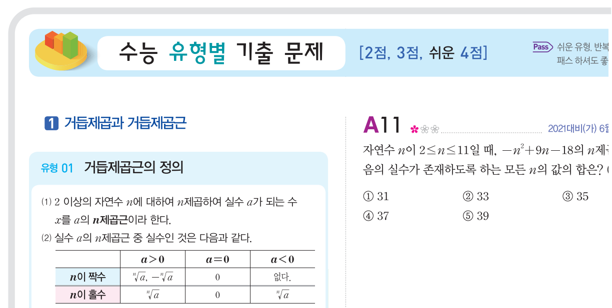
3 경찰대·삼사 기출 문제 – 최신 중요 기출 문제 수록

경찰대 기출과 삼사 기출 문제 중 수능 출제 기준에 맞는 중요 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

4 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하여 유형, 개념, 난이도 순서대로 문항을 배열하였습니다. 기출 문제가 부족한 단원이나 유형은 고품격 수능 기출 변형 문제를 출제하여 추가 수록하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- QR코드 : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.



- 유형 분류 : 출제 – 2025 수능, 평가원에서 출제된 유형
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형

- 난이도 : ✿✿✿ – 기본 문제 ✿✿✿ – 중급 문제
  ✿✿✿ – 중상급 문제 ✿✿✿ – 상급 문제
- Pass : 간단한 계산 문제로 패스해도 좋은 문제

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2024대비 수능 1(고3) : 2023년 11월에 실시한 수능
  - 2024대비 6월 모평 2(고3) : 2023년 6월에 실시한 평가원
  - 2023실시 4월 학평 3(고3) : 2023년 4월에 실시한 학력평가
  - 2024대비 9월 모평 2(고3) : 2023년 9월에 실시한 평가원
  - 표시 없는 문제 : 기출 변형 문제

5 수학 Ⅰ 실전 기출 모의고사

기출 문제로 구성한 3회의 실전 모의고사입니다.
수능을 대비하여 실력을 점검하는 데 큰 도움이 될 것입니다.

6 1등급 마스터 문제 – 1등급 대비, 2등급 대비, 4점 문제 수록

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 키워서 반드시 수학 1등급에 도달할 수 있습니다.

- ✲✲✲ – 상급 문제
- ✪ 2등급 대비 – 정답률이 21~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- ✪ 1등급 대비 – 정답률이 20% 이하인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A114 ✲✲✲ 2017실시(나) 3월 학평 21(고3)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$A_m=\left\{(a, b) \middle| 2^a=\frac{m}{b},\ a, b는 자연수\right\}$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_1=\{(1, 2), (2, 1)\}$
ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m=2^k$이면 $n(A_m)=k$이다.
ㄷ. $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

[1등급 대비+2등급 대비]

A115 ✪ 2등급 대비 2019실시(가) 6월 학평 21(고3)

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$f(n)=\begin{cases}\sqrt[3]{9\times 2^{n+1}} & (n이\ 홀수)\\ \sqrt[3]{4\times 3^n} & (n이\ 짝수)\end{cases}$

10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는? (4점)

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설

A 115 정답 ⑤ ✪ 1등급 대비 [정답률 22%]

＊자연수가 되도록 하는 자연수의 순서쌍의 개수 구하기 [유형 01+02+07]

왜 1등급? 거듭제곱근의 성질과 지수법칙을 이용하여 두 거듭제곱근의 곱 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 자연수 p, q의 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하는 문제로 $f(n)$이 어떻게 정의되어 있는지 살펴보아야 하는데, n이 홀수일 때와 짝수일 때 $f(n)$의 식이 다르므로 p, q가 홀수인 경우와 짝수인 경우를 나누어 따져보아야 한다.

단서+발상

My Top Secret

＊등차수열과 등차수열의 합 사이의 관계

문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
- 단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
- 개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
- 유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
- 발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
- 적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
- 해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록하였습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

8 입체 첨삭 해설!

A 71 정답 124 ＊거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 82%]

정답 공식: $(a^m)^n=a^{mn}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, 소수 a, 자연수 m, n에 대해 $a^{\frac{m}{n}}$이 자연수가 되기 위해서는 m이 n의 배수(n이 m의 약수)이어야한다.

2 이상의 자연수 n에 대하여 $(\sqrt{3^n})^{\frac{1}{2}}$과 $\sqrt[n]{3^{100}}$이 모두 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

1st 거듭제곱근의 성질을 이용하여 $f(n)$을 구해.

2nd $3^{\frac{6}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 n의 값을 구해.

2 이상의 자연수 n 중에서 100의 양의 약수이면서 동시에 4의 배수인 자연수 n은 4, 20, 100이므로 구하는 모든 n의 값의 합은 $4+20+100=124$

다른 풀이: $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계임을 이용하기

수능 핵강 ＊이차방정식의 판별식의 부호가 양수임을 이용하기

지수법칙

$a>0$, $b>0$이고, x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$
③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

변준서 | 2024 수능 응시 · 화성 화성고 졸

B 75 정답 ② ＊로그의 성질의 응용 [정답률 67%]

정답 공식: 밑과 진수가 모두 1보다 크므로 log값이 양수이다. 산술평균과 기하평균의 관계를 이용해 최솟값을 구한다.

$a>1$, $b>1$일 때, $\log_a b^2+\log_b a^3$의 최솟값은? (4점)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

1st 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 구해.

2nd 진수 조건을 체크하고 순서쌍의 개수를 구해.

쉬운 풀이: 원에서의 비례 관계 이용하기

평가원 해설

정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

생생체험
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

평가원 해설
오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 문제에서 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빠먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여자고등학교
김대식 하남 하남고등학교
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 안양외국어고등학교
박숙녀 아산 충남삼성고등학교
배수나 서울 가인아카데미
신건률 대치 다원교육
신명선 안양 신성고등학교
신현준 안양 신성고등학교
윤장노 안양 신성고등학교
이종석 일등급 수학 저자
이창희 서울 THE 다원수학
위경아 서울 강남대성기숙의대관
장광걸 김포외국어고등학교
장경호 오산 운천고등학교
장철희 서울 보성고등학교
전경준 서울 풍문고등학교
전준홍 서울 압구정 YEstudy
조승원 수원 경기과학고등학교
지강현 안양 신성고등학교
홍지언 부산대학교 수학 박사과정
홍지우 안양 평촌고등학교
황광희 시흥 시흥고등학교
수경 수학 컨텐츠 연구소

[다른 풀이 집필]

김연주 목동 쌤올림수학
김요셉 김포 대치명인학원
김호원 분당 원수학학원
사공 원 의정부 호연지기
안병훈 부산 팀매쓰수학전문학원
유대호 평촌 플랜지에듀
이강수 반포 뉴파인 학원
장영환 제주 제로링수학교실
정광조 서울 로드맵수학
정태성 부산 하이스트

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널
셀프수학

[특별 감수진]

강진명 천안 엔씨스카이학원
김착한 서울 성북미래탐구
박우혁 광주 종로학원/원픽학원
배의정 서울 정명수학
양해영 서울 청출어람학원
전수현 전) 서울 페르마수학 학원
최선락 서울 중계수학의중심학원

[감수진]

강민영 서울 목동고대수학학원
강성일 부천 지에듀학원
강신성 창원 에임원수학학원
강하린 대전 퍼스트수학학원
고다해 서울 정현아카데미
공지환 대전 더안수학학원
권성현 부산 센텀해법수학학원
권정철 부산 가야고등학교
기미나 인천 기쌤수학
김가영 대전 홍인학원
김국환 서울 매쓰플러스수학학원
김다혜 평택 연세학원
김대한 인천 학산학원
김동건 서울 대치올깨
김동민 서울 호크마수학학원
김명후 서울 김명후수학학원
김민아 광주 매쓰온탑수학학원
김선정 서울 이룸학원
김성민 부산 직관수학학원
김성현 서울 하이탑수학학원
김우진 세종 정진수학학원
김우현 부산 조이수학학원
김원대 광주 메이블수학전문학원
김장훈 제주 프로젝트M수학학원
김진회 인천외국어고등학교
김진희 울산 김진수학학원
김창규 남양주 엠베스트SE다산학원
김태연 서울 선일여자고등학교
김현민 서울 구주이배잠실본원
나경희 광주 어썸수학학원
민태흠 안성 인스쿨입시학원
박기두 서울 강북(성북)종로학원
박문영 화성 동탄수학의봄
박영민 익산 이룸익산학원
백은진 순천 백강수학학원
백재훈 대구 폴리아수학학원
변지영 대구 수찾사수학
서미란 인천 파이데이아학원
서원호 서울 독산고등학교
손미나 경주 고대수학학원
손형래 창원 대산고등학교
신연준 대전 반석스카이학원
양은진 오산 수플러스수학
양희성 서울 대원고등학교
엄보용 안산 경안고등학교
윤세진 창원 매쓰플랜수학학원
이동수 서울 광문고등학교
이동훈 대구 이동훈수학학원
이명희 부산 조이수학학원
이범근 청주 한샘학원
이상민 서울 목동뉴스카이학원
이상협 인천 마스터수학학원
이연정 대전 이지탑학원
이원희 서울 대치수학공작소
이은정 파주 이화트리수학
이재호 화성 동탄플로우수학
이지훈 서울 백향목에듀학원
이진섭 부산 이진섭수학학원
이태형 서울 목동고대수학2관학원
이현석 서울 이현석수학학원
이형근 인천 더원수학학원
이효진 서울 올토수학학원
장세완 대구 장선생수학학원
장주영 고양 화수고등학교
정경란 평택 안중위플수학
조바울 고양 퀸플러스학원
조일양 광주 서안수학
조충현 대전 로하스학원
주경원 부산 혜화여자고등학교
주용선 안산 sk수학,수풀림학원
주현진 목포 명문수학학원
진윤지 광주 더매쓰학원
최동호 서울 중앙수학학원
최지혜 부산 공명학원
최현성 대전 충남고등학교
최혜정 광주 이루다전문학원
한승희 부천 중원고등학교
한재철 당진 송악고등학교
허윤정 부산 올림수학전문학원
화창수 진주 삼현여자고등학교
황금일 원주 상지여자고등학교
황혜숙 창원 합포고등학교

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
황대윤 서울대 수리과학부

수능 선배들의 비법 전수 – 수험장 생생 체험 소개

긴장되고 떨리는 수험장에서 선배들이
문제를 풀면서 겪은 생생한 체험과 나만의 풀이 비법을
자이스토리 해설편에 수록했습니다.

