고등 수학,
개념과 유형을 제대로 익히면 누구나 잘 할 수 있습니다.

고등학교 수학은 개념이 어렵다고
공식만 암기하면서 공부해서는 안 됩니다.
개념을 꼼꼼히 이해하고 각 개념의 필수 공식과 문제 유형들을
단계화된 문제를 통해서 정확히 익혀야 합니다.

자이스토리는 학교시험과 최신 학력평가 문제를
철저히 분석해 촘촘하게 유형을 분류하고 개념을 알맞게 적용시키는
세분화된 문제 유형 훈련으로 수학 기본 실력이 탄탄하게 다져집니다.
그래서 하루가 다르게 수학 성적이 향상됨을 느낄 수 있습니다.

또한, 자이스토리의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설,
다른 풀이, 톡톡 풀이, 쉬운 풀이 등은 수학 공부에
흥미와 성취감을 북돋아 줄 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 –

차 례 [총 94개 유형 분류]

다른 풀이, 쉬운, 톡톡 풀이 대폭 강화

Ⅰ 수열의 극한

A 수열의 극한 – 15개 유형 분류

핵심 개념 정리 10
개념 확인 문제 11
수능 유형별 기출 문제 12
1등급 마스터 문제 28
동아리 소개/ 서울대 연극동아리 총연극회 30

B 급수 – 9개 유형 분류

핵심 개념 정리 32
개념 확인 문제 33
수능 유형별 기출 문제 34
1등급 마스터 문제 51

Ⅱ 미분법

C 지수함수와 로그함수의 미분 – 8개 유형 분류

핵심 개념 정리 54
개념 확인 문제 55
수능 유형별 기출 문제 56
1등급 마스터 문제 65
동아리 소개/ 서울대 전무련 66

D 삼각함수의 덧셈정리 – 7개 유형 분류

핵심 개념 정리 68
개념 확인 문제 69
수능 유형별 기출 문제 70
1등급 마스터 문제 78
동아리 소개/ 고려대 관현악단 80

E 삼각함수의 미분 – 7개 유형 분류

핵심 개념 정리 82
개념 확인 문제 83
수능 유형별 기출 문제 84
1등급 마스터 문제 95
동아리 소개/ 카이스트 SPARCS 98

F 여러 가지 미분법 – 9개 유형 분류

핵심 개념 정리 100
개념 확인 문제 101
수능 유형별 기출 문제 102
1등급 마스터 문제 114
동아리 소개/ 서울대 TNT 116

G 도함수의 활용 – 12개 유형 분류

핵심 개념 정리 118
개념 확인 문제 119
수능 유형별 기출 문제 120
1등급 마스터 문제 135
동아리 소개/ 고려대 쉐어링콰이어 138

Ⅲ 적분법

H 여러 가지 적분법 – 16개 유형 분류

핵심 개념 정리 140
개념 확인 문제 141
수능 유형별 기출 문제 142
1등급 마스터 문제 155
동아리 소개 / 성균관대 아이섹 158

I 정적분의 활용 – 11개 유형 분류

핵심 개념 정리 160
개념 확인 문제 161
수능 유형별 기출 문제 162
1등급 마스터 문제 174

Special 내신+수능 대비 단원별 모의고사

A 수열의 극한 176
B 급수 178
C 지수함수와 로그함수의 미분 180
D 삼각함수의 덧셈정리 182
E 삼각함수의 미분 184
F 여러 가지 미분법 186
G 도함수의 활용 188
H 여러 가지 적분법 190
I 정적분의 활용 192

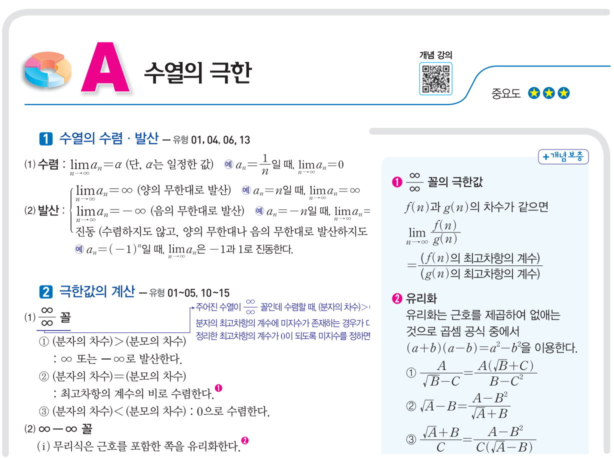
빠른 정답 찾기[문제편] 194

세분화된 유형 문제 + 1등급 대비 문제로 내신 1등급 완성

1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

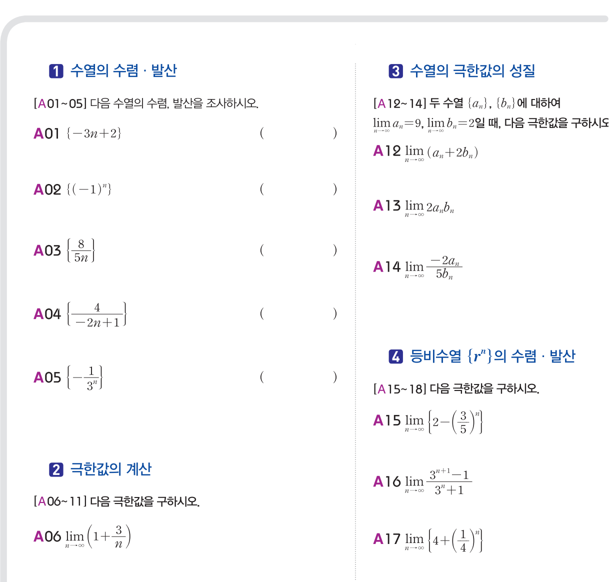
고2 수학의 각 단원에서 가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념을 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 강의하였습니다.

- **중요도** ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- +개념보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2024 수능과 2025 대비 평가원 출제 경향 분석


A 수열의 극한
개념 강의
중요도 ★★★
1 수열의 수렴 · 발산 – 유형 01, 04, 06, 13
(1) 수렴 : $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (단, α는 일정한 값)
(2) 발산 : $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (양의 무한대로 발산), $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (음의 무한대로 발산), 진동 (수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는 경우)
2 극한값의 계산 – 유형 01~05, 10~15
(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴
① (분자의 차수)>(분모의 차수) : ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.
② (분자의 차수)=(분모의 차수) : 최고차항의 계수의 비로 수렴한다.
③ (분자의 차수)<(분모의 차수) : 0으로 수렴한다.
(2) $\infty-\infty$ 꼴
(i) 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.
+개념보충
1 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값
$f(n)$과 $g(n)$의 차수가 같으면 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{(f(n)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(n)\text{의 최고차항의 계수})}$
2 유리화
유리화는 근호를 제곱하여 없애는 것으로 곱셈 공식 중에서 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.
① $\frac{A}{\sqrt{B}-C} = \frac{A(\sqrt{B}+C)}{B-C^2}$
② $\sqrt{A}-B = \frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$
③ $\frac{\sqrt{A}+B}{C} = \frac{A-B^2}{C(\sqrt{A}-B)}$

2 개념 확인 문제 – 개념에 대한 이해도 확인 문제

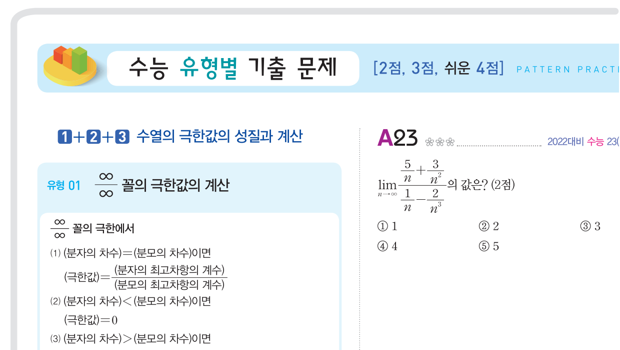
앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지 확인할 수 있는 개념 이해 필수 문제를 수록하였습니다.


