

고등 수학, 개념과 유형을 제대로 익히면 누구나 잘 할 수 있습니다.

고등학교 수학은 개념이 어렵다고
공식만 암기하면서 공부해서는 안 됩니다.
개념을 꼼꼼히 이해하고 각 개념의 필수 공식과 문제 유형들을
단계화된 문제를 통해서 정확히 익혀야 합니다.

자이스토리는 학교시험과 최신 학력평가 문제를
철저히 분석해 촘촘하게 유형을 분류하고 개념을 알맞게 적용시키는
세분화된 문제 유형 훈련으로 수학 기본 실력이 탄탄하게 다져집니다.
그래서 하루가 다르게 수학 성적이 향상됨을 느낄 수 있습니다.

또한, 자이스토리의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설,
다른 풀이, 톡톡 풀이, 쉬운 풀이 등은 수학 공부에
흥미와 성취감을 북돋아 줄 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

- 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 -



학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [22일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헛갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~54		월 일	월 일
2	55~80		월 일	월 일
3	B 01~41		월 일	월 일
4	42~73		월 일	월 일
5	C 01~31		월 일	월 일
6	32~57		월 일	월 일
7	D 01~36		월 일	월 일
8	37~64		월 일	월 일
9	65~89		월 일	월 일
10	E 01~41		월 일	월 일
11	42~70		월 일	월 일
12	F 01~41		월 일	월 일
13	42~70		월 일	월 일
14	G 01~45		월 일	월 일
15	46~77		월 일	월 일
16	H 01~42		월 일	월 일
17	43~77		월 일	월 일
18	I 01~40		월 일	월 일
19	41~67		월 일	월 일
20	모의 A, B, C		월 일	월 일
21	모의 D, E, F		월 일	월 일
22	모의 G, H, I		월 일	월 일



- 나는 _____ 대학교 _____ 학과 _____ 학년이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) - 도끼를 갈아 비늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)



집필진 · 감수진 선생님들



자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환	대전 대성여자고등학교	신현준	안양 신성고등학교	장영환	제주 제로링수학교실	황광희	시흥 시흥고등학교
김대식	하남 하남등학교	윤장노	안양 신성고등학교	장철희	서울 보성고등학교	수경 수학 컨텐츠 연구소	
민경도	서울 강남 종로학원	이종석	일등급 수학 저자	전경준	서울 풍문고등학교		
박소희	안양 안양외국어고등학교	이창희	THE 다원교육	조승원	수원 경기과학고등학교		
박숙녀	아산 충남삼성고등학교	위경아	서울 강남대성기숙의대관	지강현	안양 신성고등학교		
배수나	서울 가인아카데미	장광걸	김포 김포외국어고등학교	홍지연	부산대학교 수학 박사 과정		
신명선	안양 신성고등학교	장경호	오산 운천고등학교	홍지우	안양 평촌고등학교		

개념&문제 풀이
강의 선생님
유튜브 채널



‘셀프수학’

[다른 풀이 집필]

김기웅	구미 브리튼 영어수학학원	문선영	서울 로드맵수학학원	성지희	파주 snt수학학원	이상협	인천 마스터수학학원
김우진	세종 정진수학학원	박혜린	전주 싸이매스수학교육학원	이상구	익산 이일여자고등학교	조은영	김포 고려수학

[특별 감수진]

박우혁	광주 종로학원/원픽학원	유재영	안성 경기창조고등학교	장용준	의정부 상우고등학교
박주현	서울 장훈고등학교	이용환	원주 원주여자고등학교	최선락	서울 중계수학의중심학원
신창훈	광주 송원고등학교	이윤희	인천 송덕여자중학교		
양해영	서울 청출어람학원	이준형	사천 사천고등학교		

[감수진]

강동은	서울 반포세정학원	방성익	시흥 초고수수학학원	이태권	대구 보담학원
강연호	고양 일산유트엠수학학원	배민정	부산 진구엠제이수학학원	이현석	서울 강서골수학
곽경은	인천 쫄예듀학원	백은지	부산 백퍼센트수학학원	이현재	세종 물입수학전문학원
권용식	광주 와이엠수학전문학원	서상현	서울 베타수학	장민희	청주 아인학원
김기덕	서울 메가매쓰수학학원	서영덕	진주 탑앤티학원	장성인	부산 노마드수학전문학원
김봉섭	부산 한수위수학전문학원	서예지	군포 고밀도학원	전준혁	서울 카이만수학학원
김선화	광주 풍암필즈수학학원	서원준	서울 잠실시그마수학학원	정영진	수원 공부의자신감학원
김슬기	대전 매쓰플랜수학학원반석	서한삼	광주 퍼스트수학학원	조형두	서울 잇올스파르타대치센터
김윤경	구리 국빈수학학원	신정식	서울 미래탐구오목캠퍼스	주태빈	군포 산본수학을권하다학원
김주진	전주 M진수학학원	신진아	양평 에듀셀파기숙학원/남양주 신수학	채필국	인천 루원로드맵수학학원
김 준	인천 쫄예듀학원	양다훈	인천 루원로드맵수학학원	최세남	서울 엑시엄수학학원
김지훈	서울 까공수학	여원구	제주 피드백수학전문학원	최은미	서울 위플라이수학
김태은	웅인 수지수학의아침	유두열	파주 열린학원	최정은	대구 수본수학학원
김현석	서울 1타수학목동관학원	윤지원	인천 송도일프로팀수학	홍성문	시흥 홍성문수학학원
김홍만	울산 멘토링단과학원	윤현선	목포 채움수학학원	홍성주	서울 목동구매쓰수학
남인제	대구 미쓰매쓰수학학원	윤희용	부천 매트릭스학원	황선아	수원 서너수학
렴영순	인천 이팀교육학원	이경수	부산 경수학		
류세정	대전 피툰치드수학학원	이기용	제주 재동학원		
박경수	서울 제이엑스학원	이성준	대구 공감수학학원		
박미옥	목포 폴리야학원	이세연	의정부 에이스인학원		
박소영	대전 둔산깊은생각	이승현	고양 일산공수학M학원		
박시현	청주 성호학원	이유환	부산 이유환수학학원		
박신태	수원 디엘수학전문학원	이준석	서울 이가수학학원		
박영언	의정부 멘토학원	이창길	광주 이창길수학학원		
박종범	웅인 상현돌격수학학원	이충열	인천 루원로드맵수학학원		

[My Top Secret 집필]

곽지훈	서울대 수학교육과
김진형	서울대 약학과
정서린	서울대 약학과
정호재	서울대 경제학부
황대운	서울대 수리과학부

차 례 [총 67개 유형 분류]



I 경우의 수

A 여러 가지 순열 - 9개 유형 분류

핵심 개념 정리	10
개념 확인 문제	11
수능 유형별 기출 문제	12
1등급 마스터 문제	23
동아리 소개 / 서울대 GLEAP	24

B 중복조합 - 7개 유형 분류

핵심 개념 정리	26
개념 확인 문제	27
수능 유형별 기출 문제	28
1등급 마스터 문제	36

C 이항정리 - 6개 유형 분류

핵심 개념 정리	40
개념 확인 문제	41
수능 유형별 기출 문제	42
1등급 마스터 문제	47
동아리 소개 / 고려대 Korea Tigers	48

II 확률

D 여러 가지 확률 - 8개 유형 분류

핵심 개념 정리	50
개념 확인 문제	51
수능 유형별 기출 문제	52
1등급 마스터 문제	65

E 조건부확률 - 4개 유형 분류

핵심 개념 정리	68
개념 확인 문제	69
수능 유형별 기출 문제	70
1등급 마스터 문제	81

F 독립시행의 확률 - 9개 유형 분류

핵심 개념 정리	84
개념 확인 문제	85
수능 유형별 기출 문제	86
1등급 마스터 문제	98

III 통계

G 이산확률분포 - 9개 유형 분류

핵심 개념 정리	100
개념 확인 문제	101
수능 유형별 기출 문제	102
1등급 마스터 문제	113
동아리 소개 / 연세대 Glee Club	114

H 연속확률분포 - 6개 유형 분류

핵심 개념 정리	116
개념 확인 문제	117
수능 유형별 기출 문제	118
1등급 마스터 문제	129
동아리 소개 / 카이스트 KAKI	130

I 통계적 추정 - 9개 유형 분류

핵심 개념 정리	132
개념 확인 문제	133
수능 유형별 기출 문제	134
1등급 마스터 문제	148

내신+수능 대비 단원별 모의고사

A 여러 가지 순열 (10문항)	150
B 중복조합 (11문항)	152
C 이항정리 (11문항)	154
D 여러 가지 확률 (12문항)	156
E 조건부확률 (11문항)	158
F 독립시행의 확률 (11문항)	160
G 이산확률분포 (9문항)	162
H 연속확률분포 (12문항)	164
I 통계적 추정 (10문항)	166

빠른 정답 찾기 168

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

‘셀프 수학’





세분화된 유형 문제 + 1등급 대비 문제로 내신 1등급 완성

1 핵심 개념 정리 - 쉽게 이해되는 개념과 공식

고2 수학의 각 단원에서 가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념을 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 강의하였습니다.

- **중요도** ★★★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- **+개념보충, 한걸음 더, 왜 그럴까?** : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- **출제** : 2024 수능과 2025 대비 평가원 출제 경향 분석

3 유형별 기출 문제 - 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 출제 유형을 촘촘하게 세분화하여 유형순, 개념순, 난이도순으로 문항을 배열하였습니다.

- **tip** : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.

- **QR코드** :  유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.



개념 강의

중요도 ★★★★★

1 원순열 - 유형 01-02

서로 다른 n 개에서 k 개를 뽑아 일렬로 나열하는 것을 n 개에서 k 개를 뽑는 순열이라 한다.

(1) 원순열 : 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열

(2) 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

예 서로 다른 3개를 나열

서로 다른 3개를 나열	서로 다른 3개를 원형으로 배열	차이점
세 개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하면 ABC CAB BCA ACB BAC CBA	세 개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하면 321과 같은 경우 A B C B C A C A B	회전시켰을 때, 서로 같은 경우 존재하므로 일렬 나열하는 것과는 구분해야 한다.
순열의 수는 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$	같은 경우가 3개씩 있으므로 원순열의 수는 $\frac{3!}{3} = (3-1)! = 2! = 2$	(원순열의 수) $= \frac{(순열의 수)}{n}$

(3) 다각형 모양의 타자에 둘러앉는 경우의 수

① 정다각형 모양의 타자 : n 명이 정다각형 모양의 타자에 한 번에 k 명씩 앉는 경우의 수는 $k \times (n-1)!$

예 정다각형 모양의 타자에 둘러앉는 경우

정다각형	한 번에 2명이 앉을 수 있는 경우	한 번에 3명이 앉을 수 있는 경우
(1) 정삼각형 모양의 타자에 둘러앉는 한 가지 경우 중 서로 다른 경우		



수능 유형별 기출 문제

[2점, 3점, 쉬운 4점] PATTERN PRACT

1 원순열

유형 01 원순열

(1) 원순열 : 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열

(2) 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수

$\frac{n!}{n} = (n-1)!$

tip 원순열의 경우 회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보기 때문에 회전하는 경우를 단순한 나열로 생각하기 위해서 한 자리를 고정시키고 그 후에 나머지를 일렬로 배열하는 경우로 접근해야 한다.

A26 ★★★★★ 2023실시 3월 학평 확률 24

5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자 둘레에 둘러앉는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 간주)

① 16 ② 20 ③ 24

④ 28 ⑤ 32

A27 ★★★★★ 2021대비(나) 9월 모평 14

다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와

- **유형 분류** :  **반출** - 시험에서 자주 출제되는 유형입니다.
- **고난도** :  **고난도** - 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- **대표** : 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.