2025 응시

강다은
대구 계성고 졸업
– 문학 실전

김강민
광주 국제고 졸업
– 세계지리

김덕우
부산 해운대고 졸업
– 지구과학 Ⅱ

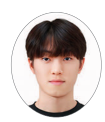
김연우
대구 정화여고 졸업
– 화학 Ⅰ

김효원
제주 제일고 졸업
– 고3 미적분

박서영
부산 금곡고 졸업
– 사회·문화

박정빈
대구 남산고 졸업
– 생활과 윤리

배지오
성남 낙생고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전



백승준
광주 광주숭일고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전

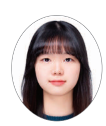
서정후
광주 숭덕고 졸업
– 지구과학 Ⅰ

성예현
대전 대전전민고 졸업
– 언어와 매체 실전

안한민
익산 남성고 졸업
– 화법과 작문 실전

오현준
서울 한영고 졸업
– 생명과학 Ⅱ

윤혁준
서울 강서고 졸업
– 생명과학 Ⅰ



이예슬
서울 독산고 졸업
– 동아시아사

이정근
안양 평촌고 졸업
– 기하

이지원
대구 성화여고 졸업
– 고3 수학 Ⅰ, 고3 수학 Ⅱ

임지호
부산 동아고 졸업
– 물리학 Ⅰ

장윤서
부산 사직여고 졸업
– 독서 실전

정규원
부산 남성여고 졸업
– 고3 확률과 통계

최승우
광주 광주서석고 졸업
– 화학 Ⅱ

최아람
서울 광영고 졸업
– 윤리와 사상

최여진
광주 국제고 졸업
– 한국지리

한규진
대구 계성고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전

한상효
성남 낙생고 졸업
– 수능 한국사

한성은
익산 남성여고 졸업
– 고3 수학 Ⅰ, 고3 수학 Ⅱ

• 2024년

곽지훈	서울 한영외고 졸 (서울대 자유전공학부)
권민재	서울 광영여고 졸 (강릉원주대 치의예과)
김동현	안성 안법고 졸 (연세대 실내건축학과)
김서현	대전한빛고 졸 (카이스트 새내기과정학부)
김신유	익산 남성고 졸 (순천향대 의예과)
김아린	대전한빛고 졸 (충남대 의예과)
김용희	화성 화성고 졸 (단국대 의예과)
김지희	광주 국제고 졸 (고려대 한국사학과)
김태현	부산 대연고 졸 (서울대 수리과학부)
류이레	광주대동고 졸 (연세대 의예과)
문지민	대구 정화여고 졸 (고려대 중어중문학과)
변준서	화성 화성고 졸 (연세대 실내건축학과)
심기현	대구 계성고 졸 (경북대 의예과)
오서윤	서울 광문고 졸 (충남대 의예과)
진성연	부산국제고 졸 (서울대 사회학과)
조수근	성남 태원고 졸 (순천향대 의예과)

• 2023년

강 한	서울 배재고 졸 (고려대 융합에너지공학과)
권주원	서울 배재고 졸 (서울대 정치외교학부)
김보겸	광주서석고 졸 (연세대 지구시스템과학과)
김수정	부산국제고 졸 (고려대 서어서문학과)
김준서	부산 대연고 졸 (부산대 의예과)
김태산	광주서석고 졸 (고려대 정치외교학과)
김현서	경기 평택고 졸 (서강대 정치외교학과)
나인규	광주 국제고 졸 (한양대 경영학과)
명준하	광주서석고 졸 (연세대 사회환경시스템공학부)
박서영	부산 해운대고 졸 (서울대 심리학과)
박세민	광주 광덕고 졸 (서울대 의예과)
장경은	서울 세화여고 졸 (고려대 통계학과)
장성욱	부산 대연고 졸 (동아대학교 의예과)
정서린	서울 세화여고 졸 (서울대 약학과)
조현준	익산 이리고 졸 (전북대 의예과)
최윤성	서울 양정고 졸 (서울대 공과대학 광역)
홍채연	서울 한영고 졸 (고려대 불어불문학과)

문항 배열 및 구성 [1478제]

❶ 개념 이해 체크를 위한 기본 기출 문제 (67제)

핵심 개념 정리과 공식을 확인할 수 있는 기출 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초 실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 최신 5개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항 수록 (1345제)

- 최근 출제 경향을 파악할 수 있도록 최신 5개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항을 수록하였습니다.
- 2020~1994 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문항 중 수능 출제 기준에 맞는 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

❸ 경찰대, 삼사 중요 기출 문제 수록 (73제)

경찰대, 삼사 기출 문항 중 중요 문항을 선별하여 수록하였습니다.

❹ 수능 대비를 위한 고품격 수능 기출 변형 문제 (60제)

수능을 대비해서 충분한 문제로 훈련할 수 있도록 수능 기출 변형 문제를 추가 수록하였습니다.

[고3 수학 Ⅰ 수록 문항 구성표]

대비연도	3월	4·5월	6월	7월	9월	10월	수능	합계	비고
2025	11	11	11	11	11	11	11	77	*2026학년도 수능에 적합한 전 문항 수록
2024	11	11	11	11	11	11	11	77	
2023	11	11	11	11	11	11	11	77	
2022	11	11	11	11	11	11	11	77	
2021	27	29	19	20	16	19	17	147	
2020	15	11	7	7	6	6	7	59	*수능, 평가원, 학력평가 엄선 수록
2019	16	11	6	8	8	6	8	63	
2018	17	11	5	8	9	5	5	60	
2017	11	7	5	6	7	7	6	49	
2016	18	17	11	7	5	6	6	70	
2015	3	7	11	6	7	5	8	47	
2014	7	6	10	4	8	3	8	46	
2013	5	5	9	1	3	0	6	29	
2012	4	6	7	2	5	2	6	32	
2011	5	6	8	2	4	3	7	35	
2010이전	19	14	51	18	44	13	74	233	
2022, 2014, 2005 대비 예비 평가								25	
수능 기출 변형 문제								60	
고1/고2 학력평가								142	
삼사 및 경찰대								73	
총 문항 수								1478	

2025학년도 6월, 9월 평가원+수능
수학 Ⅰ+수학 Ⅱ 문항 배치표

문항 번호	6월		9월		수능	
	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호
1	수Ⅰ	A27	수Ⅰ	A25	수Ⅰ	A23
2	수Ⅱ	C72	수Ⅱ	C73	수Ⅱ	C74
3	수Ⅰ	H14	수Ⅰ	G114	수Ⅰ	G113
4	수Ⅱ	A09	수Ⅱ	A11	수Ⅱ	B12
5	수Ⅱ	C38	수Ⅱ	C47	수Ⅱ	C48
6	수Ⅰ	E127	수Ⅰ	E115	수Ⅰ	E114
7	수Ⅱ	E26	수Ⅱ	B10	수Ⅱ	F119
8	수Ⅰ	G126	수Ⅰ	D85	수Ⅰ	B52
9	수Ⅱ	B09	수Ⅱ	F71	수Ⅱ	F78
10	수Ⅰ	F68	수Ⅰ	F16	수Ⅰ	E86
11	수Ⅱ	D22	수Ⅱ	E99	수Ⅱ	E88
12	수Ⅰ	C144	수Ⅰ	H103	수Ⅰ	H84
13	수Ⅱ	G29	수Ⅱ	G54	수Ⅱ	G30
14	수Ⅰ	D151	수Ⅰ	C131	수Ⅰ	F73
15	수Ⅱ	F201	수Ⅱ	F173	수Ⅱ	E42
16	수Ⅰ	D68	수Ⅰ	D66	수Ⅰ	D65
17	수Ⅱ	F13	수Ⅱ	F14	수Ⅱ	F15
18	수Ⅰ	H32	수Ⅰ	H10	수Ⅰ	H09
19	수Ⅱ	G90	수Ⅱ	D115	수Ⅱ	D116
20	수Ⅰ	E175	수Ⅰ	E171	수Ⅰ	D160
21	수Ⅱ	F183	수Ⅱ	E121	수Ⅱ	A164
22	수Ⅰ	I121	수Ⅰ	I47	수Ⅰ	I113

- 수Ⅰ : 2026 수능 대비 자이스토리 고3 수학Ⅰ
- 수Ⅱ : 2026 수능 대비 자이스토리 고3 수학Ⅱ

A 지수

★ 유형 차례

★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2025	수능	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	9월	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
2024	수능	유형 05 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈)	❀❀❀
	9월	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 05 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈)	❀❀❀
2023	수능	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	9월	유형 03 거듭제곱근의 활용 유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	✿✿❀ ❀❀❀
	6월	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀

★ 2025 수능 출제 경향 분석

• **지수법칙 – 밑이 같은 계산** : 밑을 통일하고 지수법칙을 이용하여 계산하는 기본 개념과 계산력을 판단하는 문제가 출제되었다. [A23 문항]

★ 2026 수능 예측

1. 거듭제곱근의 성질을 이용하여 거듭제곱근이 자연수가 되도록 하는 자연수를 구하는 유형의 문제가 출제 예상된다.
   기본적인 거듭제곱근에 대한 성질을 정확히 알고 있으면 풀리는 문제들이다.
2. 지수법칙을 이용하는 간단한 계산 문제는 지수의 여러 가지 성질과 함께 항상 출제된다. 쉬운 문제이지만 계산 실수에 주의하여야 하고 지수법칙을 정확히 알고 있어야 한다.
3. 지수를 포함한 등식의 활용 문제가 출제 예상되므로 곱셈 공식, 인수분해, 유리식이나 비례식 등을 활용하여 변형하는 연습을 해야 한다. 고1 수학에서 배웠던 내용도 한 번 더 정리하자.