1 수열의 수렴 · 발산
[A01~05] 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하시오.
A01 $\{-3n+2\}$ ( )
A02 $\{(-1)^n\}$ ( )
A03 $\left\{\frac{8}{5n}\right\}$ ( )
A04 $\left\{\frac{4}{-2n+1}\right\}$ ( )
A05 $\left\{-\frac{1}{3^n}\right\}$ ( )
2 극한값의 계산
[A06~11] 다음 극한값을 구하시오.
A06 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$
3 수열의 극한값의 성질
[A12~14] 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = 9$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$일 때, 다음 극한값을 구하시오.
A12 $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$
A13 $\lim_{n\to\infty} 2a_nb_n$
A14 $\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n}{5b_n}$
4 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산
[A15~18] 다음 극한값을 구하시오.
A15 $\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$
A16 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-1}{3^n+1}$
A17 $\lim_{n\to\infty}\left\{4+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

3 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 출제 유형을 촘촘하게 세분화하여 유형순, 개념순, 난이도순으로 문항을 배열하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- QR코드 : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.


수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]
1+2+3 수열의 극한값의 성질과 계산
유형 01 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산
$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서
(1) (분자의 차수)=(분모의 차수)이면 (극한값)$=\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$
(2) (분자의 차수)<(분모의 차수)이면 (극한값)=0
(3) (분자의 차수)>(분모의 차수)이면
A23 2022대비 수능 23(
$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$의 값은? (2점)
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

- **유형 분류 :** 빈출 – 시험에서 자주 출제되는 유형입니다.
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- 대표 : 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.

- **난이도 :** ❀❀❀ – 기본 문제 ❀❀❀ – 중급 문제
  ❀❀❀ – 중상급 문제

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2022대비 수능(홀) 1(고3) : 2021년 11월에 실시한 수능
  - 2022대비 6월 모평 2(고3) : 2021년 6월에 실시한 평가원
  - 2022실시 4월 학평 3(고3) : 2022년 4월에 실시한 학력평가
  - 2023대비 9월 모평 4(고3) : 2022년 9월에 실시한 평가원
  - 표시 없는 문제 : 기출 변형 문제

4 내신+수능 대비 단원별 모의고사 – 최종 실력 점검

중단원별 학교시험 필수 문제와 수능형 문항, 서술형 문항을 수록하여 학교시험을 더욱 충실히 대비할 수 있습니다.


내신+수능 대비 단원별 모의고사 B 급수
B01 2008실시(가) 9월/교육청 23(고2)
급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{4n^2-1}$의 합을 구하시오. (3점)
B04 2019(나) 6
급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개
① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

5 1등급 마스터 문제 – 대비 문제로 1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다.

- ✱✱✱ – 상급 문제
- 2등급 대비 : 정답률이 20~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- 1등급 대비 : 정답률이 20% 미만인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A89 ✱✱✱ 2015대비(B) 9월 모평 14(고3)

양수 t에 대하여 $\log t$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim \frac{a_n}{\cdots}$의 값은? (4점)

[1등급 대비+2등급 대비]

A94 1등급 대비 2014실시(A) 3월 학평 30(고3)

좌표평면 위에 직선 $y=\sqrt{3}x$가 있다. 자연수 n에 대하여 x축 위의 점 중에서 x좌표가 n인 점을 P_n, 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 Q_n이

6 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설

E 66 정답 25 · 2등급 대비 [정답률 27%]

＊원의 접선의 성질과 피타고라스 정리를 통해 극한값 구하기 [유형 03]

2등급? 원과 접선의 성질을 이용하여 반원에 내접하는 원의 반지름의 길이를 θ에 대해 나타내어 극한값을 계산하는 문제이다.

단서+발상

단서1 원의 접선과 접점을 지나는 원의 반지름은 서로 수직인데, 원에 접하는 직선이 직선 AC와 직선 AB이고, 선분 AB의 길이를 알고 있으므로 내접하는 원의 중심 O'에서 직선 AB에 수선의 발을 내린다. 발상
또한, 원 O'과 O가 서로 접하는 점 D와 원 O의 중심 O를 연결한 선분은 원 O의 반지름임을 안다. 개념

단서2 삼각형 O'OH가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 사용하여 $f(\theta)$를 θ에 대한 식으로 나타낼 수 있다. 개념
이때, 내접하는 원의 중심 O'과 A를 연결한 직선은 ∠BAC를 이등분함을 활용하여 선분 O'H의 길이를 알 수 있다. 해결

주의 필요한 보조선을 그어 직각삼각형을 만들고, 접선의 성질과 피타고라스 정리를 이용해 내접하는 원의 반지름의 길이 $f(\theta)$를 삼각함수에 대한 식으로 나타내는 과정

My Top Secret 서울대 선배의 1등급 대비 전략
문제에서 원이 나오면 원의 중심과 원 위의 점을 연결한 선분의 길이가 반지름의 길이라는 것을 활용하는 경우가 많아.

1등급 대비 특강
＊각의 이등분선의 성질
(＊)와 같은 이유는 점 O'에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 $\triangle AO'H \equiv \triangle AO'H'$ (RHS 합동)이므로 ∠H'AH = h에서

문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
- 단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
- 개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
- 유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
- 발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
- 적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
- 해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

7 입체 첨삭 해설!

정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

C 53 정답 ③ ＊로그함수의 극한 [정답률 95%]

정답 공식: 로그함수의 극한값을 구할 때에는 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 또는 $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$ $(a>0, a\neq1)$을 이용한다.

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+5x}{\ln(1+3x)}$의 값은? (2점)

단서 $\lim \frac{\ln(1+\square)}{\square}=1$임을 이용하기 위해 주어진 식을 적절히 변형하자.

① $\frac{7}{3}$ ② 2 ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

1st 세 각 α, β, γ에 대한 각각의 탄젠트 값을 구해.
주어진 그림에서
$\tan\alpha=\frac{1}{4}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$, $\tan\gamma=\frac{1}{y}$ ← 세 직각삼각형 CAO, CBO, CPO에서 탄젠트 값을 구해.

실수 선분 OC의 길이가 1이고 세 점 A, B, C의 y좌표를 알고 있으므로 tan를 이용해야겠지.