- **난이도** :  - 기본 문제  - 중급 문제
-  - 중상급 문제

2 개념 확인 문제 - 개념에 대한 이해도 확인 문제

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지 확인할 수 있는 개념 이해 필수 문제를 수록하였습니다.

1 원순열

[A01-03] 부모와 4명의 자녀로 구성된 6명의 가족이 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 다음을 구하시오.

A01 탁자에 둘러앉는 방법의 수

A02 부모가 이웃하여 앉는 방법의 수

A03 부모가 서로 마주 보고 앉는 방법의 수

2 중복순열

[A04-07] 다음을 구하시오.

A04 :II; **A05** :II;

A06 :II; **A07** :II;

A08 서로 다른 편지 3개를 서로 다른 우체통 4개에 넣는 경우의 수를 구하시오.

A09 5명의 학생이 각각 A, B, C 세 개의 교실 중 한 교실을 택하는 경우의 수를 구하시오.

A10 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 자연수를 만들려고 할 때, 네 자리 자연수의 개수를 구하시오.

3 같은 것이 있는 순열

[A15-17] 1, 2, 2, 3, 3의 다섯 개의 숫자 중에서 4자리수를 만들 때, 다음을 구하시오.

A15 다섯 자리 자연수의 개수

A16 다섯 자리 자연수 중 짝수의 개수

A17 다섯 자리 자연수 중 홀수의 개수

[A18-20] 7개의 기호 ▲, ▽, ▲, ▽, ■, ■, ▲, ▽를 일 다음을 구하시오.

A18 일렬로 배열하는 경우의 수

A19 양 끝에 ■이 놓이도록 배열하는 경우의 수

A20 ▽이 ▲보다 반드시 앞에 오도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.

[A21-23] 그림과 같은 도로망이 있다. 다음을 구하

4 내신+수능 대비 단원별 모의고사 - 최종 실력 점검

중단원별 학교 시험 필수 문제와 수능형 문항, 서술형 문항을 수록하여 학교시험을 더욱 충실히 대비할 수 있습니다.



내신+수능 대비 단원별 모의고사

A 여러 가지 순열

모의 A01 ★★★★★ 2020실시(가) 4월 학평 25(고3)

그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A학교 학생 2명, B학교 학생 2명, C학교 학생 3명이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A학교 학생 2명이 서로 이웃하여 앉고 B학교 학생 2명도 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은

모의 A03 ★★★★★

그림과 같이 직사각형 모양의 탁자 둘레에 6개의 의자가 놓여 있다. 이때, 6명의 가족이 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 간주)



5 1등급 마스터 문제 - 대비 문제로 1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다.

*** - 상급 문제

2등급 대비 : 정답률이 20~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는데 도움이 되는 고난도 문제

1등급 대비 : 정답률이 20% 미만인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제

1 등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

G76 *** 2007대(가) 수능 30(고3) [1등급 대비 + 2등급 대비]

어느 공장에서 생산되는 제품은 한 상자에 50개씩 넣어 판매되는데, 상자에 포함된 불량품의 개수는 이항분포를 따르고 평균이 m , 분산이 $\frac{48}{25}$ 이라 한다. 한 상자를 판매하기 전에 불량품을 찾아내기 위하여 50개의 제품을 모두 검사하는데 총 60000원의 비용이 발생한다. 검사하지 않고 한 상자를 판매할 경우에는 한 개의 불량품에 a 원의 애프터서비스 비용이 필요하다. 한 상자의 제품을 모두 검사하는 비용과 애프터

G77 2등급 대비 2010대(나) 9월 모평 161
한 개의 등전을 한 번 던지는 시행을 5번 반복한 각 시행에서 나온 결과에 대하여 다음 규칙에 따라 작성한다.
(가) 첫 번째 시행에서 앞면이 나오면 Δ , 뒷면

6 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설

문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실하게 알려줍니다.

단서+발상
단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

단서+발상
단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특장
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

7 입체 침삭 해설!

정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

정답률
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 해킹
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

생생채택
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시합니다.

핵심 단서
문제를 푸는데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빼먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 특독 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.



① 개념 이해를 체크할 수 있는 개념 확인 문제 [186제]

개념 하나하나에 대한 맞춤 확인 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초실력을 쌓도록 구성하였습니다.

② 학력평가 기출 문제+수능 유형 완전 정복 문제 [67유형, 문제 550제]

- 고2 난이도에 맞는 고3 수능+평가원+학력평가 문제 선별 수록 [547제]
- 2018~2008 고1, 2 학력평가 문항 중에서 교육과정에 꼭 맞는 문제 선별 수록 [3제]

③ 학교시험+수능 대비를 위한 수능 기출 변형 문제 [28제]

수능에 적합한 개념과 공식을 이해하고 활용할 수 있도록 수능 기출 문제를 변형하여 추가 수록하였습니다.

4 내신+수능 단원별 모의고사 [기출 문제 + 수능 기출 변형 문제 97제]

각 단원에 출제 빈도가 높은 문제를 최신 출제 경향에 따라 구성하였습니다.

[고2 확률과 통계 문항 구성표]

	고3(대비 연도) - 고2 난이도 수준							
연도	3월 학평	4, 5월 학평	6월 모평	7월 학평	9월 모평	10월 학평	수능	합계
2025	3	2	3	3	0	0	0	11
2024	6	2	6	1	4	1	4	24
2023	6	5	6	5	2	2	2	28
2022	5	4	7	7	6	3	5	37
2021	3	10	10	12	11	7	13	66
2020	0	3	4	4	8	6	11	36
2019	1	1	8	5	8	7	9	39
2018	1	2	4	4	9	9	9	38
2017	0	0	6	7	6	7	7	33
2017이전	13	10	15	19	62	36	60	215
2022, 2014, 2005 대비 예비 평가 수록 문항 수								13
고1, 2 학력평가 문항 수								3
수능 기출 변형 문제 수록 문항 수(67개 유형 수능 기출 변형 문제)								28
개념 확인 문제 수록 문항 수								186
총 수록 문항 수								757



여러 가지 순열

★ 유형 차례



유형 01 원순열

유형 02 원순열을 이용하여 색칠하는 방법의 수 구하기

유형 03 자연수의 개수와 중복순열



유형 04 나열과 중복순열



유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열

유형 06 같은 것이 있는 수의 나열로 만든 자연수의 개수



유형 07 배분과 같은 것이 있는 순열



유형 08 도로망에서 최단 경로의 이해

유형 09 도로망에서 최단 경로의 응용



★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2025	수능		
	9월	유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	***
	6월	유형 01 원순열	***
		유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	***
2024	수능	유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	***
	9월	유형 08 도로망에서 최단 경로의 이해	***
	6월	유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	***
2023	수능	유형 03 자연수의 개수와 중복순열	* **
	9월	출제되지 않음	
	6월	유형 04 나열과 중복순열	* **
		유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	***

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 확률과 통계에서 배우는 순열은 고1 수학에서 배운 순열의 확장 개념이므로 여러 가지 순열을 학습하기 전에 다시 한 번 고1 과정의 순열의 개념과 공식을 확인해야 한다.
- 문제의 의미만 잘 파악하면 어려운 단원은 아니지만 문장제 문제 유형이 대다수인 단원이기 때문에 체감난이도가 높아 다수의 문항으로 연습하는 것이 중요하다.
- 문제에 주어진 조건에서 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열 중 어떤 것을 이용해야 하는지 빠르게 파악할 수 있도록 여러 문제를 풀어보며 습득한다.
- 문제에서 규칙을 직접 찾아 원순열이나 중복순열의 개념과 연결하여 복합적으로 문제를 푸는 고난도 문제를 대비해야 한다.



A

여러 가지 순열

개념 강의



중요도 ★★★★★

1 원순열 - 유형 01~02

서로 다른 n 개에서 r 개를 뽑아 일렬로 나열하는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 순열이라 한다.

(1) 원순열 : 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열

(2) 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

출제 2025 6월 모평 27번

★ 특정한 두 의자가 서로 이웃하지 않도록 원형으로 배열하는 경우의 수를 원순열을 이용하여 구하는 중하 난이도의 문제가 출제되었다.

왜 그럴까?

1 서로 다른 n 개를 일렬로 나열한 것을 원형으로 배열하면 같은 것이 n 가지씩 있으므로 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}$ 이다.

예	서로 다른 3개를 나열	서로 다른 3개를 원형으로 배열 ^②	차이점
세 개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하면 ABC CAB BCA ACB BAC CBA	세 개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하면 3가지가 같은 경우	회전시켰을 때, 서로 같은 경우가 존재하므로 일렬로 나열하는 것과는 구분해야 한다.	
순열의 수는 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$	같은 경우가 3개씩 있으므로 원순열의 수는 $\frac{3!}{3} = (3-1)! = 2! = 2$	(원순열의 수) $= \frac{(\text{순열의 수})}{n}$	

+개념 보충

2 원순열에서 회전하여 일치하는 배열은 모두 같은 것으로 본다. 따라서 한 번 나열한 경우에 대하여 그 순서대로 자리를 오른쪽으로 1칸씩, 2칸씩, ..., n 칸씩 회전시켰을 때, 같은 경우를 반드시 따져주어 전체 경우를 n 으로 나눠 주어야 한다.

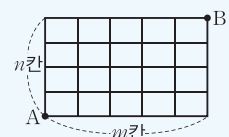
왜 그럴까?

3 다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수
생각하자. 원순열에 의해 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 일단 $(n-1)!$ 이다. 그러나 실제로는 원형이 아니라 다각형 모양의 탁자이므로 탁자의 모양에 의하여 서로 다른 경우가 존재할 수 있다. 이때, 탁자에 둘러앉는 경우를 하나 생각하고, 그 경우에서 서로 다른 경우가 존재하도록 앉힌 사람들을 회전시키면 된다.

4 단순히 회전시켰을 때,
① → ② → ③ → ④ → ⑤ → ⑥으로 같은 경우이지만 직사각형 탁자에 앉혔으므로
(1) 직사각형의 세로에 ①이 앉은 경우
(2) 직사각형의 가로 왼쪽에 ①이 앉은 경우
(3) 직사각형의 가로 오른쪽에 ①이 앉은 경우
가 모두 다른 경우이다.

+개념 보충

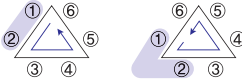
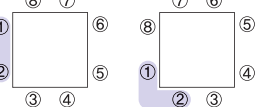
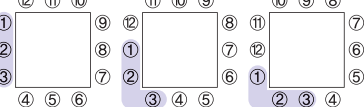
5 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 방법의 수



가로로 m 칸, 세로로 n 칸인 경로일 때 같은 것이 각각 m 개, n 개 있는 것을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다. 즉, A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 방법의 수는 $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

(3) 다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수

① 정다각형 모양의 탁자 : n 명이 정다각형 모양의 탁자에 한 변에 k 명씩 앉는 경우의 수는 $k \times (n-1)!$

예	정다각형	한 변에 2명이 앉을 수 있는 경우	한 변에 3명이 앉을 수 있는 경우
(i) 정삼각형 모양의 탁자에 배열하는 한 가지 경우 중 서로 다른 경우			
(ii) 정사각형 모양의 탁자에 배열하는 한 가지 경우 중 서로 다른 경우			

② 직사각형 모양의 탁자 : (회전시켰을 때, 겹치지 않는 경우의 수) $\times$ (원순열의 수)
직사각형을 대각선으로 나눈 뒤, 그 절반의 자리 수

예	직사각형	한 변에 6명이 앉을 수 있는 경우 [㉠]
배열하는 한 가지 경우 중 서로 다른 경우		

2 중복순열 - 유형 03~04

(1) 중복순열 : 중복을 허락하여 만든 순열

(2) 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 순열의 수는 $n \Pi r = n^r$
세 문자 A, B, C를 중복을 허락하여 5개를 택하는 순열의 수는 $3 \Pi 5 = 3^5$ 이다.