A 지수

개념 강의

중요도 ★★★

1 거듭제곱과 거듭제곱근[1] — 유형 01

(1) **거듭제곱**: 임의의 실수 a와 자연수 n에 대하여

$$a^n = \underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{개}}$$

2^3 ← 지수, ↑ 밑

와 같이 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 한다.
또, a의 제곱, 세제곱, 네제곱, …을 통틀어 a의 **거듭제곱**이라 하고,
a^n에서 a를 거듭제곱의 **밑**, n을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

(2) **거듭제곱근**: 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수,
즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 **n제곱근**이라 한다.
이때, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.

(3) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.[2]

① **n이 짝수일 때**
$a>0$이면 양수 $\sqrt[n]{a}$와 음수 $-\sqrt[n]{a}$의 2개가 있고, 그 절댓값은 같다.
$a=0$이면 $\sqrt[n]{0}$, 즉 0뿐이다.
$a<0$이면 없다.

② **n이 홀수일 때**
a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ 오직 하나뿐이다.

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수일 때	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수일 때	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

2 거듭제곱근의 성질[3] — 유형 02~03

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 양의 정수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

3 지수의 확장[4] — 유형 04~12

(1) **지수가 0 또는 음의 정수인 경우**

$a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ (단, $a\neq 0$, n은 자연수)

(2) **지수가 유리수인 경우**

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ (단, $a>0$, m, n은 정수, $n>0$)

(3) **지수법칙**[5]

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때,
① $a^xa^y=a^{x+y}$　예 $2^2\times 2^3=2^{2+3}=2^5$
② $a^x\div a^y=a^{x-y}$　예 $3^5\div 3^2=3^{5-2}=3^3$
③ $(a^x)^y=a^{xy}$　예 $(5^2)^4=5^{2\times 4}=5^8$
④ $(ab)^x=a^xb^x$　예 $(7\times 11)^2=7^2\times 11^2$

출제
2025 수능 1번
2025 9월 모평 1번
2025 6월 모평 1번

★ 주어진 식에서 밑을 통일하고 지수법칙을 이용하여 값을 구하는 아주 쉬운 문제가 수능과 9월, 6월에 모두 1번 문제로 출제되었다.

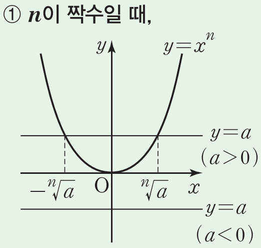
+개념 보충

[1] $(\sqrt[n]{a})^n$과 $\sqrt[n]{a^n}$의 차이

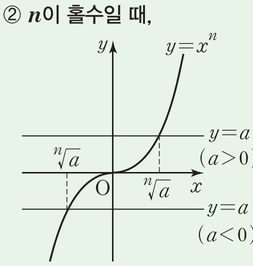
n이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n=a$	$\sqrt[n]{a^n}=a$
n이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n=a$	$\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert$

왜 그럴까?

[2] ① n이 짝수일 때,



② n이 홀수일 때,



한걸음 더!

[3] $a>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때,
$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$

+개념 보충

[4] $a^{\frac{m}{n}}$과 같이 지수가 유리수인 경우,
a가 소수일 때, $a^{\frac{m}{n}}$이 자연수가 되기 위한 조건은 m이 n의 배수 또는 n이 m의 약수일 때이다.

한걸음 더!

[5] 밑이 같을 때와 다를 때를 구분하자.
간단한 계산 문제뿐만 아니라 문장제 문제도 꼭 하나씩 출제된다.
지수법칙을 이용할 때는 먼저 밑이 같은지 다른지를 확인하고 같은 밑에 대해서 지수끼리 더할지, 곱할지를 정확하게 계산하자.

1 거듭제곱과 거듭제곱근

A01 기본 2016실시(나) 4월 학평 9(고3)

16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2 거듭제곱근의 성질

A02 기본 2003대비(인) 수능 1(고3)

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$을 간단히 하면? (2점)

① 2 ② 4 ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt[3]{2}$

A03 기본 2013대비(나) 9월 모평 6(고3)

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? (3점)

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

3 지수의 확장

A04 기본 2018실시(나) 10월 학평 1(고3)

$2^{\frac{5}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}$의 값은? (2점)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

A05 기본 2013대비(나) 수능 26(고3)

$2\le n\le100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (4점)

A06 기본 2006대비(나) 6월 모평 4(고3)

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$일 때, $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타낸 것은? (3점)

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$
④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

A07 기본 2009대비(나) 9월 모평 20(고3)

두 실수 a, b가 $3^{a+b}=4$, $2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. (3점)

A08 기본 2005대비(나) 12월 예비 26(고3)

어떤 호수에서 수면에서의 빛의 세기가 I_0일 때, 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기 I_d는 다음과 같이 나타내어진다고 한다.

$$I_d=I_0 2^{-0.25d}$$

이 호수에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25 %인 곳의 수심은? (3점)

① 16 m ② 12 m ③ 10 m
④ 8 m ⑤ 4 m

❖ 정답 및 해설 2~3p

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

Pass 쉬운 유형, 반복 계산 문제로 패스 하셔도 좋습니다.

1 거듭제곱과 거듭제곱근

유형 01 거듭제곱근의 정의

(1) 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수 x를 a의 **n제곱근**이라 한다.

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

tip

a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는

1 n이 짝수일 때에는 a의 부호에 따라 0개, 1개, 2개가 될 수 있다.

2 n이 홀수일 때에는 항상 1개이다.

A09 2016실시(나) 11월 학평 13(고2)

실수 a, b에 대하여 a는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근일때, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

A10 2022실시 7월 학평 19(고3)

$n\ge2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. (3점)

A11 2021대비(가) 6월 모평 12(고3)

자연수 n이 $2\le n\le11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

A12 2020실시(가) 3월 학평 18(고3)

다음은 $1\le|m|<n\le10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

(ⅰ) $m>0$인 경우
n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가) 이다.

(ⅱ) $m<0$인 경우
n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (나) 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는
(가) + (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? (4점)

① 70 ② 65 ③ 60 ④ 55 ⑤ 50

A19 (2018실시(나) 3월 학평 14(고3))

x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) (4점)

① 6 ② $3\sqrt[3]{9}$ ③ $6\sqrt[3]{3}$
④ 12 ⑤ $6\sqrt[3]{9}$

A20 (2023대비 9월 모평 11(고3))

함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? (4점)

> $\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

A21 (2022대비 6월 모평 21(고3))

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

A22 (2019실시(나) 3월 학평 15(고3))

자연수 n에 대하여 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하고, $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n)>g(n)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? (4점)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

3 지수의 확장

2025 수능, 9월, 6월 출제

유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n=a^{m-n}$
③ $(a^m)^n=a^{mn}$ ④ $(ab)^n=a^n b^n$
⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$ ⑥ $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a^0=1$

tip
밑이 같은지 살펴보고, 지수에서 곱은 합으로, 나누기는 빼기로, 제곱의 제곱은 곱으로 바뀐다는 것을 확인하여 계산하자.

A23 (2025대비 수능 1(고3))

$\sqrt[3]{5}\times 25^{\frac{1}{3}}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A24 (2024실시 10월 학평 1(고3))

$\left(\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{6}{5}}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A114 ✽✽✽ 2017실시(나) 3월 학평 21(고3)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\left\{(a,\ b)\,\middle|\,2^a=\frac{m}{b},\ a,\ b\text{는 자연수}\right\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_4=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m=2^k$이면 $n(A_m)=k$이다.

ㄷ. $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[1등급 대비+2등급 대비]

A115 ✪ 2등급 대비 2019실시(가) 6월 학평 21(고2)

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\sqrt[4]{9\times2^{n+1}} & (n\text{이 홀수})\\ \sqrt[4]{4\times3^n} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는? (4점)

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점 + 4점 + 5점]

A116

2025대비 삼사 12(고3)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $-(n-k)^2+8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.

$$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=7$$

을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? (4점)

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

A117

2022대비 경찰대 13(고3)

실수 $r=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$에 대하여

$$r+r^2+r^3=a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$$

일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 유리수이다.) (4점)

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

A118

2022대비 삼사 6(고3)

$\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}$의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? (3점)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

A119

2020대비 경찰대 1(고3)

실수 x에 대하여 $2^{3x}=9$일 때, $3^{\frac{2}{x}}$의 값은? (3점)

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

A120

2019대비(나) 삼사 22(고3)

$\sqrt{3\sqrt[4]{27}}=3^{\frac{q}{p}}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (3점)

A121 2등급 대비

2018대비(나) 삼사 28(고3)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $n^{\frac{4}{k}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(6)=3$이다. $f(n)=8$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오.

(4점)

❖ 정답 및 해설 26~29p

1회 수학Ⅰ 실전 기출 모의고사

2026학년도 수능 대비 ①
범위: 수학Ⅰ 전단원

- 문항 수 11개
- 배점 37점
- 제한시간 30분

5지선다형

1회 01 ❀❀❀ 2010대비(나) 수능 1(고3)

$27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1회 02 ❀❀❀ 2016실시(가) 3월 학평 5(고3)

함수 $f(x)=a\sin x+1$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m=6$일 때, 양수 a의 값은? (3점)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

1회 03 ❀❀❀ 2016실시(가) 7월 학평 6(고3)

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$의 값은? (3점)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

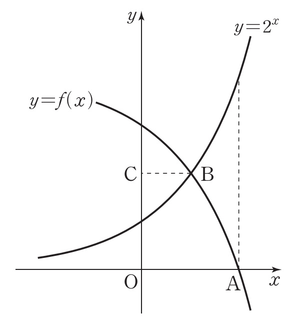
1회 04 ✿❀❀ 2017실시(나) 4월 학평 13(고3)

모든 실수 x에 대하여 $\log_a(x^2+2ax+5a)$가 정의되기 위한 모든 정수 a의 값의 합은? (3점)

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

1회 05 ✿❀❀ 2014대비(B) 12월 예비 8(고3)

곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하고, 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A라 하자. (단, $m>2$이다.) 곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{OA}=2\overline{BC}$일 때, m의 값은? (4점)



① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

1회 06 ✿❀❀ 2014대비(A) 수능 16(고3)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고

$$(a_{n+1})^n=10(a_n)^{n+1}\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면
> $n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$
> 이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면
> $$\frac{\log a_{n+1}}{n+1}=\frac{\log a_n}{n}+\boxed{(가)}$$
> 이다. $b_n=\frac{\log a_n}{n}$이라 하면 $b_1=1$이고
> $$b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}$$
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
> $$b_n=\boxed{(나)}$$
> 이므로
> $$\log a_n=n\times\boxed{(나)}$$
> 이다. 그러므로 $a_n=10^{n\times\boxed{(나)}}$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$과 $g(n)$이라 할 때, $\frac{g(10)}{f(4)}$의 값은? (4점)

① 38 ② 40 ③ 42
④ 44 ⑤ 46

A 지수

기본 기출 문제

A 01 정답 ⑤ *거듭제곱근의 정의 [정답률 89%]

(정답 공식: 16의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{16}$, -27의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{-27}$이다.)