2nd 탄젠트함수의 덧셈정리를 이용해.
이때, $\alpha+\beta=\gamma$를 만족시켜야 하므로

다른 풀이: 두 수열의 합과 곱을 직접 구하기

$$\tan\gamma=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}=\frac{6}{7}$$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ (복호동순)

수능 핵강
＊이차부등식의 해가 주어졌을 때 이차부등식 세우기
최고차항의 계수가 $k(k>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 이차부등식 $f(x)<0$의 해가 존재하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 해.
이때, x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이고 이차부등식 $f(x)<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$야.
따라서 $f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 할 수 있어.

＊삼각함수의 합성 개념·공식
(1) $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$
(단, $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$)
(2) $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$
(단, $\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

D 50 정답 ⑤ ＊삼각함수의 덧셈정리의 활용 [정답률 72%]

정답 공식: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$를 이용하여 식을 간단히 한다. $y=\sin kx$, $y=\cos kx$의 주기는 $\frac{2\pi}{|k|}$이다.

함수 $f(x)=\cos2x\cos x-\sin2x\sin x$의 주기는? (3점)

단서 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 함수 $f(x)$를 간단히 해.

① 2π ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

1st 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 변형하고 함수 $f(x)$의 주기를 구해.
$f(x)=\cos2x\cos x-\sin2x\sin x=\cos(2x+x)=\cos3x$
따라서 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.
함수 $y=a\cos(bx+c)+d$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이야.

함정 주어진 식 $f(x)$가 $\cos(\alpha+\beta)$의 덧셈정리의 형태인 $\cos(2x+x)$임을 빨리 알아차리는 것이 중요해.

이것을 ㉠에 대입하면

$$-\frac{1}{f'(e)}=4f'(e)+4\times(-e)\times\frac{1}{e}$$

$$=4f'(e)-4 \quad \therefore f'(e)=\frac{1}{2}$$

쉬운 풀이: 분모, 분자의 최고차항의 계수의 비로 극한값 구하기

$\tan\theta=\frac{1}{7}$이므로

주의 θ의 범위가 주어지지 않으므로 몇 사분면의 각인지 알 수 없어.

$\sin\theta=\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}$, $\cos\theta=\pm\frac{7}{5\sqrt{2}}$ (복호동순) ← θ가 몇 사분면의 각인지 모르기 때문에 음수 값도 생각해.

$$\tan10^\circ+\frac{1}{\tan20^\circ}$$ ← $\tan(10^\circ+10^\circ)=\frac{\tan10^\circ+\tan10^\circ}{1-\tan10^\circ\tan10^\circ}=\frac{2\tan10^\circ}{1-\tan^2 10^\circ}$

$$=\tan10^\circ+\frac{1-\tan^2 10^\circ}{2\tan10^\circ}$$

$$=\frac{2\tan^2 10^\circ+1-\tan^2 10^\circ}{2\tan10^\circ}$$

$$=\frac{1}{2\sin10^\circ\cos10^\circ}=\frac{1}{\sin20^\circ}$$

$\sin2\theta=\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$

양예진 이화여대 의예과 2022년 입학 · 전북 상산고 졸
여러 가지 접근법이 있겠지만 먼저 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r로 잡으면 결국 $\frac{a}{1-r}$의 값을 구하라는 것을 알 수 있어. 주어진 두 등비급수의 합을 a와 r에 대한 식으로 나타내고, 나온 두 식을 나누어주면 바로 답을 구할 수 있어. a와 r의 값을 각각 구하지 않아도 되니까 시간도 절약되고 계산 실수도 줄일 수 있겠지? 특정한 형태만 구하면 식이 바로 나오는 문제가 출제되기도 하니까 항상 문제에서 물어보는 식의 형태를 먼저 보는 연습을 해보자.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빼먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

생생체험
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

A 수열의 극한

★ 유형 차례

중요 유형 01 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산

유형 02 수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산

유형 03 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 활용

유형 04 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산

유형 05 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 활용

중요 유형 06 등비수열의 수렴 조건

유형 07 등비수열의 극한값의 계산

유형 08 x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수

유형 09 등비수열의 극한과 함수의 연속

유형 10 a_n과 S_n의 관계를 이용한 수열의 극한

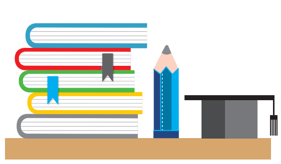
중요 유형 11 수열의 극한을 이용한 대소 관계

유형 12 치환을 이용한 수열의 극한

유형 13 수열의 수렴과 발산의 진위 판정

중요 유형 14 좌표평면에서 여러 가지 극한

유형 15 무한히 반복되는 도형에서의 극한



★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2025	수능		
	9월	유형 07 등비수열의 극한값의 계산	❀❀❀
	6월	유형 07 등비수열의 극한값의 계산	❀❀❀
2024	수능	출제되지 않음	
	9월	유형 07 등비수열의 극한값의 계산	✿✿❀
	6월	유형 04 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산	❀❀❀
2023	수능	유형 07 등비수열의 극한값의 계산	❀❀❀
	9월	유형 02 수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산	❀❀❀
	6월	유형 04 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산	❀❀❀

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 수열의 극한값을 계산하는 문제는 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 또는 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값을 구하거나 등비수열이 포함된 수열의 극한값을 구하는 간단한 형태이므로 계산 과정에서 실수를 하지 않도록 많은 연습을 해야 한다.
- 극한의 성질을 이용하거나 수열의 대소 관계를 이용하여 새롭게 정의된 수열의 극한값을 구하는 유형이 고난도 문항으로 출제될 가능성이 있으므로 수열의 극한의 성질을 종합적으로 정확히 알고 적용할 수 있도록 하자.
- 다항함수, 유리함수, 무리함수, 지수함수 등의 그래프에서의 도형의 선분의 길이, 넓이 조건을 이용하여 수열의 일반항을 구한 후 극한값을 구하는 문제는 출제 가능성이 매우 높으므로 함수의 그래프에 대한 개념과 성질 및 도형의 특성 등을 체계적으로 정리해 놓도록 하자.

A 수열의 극한

개념 강의

중요도 ★★★

1 수열의 수렴 · 발산 — 유형 01, 04, 06, 13

(1) **수렴** : $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (단, α는 일정한 값) 예 $a_n = \frac{1}{n}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(2) **발산** :
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (양의 무한대로 발산) 예 $a_n = n$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (음의 무한대로 발산) 예 $a_n = -n$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- 진동 (수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.)

  예 $a_n = (-1)^n$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$은 -1과 1로 진동한다.

2 극한값의 계산 — 유형 01~05, 10~15

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

주어진 수열이 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴인데 수렴할 때, (분자의 차수) > (분모의 차수)인 모양은 분자의 최고차항의 계수에 미지수가 존재하는 경우가 대부분이므로 정리한 최고차항의 계수가 0이 되도록 미지수를 정하면 된다.

① (분자의 차수) > (분모의 차수)

 : ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.

② (분자의 차수) = (분모의 차수)

 : 최고차항의 계수의 비로 수렴한다.[1]

③ (분자의 차수) < (분모의 차수) : 0으로 수렴한다.