3 같은 것이 있는 순열^⑥ - 유형 05~09

n 개 중에서 서로 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때 n 개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\dots r!} \quad (\text{단, } p+q+\dots+r=n)$$

1, 1, 2, 2, 2의 5개의 숫자를 모두 나열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 10이 2개, 2가 3개 있으므로 $\frac{5!}{2!3!}$ 이다.

출제 2025 9월 모평 23번
2025 6월 모평 23번
2024 수능 23번

★ 6월, 9월, 2024 수능 모두 같은 것이 있는 순열을 이용하여 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하는 아주 쉬운 문제가 출제되었다.

**1 원순열**

[A01~03] 부모와 4명의 자녀로 구성된 6명의 가족이 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 다음을 구하시오.

A01 탁자에 둘러앉는 방법의 수

A02 부모가 이웃하여 앉는 방법의 수

A03 부모가 서로 마주 보고 앉는 방법의 수

2 중복순열

[A04~07] 다음을 구하시오.

A04 ${}_2\Pi_2$

A05 ${}_4\Pi_2$

A06 ${}_3\Pi_4$

A07 ${}_2\Pi_5$

A08 서로 다른 편지 3개를 서로 다른 우체통 4개에 넣는 경우의 수를 구하시오.

A09 5명의 학생이 각각 A, B, C 세 개의 교실 중 한 교실을 택하는 경우의 수를 구하시오.

A10 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 자연수를 만들려고 할 때, 네 자리 자연수의 개수를 구하시오.

[A11~14] 다음 경우의 수를 구하시오.

A11 두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{A, B\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수

A12 두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{A, B, C\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수

A13 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{A, B, C, D\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수

A14 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{A, B, C\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수

3 같은 것이 있는 순열

[A15~17] 1, 2, 2, 3, 3의 다섯 개의 숫자 중에서 다섯 자리 자연수를 만들 때, 다음을 구하시오.

A15 다섯 자리 자연수의 개수

A16 다섯 자리 자연수 중 짝수의 개수

A17 다섯 자리 자연수 중 홀수의 개수

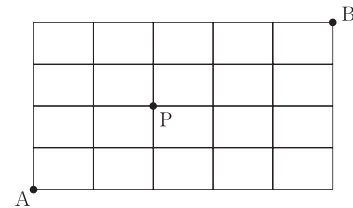
[A18~20] 7개의 기호 ▲, ▽, ▲, ■, ■, △, ■을 일렬로 배열할 때, 다음을 구하시오.

A18 일렬로 배열하는 경우의 수

A19 양 끝에 ■이 놓이도록 배열하는 경우의 수

A20 ▽이 ▲보다 반드시 앞에 오도록 배열하는 경우의 수

[A21~23] 그림과 같은 도로망이 있다. 다음을 구하시오.



A21 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수

A22 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수

A23 A지점에서 출발하여 P지점을 지나지 않고 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수



1 원순열

유형 01 원순열

- (1) 원순열 : 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열
(2) 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

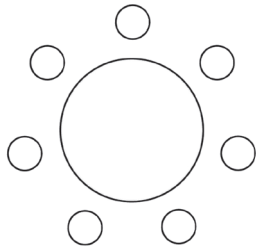
tip

원순열의 경우 회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보기 때문에 회전하는 경우를 단순한 나열로 생각하기 위해서 한 자리를 고정시키고 그 후에 나머지를 일렬로 배열하는 경우로 접근해야 한다.

A24 대표 2022실시 3월 학평 확통 25(고3)



A 학교 학생 5명, B 학교 학생 2명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, B 학교 학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



- ① 320 ② 360 ③ 400
④ 440 ⑤ 480

A25 2024실시 3월 학평 확통 25(고3)



남학생 5명, 여학생 2명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

- ① 200 ② 240 ③ 280
④ 320 ⑤ 360

A26 2023실시 3월 학평 확통 24(고3)



5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

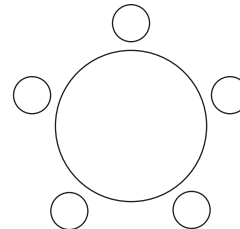
- ① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

A27 2021대비(나) 9월 모평 14(고3)



다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는?

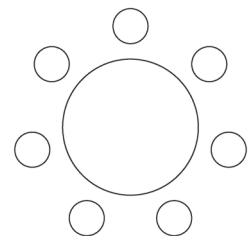
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)



- ① 180 ② 200 ③ 220
④ 240 ⑤ 260

A28 2021대비(나) 6월 모평 12(고3)

1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



- ① 96 ② 100 ③ 104
④ 108 ⑤ 112



1등급 마스터 문제

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A

A77 *** 2021실시 3월 학평 확통 30(고3)



숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. (4점)

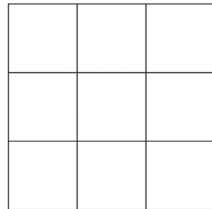
- (가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.
- (나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

[1등급 대비 + 2등급 대비]

A78 ★ 1등급 대비 2020실시(가) 3월 학평 27(고3)



오른쪽 그림과 같이 합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다. 빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.



- (가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.
- (나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.
- (다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다.

색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k \times 7!$ 이다. k 의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

A79 ★ 1등급 대비 2016실시(가) 10월 학평 30(고3)



1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i 번째($i=1, 2, \dots, 9$) 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i 라 하자. $1 < p < q < 9$ 인 두 자연수 p, q 에 대하여 a_i 가 다음 조건을 만족시킨다.

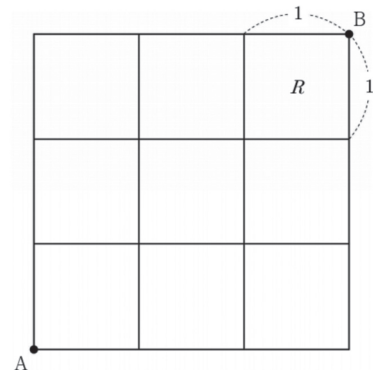
- (가) $1 \leq i < p$ 이면 $a_i < a_{i+1}$ 이다.
- (나) $p \leq i < q$ 이면 $a_i > a_{i+1}$ 이다.
- (다) $q \leq i < 9$ 이면 $a_i < a_{i+1}$ 이다.

$a_1=2, a_p=8$ 인 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) (4점)

A80 ★ 2등급 대비 2020실시(나) 4월 학평 29(고3)



그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R 와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다.



이 도로망을 따라 최단거리로 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 다시 A 지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (4점)

- (가) 정사각형 R 의 네 변을 모두 지나야 한다.
- (나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R 뿐이다.



모의

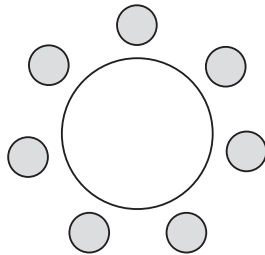
A01



2020실시(가) 4월 학평 25(고3)



그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A학교 학생 2명, B학교 학생 2명, C학교 학생 3명이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A학교 학생 2명이 서로 이웃하여 앉고 B학교 학생 2명도 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



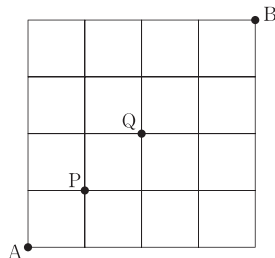
모의

A02



2010실시(가) 4월 학평 30(고3)

그림과 같이 직사각형으로 이루어진 도로망이 있다. A지점에서 B지점까지 최단거리로 갈 때, P와 Q 두 지점을 모두 지나는 경로의 수를 구하시오. (2점)

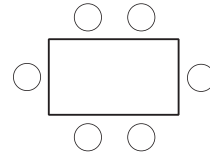


모의

A03



그림과 같이 직사각형 모양의 탁자 둘레에 6개의 의자가 놓여 있다. 이때, 6명의 가족이 의자에 앉는 방법의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (2점)



① 180

② 240

③ 300

④ 360

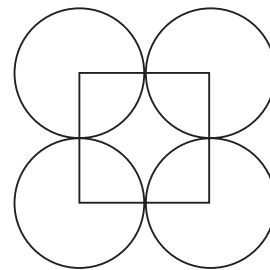
⑤ 420

모의

A04



그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 4개와 이 네 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정사각형이 있다. 원의 내부 또는 정사각형의 내부에 만들어지는 9개의 영역에 서로 다른 9가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



① $\frac{9!}{3}$

② $\frac{9!}{4}$

③ $\frac{9!}{5}$

④ $\frac{8!}{3}$

⑤ $\frac{8!}{4}$

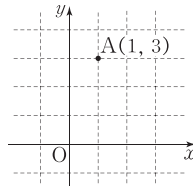
모의

A05 * * *

2004실시(가) 3월 학평 29(고3)



좌표평면 위에서 상하 또는 좌우방향으로 한번에 1만큼씩 움직이는 점 P가 있다. 이때, 원점을 출발한 점 P가 6번 움직여서 최종 위치가 점 A(1, 3)이 되는 경우의 수를 구하시오. (4점)



모의

A06 * * *

2007실시(가) 5월 학평 29(고3)

7명의 학생이 양로원으로 봉사활동을 갔다. 청소 도우미 2명, 빨래 도우미 2명, 식사 도우미 3명으로 역할을 나누려고 할 때, 가능한 방법의 수는? (4점)

- ① 105 ② 210 ③ 315
④ 420 ⑤ 630

모의

A07 * * *

2011대비(나) 9월 모평 27(고3)

지수는 다음 규칙에 따라 월요일부터 금요일까지 5일 동안 하루에 한 가지씩 운동을 하는 계획을 세우려 한다.

- (가) 5일 중 3일을 선택하여 요가를 한다.
(나) 요가를 하지 않는 2일 중 하루를 선택하여 수영,
줄넘기 중 한 가지를 하고, 남은 하루는 농구, 축구
중 한 가지를 한다.

지수가 세울 수 있는 계획의 가짓수는? (3점)

- ① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

모의

A08 * * *

2010대비(가) 6월 모평 27(고3)



두 문자 a, b 를 중복을 허락하여 만든 6자리 문자열 중에서 다음 조건을 만족시키는 문자열의 개수는? (3점)

- (가) 첫 문자는 a 이다.
(나) a 끼리는 이웃하지 않는다.

- ① 16 ② 14 ③ 12
④ 10 ⑤ 8

모의

A09 * * *

2015실시(B) 10월 학평 18(고3)



다음 조건을 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는?

(4점)

- (가) 각 자리의 수의 합은 14이다.
(나) 각 자리의 수는 모두 홀수이다.

- ① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

서술형

모의

A10 * * *

학생 7명을 A팀과 B팀으로 나누어 다음 표와 같이 팀장과 팀원을 배정할 때 가능한 모든 방법의 수를 구하시오.