❶16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, ❷-27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

단서 거듭제곱근의 정의를 알아야 해. 이때, ❶은 양수, ❷는 음수의 거듭제곱근이니까 주의하자.

1st 거듭제곱근의 정의를 이용하여 실수 a, b의 값을 찾자.
$x^n=a$(a는 상수)라 할 때, x는 a의 n제곱근이야.

16의 네제곱근을 x라 하면
$x^4=16$이므로
$x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$
$x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$
$x^2=-4$에서 $x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}i$
→ 실수가 아닌 허수이지?
$\therefore a=2$ 또는 $a=-2$

주의 판별식을 이용하면 $D=0^2-4\times1\times4<0$으로 허근을 가져.

-27의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=-27$이므로
$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)=0$
→ 판별식을 이용하면 $D=3^2-4\times9<0$으로 허근이야.
$x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$
$\therefore b=-3$

2nd $a-b$의 최댓값을 구해.
$a-b=2-(-3)=5$ 또는 $a-b=-2-(-3)=1$
이므로 $a-b$의 최댓값은 5이다.
두 수의 차의 최대는 a가 양수, b가 음수일 때야.

A 02 정답 ① *거듭제곱근의 계산 [정답률 91%]

(정답 공식: $\sqrt[mk]{a^{nk}}=\sqrt[m]{a^n}$)

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$을 간단히 하면? (2점)

단서 $16=2^4$이니까 2의 거듭제곱근으로 정리해 볼까?

① 2 ② 4 ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt[3]{2}$

1st 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산해.
$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}$
밑이 2인 수로 정리해 볼까? $\sqrt[mk]{a^{nk}}=\sqrt[m]{a^n}$
$=\sqrt[3]{2\times2^2}=\sqrt[3]{2^3}=2$

다른 풀이: 유리수인 지수로 나타낸 후 지수법칙을 이용하여 계산하기
$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=2^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}$
$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ $\quad a^m\times a^n=a^{m+n}$
$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2$

A 03 정답 ② *거듭제곱근의 계산 [정답률 71%]

(정답 공식: 괄호 안의 제일 안쪽 근호부터 정리하여 밑을 2로 바꾼다.)

단서 $\sqrt{\sqrt[3]{\ }}$ 꼴은 근호를 줄여나가야 해. 이때, 이 수보다 큰 자연수를 찾자.

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? (3점)

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

1st 거듭제곱근을 지수로 바꿔 간단히 정리하여 값을 구해.
$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=\left(2\times\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2\times2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$
$=\{(2\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{2}}\}^3$ $\quad (a^x)^y=a^{xy}$
이때, $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로
$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.
$6, 7, 8, \cdots$

실수 $a^x\times a^y=a^{x+y}$과 $(a^x)^y=a^{xy}$를 잘 구별하자.

다른 풀이: 유리수인 지수로 나타낸 후 조건을 만족시키는 자연수 구하기
$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=2^{\frac{5}{2}}$이므로 자연수 n에 대하여 $n>2^{\frac{5}{2}}$이라 하면 $n^2>2^5$
$\therefore n=6, 7, \cdots$
따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

A 04 정답 ⑤ *지수법칙 – 밑이 같은 계산 [정답률 98%]

(정답 공식: 밑이 같을 때 곱한 값은 지수끼리 더한 값과 같다.)

$2^{\frac{5}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}$의 값은? (2점)
단서 밑이 같은 경우의 곱의 계산을 묻는 거야.

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

1st 지수법칙을 이용하여 계산해.
$2^{\frac{5}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}=2^2=4$
$a^ma^n=a^{m+n}$을 이용한 거야.

지수법칙 개념·공식

$a>0$, $b>0$이고, x, y가 실수일 때
① $a^x\times a^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$
③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$
⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

A 05 정답 16 *거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 67%]

(정답 공식: 어떤 자연수의 n제곱근이라는 것은 n제곱했을 때 자연수가 되어야 한다는 의미이다.)

단서 어떤 자연수를 N이라 하면 $\sqrt[n]{N}$ 이지? 이때, n은 자연수이고 $2\le n\le100$이야.

$2\le n\le100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (4점)

1st 어떤 자연수를 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$으로 나타내.

어떤 자연수를 N이라 하면 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 자연수 N의 n제곱근이므로
x가 a의 n제곱근이면 $x^n=a$이야.
$\left\{\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^n=\left\{\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^n=3^{\frac{5n}{6}}=N$
$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

실수 복잡한 거듭제곱근을 지수 형태로 고치는 과정에서 실수가 많아.

2nd N, n이 자연수이니까 $2\le n\le 100$에서 n의 개수를 구해.

n이 6의 배수이면 N은 3의 거듭제곱으로 자연수가 된다.

$n=6k$ (k는 자연수)라 하면 $\frac{5}{6}n=\frac{5}{6}\times 6k=5k$도 자연수야.

즉, n의 개수는 100 이하의 자연수 중 6의 배수의 개수와 같다.

따라서 자연수 n의 개수는 16이다. $\frac{100}{6}=16.\times\times\times$

수능 핵강

* n 이하의 자연수 중 k의 배수의 개수 구하기

1부터 n까지의 자연수 중 2, 3, 4, …의 배수의 개수를 쉽게 구하는 방법은 몫을 구하는 거야.

2의 배수 : $\frac{n}{2}$의 몫　　3의 배수 : $\frac{n}{3}$의 몫　　4의 배수 : $\frac{n}{4}$의 몫

5의 배수 : $\frac{n}{5}$의 몫　　m의 배수 : $\frac{n}{m}$의 몫

A 06 정답 ① *지수법칙의 활용 – 문자로 표현 [정답률 85%]

(정답 공식: $\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{6}}$)

❶ $a=\sqrt{2}$, ❷ $b=\sqrt[3]{3}$일 때, $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타낸 것은? (3점)

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$　② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$　③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$

④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$　⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

단서 6의 6제곱근이니까 ❶, ❷를 이용하기 위하여 2와 3의 거듭제곱근으로 표현해.

1st 지수법칙을 이용하여 $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타내.

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\times(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

주의 $(ab)^n=a^n\times b^n$

다른 풀이: 거듭제곱근의 성질을 이용하기

$\sqrt[6]{6}=\sqrt[6]{2\times 3}=\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{3}$ $\Rightarrow \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\times\sqrt{\sqrt[3]{3}}$ $\Rightarrow \sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

$=\sqrt[3]{a}\times\sqrt{b}=a^{\frac{1}{3}}\times b^{\frac{1}{2}}$

A 07 정답 25 *지수법칙의 활용 – 식 변형 [정답률 73%]

(정답 공식: $3^{a^2-b^2}=(3^{a+b})^{a-b}$)

두 실수 a, b가 ❶ $3^{a+b}=4$, ❷ $2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. (3점)

단서 지수에 a^2-b^2이 나오게 하려면 ❶과 ❷를 이용해서 거듭제곱을 해야 되겠지? 실수로 식 ❶, ❷를 곱하면 안 돼!

1st 주어진 조건 중 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하자.

$3^{a^2-b^2}=\underbrace{3^{(a+b)(a-b)}=(3^{a+b})^{a-b}}_{a^{nm}=(a^n)^m}=4^{a-b}=(2^2)^{a-b}=(2^{a-b})^2=5^2=25$

다른 풀이: 로그의 정의를 이용하여 $a+b$, $a-b$를 나타내어 값 구하기

$3^{a+b}=4$에서 $a+b=\log_3 4$ ··· ㉠

$2^{a-b}=5$에서 $a-b=\log_2 5$ ··· ㉡

[로그의 정의] $a^x=N$에 대하여 $(a>0, a\ne 1)$ $x=\log_a N$

㉠, ㉡의 각 변을 각각 곱하면

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\log_3 4\times\log_2 5$

$=\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 2}=\frac{2\log 2}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 2}=2\times\frac{\log 5}{\log 3}$

$=2\log_3 5=\log_3 5^2=\log_3 25$　$\frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b$

따라서 $a^2-b^2=\log_3 25$이므로 $3^{a^2-b^2}=3^{\log_3 25}=25$ ($\because a^{\log_a b}=b$)

A 08 정답 ④ *지수법칙의 실생활 응용 [정답률 63%]

(정답 공식: $I_d=0.25I_0$일 때, d의 값을 구한다.)

어떤 호수에서 수면에서의 빛의 세기가 I_0일 때, 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기 I_d는 다음과 같이 나타내어진다고 한다.

$I_d=I_0 2^{-0.25d}$ ··· ⓐ

이 호수에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25 %인 곳의 수심은? (3점) 단서 I_d와 I_0의 관계식이 하나 더 있으니까 ⓐ와 연립하여 d의 값을 구해.

① 16 m　② 12 m　③ 10 m　④ 8 m　⑤ 4 m

1st 단서에서 주어진 조건에 맞게 I_d, I_0의 식을 세워.

수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25 %이므로

$I_d=0.25I_0$ ··· ㉠

그런데 주어진 조건에 의하여 $I_d=I_0 2^{-0.25d}$ ··· ㉡

㉠=㉡에 의하여 $0.25I_0=I_0 2^{-0.25d}$　$\therefore 2^{-0.25d}=0.25$

2nd 우변의 값을 지수 형태로 변형해.