(2) $\infty - \infty$ 꼴

(ⅰ) 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.[2]

(ⅱ) 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

3 수열의 극한값의 성질[3] — 유형 01~15

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$($\alpha$, β는 실수)일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$(복호동순)

(2) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = c\alpha$(단, c는 상수)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

4 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산 — 유형 06~15

(1) $r > 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ (발산)

(2) $r = 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$ (수렴)

(3) $-1 < r < 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (수렴)

(4) $r \le -1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n$은 진동한다. (발산)

출제 2025 9월 모평 25번
2025 6월 모평 23번

★ 6월 모평에서는 등비수열의 극한에서 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 계산하는, 9월 모평에서는 극한값을 이용하여 등비수열의 항의 합을 구하는 쉬운 난이도의 문제가 출제되었다.

5 수열의 극한값의 대소 관계 — 유형 11~13

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$($\alpha$, β는 실수)일 때,

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.[4]

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

+개념 보충

❶ $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

$f(n)$과 $g(n)$의 차수가 같으면

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{(f(n)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(n)\text{의 최고차항의 계수})}$

❷ 유리화

유리화는 근호를 제곱하여 없애는 것으로 곱셈 공식 중에서 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$을 이용한다.

① $\frac{A}{\sqrt{B}-C} = \frac{A(\sqrt{B}+C)}{B-C^2}$

② $\sqrt{A} - B = \frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$

③ $\frac{\sqrt{A}+B}{C} = \frac{A-B^2}{C(\sqrt{A}-B)}$

왜 그럴까?

❸ 수열의 극한값의 성질은 두 수열이 모두 수렴할 때만 성립한다. 만약 수렴하지 않는다면 그 성질을 쓸 수 없다.

예를 들면 $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$일 때,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \times 0$이고

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty}\left(n \times \frac{1}{n}\right) = 1$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n b_n \neq \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n$

한걸음 더!

❹ 수열의 극한값의 대소 관계에서 (1)은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이면 $\alpha \le \beta$가 성립한다.

즉, $a_n < b_n$과 같이 등호가 포함되지 않아도 $\alpha \le \beta$에는 등호가 붙는 것에 주의하자.

예를 들어

$a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{2}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$로 같다.

1 수열의 수렴 · 발산

[A01~05] 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하시오.

A01 $\{-3n+2\}$ ( )

A02 $\{(-1)^n\}$ ( )

A03 $\left\{\dfrac{8}{5n}\right\}$ ( )

A04 $\left\{\dfrac{4}{-2n+1}\right\}$ ( )

A05 $\left\{-\dfrac{1}{3^n}\right\}$ ( )

2 극한값의 계산

[A06~11] 다음 극한값을 구하시오.

A06 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$

A07 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{5}{n}}{2-\dfrac{7}{n}}$

A08 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2}$

A09 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+3n-1}{3n^2+7}$

A10 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+n+1}}$

A11 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{-n^2+1}$

3 수열의 극한값의 성질

[A12~14] 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=9$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

A12 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$

A13 $\lim\limits_{n\to\infty}2a_nb_n$

A14 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2a_n}{5b_n}$

4 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

[A15~18] 다음 극한값을 구하시오.

A15 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right\}$

A16 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-1}{3^n+1}$

A17 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{4+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$

A18 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+4^n}{5^n-1}$

5 수열의 극한값의 대소 관계

[A19~20] 다음 물음에 답하시오.

A19 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{2n+1}\le a_n\le\frac{1}{2n-1}$$

A20 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n-1<na_n<n+1$을 만족할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

❖ 정답 및 해설 2~3p

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점] PATTERN PRACTICE

1+2+3 수열의 극한값의 성질과 계산

유형 01 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서

(1) (분자의 차수)=(분모의 차수)이면

(극한값)$=\dfrac{\text{(분자의 최고차항의 계수)}}{\text{(분모의 최고차항의 계수)}}$

(2) (분자의 차수)<(분모의 차수)이면

(극한값)$=0$

(3) (분자의 차수)>(분모의 차수)이면

극한값은 없다. (양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산)

tip

1 분모의 차수와 분자의 차수를 비교한다.

2 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\text{(상수)}}{n}=0$을 이용한다.

A21 대표 2024실시 3월 학평 미적분 26(고3)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}-a_n=a_1+2$

를 만족시킨다. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n+n}{a_n-n+1}=3$일 때, a_{10}의 값은?

(단, $a_1>0$이다.) (3점)

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

A22 2023실시 3월 학평 미적분 23(고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$의 값은? (2점)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

A23 2022대비 수능 23(고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A24 2021실시 3월 학평 23(고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A25 2020대비(나) 수능 3(고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}$의 값은? (2점)

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{3}{5}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ 1

A26 2021대비(가) 9월 모평 2(고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A27 ❀❀❀ 2023실시 3월 학평 미적분 25(고3)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=4$$

일 때, a_2-a_1의 값은? (3점)

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

A28 ✿❀❀ 2018실시(나) 11월 학평 24(고2)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)n^2+bn}{2n-1}=5$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (3점)

A29 ✿❀❀ 2014대비(A) 수능 20(고3)

양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(x)-(n+1)g(x)=n$을 만족시키는 모든 x의 값의 곱을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{n^2}$의 값은? (4점)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

유형 02 수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty}ka_n=k\alpha$ (k는 상수)
(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$ (복호동순)
(3) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$
(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

tip

1 수열의 극한에 대한 기본 성질은 수열이 반드시 수렴할 때만 성립한다.
2 0이 아닌 임의의 실수 k에 대하여
$k>0$이면 $k\times\infty=\infty$, $k\times(-\infty)=-\infty$이고,
$k<0$이면 $k\times\infty=-\infty$, $k\times(-\infty)=\infty$이다.

A30 대표 2017실시(나) 3월 학평 24(고3)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=2,\ \lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n(1+b_n)$의 값을 구하시오. (3점)

A31 ❀❀❀ 2023대비 9월 모평 미적분 25(고3)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

❖ 정답 및 해설 3~5p

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A89 ✽✽✽ 2015대비(B) 9월 모평 21(고3)

양수 t에 대하여 $\log t$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? (4점)

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

A90 ✽✽✽ 2019실시(나) 4월 학평 21(고3)

함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}\quad(k>0)$$

에 대하여 함수

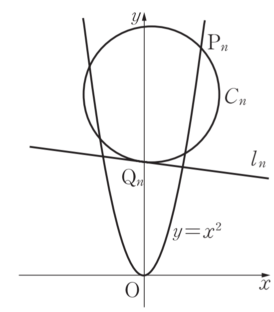
$$g(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) & (x=k)\\ (x-k)^2 & (x\neq k)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 상수 k에 대하여 $(g\circ f)(k)$의 값은? (4점)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

A91 ✽✽✽ 2021실시 3월 학평 29(고3)

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0,\ 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. (4점)



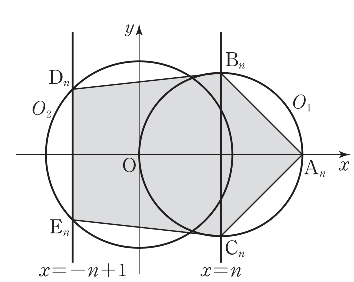
A92 ✽✽✽ 2017실시(가) 11월 학평 19(고2)