(단, 7명은 팀장이나 팀원의 역할을 한다.) (12점)

	팀장	팀원
A팀	1명	2명
B팀	2명	2명



A 여러 가지 순열



개념 확인 문제

A 01 정답 120 *원순열

$$(6-1)! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

A 02 정답 48 *원순열

부모를 한 사람으로 생각하면 자녀 4명과 함께 모두 5명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 것이므로 $(5-1)! = 4!$ 이고, 부모가 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 구하는 방법의 수는 $4! \times 2! = 48$

A 03 정답 24 *원순열

부모를 서로 마주 보게 앉혀 놓고 자녀 4명을 앉히면 되므로 구하는 방법의 수는 $4! = 24$

A 04 정답 4 *중복순열

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

A 05 정답 16 *중복순열

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

A 06 정답 81 *중복순열

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

A 07 정답 32 *중복순열

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

A 08 정답 64 *중복순열

서로 다른 편지 3개를 서로 다른 우체통 4개에 넣는 경우의 수는 서로 다른 4개의 우체통에서 편지를 넣은 3개의 우체통을 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

A 09 정답 243 *중복순열

서로 다른 3개 중 중복을 허락하여 5개를 선택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

A 10 정답 500 *중복순열

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 그 경우의 수는 4이고, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 각각 0, 1, 2, 3, 4가 모두 올 수 있으므로 그 경우의 수는 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$
따라서 구하는 자연수의 개수는 $4 \times 125 = 500$

A 11 정답 4 *중복순열

두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{A, B\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수는 Y 의 원소 A, B의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X 의 원소 1, 2에 대응시키면 된다. 따라서 구하는 함수의 개수는 ${}_2\Pi_2 = 4$

A 12 정답 9 *중복순열

두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{A, B, C\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수는 Y 의 원소 A, B, C의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X 의 원소 1, 2에 대응시키면 된다. 따라서 구하는 함수의 개수는 ${}_3\Pi_2 = 9$

A 13 정답 64 *중복순열

두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{A, B, C, D\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수는 Y 의 원소 A, B, C, D의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X 의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다. 따라서 구하는 함수의 개수는 ${}_4\Pi_3 = 64$

A 14 정답 81 *중복순열

두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{A, B, C\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수는 Y 의 원소 A, B, C의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다. 따라서 구하는 함수의 개수는 ${}_3\Pi_4 = 81$

A 15 정답 30 *같은 것이 있는 순열

1, 2, 2, 3, 3의 5개의 자연수를 일렬로 배열하므로

$$\text{구하는 개수는 } \frac{5!}{2!2!} = 30$$

A 16 정답 12 *같은 것이 있는 순열

다섯 자리 자연수가 짝수가 되려면 일의 자리의 숫자가 2가 되어야 하므로 앞의 네 자리에는 나머지 4개의 숫자 1, 2, 3, 3의 4개의 자연수를 일렬로 배열하면 된다. 따라서 구하는 개수는 $\frac{4!}{2!} = 12$

A 17 정답 18 *같은 것이 있는 순열

(i) 끝 자리가 1인 다섯 자리 자연수인 경우

$\square\square\square\square 1$ 에서 빈 자리에 4개의 숫자 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열을 이용하면 $\frac{4!}{2!2!} = 6$

(ii) 끝 자리가 3인 다섯 자리 자연수인 경우

$\square\square\square\square 3$ 에서 빈 자리에 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열을 이용하면 $\frac{4!}{2!} = 12$

(i)~(ii)에 의하여 $6 + 12 = 18$

A 18 정답 420 *같은 것이 있는 순열

같은 것인 ▲이 2개, ■이 3개 있으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 1} = 420$$

A 19 정답 60 *같은 것이 있는 순열
 양 끝에 ■을 먼저 놓고, 나머지 5개인 ▲, ▽, ▲, △, ■을 일렬로 배열
 하면 되므로 구하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$

A 20 정답 140 *같은 것이 있는 순열
 ▽과 ▲을 같은 문자로 생각하고 ▲, ▲, ▲, ■, ■, △, ■을 일렬로 배
 열하면 되므로 구하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!3!}=\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}=140$

A 21 정답 126 *최단 경로
 가로 5칸, 세로 4칸이므로 $\frac{9!}{5!4!}=126$

A 22 정답 60 *최단 경로
 A → P : 가로 2칸, 세로 2칸, P → B : 가로 3칸, 세로 2칸
 $\therefore \frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{3!2!}=6 \times 10=60$

A 23 정답 66 *최단 경로
 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수에서 A지점
 에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를
 제외하면 되므로 $126-60=66$

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 24 정답 ⑤ *원순열 [정답률 75%]
 [정답 공식: B 학교 학생끼리 이웃하지 않도록 앉혀야 하므로 A 학교 학생을 먼저
 앉힌다.]

A 학교 학생 5명, B 학교 학생 2명이 일정한 간격을 두고
 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, B 학교 학생끼리는 이웃하지
 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은
 것으로 본다.) (3점)

단서 2 원순열의 문제에서는 중복되는 것만큼을
 나누어 주어야 하는 거 알지?

단서 1 서로 이웃하지 않게 앉히려면
 이웃해도 되는 학생을 먼저
 앉히고 그 사이사이에 이웃하지
 않게 앉히려는 학생을 앉히면 돼.

① 320 ② 360 ③ 400 ④ 440 ⑤ 480

1st 먼저 이웃해도 되는 A 학교 학생을 앉히자.
 A 학교 학생 5명을 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두
 둘러앉히면 $(5-1)! = 4! = 24$ → [원순열] 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는
 경우의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

2nd 사이사이에 B 학교 학생을 앉히자.
 A 학교 학생 사이에 B 학교 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는
 ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$ → A 학교 학생 5명이 앉아 있으면 그 사이사이에 다섯 자리가 있지?
 따라서 다섯 자리 중에서 B 학교 학생 2명이 앉을 두 자리를
3rd 경우의 수를 구하자. 선택하는 거야.
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 20 = 480$

다른 풀이: 전체 경우의 수에서 여사건의 수를 빼서 구하는 경우의 수
 여사건에 해당하는 경우의 수를 구하여 해당하는 경우의 수를 구해 보자.
 먼저 7명의 학생을 일정한 간격으로 앉히는 전체 경우의 수는
 $(7-1)! = 720$ → A 학교 학생 5명과 B 학교 학생 2명을 모두 합하면 총 7명이야.
 한편, B 학교 학생 2명을 이웃하도록 앉히는 경우의 수는
 $(6-1)! \times 2! = 240$
 B 학교 학생 2명을 한 명으로 보면 전체 학생은 6명이지만?
 이 6명을 앉힌 후에 B 학교 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수를 곱해야 해.
 따라서 구하는 경우의 수는
 $720 - 240 = 480$

주의 n 명을 묶어서 한 명으로 보면 반드시
 $n!(n$ 명이 자리 바꾸는 경우)을 곱해줘야 해!

수능 핵심
*** 복잡한 원순열의 수 구하기**
 7명이 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 특정한 2명은 이웃하지 않고 특정한
 3명은 이웃하도록 앉히는 경우는 다음과 같은 순서로 풀어 보자.
 (i) 이웃하지 않는 사람을 제외하고 남은 사람을 먼저 원형으로 배열하는
 경우의 수를 구한다.
 ⇒ 이웃하지 않는 2명을 제외한 5명 중 이웃하는 사람 3명을 1명으로
 생각하여 5명을 원형으로 배열하는 경우는 $(3-1)! = 2! = 2$ (가지)
 (ii) 이웃하는 사람끼리 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수를 구한다.
 ⇒ 3명을 일렬로 배열하는 경우이므로 $3! = 6$ (가지)
 (iii) 이웃하지 않는 사람을 앉히는 경우의 수를 구한다.
 ⇒ 5명이 앉은 자리 사이사이의 자리 중에서 이웃하지 않는 사람이 앉을 수
 있는 자리는 3자리이므로 이웃하지 않는 사람이 앉는 경우는
 ${}_3P_2 = 6$ (가지)
 (iv) 조건에 맞는 경우의 수를 구한다.
 ⇒ $2 \times 6 \times 6 = 72$ (가지)

A 25 정답 ② *원순열 [정답률 85%]
 [정답 공식: 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는
 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ 이다.]

남학생 5명, 여학생 2명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을
 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여
 앉는 경우의 수는?
단서 1 원순열을 구해야 해. **단서 2** 이웃한 여학생 2명을
 한 사람을 보고 원순열을
 구해보자.
 (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

① 200 ② 240 ③ 280
 ④ 320 ⑤ 360

1st 여학생 2명을 한 사람으로 보고 원순열의 수를 구해.
 여학생 2명을 한 사람으로 보면 6명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는
 경우의 수는 $(6-1)! = 5! = 120$ 이다.
 이때, 여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2! = 2$ 이므로
 구하는 경우의 수는
 $120 \times 2 = 240$

A 26 정답 ③ *원순열 [정답률 90%]

(정답 공식: 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(n-1)!$ 이다.)

단서 원 모양에 둘러 앉는 경우의 수를 구할 때는 원순열을 떠올리자.
5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

- ① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

1st 원 모양의 탁자에 모두 앉히는 경우의 수는 원순열로 구하자.

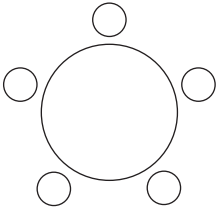
학생 5명을 원 모양의 탁자에 앉히는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(5-1)! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \rightarrow \text{서로 다른 5개에서 하나를 고정하면 나머지 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수이므로 } (5-1)! = 24$$

A 27 정답 ④ *원순열 [정답률 89%]

(정답 공식: 서로 다른 n 개를 일렬로 나열한 것을 원형으로 배열하면 같은 것이 n 가지씩 있으므로 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}$ 이다.)

단서 1 그림 A, B를 제외한 학생 6명 중에서 3명을 선택해야 해.
다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점) **단서 2** 서로 이웃하게 없을 때에는 하나로 묶어서 생각해야 해.



- ① 180 ② 200 ③ 220
④ 240 ⑤ 260

1st 먼저 학생을 선택하자.

8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하려면 8명 중에서 A, B를 제외한 나머지 6명의 학생 중에서 3명만 선택하면 되므로
6명 중에서 5명을 선택하지 않도록 주의해야 해.

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

주의 학생 수와 앉을 수 있는 의자 개수가 다르지? 원순열의 문제에서는 어떤 경우들이 서로 중복되어 나누어야 하는지를 명확히 알고 있어야 실수하지 않을 수 있어. 단순히 사람 수로 나누지 않도록 주의해.

2nd A, B를 이웃하게 앉히자.

A, B를 하나로 묶어서 총 4명을 원 모양의 탁자에 앉힌 후, A, B의 자리를 바꾸는 경우까지 생각하면 경우의 수는
 $(4-1)! \times 2 = 3! \times 2 = 12$

3rd 경우의 수를 구하자.

따라서 경우의 수에 대한 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
 $20 \times 12 = 240$ 이다.

* 원순열

개념 · 공식

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 한다.

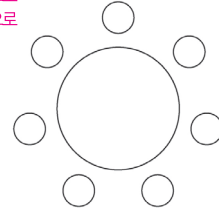
서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ 이다.

A 28 정답 ① *원순열 [정답률 80%]

(정답 공식: 1학년 학생과 2학년 학생을 각각 하나로 묶어 원순열의 수를 구한다.)

1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

단서 1학년 2명을 한 학생으로
2학년 2명을 한 학생으로
생각해.



- ① 96 ② 100 ③ 104
④ 108 ⑤ 112

1st 1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명을 각각 한 학생으로 생각하여 원형으로 배열하는 경우의 수를 구하자.

1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명을 각각 묶어서 한 학생으로 생각하면 전체 학생은 5명이다.