$0.25=\frac{1}{4}=2^{-2}$이므로 $2^{-0.25d}=2^{-2}$　$a>0$, $a\ne 1$인 실수 a에 대하여 $a^x=a^y$이면 $x=y$야.

$-0.25d=-2$　$\therefore d=\frac{2}{0.25}=8$

따라서 구하는 수심은 8 m이다.

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 09 정답 ⑤ *거듭제곱근의 정의 [정답률 81%]

(정답 공식: a의 n제곱근은 $\sqrt[n]{a}$이다.)

실수 a, b에 대하여 a는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근일 때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)

단서 거듭제곱근의 정의를 알고 있는지 물어보고 있어.

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

1st a, b를 거듭제곱근을 이용하여 표현해 봐.

a는 2의 세제곱근이므로 $a^3=2$

$\sqrt{2}$는 b의 네제곱근이므로 $(\sqrt{2})^4=b$

2nd **1st**에서 구한 값을 $\left(\frac{b}{a}\right)^3$에 대입하자.

$\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{a^3}=\frac{\{(\sqrt{2})^4\}^3}{2}=\frac{2^6}{2}=2^5=32$

A 10 정답 4 *거듭제곱근의 정의 [정답률 66%]

(정답 공식: 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 n이 홀수이면 1개이고, n이 짝수이면 $a>0$일 때 2개, $a=0$일 때 1개, $a<0$일 때 0개이다.)

$n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. (3점)

단서 n이 홀수일 때와 n이 짝수일 때로 나누어 생각하면 돼. 또한 n이 짝수일 때에는 $2n^2-9n$의 부호가 양수인지 음수인지, 그 값이 0인지로 나누어 생각해야겠지?

1st n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 $f(n)$의 값을 구해.

(i) n이 $n\geq 2$인 홀수일 때,

$2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 1이므로

$f(n)=1$이다. 이때의 실수 $2n^2-9n$의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{2n^2-9n}$의 1개야.

(ii) n이 $n\geq 2$인 짝수일 때,

i) $2n^2-9n>0$에서 $n>\frac{9}{2}$, 즉 n이 6 이상인 짝수이면

n은 양수이므로 $2n^2-9n>0$의 양변을 n으로 나누면 $2n-9>0$ $\therefore n>\frac{9}{2}$

이때의 실수 $2n^2-9n$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{2n^2-9n}$, $-\sqrt[n]{2n^2-9n}$의 2개야.

$2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 2이므로

$f(n)=2$이다.

ii) $2n^2-9n=0$을 만족시키는 2 이상의 자연수 n은

존재하지 않는다. $2n^2-9n=n(2n-9)=0$에서 $n=0$ 또는 $n=\frac{9}{2}$

그런데 $n\geq 2$인 자연수이므로 이 방정식을 만족시키는 n의 값은 없어.

iii) $2n^2-9<0$에서 $n<\frac{9}{2}$, 즉 n이 4 이하인 짝수이면 $2n^2-9n$의

n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 0이므로 $f(n)=0$이다.

2nd $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구해.

(i)에 의하여 $n=3$, $n=5$일 때 $f(n)=1$이고

(ii)에 의하여 $n=4$일 때 $f(n)=0$, $n=6$일 때 $f(n)=2$이므로

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

쉬운 풀이: n 대신 3, 4, 5, 6을 직접 대입하여 제곱근 중 실수인 것의 개수 구하기

(i) $n=3$일 때

$2n^2-9n=2\times3^2-9\times3=18-27=-9<0$의 세제곱근 중에서

실수인 것은 $\sqrt[3]{-9}$로 1개야.

$\therefore f(3)=1$

(ii) $n=4$일 때

$2n^2-9n=2\times4^2-9\times4=32-36=-4<0$의 네제곱근 중에서

실수인 것은 없어.

$\therefore f(4)=0$

(iii) $n=5$일 때

$2n^2-9n=2\times5^2-9\times5=50-45=5>0$의 다섯제곱근 중에서

실수인 것은 $\sqrt[5]{5}$로 1개야.

$\therefore f(5)=1$

(iv) $n=6$일 때

$2n^2-9n=2\times6^2-9\times6=72-54=18>0$의 여섯제곱근 중에서

실수인 것은 $\sqrt[6]{18}$, $-\sqrt[6]{18}$로 2개야.

$\therefore f(6)=2$

(i)~(iv)에 의하여

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

A 11 정답 ① *거듭제곱근의 정의 [정답률 67%]

정답 공식: a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 n이 홀수일 때 a가 음수이어야 하고 n이 짝수일 때 a가 양수이어야 한다.

자연수 n이 $2\leq n\leq 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)

단서 x에 대한 방정식 $x^n=-n^2+9n-18$을 만족시키는 음의 실근이 존재하는 경우를 찾는 것과 같아.

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

1st $-n^2+9n-18$의 값의 부호에 따라 조건을 만족시키는 n의 값을 구해.

a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 a가 양수이고 n이 짝수이거나 a가 음수이고 n이 홀수이어야 해.

(i) $-n^2+9n-18>0$일 때, n이 짝수이면 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재한다.

이때, $-n^2+9n-18>0$에서 $n^2-9n+18<0$

$(n-3)(n-6)<0$ $\therefore 3<n<6$ ← $\alpha<\beta$일 때, 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$

이때, $2\leq n\leq 11$이므로 $3<n<6$

따라서 이것을 만족시키고 n이 짝수이어야 하므로 $n=4$

(ii) $-n^2+9n-18<0$일 때, n이 홀수이면 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재한다.

이때, $-n^2+9n-18<0$에서 $n^2-9n+18>0$

$(n-3)(n-6)>0$ $\therefore n<3$ 또는 $n>6$ ← $\alpha<\beta$일 때, 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

이때, $2\leq n\leq 11$이므로 $2\leq n<3$ 또는 $6<n\leq 11$

따라서 이것을 만족시키고 n이 홀수이어야 하므로

$n=7$ 또는 $n=9$ 또는 $n=11$

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n의 값의 합은 $4+7+9+11=31$

A 12 정답 ② *거듭제곱근의 정의 [정답률 75%]

정답 공식: a의 n제곱근 중 실수인 것은 n이 짝수일 때 a가 양수이어야 존재하고, n이 홀수일 때 a가 실수이면 존재한다.

다음은 $1\leq|m|<n\leq 10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다. **단서** 실수의 홀수제곱근 중 실수는 1개이고 양수의 짝수제곱근 중 실수는 2개야.

(i) $m>0$인 경우

n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.

(ii) $m<0$인 경우

n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(나)}$이다.

(i), (ii)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(가)}+\boxed{(나)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? (4점)

① 70 ② 65 ③ 60 ④ 55 ⑤ 50

1st $m>0$일 때 순서쌍 (m, n)의 개수를 구해.

(i) $m>0$인 경우

n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다.

따라서 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 부등식 $1\leq m<n\leq 10$을 만족시키는 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수와 같다.

즉, 1에서 10까지의 자연수 중 서로 다른 2개의 숫자를 뽑아 그 중 작은 수가 m, 큰 수가 n으로 결정되는 것과 같다.

따라서 이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는

${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=\underset{(가)}{45}$ 이다. ← 서로 다른 n개 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개 중에서 r개를 택하는 조합이라 하고 이때의 조합의 수는 ${}_nC_r$로 나타내.

2nd $m<0$일 때 순서쌍 (m, n)의 개수를 구해.

(ii) $m<0$인 경우

n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다.

한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다.

따라서 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 n이 홀수일 때, 부등식 $1\le|m|<n\le10$을 만족시키는 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수와 같다.

문제에서 n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하지 않는다고 했으니까 n이 홀수인 경우만 따져주면 돼.

i) $n=1$일 때, 부등식 $1\le|m|<n\le10$을 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

ii) $n=3$일 때, 부등식 $1\le|m|<n\le10$을 만족시키는 m의 값은 -1, -2로 2개이다.

iii) $n=5$일 때, 부등식 $1\le|m|<n\le10$을 만족시키는 m의 값은 -1, -2, -3, -4로 4개이다.

iv) $n=7$일 때, 부등식 $1\le|m|<n\le10$을 만족시키는 m의 값은 -1, -2, -3, -4, -5, -6으로 6개이다.

v) $n=9$일 때, 부등식 $1\le|m|<n\le10$을 만족시키는 m의 값은 -1, -2, $\cdots$, -8로 8개이다.

i)~ v)에 의하여 이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는

$0+2+4+6+8=\overset{(나)}{\boxed{20}}$이다.

(i), (ii)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $45+20=65$이다.

3rd $p+q$의 값을 구해.

따라서 $p=45$, $q=20$이므로 $p+q=45+20=65$

A 13 정답 11 *거듭제곱근의 정의 [정답률 50%]

(정답 공식: a가 실수이고, n은 2 이상의 자연수일 때, n제곱해서 a가 되는 수 즉, $x^n=a$가 되는 x를 a의 n제곱근이라 한다.)

집합 $U=\{x\,|\,-5\le x\le5,\ x$는 정수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 두 집합 A, B를

$A=\{a\,|\,a$는 x의 실수인 네제곱근, $x\in X\}$,

단서1 집합 A는 x의 네제곱근 중 실수인 것만을 원소로 가져.

$B=\{b\,|\,b$는 x의 실수인 세제곱근, $x\in X\}$

단서2 집합 B는 x의 세제곱근 중 실수인 것만을 원소로 가져.

라 하자. $n(A)=9$, $n(B)=7$이 되도록 하는 집합 X의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오. (3점)

1st $n(A)=9$인 경우를 생각하자.

집합 $U=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$이고

집합 U의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여

집합 X의 원소 중 양수의 개수를 p, 음수의 개수를 q라 하자.

x의 n제곱근 중 실수의 개수는 x의 부호에 따라 달라져.
$x>0$이면 네제곱근 중 실수는 2개이고, 세제곱근 중 실수는 1개야.
$x<0$이면 네제곱근 중 실수는 없고, 세제곱근 중 실수는 1개야.
$x=0$이면 0의 거듭제곱근은 0이 유일하므로 네제곱근 중 실수는 1개, 세제곱근 중 실수인 것도 1개야.