그림과 같이 1보다 큰 자연수 n에 대하여 두 원

$O_1 : (x-n)^2+y^2=n^2$

$O_2 : x^2+y^2=2(n-1)^2$

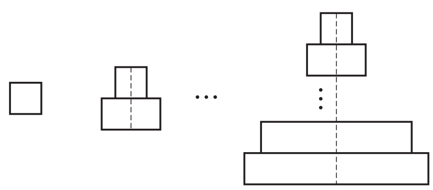
과 점 $\mathrm{A}_n(2n,\ 0)$이 있다. 원 O_1과 직선 $x=n$이 만나는 두 점을 각각 B_n, C_n, 원 O_2와 직선 $x=-n+1$이 만나는 두 점을 각각 D_n, E_n이라 하자. 오각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n\mathrm{C}_n$의 둘레 및 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점들의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5}n-\sqrt{a_n})$의 값은? (4점)



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

A93 ✱✱✱ 2015실시(나) 6월 학평 30(고2)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 [도형 1]이라 하자. [도형 1]의 아랫변에 가로의 길이 4, 세로의 길이 2인 직사각형을 한 직선에 대해 대칭이 되도록 이어 붙여 만든 도형을 [도형 2]라 하자. 이때 한 직선은 [도형 2]의 가장 긴 변의 중점을 지난다.
이와 같은 방법으로 3 이상의 자연수 n에 대하여 [도형 $(n-1)$]의 아랫변에 가로의 길이 $2n$, 세로의 길이 2인 직사각형을 이어 붙여 만든 도형을 [도형 n]이라 하자.



[도형 1]　[도형 2]　…　[도형 n]

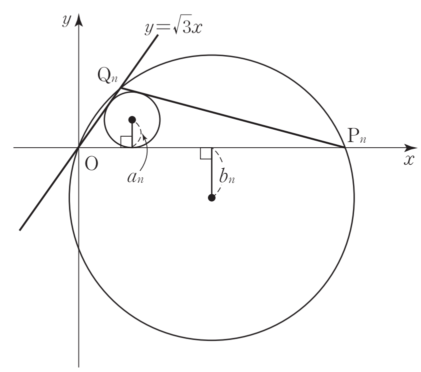
자연수 n에 대하여 [도형 n]을 포함하는 원들 중 가장 작은 원의 넓이를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{80a_n}{\pi n^2}$의 값을 구하시오. (4점)

[1등급 대비+2등급 대비]

A94 ✪ 1등급 대비 2014실시(A) 3월 학평 30(고3)

좌표평면 위에 직선 $y=\sqrt{3}x$가 있다. 자연수 n에 대하여 x축 위의 점 중에서 x좌표가 n인 점을 P_n, 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 Q_n이라 하자.
삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리를 a_n, 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 외접원의 중심에서 x축까지의 거리를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=L$이다. $100L$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.) (4점)



A95 ✪ 2등급 대비 2015실시(A) 10월 학평 21(고3)

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$은 다음 규칙을 만족시킨다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
> (나) $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=1$
> (다) 점 P_{n+2}는 점 P_{n+1}을 지나고 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$에 수직인 직선 위의 점 중 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{n+2}}$가 최대인 점이다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=0$, $a_2=1$이고,
$a_n=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_n}\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$
일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$의 값은? (4점)

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ 1　⑤ 2

★ 내신+수능 대비

단원별 모의고사

[제한시간 50분]

A 수열의 극한 – 11문항

B 급수 – 10문항

C 지수함수와 로그함수의 미분 – 12문항

D 삼각함수의 덧셈정리 – 12문항

E 삼각함수의 미분 – 10문항

F 여러 가지 미분법 – 11문항

G 도함수의 활용 – 11문항

H 여러 가지 적분법 – 11문항

I 정적분의 활용 – 11문항

내신+수능 대비 단원별 모의고사 A 수열의 극한

- 문항 수 11개
- 배점 35점
- 제한시간 50분

모의
A01
2012대비(나) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

모의
A02
2008대비(나) 6월 모평 7(고3)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=\frac{3}{4}$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

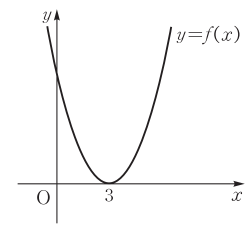
모의
A03
2011대비(나) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

모의
A04
2016대비(A) 6월 모평 14(고3)

함수 $f(x)$가 $f(x)=(x-3)^2$이고, 자연수 n에 대하여 방정식 $f(x)=n$의 두 근이 α, β일 때, $h(n)=|\alpha-\beta|$라 하자. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$의 값은? (4점)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

모의
A05
2014예비(A) 5월 모평 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times5^n-3^n}{5^{n+1}+2^n}$의 값은? (2점)

① 1 ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

모의
A06
2006대비(나) 수능 7(고3)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n<a_n<n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

모의
A07 ✿❀❀ 2012대비(나) 9월 모평 25(고3)

수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n=7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하시오.

(단, $a_n\neq0$) (3점)

모의
A08 ✿❀❀ 2006실시(가) 11월 학평 11(고2)

수열의 극한에 대하여 항상 옳은 것을 [보기]에서 모두 고르면? (3점)

[보기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$이다.

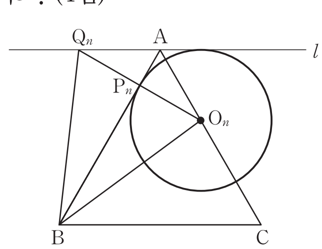
ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\beta$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$이다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

모의
A09 ✿✿❀ 2016실시(나) 7월 학평 29(고3)

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와 점 A를 지나고 직선 BC와 평행한 직선 l이 있다. 자연수 n에 대하여 중심 O_n이 변 AC 위에 있고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$인 원이 직선 AB와 직선 l에 모두 접한다. 이 원과 직선 AB가 접하는 점을 P_n, 직선 O_nP_n과 직선 l이 만나는 점을 Q_n이라 하자.
삼각형 BO_nQ_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}2^nS_n=k$이다. k^2의 값을 구하시오. (4점)

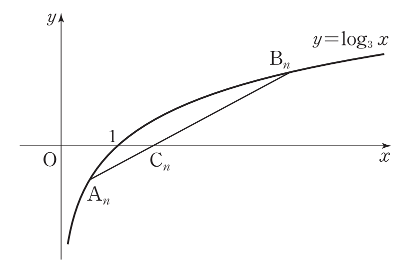


모의
A10 ✿❀❀ 2013대비(나) 9월 모평 15(고3)

2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 C_n은 선분 A_nB_n과 x축과의 교점이다.
(나) $\overline{A_nC_n}:\overline{C_nB_n}=1:2$

점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은? (4점)



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

서술형

모의
A11 ✿❀❀

등차수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=3,\ a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=13$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. (5점)

❖ 정답 및 해설 262~265p

A 수열의 극한

개념 확인 문제

A 01 정답 발산 　*수열의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}(-3n+2)=-\infty$ (발산)

A 02 정답 진동(발산) 　*수열의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}-1 & (n\text{이 홀수})\\ 1 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$ (진동(발산))