따라서 5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{5} = 4! = 24 \rightarrow n \text{개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는 } \frac{n!}{n}$$

2nd 1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 각각 자리를 바꾸는 경우의 수를 구하자.

1st 의 각각에 대하여 1학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2, 2학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

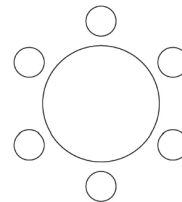
$$24 \times 2 \times 2 = 96$$

A 29 정답 ③ *원순열 [정답률 82%]

(정답 공식: 서로 다른 n 명을 원형으로 앉히는 경우의 수는 $\frac{{}_nP_n}{n} = (n-1)!$ 또는 $1 \times (n-1)!$ 이다.)

세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

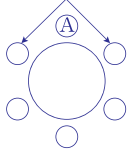
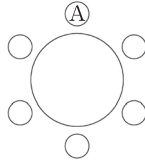
- (가) A와 B는 이웃한다. **단서** 이웃하는 것은 묶어서 하나로 생각하는 것이 보편적이지 않.
(나) B와 C는 이웃하지 않는다.



- ① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

1st A와 B를 이웃하여 앉히는 경우의 수를 구해.

우선 6개의 자리 중 하나에 A를 고정시켜 앉히고
서로 다른 6개의 자리에 A를 고정시키는 방법은 6가지의 경우지만
6가지의 경우가 모두 회전하면 같은 경우로 되므로 1가지
거기에 B를 A의 옆에 이웃하여 앉히는 경우는
2가지
B가 앉을 수 있는 자리는 2가지



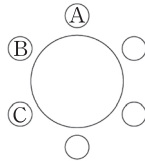
그 각각에 대하여 나머지 C, D, E, F를 앉힐 수 있으므로
"각각에 동시에 연달아"는 서로 다른 4명을 서로 다른 4개의 자리에 배열하는
곱의 법칙을 이용해. 방법의 수는 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

전체 경우의 수는

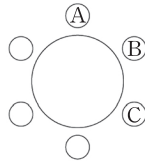
$$2 \times 4! = 48$$

2nd B와 C가 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하자.

A의 옆에 B가 이웃하여 앉고, B와 C도 이웃하는 경우는 다음과 같이
2가지 경우가 있다.



[그림 1]



[그림 2]

이 2가지 경우에 대하여 남은 3명 D, E, F를 각각 앉히면

[그림 1]에서 D, E, F를 배열하는 경우의 수는 $3! = 6$

[그림 2]에서 D, E, F를 배열하는 경우의 수는 $3! = 6$

이므로 B와 C가 이웃하는 경우의 수는

$$6 + 6 = 12$$

3rd A와 B가 이웃하고 B와 C는 이웃하지 않는 경우의 수를 구해.

조건 (나)에서 B와 C가 이웃하지 않는다고 했으므로

1st 의 경우의 수에서 **2nd** 의 경우의 수를 빼면

A와 B가 이웃하고 B와 C는 이웃하지 않는 경우의 수를 구할 수 있다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

$$48 - 12 = 36$$

다른 풀이: 조건 (가)를 만족시키도록 A, B를 앉힌 뒤 조건 (나)를
만족시키도록 C와, 나머지 사람을 앉히는 경우의 수 구하기

조건 (가)를 만족시키도록 A와 B를 앉히자.

A, B, C를 제외한 나머지 3명을 D, E, F라 하고, 조건 (가)에서 A와
B가 이웃하여 앉는다고 하였으므로 6개의 자리 중 하나에 A를 고정시
서로 다른 6개의 자리에 A가 앉는 방법은 6가지이지만 6가지의 경우가
모두 회전하면 같은 경우로 겹치게 되므로 1가지가 되는 거야.

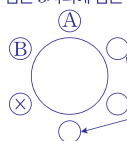
키고 그 양옆 자리 중 한 자리에 B를 앉히면 되므로 가능한 경우의 수는
2가지

조건 (나)를 만족시키도록 C를 앉힌 후 남은 3명을 앉히면 조건 (나)에서
B와 C가 이웃하지 않는다고 하였으므로 C는 A와 이웃한 B의 옆자리
를 빼고 남은 세 자리 중 하나에 앉고, 남은 D, E, F를 3개의 자리에 앉
히면 되므로 $3 \times 3!$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 3 \times 3! = 2 \times 18 = 36$$

연달아 일어나는 사건의 경우의 수는
곱의 법칙을 이용해.

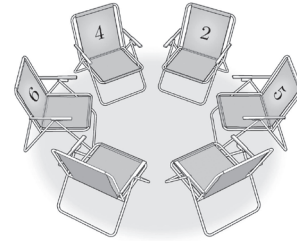


C가 앉을 수 있는 경우는
3가지

A 30 정답 ① *원순열 [정답률 74%]

정답 공식: 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는
 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ 이다.

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다.
이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때,
서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되지 않도록
배열하는 경우의 수는? **단서** 1부터 6까지의 자연수 중에서 두 수의 합이
11이 되는 경우는 $5+6=11$ 로 유일해.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



- ① 72 ② 78 ③ 84
④ 90 ⑤ 96

1st 모든 경우의 수를 구하자.

6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 모든 경우의 수는
 $(6-1)! = 5! = 120$

2nd 조건을 만족시키지 않는 경우의 수를 구하자.

이 중에서 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의

합이 11이 되는 경우는 $5+6=11$ 인 경우 뿐이다.

두 수의 합이 11이 되지 않는 경우가 너무 많으므로 여사건으로 조건을 만족시키지 않는 경우를 확인해.

이때의 경우는 5, 6이 적혀 있는 의자가 서로 이웃한 경우이므로

그 경우의 수는

$$2 \times (5-1)! = 2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

5, 6이 적힌 의자를 하나의 의자로 묶어 $(5-1)!$ 로 생각할 수 있고

5, 6이 적힌 의자를 배열하는 경우의 수는 2이므로 2를 곱해야 해.

3rd 여사건을 이용하여 구하는 경우의 수를 구하자.

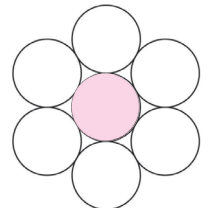
따라서 구하는 경우의 수는

$$120 - 48 = 72$$

A 31 정답 840 *원순열을 이용하여 색칠하는 방법의 수 구하기 ... [정답률 77%]

정답 공식: 중앙 부분에 칠할 색을 정하고 나머지 6가지 색을 이용하여 나머지 원
을 칠하는 경우의 수는 원순열을 이용하여 정한다.

그림과 같이 반지름의 길이가 같은 7개의
원이 있다. 7개의 원에 서로 다른 7개의
색을 모두 사용하여 색칠하는 경우의 수
를 구하시오. (단, 한 원에는 한 가지 색
만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은
것으로 본다.) (3점) **단서** 가운데 원을 중심으로
나머지 6개의 원은 회전하여 일치하는
경우가 나오는 원순열이야.



1st 가운데 원에 색칠하는 경우의 수를 구하자.

가운데 원에 색칠하는 경우의 수는

$${}_7C_1 = 7$$

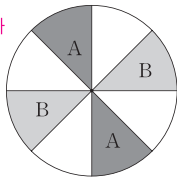
2nd 남은 색으로 나머지 6개의 원을 색칠하는 경우의 수를 구하자.
가운데 원에 칠한 색을 제외한 6가지 색을 모두 사용하여 가운데 원을 제외한 나머지 6개의 원을 색칠하는 경우의 수는
 $(6-1)! = 5!$
 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $7 \times 5! = 840$

A 32 정답 12 *원순열을 이용하여 색칠하는 경우의 수 ... [정답률 78%]

[정답 공식: 이미 A, B의 색이 칠해진 영역을 제외한 나머지 부분에 C, D, E, F를 색칠하는 원순열의 수를 구한다.

8등분된 원판에 A, B, C, D, E, F의 6가지 색을 모두 사용하여 영역을 구분하려고 한다. 그림과 같이 A, B 두 가지 색은 이미 칠해져 있을 때, 칠해져 있지 않은 영역에 칠할 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색을 칠하고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지 방법으로 한다.) (3점)

단서 2 A, B를 제외한 부분에서 회전하여 중복되는 경우가 생기지? 이때, A, B가 자리를 바꿀 수 있는 경우도 가능하네.



1st A, B를 제외한 4가지 색을 칠하는 방법의 수를 생각해 볼까?

한 칸씩 띄어진 부분도 회전하면 같은 것이 발생하니까 원순열을 이용해.

먼저 C, D, E, F를 8등분된 원판에 한 칸씩 띄어 색칠하는 방법의 수는
 $(4-1)! = 3!$

서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(n-1)! = (n-1)(n-2) \cdots 3 \times 2 \times 1$

2nd 주어진 그림과 같이 A, B 색의 위치로 생각하여 칠할 수 있는 방법의 수를 계산해.

남은 빈칸에 그림과 같이 A는 A끼리, B는 B끼리 마주보도록 색칠하는 방법의 수는 2가지이므로

구하는 방법의 수는

$$3! \times 2 = 12$$

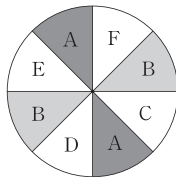
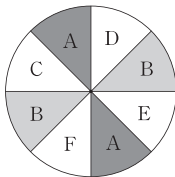
특목 풀이: A, B를 제외한 나머지 4가지를 색칠하는 방법의 수를 중복되는 경우의 수로 나누어 구하기

중복되는 경우를 고려하여 계산해 보자. A, B를 제외한 나머지 4가지 색을 칠하는 방법의 수는 4!이야.

그런데 그림과 같이 각 경우에 대해 중복되는 경우는 2가지씩 나와.

왼쪽 그림을 시계 방향으로 180° 회전시키면 오른쪽 그림이 나오므로

왼쪽 그림과 같이 색을 칠하는 경우와 오른쪽 그림과 같이 색을 칠하는 경우는 같은 경우야.



따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2} = 12$ 야.

→ 중복되는 경우가 C, D, E, F를 배열할 때마다 2가지씩 나오므로 C, D, E, F를 배열하는 경우의 수를 2로 나누어야 하는 거야.

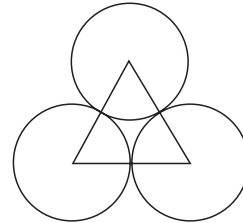
A 33 정답 ② *원순열을 이용하여 색칠하는 경우의 수 ... [정답률 51%]

[정답 공식: 120도 회전하면 일치한다. 7개의 색을 배열하는 방법의 수를 구한다.)

단서 2 칠하는 순서와 색깔을 선택하는 방법을 모두 생각해야 해.

그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

단서 1 회전할 때, 중심점이 되도록 기준을 먼저 잡자.



- ① 1260 ② 1680 ③ 2520
④ 3760 ⑤ 5040

1st 7개 영역을 7가지의 색으로 색칠해야 하므로 각각의 영역의 중앙에서부터 따져보자.

주의 중앙 부분은 회전에 영향을 받지 않기 때문에 먼저 칠해두자.

오른쪽 그림의 가운데 어두운 부분에 색을 칠하는 방법의 수는 7가지이다.

a, b, c 에 칠하는 방법의 수는 가운데 칠한 색을 제외한 6가지 색에서 3가지 색을 선택하여 a, b, c 에 칠하는 경우의 수와 같으므로 원순열에 의하여 ${}_6C_3 \times (3-1)!$
 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

a, b, c 가 결정되어서 나머지 3가지 색을 d, e, f 에 칠하는

a, b, c 에서 회전하여 일치하는 것은 배제시켰으므로 가장 바깥쪽인 d, e, f 를 일렬로 배치하는 경우를 생각할 수 있어.