$0\notin X$이면 $n(A)=2p$이므로 $n(A)=9$를 만족시키지 않는다.

x의 네제곱근 중 실수인 것은 $x>0$이면 2개, $x<0$이면 없어.
따라서 $0\notin X$이면 $n(A)$는 0이거나 짝수야.

$\therefore 0\in X$

즉, $n(A)=2p+1=9$에서 $p=4$

즉, 집합 X의 원소 중에는 0과 양수 4개가 있어야 해.

2nd $n(B)=7$인 경우를 생각하자.

$n(B)=p+q+1=7$에서 $q=2$

x의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 x의 값에 상관없이 1개씩 존재해.
즉, 집합 X의 원소가 7개라는 말이야.

즉, 집합 X는 0, 양수 4개, 음수 2개로 이루어진 집합이다.

따라서 집합 X의 모든 원소의 합의 최댓값은

$X=\{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$일 때

집합 U의 원소 중 0과 양수 4개, 음수 2개를 큰 수부터 차례로 뽑아.

$(-2)+(-1)+0+2+3+4+5=11$이다.

A 14 정답 ① *거듭제곱근의 계산 [정답률 93%]

(정답 공식: $\sqrt[n]{a^n}=a\,(a>0)$임을 이용한다.)

$\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}$의 값은? (2점)

단서 $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^n}$은 a임을 이용하자.

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

1st $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^n}=a$지?

$\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}=\sqrt{2^2}\times\sqrt[3]{2^3}=2\times2=4$

$\sqrt[n]{a^n}=a\ (a>0)$

다른 풀이: 유리수인 지수로 나타낸 후 지수법칙을 이용하여 계산하기

$\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}=4^{\frac{1}{2}}\times8^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=2\times2=4$

A 15 정답 ⑤ *거듭제곱근의 계산 [정답률 91%]

(정답 공식: 거듭제곱근의 성질에 의하여 $\sqrt{2\sqrt{6}}=\sqrt{\sqrt{24}}=\sqrt[4]{24}$이다.)

$(\sqrt{2\sqrt{6}})^4$의 값은? (2점) 단서 $\sqrt{\sqrt{\ }}$ 꼴은 제곱근을 줄여서 나가야 해.

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

1st $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$을 이용하여 $\sqrt{\ }$를 줄여 나가면서 계산해.

$(\sqrt{2\sqrt{6}})^4=\underbrace{\{(2\sqrt{6})^{\frac{1}{2}}\}^4}_{(a^m)^n=a^{mn}}=(2\sqrt{6})^2=24$

거듭제곱근의 성질 개념·공식

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

A 16 정답 ⑤ *거듭제곱근의 계산 [정답률 95%]

(정답 공식: 거듭제곱근의 성질에 의하여 $(\sqrt{2})^5=\sqrt{2^5}$이다.)

$(\sqrt{2})^5$의 값은? (2점) 단서 2의 제곱근이니까 $2^{\frac{1}{2}}$이네.

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

1st 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 정리해.

$(\sqrt{2})^5=\{(\sqrt{2})^2\}^2\times\sqrt{2}=2^2\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$(\sqrt{2})^{2+2+1}$

A 22 정답 ③ *거듭제곱근의 활용 [정답률 55%]

정답 공식: $x^n=a$를 만족시키는 실근의 개수는

n이 짝수이면 $\begin{cases} 2\text{개 } (a>0) \\ 1\text{개 } (a=0) \\ 0\text{개 } (a<0) \end{cases}$

n이 홀수이면 a의 값에 관계없이 항상 1개임을 적용한다.

> 단서 자연수 n에 대하여 $x^3=n(n-4)$를 만족시키는 x의 개수를 구하는 거야.
>
> 자연수 n에 대하여 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하고, $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n)>g(n)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? (4점)
>
> ① 4 ② 5 ③ 6
> ④ 7 ⑤ 8

1st 세제곱근의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구해.

자연수 n에 대하여 $n(n-4)$의 세제곱근은

$x^3=n(n-4)$ a의 세제곱근은 $x^3=a$를 만족시키는 x를 구하는 것이고 a의 세제곱은 a^3이야. 혼동하지 말자!

이때, $y=x^3$이라 하면 원점에 대하여 대칭이므로

$n(n-4)$의 값이 음수이든 양수이든 항상 실수인 것은 1개이다.

$f(x)=x^3$에서 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$이므로 $y=x^3$은 원점에 대하여 대칭인 그래프야.

$\therefore f(n)=1$

2nd 네제곱근의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구해.

자연수 n에 대하여 $n(n-4)$의 네제곱근은

$x^4=n(n-4)$

이때, $y=x^4$이라 하면 y축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=x^4$에서 $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$이므로 $y=x^4$은 y축에 대하여 대칭인 그래프야.

$$g(n)=\begin{cases} 0 & (n(n-4)<0) \\ 1 & (n(n-4)=0) \\ 2 & (n(n-4)>0) \end{cases}$$

3rd $f(n)>g(n)$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구해.

$f(n)>g(n)$을 만족시키는 경우는 $g(n)=0$일 때이므로

$n(n-4)<0$

$\therefore 0<n<4$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3으로 합은

$1+2+3=6$

톡톡 풀이: $f(n)$의 값은 항상 1임을 이용하여 조건을 만족시키는 $g(n)$의 값 구하기

자연수 n의 값에 상관없이 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로 $f(n)=1$

$f(n)=1>g(n)$이 성립하는 경우는 $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.

$n(n-4)<0$ $\quad\therefore 0<n<4$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3이므로 합은 $1+2+3=6$

A 23 정답 ⑤ *지수법칙-밑이 같은 계산 [정답률 93%]

정답 공식: $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

> $\sqrt[3]{5}\times25^{\frac{1}{3}}$의 값은? (2점)
>
> 단서 밑을 5로 통일한 후 지수법칙을 이용하여 계산해.
>
> ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 지수법칙을 이용하여 값을 구해.

$\underbrace{\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}}_{\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}}$, $25^{\frac{1}{3}}=\underbrace{(5^2)^{\frac{1}{3}}=5^{2\times\frac{1}{3}}}_{(a^m)^n=a^{mn}}=5^{\frac{2}{3}}$이므로

$\sqrt[3]{5}\times25^{\frac{1}{3}}=\underbrace{5^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}_{a^m\times a^n=a^{m+n}}=5^1=5$

이지원 | 2025 수능 응시 · 대구 성화여고 졸

1번 문제의 전형적인 지수법칙 문제야. 밑을 통일시키고, 세제곱근 형태가 아닌 지수 형태로 나타내면 암산도 가능하지! $\sqrt[3]{5}$를 $5^{\frac{1}{3}}$로, $25^{\frac{1}{3}}$을 $5^{\frac{2}{3}}$로 바꾸고 계산하면 돼. 시험장에서 가장 첫 번째로 푸는 문제인 만큼 실수하지 말고 제대로 풀자!

A 24 정답 ④ *지수법칙-밑이 같은 계산 [정답률 91%]

정답 공식: $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

> $\left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{6}{5}}$의 값은? (2점)
>
> 단서 분모, 분자를 2의 거듭제곱으로 나타내.
>
> ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 지수법칙을 이용하여 값을 구해.

$4=2^2$, $\underbrace{\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}}_{\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}}$이므로 $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}=\underbrace{\dfrac{2^2}{2^{\frac{1}{3}}}=2^{2-\frac{1}{3}}}_{a^m\div a^n=a^{m-n}}=2^{\frac{5}{3}}$

$\therefore \left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{6}{5}}=\underbrace{(2^{\frac{5}{3}})^{\frac{6}{5}}=2^{\frac{5}{3}\times\frac{6}{5}}}_{(a^m)^n=a^{m\times n}=a^{mn}}=2^2=4$

A 25 정답 ② *지수법칙-밑이 같은 계산 [정답률 93%]

정답 공식: $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

> $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}}$의 값은? (2점)
>
> 단서 2의 거듭제곱으로 나타내.
>
> ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

1st 지수법칙을 이용하여 값을 구해.

$\underbrace{\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2^{\frac{5}{4}},\ \sqrt[8]{4}=\sqrt[8]{2^2}=2^{\frac{2}{8}}=2^{\frac{1}{4}}}_{\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}}$이므로

$\underbrace{\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}}=\dfrac{2^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}}=2^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}}_{a^m\div a^n=a^{m-n}}=2^1=2$

A 26 정답 ④ *지수법칙-밑이 같은 계산 [정답률 94%]

정답 공식: $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, $a^m\times a^n=a^{m+n}$

> $\sqrt[3]{16}\times2^{-\frac{1}{3}}$의 값은? (2점)
>
> 단서 두 수를 곱하기 위해서 밑이 2인 수로 변형해.
>
> ① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

A 112 정답 ④ *지수법칙의 실생활 응용 [정답률 65%]

(**정답 공식**: $t=5$, 7일 때의 $N(t)$의 값을 이용하여 c, a^{-b}의 값을 구한다.)

어떤 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 시간 t에서의 개체수를 $N(t)$라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$N(t)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-bt}}$$ (단, a, b, c는 양의 상수) … ⓐ

이때, K는 이 생물의 최대개체량이다. ❶ 이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=5$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{1}{2}$이었고, ❷ $t=7$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{3}{4}$이었다.

$\Rightarrow N(5)=\frac{1}{2}K$ $\Rightarrow N(7)=\frac{3}{4}K$

이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=9$일 때의 개체수를 나타내는 것은? (4점)

단서 ⓐ를 가지고 ❶과 ❷의 자료를 대입한 후 정리하여 $N(9)=\frac{K}{(1+c\cdot a^{-9b})}$를 구하기 위한 $c\cdot a^{-9b}$의 값을 찾자.