A 03 정답 수렴 　*수열의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\frac{8}{5n}=0$ (수렴)

A 04 정답 수렴 　*수열의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{-2n+1}=0$ (수렴)

A 05 정답 수렴 　*수열의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3^n}\right)=0$ (수렴)

A 06 정답 1 　*극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=1$

A 07 정답 2 　*극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{5}{n}}{2-\frac{7}{n}}=\frac{4}{2}=2$

A 08 정답 0 　*극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2}=0$

A 09 정답 $\frac{4}{3}$ 　*극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-1}{3n^2+7}=\frac{4}{3}$

A 10 정답 2 　*극한값의 계산

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+n+1}}{(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+n+1})(\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+n+1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+n+1}}{(\sqrt{n^2+2n+2})^2-(\sqrt{n^2+n+1})^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+n+1}}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=2$$

A 11 정답 -1 　*극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{-n^2+1}=\frac{1}{-1}=-1$

A 12 정답 13 　*수열의 극한값의 성질

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}2b_n=\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=9+2\times2=13$$

A 13 정답 36 　*수열의 극한값의 성질

$\lim_{n\to\infty}2a_nb_n=2\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=2\times9\times2=36$

A 14 정답 $-\frac{9}{5}$ 　*수열의 극한값의 성질

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n}{5b_n}=\left(-\frac{2}{5}\right)\times\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{9}{2}=-\frac{9}{5}$$

A 15 정답 2 　*등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=2$

A 16 정답 3 　*등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-1}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}}=\frac{3}{1}=3$

A 17 정답 4 　*등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\left\{4+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}4+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=4$

A 18 정답 5 　*등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+4^n}{5^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{4^n}{5^n}}{1-\frac{1}{5^n}}=\frac{5}{1}=5$

A 19 정답 $\frac{1}{2}$ ＊수열의 극한값의 대소 관계

$\frac{1}{2n+1} \le a_n \le \frac{1}{2n-1}$에서 $\frac{n}{2n+1} \le na_n \le \frac{n}{2n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} \le \lim_{n\to\infty} na_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}$

여기서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{1}{2}$

A 20 정답 1 ＊수열의 극한값의 대소 관계

$n-1 < na_n < n+1$에서 $\frac{n-1}{n} < a_n < \frac{n+1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$

여기서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 21 정답 ④ ＊$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 83%]

정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어서 극한값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} - a_n = a_1 + 2$ 단서1 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고 공차가 (a_1+2)임을 알 수 있어.

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1} = 3$일 때, a_{10}의 값은? (단, $a_1 > 0$이다.) (3점)

단서2 등차수열의 일반항 a_n은 n에 관한 일차식이므로 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 분모, 분자의 차수가 같아.

① 30 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

1st a_n의 일반항을 구해.

$a_{n+1} - a_n = a_1 + 2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 (a_1+2)인 등차수열이다.

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)\times(a_1+2) = (a_1+2)n - 2$ ⋯ ㉠

2nd 주어진 극한값을 통해 a_{10}의 값을 구해.

첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = a + (n-1)d$야.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1}$에 ㉠을 대입하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\{(a_1+2)n-2\}+n}{(a_1+2)n-2-n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2a_1+5)n-4}{(a_1+1)n-1}$

분모, 분자를 각각 n으로 나누면

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 계산해.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1+5-\frac{4}{n}}{a_1+1-\frac{1}{n}} = \frac{2a_1+5}{a_1+1} = 3$

$2a_1+5 = 3(a_1+1)$, $2a_1+5 = 3a_1+3$ $\therefore a_1 = 2$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = (2+2)n - 2 = 4n-2$ ($\because$ ㉠)이므로

$a_{10} = 4\times 10 - 2 = 38$

A 22 정답 ④ ＊$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 93%]

정답 공식: 분모, 분자를 n^2으로 나눠서 $\frac{1}{\infty} \longrightarrow 0$임을 이용한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$의 값은? (2점)

단서 극한의 형태가 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴임을 알 수 있어.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

1st 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n-1}{n^2+1}$에서

분모, 분자를 각각 n^2으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$

2nd 극한값을 구해.

모든 항이 수렴하면 합, 차, 곱 등의 형태로 이루어져 있어도 각 항의 극한값을 대입할 수 있어.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$이므로 극한값의 성질에 의해서

구하는 극한값은 $\frac{6+0-0}{1+0} = 6$

쉬운 풀이: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 분모, 분자의 최고차항을 비교하여 구하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모, 분자의 최고차항을 비교하면 분모의 최고차항은 n^2, 분자의 최고차항은 $6n^2$이야.

따라서 구하는 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{n^2} = 6$

A 23 정답 ⑤ ＊$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 95%]

정답 공식: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$의 값은? (2점)

단서 분모, 분자에 각각 n을 곱하여 극한값을 계산하자.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 분모, 분자에 n을 곱하여 극한값을 계산하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} = \frac{5+0}{1-0} = 5$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$

양예진 이화여대 의예과 2022년 입학 · 전북 상산고 졸

미적분의 시작을 알리는 첫 문항! 다행히 기출에서 많이 출제되던 수열의 극한값을 계산하는 문항이라 가볍게 선택과목을 시작할 수 있었지. 가장 중요한건 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$이라는 걸 알고 있어야 한다는 거야. 분모, 분자에 각각 n을 곱하면 0으로 수렴하는 항과 상수가 되는 항들이 구분되겠지? 어떤 항들이 0으로 수렴하게 되는지 파악하는 연습을 하면 가볍게 풀 수 있는 문제였어.

A 24 정답 ⑤ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 98%]

정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$의 값은? (2점)

단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모, 분자를 최고차항으로 나눠서 구해.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 분모, 분자를 n^3으로 나눈 후 극한값을 구하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{10}{1\times2}=5$$

분모를 모두 전개할 필요없이 n에 대한 일차식과 이차식의 곱이므로 최고차항은 n^3임을 확인할 수 있어.

A 25 정답 ③ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 97%]

정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}$의 값은? (2점) 단서 주어진 극한은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 계산해.

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

1st 분모, 분자를 n으로 각각 나누어 극한값을 구해.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{4}{n^2}}}{5-\frac{2}{n}}=\frac{\sqrt{9+0}}{5-0}=\frac{3}{5}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$

주의 n이 근호 안에 들어갈 때, n^2으로 들어가야 해.

쉬운 풀이: 분모, 분자의 최고차항의 계수의 비로 극한값 구하기

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 분모와 분자의 차수가 같으면 최고차항의 계수의 비로 극한값을 구할 수 있어.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}=\frac{\sqrt{9}}{5}=\frac{3}{5}$$

A 26 정답 ④ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 96%]

정답 공식: 분자의 차수와 분모의 차수가 같은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$로 극한값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$의 값은? (2점)

단서 분자의 식을 전개하고, 정리한 후 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구하자.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 분자의 식을 전개한 후 극한값을 계산하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+4n+1)-(4n^2-4n+1)}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+5}=\frac{8}{2}=4$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

A 27 정답 ③ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서의 미정계수의 결정 [정답률 81%]

정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어서 극한값을 구한다.

단서 1 등차수열의 일반항 a_n은 n에 관한 일차식이야.