방법의 수는 3!

$$\therefore 7 \times {}_6C_3 \times (3-1)! \times 3! = 1680$$

다른 풀이: 7개 영역에 색을 칠하는 경우의 수를 색칠하는 데 구별되지 않는 경우의 수로 나누어 구하는 방법

위의 그림과 같이 가운데 어두운 부분을 시작으로 a, b, c, d, e, f 의 7개의 영역에 서로 다른 7가지의 색을 모두 사용하여 차례로 칠하는 방법의 수는 7!

a, b, c 영역에 색칠을 할 때 세 가지 색을 $a-b-c, b-c-a, c-a-b$ 의 순서로 칠하는 경우의 세 가지는 서로 구분이 되지 않지만, a, b, c 세 영역에 색을 칠한 후 d, e, f 세 영역에 색을 칠할 때는 세 가지 색을 $d-e-f, e-f-d, f-d-e$ 의 순서로 그리는 경우는 구분되므로 a, b, c 영역에 색을 칠한 후에는 원순열이 아니야.

$$(\text{구하는 경우의 수}) = \frac{7!}{3} = 1680$$

* 원순열

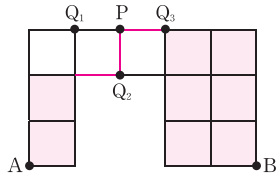
개념·공식

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 한다.

서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ 이다.

(iii) $A \rightarrow Q_2 \rightarrow P \rightarrow Q_3 \rightarrow B$ 의 순서로 이동하는 경우

$$\frac{3!}{1!2!} \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{5!}{2!3!} = 30$$



(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$24 + 40 + 30 = 94$$

* 뚫려 있는 도로망에서 최단거리 구하기

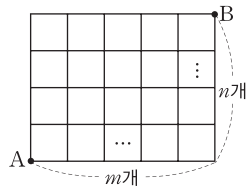
최근 온전하지 않은 도로망 문제가 다시금 모의고사에 자주 등장하고 있어, 단순히 직사각형의 형태를 제시하기보다는 경우를 나누어 생각해야 하는 유형이 출제되고 있으니 직접 경우의 수를 세는 것 보다는 같은 것이 있는 순열 공식을 이용하기 위해 노력해 보자.

❖ 최단 경로의 개수

개념·공식

A에서 B까지 가로 방향의 칸의 수가 m 개, 세로 방향의 칸의 수가 n 개일 때, 같은 것이 m 개, n 개 있는 순열의 수로

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}$$

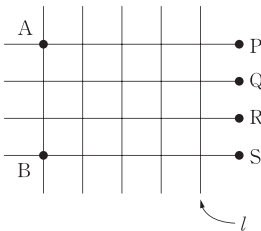


A 76 정답 66 *도로망에서 최단 경로 -활용 [정답률 60%]

[정답 공식: A에서 B로 가는 경우 중 P, Q, R, S의 4지점 중 두 곳을 반드시 지나는 경로로 나눈 뒤, 최단 경로의 수를 각각 구한다.]

그림과 같이 가로 방향 도로와 세로 방향 도로가 각각 서로 평행한 도로망이 있다. 도로망 위의 A, B지점에 숙소가 있고, P, Q, R, S지점에 관광지가 있다. 부모님을 모시고 효도관광을 온 어느 가족이 A지점에 있는 숙소를 출발하여 P, Q, R, S지점에 있는 관광지 중 두 곳을 관광한 후 B지점에 있는 숙소로 가기로 하였을 때, 이 가족이 도로망을 따라 이동할 수 있는 최단 경로의 수를 구하시오. (단, P, Q, R, S지점에서 직선도로 1까지의 거리는 모두 같다.) (4점)

단서1 네 지점에 있는 관광지 중 두 곳을 선택하는 경우를 생각해 보.



단서2 위쪽에 있는 관광지를 먼저 가고, 그것보다 아래쪽에 있는 관광지를 그 다음으로 가야겠지?

1st P, Q, R, S지점에 있는 관광지 중 두 곳을 관광할 수 있는 경우를 생각해 보. 이때, 최단 경로로 이동해야 한다는 것을 잊지말!

P, Q, R, S지점에 있는 관광지 중 최단 경로로 두 곳을 관광하는 경우는 (P, Q), (P, R), (P, S), (Q, R), (Q, S), (R, S)

조건처럼 P지점에 있는 관광지를 가면, 최단 경로로 이동해야 하므로 그 다음 갈 수 있는 관광지는 Q, R, S지점에 있는 관광지야. 시작 지점에 주의하자.

2nd 1st 에서 찾은 각각의 경우에 대해 최단 경로의 수를 구해.

(i) $A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow B$ 경로의 경우

$$Q \rightarrow B \text{ 일 때, } \leftarrow \text{로 4칸, } \downarrow \text{로 2칸이므로 } 1 \times 1 \times \frac{6!}{4!2!} = 15$$

(ii) $A \rightarrow P \rightarrow R \rightarrow B$ 경로의 경우

$$R \rightarrow B \text{ 일 때, } \leftarrow \text{로 4칸, } \downarrow \text{로 1칸이므로 } 1 \times 1 \times \frac{5!}{4!1!} = 5$$

(iii) $A \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow B$ 경로의 경우 P, Q, R, S지점을 모두 연결하는 세로 직선도로가 없기 때문에 어느 한 관광지에서 또 다른 관광지로 이동하는 최단 경로의 수는 항상 1가지뿐이야.

$$1 \times 1 \times 1 = 1$$

(iv) $A \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow B$ 경로의 경우

$$A \rightarrow Q \text{ 일 때, } \rightarrow \text{로 4칸, } \downarrow \text{로 1칸이므로 } \frac{5!}{4!1!} \times 1 \times \frac{5!}{4!1!} = 25$$

(v) $A \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow B$ 경로의 경우

$$A \rightarrow Q \text{ 일 때, } \rightarrow \text{로 4칸, } \downarrow \text{로 1칸이므로 } \frac{5!}{4!1!} \times 1 \times 1 = 5$$

(vi) $A \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow B$ 경로의 경우

$$A \rightarrow R \text{ 일 때, } \rightarrow \text{로 4칸, } \downarrow \text{로 2칸이므로 } \frac{6!}{4!2!} \times 1 \times 1 = 15$$

따라서 (i)~(vi)에 의하여 구하는 최단 경로의 수는

$$15 + 5 + 1 + 25 + 5 + 15 = 66$$



1등급 마스터 문제

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A 77 정답 97 *중복순열 -수 나열 [정답률 35%]

[정답 공식: 숫자 4가 쓰이는 경우와 쓰이지 않는 경우로 나눈다.]

숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. (4점)

단서1 총 네 번 중에 한 번 이상이기 때문에 한 번은 고정으로 넣어 두고 경우를 나누는 것이 쉬워.

(가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.

(나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

단서2 1과 4의 차이가 3이기 때문에 1과 4를 택하는 경우를 기준으로 경우를 나누어야 해.

1st 조건 (나)를 통해 숫자 4를 선택하는 경우를 기준으로 경우를 나누어서 경우의 수를 구하자.

조건 (가)에 의하여 1은 한 번 이상 선택해야 하고, 1과 차가 2보다 큰 수는 4뿐이므로 숫자 4를 기준으로 이웃한 두 수의 차이가 모두 2 이하인 경우를 나눠 보자.

(i) 4 이외의 숫자를 선택하여 나열하는 경우

숫자 4가 쓰이지 않으면 무조건 조건 (나)를 만족시켜.

1, 2, 3 중에서만 중복을 허락하여 4개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우에서 1을 한 번도 선택하지 않는 경우를 제외하면 된다.

이 경우 중에는 2222와 같이 1을 한 번도 사용하지 않는 경우의 수까지도 포함되어 있어.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4 - {}_2\Pi_4 = 3^4 - 2^4 = 65$

2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우를 제외해야 해.

(ii) 1, 4를 각각 한 번만 사용하여 나열하는 경우

1, 4를 각각 한 번만 사용하면 이 두 수는 이웃할 수 없으므로

네 자리 중에서 두 자리에 1, 4를 일렬로 나열하는 경우에서 두 수가

이웃한 경우를 제외하면 된다. → 네 자리 중에서 두 자리를 선택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_4P_2$

네 자리 중에서 이웃하는 경우는

다음의 세 가지 $\square\square\square\square$ 또는 $\square\square\square\square$ 또는 $\square\square\square\square$ 이고, 이웃한 경우 1과 4가

서로 자리를 바꾸는 경우도 다른 경우니까 2를 곱해야겠지?

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$ (가지)

$$\therefore {}_4P_2 - 3 \times 2 = 12 - 6$$

$$= 6$$

이 각각에 대하여 나머지 두 자리에 2 또는 3을 중복을 허락하여 2개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_2P_2 = 2^2 = 4$$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 4 = 24$

(iii) 1과 4를 총 세 번 선택되되, 1과 4 중 하나를 두 번 선택하는 경우

I. 1, 1, 4인 경우

1, 1, 4를 나열하는 경우는 숫자 1은 이웃하고, 4와는 한 자리 멀리 거리를 두어야 하기 때문에 가능한 경우의 수는 2

1104 또는 4011의 2가지

또한, 나머지 한 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3 중 하나이므로 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

실제로 이 경우에는 1124, 1134, 4211, 4311의 4가지임을 직접 세어보면 쉽게 알 수 있어.

II. 1, 4, 4인 경우

1, 4, 4를 나열하는 경우도 같은 방법으로 구하면 가능한 경우의 수는 4

I, II에 의하여 구하는 경우의 수는

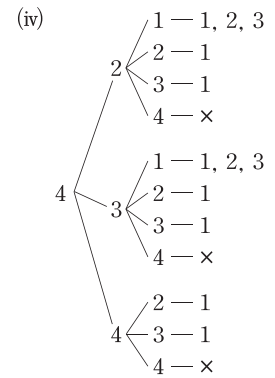
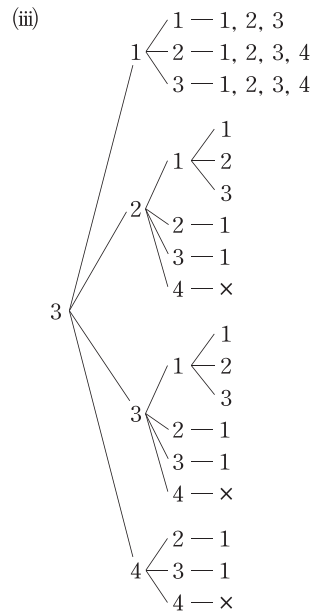
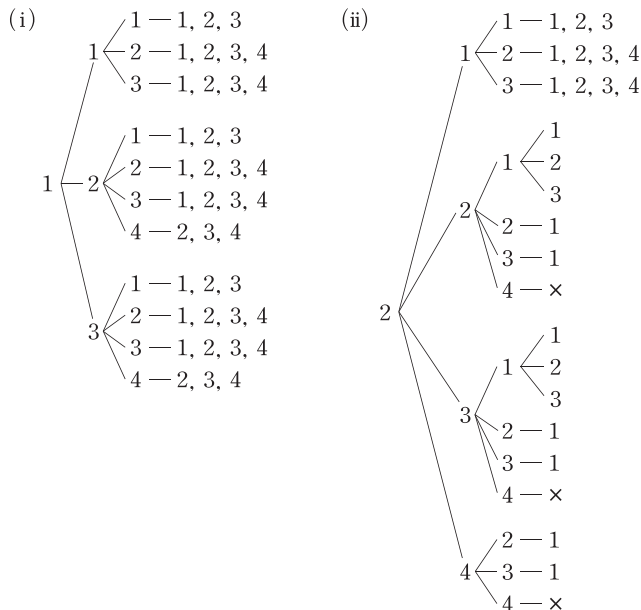
$$4 + 4 = 8$$

2nd 경우의 수를 구하자.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$65 + 24 + 8 = 97$$

다른 풀이: 수형도를 그려 직접 경우를 따지기



(i)의 경우의 수는

$$3 + 4 + 4 + (3 + 4 + 4 + 3) \times 2 = 11 + 14 \times 2 = 39$$

(ii), (iii)의 경우의 수는

$$\{3 + 4 + 4 + (3 + 1 + 1) \times 2 + 1 + 1\} \times 2$$

$$= (11 + 10 + 2) \times 2 = 46$$

(iv)의 경우의 수는

$$(3 + 1 + 1) \times 2 + 1 + 1 = 12$$

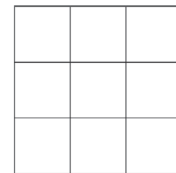
(i)~(iv)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$39 + 46 + 12 = 97$$

A 78 정답 8 ★1등급 대비 [정답률 5%]

*원순열을 이용하여 주어진 색깔이 위치하는 경우의 수 구하기 [유형 02]

그림과 같이 합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다.