① $\frac{6}{7}K$ ② $\frac{7}{8}K$ ③ $\frac{8}{9}K$ ④ $\frac{9}{10}K$ ⑤ $\frac{10}{11}K$

1st $t=5$일 때와 $t=7$일 때 나오는 식을 각각 정리하자.

(i) $t=5$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{1}{2}$이므로 $=\frac{1}{2}K$

$$N(5)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-5b}}=\frac{1}{2}K \Rightarrow \frac{1}{1+c\cdot a^{-5b}}=\frac{1}{2}$$ 이니까 분모가 같으면 돼.

즉, $1+c\cdot a^{-5b}=2$에서

$c\cdot a^{-5b}=1$ … ㉠

(ii) $t=7$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{3}{4}$이므로 $=\frac{3}{4}K$

$$N(7)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-7b}}=\frac{3}{4}K$$

즉, $3+3c\cdot a^{-7b}=4$에서

$c\cdot a^{-7b}=\frac{1}{3}$ … ㉡

2nd ㉠과 ㉡의 식을 이용하여 상수를 정하자.

㉡÷㉠에서
c를 소거하기 위해서야.

$a^{-7b+5b}=\frac{1}{3} \Rightarrow a^{-2b}=\frac{1}{3} \Rightarrow a^{2b}=3 \Rightarrow a^{b}=\sqrt{3}$

$a^{-1}=b \Rightarrow a=\frac{1}{b}$

한편, ㉠에서 $c\cdot(\sqrt{3})^{-5}=1$이므로

$c=(\sqrt{3})^{5}$

3rd 이제 $t=9$일 때의 개체수를 구해 보자.

$t=9$일 때의 개체수는

$$N(9)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-9b}}=\frac{K}{1+(\sqrt{3})^{5}\cdot(\sqrt{3})^{-9}}$$

$=(\sqrt{3})^{5-9}=(\sqrt{3})^{-4}$

$$=\frac{K}{1+\frac{1}{9}}=\frac{9}{10}K$$

A 113 정답 ③ *지수법칙의 실생활 응용 [정답률 71%]

(**정답 공식**: 2006년도 인구수를 구하고 그 값의 2배가 될 때, t의 값은 어떻게 될지 구해본다.)

어느 도시의 t년도 인구수를 $P\times10^{6}$(명)이라 하면

$$P=5\cdot2^{\frac{t-2001}{15}}$$ $t=2006$을 대입! 단서 2006년의 인구수를 구한 뒤, 그 2배가 되는 해를 찾자.

인 관계가 성립한다고 한다. 이 도시의 인구수가 2006년 인구수의 2배가 되는 해는? (4점)

① 2017년 ② 2019년 ③ 2021년 ④ 2023년 ⑤ 2025년

1st 먼저 2006년도의 인구수 P를 구해야겠지?

2006년도의 인구수를 $P\times10^{6}$(명)이라 하면

$P=5\times2^{\frac{2006-2001}{15}}$

$=5\times2^{\frac{5}{15}}=5\times2^{\frac{1}{3}}$ … ㉠

2nd 인구수가 2배가 되는 해를 구하자.

이 도시의 인구수 $P'\times10^{6}$(명)이 2006년 인구수의 2배가 되는 해를 t라 하자.

$P'=5\times2^{\frac{t-2001}{15}}=2P$

㉠에서 $2P=2\times5\times2^{\frac{1}{3}}=5\times2^{\frac{4}{3}}$이므로 지수를 비교하면

[지수법칙] $a^{n}\times a^{m}=a^{n+m}$

$\frac{4}{3}=\frac{t-2001}{15}$, $20=t-2001$

$\therefore t=2021$

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A 114 정답 ⑤ *지수법칙의 활용 [정답률 34%]

(**정답 공식**: $2^{a}\times b=m$, $m=2^{k}$이면 a는 1부터 k까지 가능하다.)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\left\{(a,\ b)\,\middle|\,2^{a}=\frac{m}{b},\ a,\ b\text{는 자연수}\right\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_4=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$ 단서1 $m=4$를 직접 대입해서 A_4의 원소를 나타내봐.

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m=2^{k}$이면 $n(A_m)=k$이다.

ㄷ. $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다. 단서2 $n(A_m)=1$이 되도록 하는 집합 A_m의 원소 (a,b)에 대하여 a, b의 조건을 따져보자.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st $m=4$를 대입하여 ㄱ의 진위를 판단하자.

ㄱ. 집합 A_4는 $2^{a}=\frac{4}{b}$에서 $4=2^{a}\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로 $4=2^{1}\times2$, $4=2^{2}\times1$

$\therefore A_4=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$ (참)

2nd $m=2^k$을 대입하여 집합 A_m을 직접 구해보자.

ㄴ. $m=2^k$일 때, $A_m=A_{2^k}$

A_{2^k}은 $2^a=\frac{2^k}{b}$에서

지수법칙에 의해 $2^{k-a}=b$

$2^k=2^a\times b$인 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 갖는 집합이므로

$A_m=\{(1, 2^{k-1}), (2, 2^{k-2}), (3, 2^{k-3}), \cdots, (k, 2^0)\}$

$\therefore n(A_m)=k$ (참)

3rd $n(A_m)=1$이 되기 위한 조건을 따져보고 두 자리 자연수 m의 개수를 구하자.

ㄷ. $2^a=\frac{m}{b}$에서 $m=2^a\times b$인 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)가 존재한다고 하자.

이때, b가 짝수, 즉 $b=2b'$ (b'은 자연수)이면

실수 b'은 자연수이고 b가 짝수일 때 $b=2b'$으로 나타낼 수 있고 b가 홀수일 때 $b=2b'-1$로 나타낼 수 있어.

$m=2^a\times 2b'=2^{a+1}\times b'$이므로 순서쌍 $(a+1, b')$도 집합 A_m의 원소이다. 즉, b가 짝수이면 $n(A_m)\ge 2$가 되므로 $n(A_m)=1$이 되기 위해서는 b는 홀수이어야 한다. 또, $n(A_m)=1$이 되기 위해서는 $b=\frac{m}{2^k}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 k가 오직 하나만 존재하므로 $k=1$이어야 한다.

$k\ge2$인 경우, $b=\frac{m}{2^k} \Longleftrightarrow 2b=\frac{m}{2^{k-1}}$이므로 $(k-1, 2b)$도 주어진 방정식을 만족하므로 $n(A_m)\ne1$

즉, $m=2\times$(홀수)이어야 한다.

두 자리의 자연수 중에서 $2\times$(홀수)인 자연수는

2×5, 2×7, 2×9, $\cdots$, 2×49

$n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m은 5, 7, 9, $\cdots$, 49의 개수와 같으므로 조건을 만족시키는 두 자리의 자연수 m의 개수는 23이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

A 115 정답 ⑤ ✪2등급 대비 [정답률 22%]

*주어진 식이 자연수가 되도록 하는 자연수의 순서쌍의 개수 구하기

[유형 01+02+07]

단서1 $f(n)$이 어떻게 정의되어 있는지 살펴봐.

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\sqrt[4]{9\times2^{n+1}} & (n\text{이 홀수})\\ \sqrt[4]{4\times3^{n}} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

단서3 자연수가 되기 위해서는 거듭제곱근의 근호가 없어져야 하지.

10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는? (4점)

단서2 두 자연수 p, q를 $f(n)$에 각각 대입해 보라는 거야.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

오답 2등급? 거듭제곱근의 성질과 지수법칙을 이용하여 두 거듭제곱근의 곱 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 자연수 p, q의 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하는 문제로 $f(n)$이 어떻게 정의되어 있는지 살펴보아야 하는데, n이 홀수일 때와 짝수일 때 $f(n)$의 식이 다르므로 p, q가 홀수인 경우와 짝수인 경우를 나누어 따져보아야 한다.

단서+발상

단서1 자연수 1, 2, 3, $\cdots$, n에 대하여 $f(n)$에 n이 홀수이면 홀수에 맞는 정의에 따라 대입하고 짝수이면 짝수에 맞는 정의에 따라 대입한다. 즉, $f(1)=\sqrt[4]{9\times2^2}$, $f(2)=\sqrt[4]{4\times3^2}$, $f(3)=\sqrt[4]{9\times2^4}$, $f(4)=\sqrt[4]{4\times3^4}$, $\cdots$이므로 규칙을 찾을 수 있고 이 가운데에서 문제를 푸는 실마리를 잡을 수 있다. (발상)

단서2 $f(n)$의 식을 파악했다면 p, q가 홀수, 짝수인 경우를 각각 나누어 $f(p)\times f(q)$의 식을 구한다. (적용)

단서3 근호 $\sqrt[4]{\ }$ 가 없어지려면 근호 안의 수가 네제곱수이어야 함을 파악하는 것이 중요하다. (적용)

즉, $f(p)\times f(q)$를 정리한 식에서 근호 안의 수가 네제곱수이면 근호 $\sqrt[4]{\ }$ 가 없어지면서 자연수가 될 수 있다. 따라서 자연수 a, k에 대하여 근호 안의 수는 a^{4k} 꼴로 나타나야 한다. (해결)

주의 정의된 함수 $f(n)$에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되기 위한 조건을 여러 경우로 나누어 따져주어야 한다. 특히, 이 문제의 경우 $(2, 3)$, $(3, 2)$는 서로 다른 경우이므로 모든 경우를 놓치지 말고 따져주어야 한다.

핵심 정답 공식: 자연수 a에 대하여 $\sqrt[n]{a^m}$이 자연수가 되기 위해서는 m이 n의 배수(n이 m의 약수)이어야 한다.

[문제 풀이 순서]

1st p, q가 모두 홀수일 때, 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하자.