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=4$일 때, a_2-a_1의 값은? (3점)

단서 2 구하는 a_2-a_1의 값은 등차수열 공차야.

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

1st 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 설정해.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

일반항 $a_n=a+(n-1)d=dn+a-d$이고, $a_{2n}=2dn+a-d$이다.

2nd 주어진 극한값을 통해 a_2-a_1의 값을 구해.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}$에 a_n, a_{2n}을 각각 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2dn+a-d-6n}{dn+a-d+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2d-6)n+(a-d)}{dn+(a-d+5)}$$

분모, 분자를 각각 n으로 나누면

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 계산해.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2d-6+\frac{a-d}{n}}{d+\frac{a-d+5}{n}}=\frac{2d-6}{d}=4$$

$2d-6=4d$, $2d=-6$ $\therefore d=-3$

따라서 구하는 $a_2-a_1=d=-3$이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차 d에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$

톡톡 풀이: 등차수열의 일반항이 n에 관한 일차식임을 이용하기

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 n에 관한 일차식이므로

$a_n=an+b$라 하면 $a_{2n}=2an+b$이고,

$a_2-a_1=(2a+b)-(a+b)=a$이므로 구하는 값은 a야.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2a-6)n+b}{an+(b+5)}=\frac{2a-6}{a}=4$$

따라서 $a=-3$

A 28 정답 12 * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서의 미정계수의 결정 [정답률 84%]

정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어서 극한값을 구한다.

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)n^2+bn}{2n-1}=5$일 때,

$a+b$의 값을 구하시오. (3점) 단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이 수렴하기 위한 조건을 생각해.

1st 주어진 수열의 극한이 수렴함을 이용하여 a의 값을 구해.

주어진 극한이 5로 수렴하므로 분모, 분자의 차수가 같아야 한다.

n에 대한 s차 다항식과 t차 다항식에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{(s\text{차 다항식})}{(t\text{차 다항식})}$은

① $s>t$이면 발산, ② $s=t$이면 최고차항의 계수의 비로 수렴, ③ $s<t$이면 0으로 수렴해.

즉, 분자가 n에 대한 일차식이어야 하므로

$a-2=0$, $b\neq0$ $\therefore a=2$, $b\neq0$

주의 $b=0$이어도 주어진 극한은 수렴하지만 그 값은 0이므로 주어진 조건을 만족하지 않아.

2nd 분모, 분자를 각각 n으로 나누어 극한값을 구하자.

$a=2$를 주어진 극한식에 대입하면

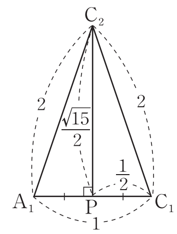
$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{2-\frac{1}{n}}=\frac{b}{2}=5 \qquad \therefore b=10$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\therefore a+b=2+10=12$

2nd S_1을 구하고, 수열 $\{S_n\}$의 일반항을 구해 보자.

$\overline{A_1C_2}=\overline{C_1C_2}=r_2=2$(∵ ㉠), $\overline{A_1C_1}=r_1=1$이므로 삼각형 $C_1A_1C_2$는 이등변삼각형이고 꼭짓점 C_2에서 $\overline{A_1C_1}$에 내린 수선의 발을 P라 하면 점 P는 $\overline{A_1C_1}$을 수직이등분하므로 직각삼각형 C_1C_2P에서



$\overline{C_2P}=\sqrt{\overline{C_2C_1}^2-\overline{C_1P}^2}=\sqrt{4-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

$\therefore S_1=2\triangle C_1A_1C_2=2\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=\frac{\sqrt{15}}{2}$

따라서 ㉡에 의해 수열 $\{S_n\}$은 공비가 4이고 첫째항이 $S_1=\frac{\sqrt{15}}{2}$인 등비수열이므로 $S_n=\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot4^{n-1}=\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot4^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot4^n}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}}{1+\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0}}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

분모, 분자를 분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 4^n으로 각각 나누자.

$a_n=(-n)+(-n+1)+\cdots+0+1+\cdots+(n-1)+n$ $=0$
$\quad+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-1)$

$=(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-1)$

$=\frac{(2n-1)\{(n+1)+(3n-1)\}}{2}$ 첫째항이 $n+1$, 마지막 항이 $3n-1$이고 항의 개수가 $(3n-1)-(n+1)+1=2n-1$인 등차수열의 합이야.

$=4n^2-2n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n}{n^2}=4$

수능 핵강

＊조건을 만족시키는 정수 $f(t)$를 찾을 때의 주의할 점

$f(t)=n\times k$(k는 실수)의 값이 정수가 되어야 한다고 해서 k가 반드시 정수가 되어야 할 필요는 없어.
즉, $f(t)=nh(x)$에서 n은 자연수이고 $-1\le h(x)<3$이므로 정수 $h(x)$만 생각하여 $h(x)=-1,\ 0,\ 1,\ 2$에 의해 $f(t)=-n,\ 0,\ n,\ 2n$이라고 하면 안 돼.
$h(x)=\frac{1}{2}$이고 $n=2$일 때도 $f(t)=1$이 되는 경우가 생기기 때문이지.
따라서 해설의 첫 번째 단계처럼 $h(x)$의 범위에서 $f(t)$의 범위를 구한 다음 정수 $f(t)$를 찾아야 해.

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A 89 정답 ① ＊$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 활용 [정답률 35%]

정답 공식: $0\le g(t)<1$을 이용해서 $f(t)$의 범위를 구하고 가능한 $f(t)$를 구한다.

양수 t에 대하여 $\log t$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여 **단서1** $\log t$의 소수 부분이 $g(t)$니까 $g(t)$의 범위는 $0\le g(t)<1$이야.

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? (4점) **단서2** $g(t)$의 범위에 의하여 $f(t)$의 범위를 구할 수 있어. 이때, $f(t)$는 정수 아니까 구해낸 $f(t)$의 범위에서 모든 $f(t)$의 값을 찾을 수 있겠지?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

1st 상용로그의 소수 부분의 범위를 이용하여 $f(t)$의 범위를 구하자.

함정 함수 $f(t)$가 $g(t)$에 대한 이차식으로 표현되어 있고, $g(t)$의 범위가 $0\le g(t)<1$이므로 함숫값 $f(t)$의 범위를 구할 수 있겠지.

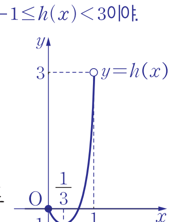
$\log t$의 소수 부분인 $g(t)$의 범위는 $0\le g(t)<1$이므로

$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$

$\quad=n\left[9\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-1\right]$에서

$g(t)=x,\ h(x)=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-1$이라 하면

$0\le x<1$에서 이차함수 $h(x)$의 범위는 $-1\le h(x)<3$이다. $0\le x<1$에서 함수 $y=h(x)$ 그래프는 그림과 같으므로 $h(x)$의 범위는 $-1\le h(x)<3$이야.



따라서 $f(t)=nh(x)$에서 $-n\le nh(x)<3n$이므로

$-n\le f(t)<3n$ ⋯ ㉠

2nd 자연수 n에 대하여 가능한 $f(t)$의 값을 찾아보자.