단서1 9개의 영역을 9가지의 색을 모두 사용하여 색칠해야 해. 중복순열, 같은 것이 있는 순열, 중복조합은 아님은 알 수 있겠네?

빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.

(가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.

(나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.

(다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다. **단서2** 회전하여 일치하는 것에 관한 언급이 있으니 원순열 내용을 이용한 문제임을 사전에 파악하고 접근할 수 있어야겠지?

색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k \times 7!$ 이다. k 의 값을 구하시오.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

오해 1등급? 9가지 색깔이 위치하는 경우의 수를 구하는 문제이다.

이를 위해서는 빨간색과 파란색을 칠한 정사각형이 꼭짓점을 공유하지 않도록 빨간색의 위치를 기준으로 경우를 나누어 따져볼 수 있어야 한다.

단서+발상

- 단서1** 9가지의 서로 다른 색을 9개의 영역에 모두 사용하여 색칠하므로 9가지 서로 다른 색을 조건을 만족시키도록 조건을 확인한다. (개념)
빨간색과 파란색의 위치에 대한 조건이 있으므로 빨간색과 파란색을 기준으로 경우를 나누어 볼 수 있다. (발상)
일단 빨간색과 파란색은 모든 사각형과 꼭짓점을 공유하는 가운데 정사각형에 들어갈 수 없다. (발상)
빨간색과 파란색이 위치할 조건은 같고, 빨간색이 A에 위치하는 경우를 시계 방향으로 90°, 180°, 270°만큼 회전하면 빨간색이 각각 C, I, G에 위치하는 경우와 같으므로 (적용)
빨간색이 A, C, G, I에 위치하는 경우와 B, D, F, H 중 하나에 위치하는 경우로 나누어 볼 수 있다. (단서: (다)조건 '꼭짓점을 공유하지 않는다.') (적용)
단서2 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보므로 구하고자 하는 값이 원순열과 관련된 문제임을 알 수 있다. (개념)
따라서 기준이 되는 색깔을 정하고 이 색깔이 어느 곳에 배치되었을 때, 회전하여 일치하는 경우의 수를 구하여 나누어 주면 된다. (해결)

주의 회전하여 일치하는 경우를 고려하여 빨간색의 위치를 두 경우로 나누어 볼 수 있다.

핵심 정답 공식: 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

[문제 풀이 순서]

- 1st** 빨간색과 파란색이 들어갈 수 없는 장소를 먼저 생각해봐. 그림과 같이 색칠판에 이름을 새기자.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

9가지의 서로 다른 색을 A, B, C, D, E, F, G, H, I로 정사각형에 나타내자.

이때, 조건 (다)에 의해 빨간색과 파란색은 가운데인 E에 칠하게 되면 꼭짓점을 공유하게 되므로 칠할 수 없다.

가운데 사각형은 모든 사각형과 꼭짓점을 공유하기 때문이라는 거 알겠나?
그럼 테두리에 있는 8개의 사각형에만 생각하면 되겠네.

주의

새롭게 출제되는 원순열 문제는 단순히 원형 모양의 탁자에 사람을 앉히는 단순한 문제가 아니라 조건을 추가하여 제시하는 까다로운 문제들이 많아.
그래서 조건을 신경 써야 하는 대상을 먼저 배치시키거나 배치시키지 말아야 할 위치를 파악한 뒤에 상황을 단순화하는게 제일 처음 할 일이야. 이 문제에서는 배치시키지 말아야 할 위치를 파악하는 것이 처음 해야 할 일이야.

- 2nd** 원순열에서 회전하여 일치하지 않는 경우로 경우 나누기를 해야함을 생각하고 접근해봐.

회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보기에 빨간색을 먼저 칠하는 것으로 기준을 잡고 생각했을 때 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

큰 사각형도 정사각형이니 90°간격으로 회전할 때마다 정사각형의 큰 틀이 유지되니, 총 4번의 같은 경우가 나와서 8개의 사각형을 빨간색으로 칠함에 있어 2가지 경우로 나누어 생각할 수 있어.

- (i) 빨간색을 A, C, G, I 중 하나에 칠하는 경우
빨간색을 A, C, G, I 중 하나에 칠하여 회전하면 같은 경우이므로 빨간색을 A에 칠하는 경우를 생각해 보자.
이 경우 파란색은 B, D, E에는 칠할 수 없으므로 파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 5이고, 나머지 7개의 색을 나머지 부분에 칠하는 경우의 수는 7!이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $5 \times 7!$ 이다.

- (ii) 빨간색을 B, D, F, H 중 하나에 칠하는 경우
빨간색을 B, D, F, H 중 하나에 칠하여 회전하면 같은 경우이므로 빨간색을 B에 칠하는 경우를 생각해 보자.
이 경우 파란색은 A, C, D, E, F에는 칠할 수 없으므로 파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 3이고, 나머지 7개의 색을 나머지 부분에 칠하는 경우의 수는 7!이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 7!$ 이다.
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $5 \times 7! + 3 \times 7! = (5+3) \times 7! = 8 \times 7! = k \times 7!$ 이므로 $k=8$ 이다.

1등급 대비 특강

* 색칠 문제를 순차적으로 해결하는 방법

색칠 문제는 다음과 같은 순서로 접근하자.

- (i) 이웃하는 영역과 가장 많이 인접한 영역부터 고려해.
(ii) 특정한 영역을 기준으로 삼고 한 가지 색을 칠했다고 가정하고 다른 칸에 칠할 수 있는 경우의 수를 따져 보.
(iii) 사용 가능한 색의 개수를 확인해. 만일 색을 중복해서 사용할 수 있다면 한 색으로 칠할 수 있는 영역이 어디인지를 고려해 경우에 따라 나누어야 해.



My Top Secret

서울대 선배의 1등급 대비 전략

회전하여 일치하는 경우의 수는 기준이 되는 색깔을 정해 해당 색깔의 위치를 고정해놓고 나머지 색깔을 배치하는 경우의 수를 구해도 돼.
이때 기준은 문제에서 특별하게 또 다른 조건이 주어진 색깔을 삼고, 원순열의 수를 이용하여 편하게 계산할 수 있어.
이 문제의 경우, 빨간색을 왼쪽 위 모서리에 고정해 놓고 나머지 색깔의 위치를 정하는 경우의 수와 빨간색을 위쪽 중간에 고정해놓고 나머지 색깔의 위치를 정하는 경우의 수를 구하여 더하면 돼.

A 79 정답 243 1등급 대비 [정답률 5%]

* $a_1=2, ap=8$ 이 의미하는 바를 파악하여 중복순열로 경우의 수 구하기 [유형 04]

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i 번째 ($i=1, 2, \dots, 9$) 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i 라 하자.

$1 < p < q < 9$ 인 두 자연수 p, q 에 대하여 a_i 가 다음 조건을 만족시킨다. **단서1** $a_i < a_{i+1}, a_i > a_{i+1}, a_i < a_{i+1}$ 은 a_i 들의 순서에 대한 정보지? 경우의 수 입장에서 순서가 정해져 있다면 수를 뽑는 경우만 생각해 주면 되겠지?

(가) $1 \leq i < p$ 이면 $a_i < a_{i+1}$ 이다. ← 증가

(나) $p \leq i < q$ 이면 $a_i > a_{i+1}$ 이다. ← 감소

(다) $q \leq i < 9$ 이면 $a_i < a_{i+1}$ 이다. ← 증가



단서2 남은 공 3, 4, 5, 6, 7을 나누는 경우를 생각해 봐.

$a_1=2, a_p=8$ 인 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) (4점)

오해 1등급? 중복순열을 이용하여 공을 세 묶음으로 나누는 방법의 수를 구하는 문제이다.

이를 위해서는 조건 (가), (나), (다)와 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낸다는 점을 바탕으로 $a_1=2$ 와 $a_p=8$ 이 의미하는 바를 따져볼 수 있어야 한다.



단서+발상

단서1 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼내므로 a_n 의 최솟값이 1, 최댓값이 9임을 알 수 있다. **발상**
 a_n 에서 $1 \leq n \leq p$ 일 때 a_i 가 가장 작고, $q \leq n \leq 9$ 일 때 a_q 가 가장 작으므로 a_n 의 최솟값은 a_i 이거나 a_q 임을 알 수 있다. **적용**
 같은 방법으로 a_n 의 최댓값은 a_p 이거나 a_9 임을 알 수 있다. **적용**
단서2 a_n 의 최솟값은 a_i 이거나 a_q 인데, a_n 의 최솟값이 1이고 $a_1=2$ 이므로 $a_q=1$ 이고 같은 방법으로 $a_9=9$ 임을 알 수 있다. **적용**
 $2=a_1 < a_2 < \dots < a_p=8, 8=a_p > a_{p+1} > \dots > a_q=1,$
 $1=a_q < a_{q+1} < \dots < a_9=9$ 이고 나열하는 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수와 남은 다섯 개의 숫자 3, 4, 5, 6, 7이 적힌 공을 서로 다른 세 주머니에 나누어 넣는 경우와 같다. **해결**

주의 $p=2$ 이거나 $q=p+1$ 일 수 있으며 $q=8$ 일 수도 있다. 즉, 다섯 개의 숫자가 적힌 공을 서로 다른 세 주머니에 나누어 넣지만 공이 하나도 들어 있지 않은 주머니가 있을 수 있다.

(핵심 정답 공식: $a_q=1, a_9=9$ 이므로 나머지 5개의 공을 세 구간 중 한 구간에 배열한다.)

----- [문제 풀이 순서] -----

1st $a_n=1$ 과 $a_m=9$ 가 되는 n 과 m 의 값을 각각 구해.

a_1 부터 a_p 까지는 커지고 $\Leftarrow$ (가)에 의하여 $a_i < a_p$

a_p 부터 a_q 까지는 작아지고 $\Leftarrow$ (나)에 의하여 $a_i > a_q$

a_q 부터 a_9 까지는 커지므로 $\Leftarrow$ (다)에 의하여 $a_i < a_9$

$a_n=1$ 인 경우는 $a_n < a_1$ 이므로 $a_n=a_q$ 뿐이다.