(i) p, q가 모두 홀수일 때,

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\,(a>0, b>0)$

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times2^{p+1}}\times\sqrt[4]{9\times2^{q+1}}=\sqrt[4]{81\times2^{p+q+2}}$

$=\sqrt[4]{81}\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}=3\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}$ → $\sqrt[n]{a^n}=a\,(a>0)$

여기서 $p+q+2$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하의 홀수이므로 조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

$p+q+2=4m$ (m은 자연수)이면 $\sqrt[4]{2^{p+q+2}}=\sqrt[4]{2^{4m}}=(\sqrt[4]{2^4})^m=2^m$

i) $p+q+2=4$일 때, $p+q=2$이므로 $(1, 1)$

ii) $p+q+2=8$일 때, $p+q=6$이므로 $(1, 5)$, $(3, 3)$, $(5, 1)$

iii) $p+q+2=12$일 때, $p+q=10$이므로 $(1, 9)$, $(3, 7)$, $(5, 5)$, $(7, 3)$, $(9, 1)$

$p+q=6$인 두 자연수 p, q의 순서쌍을 구하기 위해서는 p가 홀수이므로 1, 3, 5를 대입하여 q의 값을 찾으면 돼.

iv) $p+q+2=16$일 때, $p+q=14$이므로 $(5, 9)$, $(7, 7)$, $(9, 5)$

v) $p+q+2=20$일 때, $p+q=18$이므로 $(9, 9)$

즉, 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 $1+3+5+3+1=13$이다.

2nd p가 홀수, q가 짝수일 때, 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하자.

(ii) p는 홀수, q는 짝수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times2^{p+1}}\times\sqrt[4]{4\times3^{q}}=\sqrt[4]{2^{p+3}\times3^{q+2}}=\sqrt[4]{2^{p+3}}\times\sqrt[4]{3^{q+2}}$

여기서 $p+3$과 $q+2$가 각각 4의 배수일 때,

$f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

$p+3$과 $q+2$가 각각 4의 배수이어야 $\sqrt[4]{2^{p+3}}$, $\sqrt[4]{3^{q+2}}$이 각각 자연수가 되지.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하의 홀수, 짝수이므로

$p+3$은 4, 8, 12이고, $q+2$는 4, 8, 12

즉, p는 1, 5, 9 중 하나이고, q는 2, 6, 10 중 하나이다.

조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

p가 될 수 있는 수가 1, 5, 9이고, q가 될 수 있는 수가 2, 6, 10이므로 순서쌍 (p, q)의 개수는 $3\times3=9$야.

$(1, 2)$, $(1, 6)$, $(1, 10)$, $(5, 2)$, $(5, 6)$, $(5, 10)$, $(9, 2)$, $(9, 6)$, $(9, 10)$이므로 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 9이다.

3rd p가 짝수, q가 홀수일 때, 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하자.

(iii) p는 짝수, q는 홀수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times3^{p}}\times\sqrt[4]{9\times2^{q+1}}=\sqrt[4]{2^{q+3}\times3^{p+2}}=\sqrt[4]{2^{q+3}}\times\sqrt[4]{3^{p+2}}$

여기서 $q+3$과 $p+2$가 각각 4의 배수일 때,

$f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하의 짝수, 홀수이므로 $p+2$는 4, 8, 12이고, $q+3$은 4, 8, 12

즉, p는 2, 6, 10 중 하나이고, q는 1, 5, 9 중 하나이다.

조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

$(2, 1)$, $(2, 5)$, $(2, 9)$, $(6, 1)$, $(6, 5)$, $(6, 9)$, $(10, 1)$, $(10, 5)$, $(10, 9)$이므로 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 9이다.

4th p, q가 모두 짝수일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구하자.

(ⅳ) p, q가 모두 짝수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times3^p}\times\sqrt[4]{4\times3^q}=\sqrt[4]{16\times3^{p+q}}$$
$$=\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{3^{p+q}}=2\times\sqrt[4]{3^{p+q}}$$

$p+q$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다. 두 자연수 p, q가 각각 10 이하의 짝수이므로 조건에 맞는 순서쌍 $(p,\ q)$는

ⅰ) $p+q=4$일 때, $(2,\ 2)$

ⅱ) $p+q=8$일 때, $(2,\ 6)$, $(4,\ 4)$, $(6,\ 2)$

ⅲ) $p+q=12$일 때, $(2,\ 10)$, $(4,\ 8)$, $(6,\ 6)$, $(8,\ 4)$, $(10,\ 2)$

ⅳ) $p+q=16$일 때, $(6,\ 10)$, $(8,\ 8)$, $(10,\ 6)$

ⅴ) $p+q=20$일 때, $(10,\ 10)$

즉, 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $1+3+5+3+1=13$이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의해 구하는 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $13+9+9+13=44$이다.

1등급 대비 특강

＊ 문제 풀이 핵심 알아보기

$f(n)$의 식을 보면 복잡해서 어떻게 풀어야 할지 방향을 잡기 어려워. 하지만 자연수 a에 대하여 $\sqrt[4]{a}$, 즉 $a^{\frac{1}{4}}$이 자연수가 되려면 a는 p^{4k} (p, k는 자연수) 꼴이 되어야 함을 파악하고 p, q의 경우를 나누어 접근하다보면 p, q 사이의 관계식을 찾아 조건을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$를 구할 수 있어.

경찰대, 사삼 중요 기출 문제 [어려운 3점+4점+5점]

A 116 정답 ② ＊거듭제곱근의 정의 [정답률 67%]

(**정답 공식:** 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 n이 홀수일 때 1, n이 짝수일 때 $a>0$이면 2, $a=0$이면 1, $a<0$이면 0이다.)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $-(n-k)^2+8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.

단서 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 0 또는 1 또는 2이므로 $f(n)$의 값은 0 또는 1 또는 2야. 이때, n이 홀수인 경우 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 항상 1이야. 따라서 n의 값이 짝수인 경우의 조건을 만족시키는 $f(n)$의 값을 구해야 해.

$$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=7$$

을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? (4점)

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

1st 조건을 만족시키기 위한 $f(n)$의 값을 구해.

n이 홀수이면 $f(n)=1$이므로 $f(3)=f(5)=f(7)=1$

n이 홀수인 경우 $-(n-k)^2+8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 $-(n-k)^2+8$의 값에 관계없이 항상 1이야.

즉, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=7$에서

$1+f(4)+1+f(6)+1=7$ $\quad\therefore f(4)+f(6)=4$ ⋯ ㉠

한편, n이 짝수이면 $f(n)=\begin{cases}2 & (-(n-k)^2+8>0)\\1 & (-(n-k)^2+8=0)\\0 & (-(n-k)^2+8<0)\end{cases}$이므로

n이 짝수인 경우 $-(n-k)^2+8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 $-(n-k)^2+8$가 양수일 때는 2, 0일 때는 1, 음수일 때는 0이야.

㉠을 만족시키려면 $f(4)=2$, $f(6)=2$이어야 한다.

$f(4)$, $f(6)$의 값은 0 또는 1 또는 2이므로 $f(4)+f(6)=4$를 만족시키는 경우는 $f(4)=2$, $f(6)=2$인 경우 뿐이야.

2nd 조건을 만족시키는 자연수 k의 값을 모두 구해.

(ⅰ) $f(4)=2$이려면 $-(4-k)^2+8>0$이어야 한다.

즉, $(k-4)^2<8$에서 $-2\sqrt{2}<k-4<2\sqrt{2}$

$\therefore 4-2\sqrt{2}<k<4+2\sqrt{2}$

(ⅱ) $f(6)=2$이려면 $-(6-k)^2+8>0$이어야 한다.

즉, $(k-6)^2<8$에서 $-2\sqrt{2}<k-6<2\sqrt{2}$

$\therefore 6-2\sqrt{2}<k<6+2\sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는 $6-2\sqrt{2}<k<4+2\sqrt{2}$이다.

$\sqrt{8}=2.\times\times\times$이므로 $6-2\sqrt{2}=6-\sqrt{8}=3.\times\times\times$, $4+2\sqrt{2}=4+\sqrt{8}=6.\times\times\times$이지? 따라서 이 부등식을 만족시키는 자연수 k의 값은 4, 5, 6이야.

따라서 구하는 자연수 k의 값은 4, 5, 6이므로 그 합은 $4+5+6=15$이다.

A 117 정답 ⑤ ＊거듭제곱근의 계산 [정답률 61%]

(**정답 공식:** $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$임을 이용한다.)

실수 $r=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$에 대하여 단서 먼저 r를 간단히 한 후 r^2, r^3을 구해 봐.

$$r+r^2+r^3=a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$$

일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 유리수이다.) (4점)

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

1st 실수 r를 간단히 하자.

$\sqrt[3]{2}=t$라 하면 $\sqrt[3]{4}=t^2$이므로

$a>0$이고 m, n이 양의 정수일 때 $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$이지? 이를 이용하면 $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=(\sqrt[3]{2})^2=t^2$

$$r=\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3}{t^2-t+1}=\frac{3(t+1)}{(t^2-t+1)(t+1)}$$

분모, 분자에 $t+1$을 각각 곱한 거야.

$$=\frac{3(t+1)}{\boxed{t^3}+1}=\frac{3(t+1)}{2+1}=t+1$$

$t=\sqrt[3]{2}$이므로 양변을 세제곱하면 $t^3=2$

2nd $r+r^2+r^3$의 값을 구해.

$$\therefore r+r^2+r^3=(t+1)+(t+1)^2+(t+1)^3$$
$$=(t+1)+(t^2+2t+1)+(t^3+3t^2+3t+1)$$
$$=t^3+4t^2+6t+3=4t^2+6t+5\ (\because t^3=2)$$
$$=4\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{2}+5$$

따라서 $a=4$, $b=6$, $c=5$이므로 $a+b+c=4+6+5=15$

다른 풀이: 실수 r의 분자 3을 $\sqrt[3]{2}$로 나타내어 해결하기

$\sqrt[3]{2}=t$라 하면 $\sqrt[3]{4}=t^2$이고 $t^3=2$이므로 $3=2+1=t^3+1$이지?

$$\therefore r=\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3}{t^2-t+1}=\frac{t^3+1}{t^2-t+1}$$
$$=\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t^2-t+1}=t+1$$

(이하 동일)

A 118 정답 ③ ＊거듭제곱근의 활용 [정답률 83%]

(**정답 공식:** $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$임을 이용한다.)

$\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}$의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 m, n의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는? (3점)

단서 거듭제곱근을 밑이 소수인 지수로 나타내어 주어진 값이 자연수가 되도록 하는 m, n의 값을 찾아.

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10