이때, $\log t$의 정수 부분인 $f(t)$는 정수이므로 ㉠에 의해 가능한 정수 $f(t)$의 값은

$f(t)=-n,\ -n+1,\ \cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 3n-1$

즉, 서로 다른 모든 $f(t)$의 합은

A 90 정답 ⑤ ＊수열의 극한과 함수의 연속 [정답률 42%]

정답 공식: $\frac{x-1}{k}$의 값의 범위에 따라 수열의 극한값을 구하여 함수 $f(x)$를 결정하고, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 k의 값을 찾는다.

함수 **단서1** $\frac{x-1}{k}$의 값의 범위에 따라 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}$이 수렴하거나 발산하므로 $\frac{x-1}{k}$의 값의 범위를 나누어 함수 $f(x)$를 구해.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}\ (k>0)$$

에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) & (x=k)\\(x-k)^2 & (x\ne k)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 상수 k에 대하여 $(g\circ f)(k)$의 값은? (4점) **단서2** 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=k$에서 연속이야. 즉, $\lim_{x\to k}g(x)=g(k)$이어야 해.

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

1st $\left|\frac{x-1}{k}\right|<1$, $\left|\frac{x-1}{k}\right|>1$, $\left|\frac{x-1}{k}\right|=1$일 때로 구분하여 함수 $f(x)$를 구하자.

등비수열의 극한에 대한 식으로 표현된 $f(x)$를 간단히 하기 위해 공비인 $\frac{x-1}{k}$의 값의 범위를 다음과 같이 나누자.
① $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{2n}=\infty$
② $|r|=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$
③ $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$

(i) $\left|\frac{x-1}{k}\right|<1$, 즉 $1-k<x<1+k$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}=0$이므로 $\left|\frac{x-1}{k}\right|<1$에서 $k>0$이므로 $\frac{|x-1|}{k}<1$, $|x-1|<k$, $-k<x-1<k$ ∴ $1-k<x<1+k$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(ii) $\left|\frac{x-1}{k}\right|=1$, 즉 $x=1-k$ 또는 $x=1+k$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}$$

$$=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $\left|\frac{x-1}{k}\right|>1$, 즉 $x<1-k$ 또는 $x>1+k$일 때,

$\left|\frac{x-1}{k}\right|>1$에서 $k>0$이므로 $\frac{|x-1|}{k}>1$
$|x-1|>k$, $x-1<-k$ 또는 $x-1>k$
$\therefore x<1-k$ 또는 $x>1+k$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}=\infty$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}$$

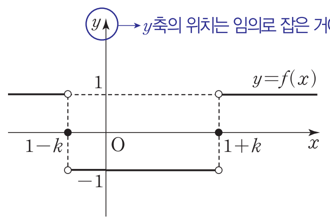
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<1-k \text{ 또는 } x>1+k)\\ 0 & (x=1-k \text{ 또는 } x=1+k)\\ -1 & (1-k<x<1+k)\end{cases}$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

y축의 위치는 임의로 잡은 거야.



2nd 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 이용하여 k의 값을 구하자.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=k$에서 연속이면 되므로 $\lim_{x\to k}g(x)=g(k)$가 성립해야 한다.

함수 $g(x)$에서 $x\neq k$일 때, $y=(x-k)^2$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=k$에서 $g(x)$가 연속이면 모든 실수의 집합에서 함수 $g(x)$는 연속이야.

이때, $\lim_{x\to k}g(x)=\lim_{x\to k}(x-k)^2=0$, $g(k)=(f\circ f)(k)$이므로

$(f\circ f)(k)=0$, 즉 $f(f(k))=0$이어야 한다.

$f(1-k)=f(1+k)=0$이므로

$f(k)=1-k$ 또는 $f(k)=1+k$이다.

$f(f(k))=0$에서 $f(k)=t$이면 $f(t)=0$이어야 해. 즉, 함수 $f(x)$에 대하여 t의 값은 $t=1-k$ 또는 $t=1+k$이겠지?

한편, $k>0$에서 $1+k>1$이고 $f(x)$의 치역은 $\{-1, 0, 1\}$이므로 $1+k$는 치역에 속하지 않는다.

함정 문제에서 $k>0$이라고 주어진 것을 이용하여 $f(k)$의 값이 가질 수 있는 값을 확실히 파악하고 문제를 풀어야 해!

$\therefore f(k)=1-k$

(i) $1-k=1$, 즉 $k=0$인 경우

$k>0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $1-k=0$, 즉 $k=1$인 경우

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\\ 0 & (x=0 \text{ 또는 } x=2)\\ -1 & (0<x<2)\end{cases}$$ 에서

$f(f(k))=f(f(1))=f(-1)=1\neq0$이므로

주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $1-k=-1$, 즉 $k=2$인 경우

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>3)\\ 0 & (x=-1 \text{ 또는 } x=3)\\ -1 & (-1<x<3)\end{cases}$$ 에서

$f(f(k))=f(f(2))=f(-1)=0$이므로

주어진 조건을 만족시킨다.

(i)~(iii)에 의하여 $k=2$이므로

$$g(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) & (x=2)\\ (x-2)^2 & (x\neq2)\end{cases}$$

3rd $(g\circ f)(k)$의 값을 구하자.

$$\begin{aligned}\therefore (g\circ f)(k)&=g(f(k))\\&=g(f(2))\\&=g(-1)\\&=(-1-2)^2=9\end{aligned}$$

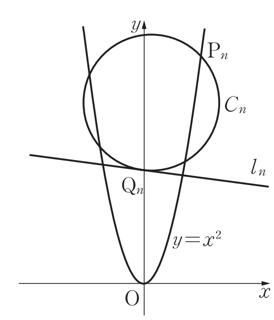
A 91 정답 12 *좌표평면에서 여러 가지 극한 [정답률 32%]

정답 공식: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 (분모의 차수)=(분자의 차수)이면 극한값은 $\frac{\text{(분자의 최고차항의 계수)}}{\text{(분모의 최고차항의 계수)}}$이다.

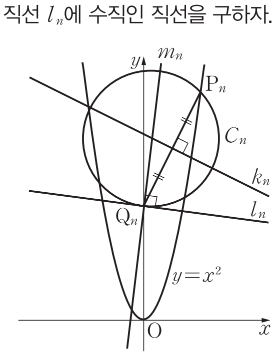
단서 1 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용할 수 있는지 살펴봐.

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0,\ 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. (4점)

단서 2 원의 넓이를 이등분하는 직선은 반드시 원의 중심을 지나야 해.



1st 점 Q_n을 지나고 직선 l_n에 수직인 직선을 구하자.



점 Q_n을 지나고 직선 l_n에 수직인 직선을 m_n이라 하면 원 C_n의 중심은 직선 m_n 위에 존재한다.

접점을 지나고 접선에 수직인 직선은 원의 중심을 반드시 지나지.

직선 m_n은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 평행하고

직선 m_n과 점 P_n에서의 접선은 모두 직선 l_n과 수직이므로 서로 평행하게 되는 거야. 즉, 기울기가 같게 되는 거야.

$y'=2x$이므로 직선 m_n의 기울기는 $4n$이다.