$\therefore a_n=a_q=1$

$a_n=9$ 인 경우는 a_q 에서 a_9 중 가장 큰 수이므로

$a_m=a_9=9$

따라서 $a_1=2$ 이므로 $a_q=1$ 이고,

2보다 작은 자연수이지? 즉, 1이야!

주의
 a_q 가 $p \leq i < 9$ 에서 최솟값이 되어야 해.

$a_p=8$ 이므로 $a_9=9$ 이다.

8보다 큰 자연수이지? 즉, 9야!

주의
 $1 \leq i < q$ 에서 $a_p=8$ 이 최댓값이기 때문에 이 범위의 a_i 에는 9가 없어.

2nd 남은 공이 들어갈 수 있는 경우의 수를 구해.

a_1 부터 $a_p=8$ 까지를 A 묶음, $a_p=8$ 부터 $a_q=1$ 까지를 B 묶음,

$a_q=1$ 부터 $a_9=9$ 까지를 C 묶음이라 하자.

A, B, C의 묶음 안에 있는 수는 순서가 정해져 있으므로

(A는 커지는 순서, B는 작아지는 순서, C는 커지는 순서)이니까 세 묶음에 배열하는 경우만 생각하면 되네.

A, B, C의 묶음에 수를 배정하면 더 이상의 경우의 수가 생기지 않는다.

따라서 남은 공 3, 4, 5, 6, 7의 5개가 각각 A, B, C의 묶음을 선택하는 경우의 수만 따지면 되므로

$3^5=243$



특목 풀이: a_1, a_p, a_q, a_9 가 적힌 4개의 공을 제외한 5개의 공을 나누는 경우의 수 구하기

구하는 경우의 수는 $a_1=2, a_p=8, a_q=1, a_9=9$ 가 적힌 4개의 공을 제외한 5개의 공을 첫 번째와 p 번째 사이, p 번째와 q 번째 사이, q 번째와 9번째 사이로 나누는 경우의 수와 같다.

$$\begin{aligned} & {}_5C_0 \times ({}_3C_0 \times {}_5C_5 + {}_5C_1 \times {}_4C_4 + {}_5C_2 \times {}_3C_3 + {}_5C_3 \times {}_2C_2 + {}_5C_4 \times {}_1C_1 + {}_5C_5 \times {}_0C_0) \\ & + {}_5C_1 \times ({}_4C_0 \times {}_4C_4 + {}_4C_1 \times {}_3C_3 + {}_4C_2 \times {}_2C_2 + {}_4C_3 \times {}_1C_1 + {}_4C_4 \times {}_0C_0) \\ & + {}_5C_2 \times ({}_3C_0 \times {}_3C_3 + {}_3C_1 \times {}_2C_2 + {}_3C_2 \times {}_1C_1 + {}_3C_3 \times {}_0C_0) \\ & + {}_5C_3 \times ({}_2C_0 \times {}_2C_2 + {}_2C_1 \times {}_1C_1 + {}_2C_2 \times {}_0C_0) \\ & + {}_5C_4 \times ({}_1C_0 \times {}_1C_1 + {}_1C_1 \times {}_0C_0) \\ & + {}_5C_5 \times (1 \times 1) = 243 \end{aligned}$$

* 특정한 숫자를 제시한 조건에 주목하기

마지막에 주어진 $a_1=2, a_p=8$ 이라는 조건이 단순히 계산을 위한 숫자가 아님을 눈치채야 해. 이것은 특정한 상황에서만 성립하는 조건으로, 이런 조건이 주어진다는 것은 특정한 상황을 주어진 조건들로부터 알아낸 후 문제를 간단하게 만들어낼 수 있는지를 묻고자 한 거야. 조건이 단순히 생겼어도 그 의미를 깊게 고민해 봐.



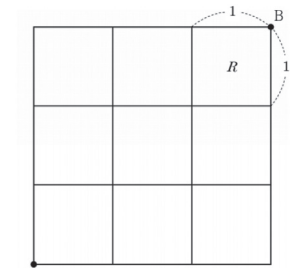
My Top Secret

서울대 선배의 1등급 대비 전략

복잡한 조건을 자신만의 방법으로 정리해서 한눈에 들어오게 해야 해. 이 문제는 $i=1$ 에서 $i=p$ 까지 증가, $i=p$ 에서 $i=q$ 까지 감소, $i=q$ 에서 $i=9$ 까지 증가이므로 1과 9가 들어갈 곳이 자동으로 정해지지는? 이렇게 단순히 정리만 했을 뿐인데 풀이와정이 쉽게 보이는 경우가 많아.

* 특정한 정사각형의 네 변을 지나는 최단 경로 구하기 [유형 09]

그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다. 이 도로망을 따라 최단 거리로 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 다시 A 지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (4점)



단서1 최단거리로 나아갈 때, A → B, B → A에서 각각 어느 방향으로 갈 수 있을까?

(가) 정사각형 R의 네 변을 모두 지나야 한다.

(나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R뿐이다.

단서2 R의 네 변을 모두 지날 수 있는 방법은 2가지야. A → B로 갈 때, 사각형 R의 아랫 부분을 택하면 B → A로 돌아올 때는 반드시 윗 부분을 택해야 하고, A → B로 갈 때, 윗 부분을 택하면 돌아올 때는 아랫 부분을 택해야 하기 때문이지.



2등급 ? 정사각형의 네 변을 지나는 최단 경로를 구하는 문제이다. 이를 위해서는 나머지 정사각형의 네 변을 지나는 경우를 따져볼 수 있어야 한다.



단서+발상

단서1 최단거리로 A 지점에서 B 지점까지 갈 때, 오른쪽과 위쪽 방향으로만 갈 수 있고, B 지점에서 A 지점까지 갈 때, 왼쪽과 아래쪽 방향으로만 갈 수 있다. **개념**

A 지점에서 B 지점으로 갈 때 정사각형 R의 변 중 지날 수 있는 변의 개수는 최대 2개다. **개념**

따라서 정사각형 R의 네 변을 모두 지나기 위해서는 A 지점에서 B 지점으로 갈 때 2개, B 지점에서 A 지점으로 갈 때 2개를 지나야 한다. **발상**

단서2 A 지점에서 B 지점까지 갈 때 오른쪽과 위쪽 방향으로만 갈 수 있다고 했으므로 2개의 변을 지나는 방법은 2가지이다. **적용**

정사각형 왼쪽 아래 꼭지점에서 출발하여 위쪽으로 한 번 오른쪽으로 한 번 움직이는 경우와, 오른쪽으로 한 번 위쪽으로 한 번 움직이는 경우이다. **적용**

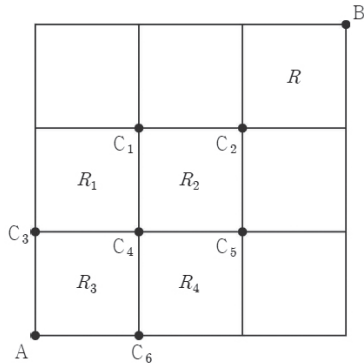
B 지점에서 A 지점으로 갈 때는 A 지점에서 B 지점으로 갈 때 지나온 정사각형 R의 두 변을 거치면 네 변을 다 지날 수 없으므로 지나지 않은 두 변을 지나면 된다. **해결**

주의 R_1, R_2, R_3, R_4 의 네 변을 지나는 경우 중 동시에 두 정사각형의 네 변을 지나는 경우가 있으므로 주의해야 한다.

핵심 정답 공식: A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 직사각형의 좌측 아래에 A, 우측 위에 B가 위치하고, 직사각형 내에 가로 m 칸, 세로 n 칸인 경로일 때 가로, 세로를 각각 같은 것으로 보면, 같은 것이 각각 m 개, n 개 있는 것을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다. 즉, $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

[문제 풀이 순서]

1st 공식을 적용하기 위해 중간 지점을 설정하자.



그림과 같이 6개의 점을 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, 4개의 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 라 하자.

조건에서 정사각형 R 의 네 변을 모두 지나야 하기 때문에 점 B와 대각선에 위치한 점 C_2 에 대하여 점 A에서 점 C_2 를 지나는 경로에 대하여 살펴보자.

2nd 구하는 전체 경로를 세부 경로로 나누어 경우를 생각하자.

문제에서 구하는 경로는 $A \rightarrow C_2 \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ 로 가는 최단 경로이다.

(i) $C_2 \rightarrow B \rightarrow C_2$ 의 경로

$C_2 \rightarrow B$ 의 경우의 수는 $\frac{2!}{1!1!} = 2$ 이고,

$B \rightarrow C_2$ 는 조건 (가)에 의하여 1이므로

$C_2 \rightarrow B \rightarrow C_2$ 의 경우의 수는 $2 \times 1 = 2$ 이다.

1번째 경우 :

2번째 경우 :

(ii) $A \rightarrow C_2$ 와 $C_2 \rightarrow A$ 의 경로

전체 경우에서 제외되는 경우의 수를 구하여 답을 구하자.

$A \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow A$ 의 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!} \times \frac{4!}{2!2!} = 36$ 이다.

전체의 경우를 따질 때에는 왔던 길을 다시 가도 상관없지?

따라서 $A \rightarrow C_2$ 를 가는 경우와 $C_2 \rightarrow A$ 를 가는 경우를 각각 구하여 곱해주는 거야.

(a) 정사각형 R_1 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_3 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_3 \rightarrow A$ 의 순서로 이동하는 경우의 수는 $(1 \times 2 \times 1) \times (1 \times 1 \times 1) = 2$

(b) 정사각형 R_2 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow A$ 의 순서로 이동하는 경우의 수는 $(2 \times 2) \times (1 \times 2) = 8$

(c) 정사각형 R_3 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow A$ 의 순서로 이동하는 경우의 수는 $(2 \times 2) \times (2 \times 1) = 8$

(d) 정사각형 R_4 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_6 \rightarrow C_5 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_5 \rightarrow C_6 \rightarrow A$ 의 순서로 이동하는 경우의 수는 $(1 \times 2 \times 1) \times (1 \times 1 \times 1) = 2$

(e) 두 정사각형 R_2, R_3 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow A$ 의 순서로 이동하는 경우의 수는

$$(2 \times 2) \times (1 \times 1) = 4$$

→ 전체 경우에서 제외되는 경우를 찾는 거지?

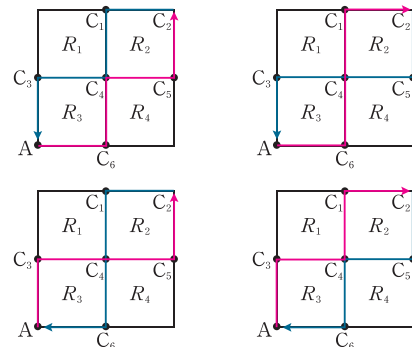
(a)~(d)까지는 각 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 에 대하여 네 변을 모두 지나는 경우에 대하여 각각 알아봤어.

(e)의 경우는 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 다시 A 지점까지 돌아오는 방향성 때문에 두 정사각형 R_2, R_3 의 네 변을 모두 지나는 경우도 생기기 때문에 구해야 하는 거야. 이 부분을 놓치면 안돼.

즉, $A \rightarrow C_4 \rightarrow C_2$ 로 이동하는 경로를

빨간색으로, $C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow A$ 로 이동하는

경로를 파란색으로 표현하면 다음의 4가지 경우가 있다.



(a)~(e)에 의하여 $A \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow A$ 의 순서로 이동할 때,

정사각형 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없는 경우의 수는

$$36 - \{(2+8+8+2) - 4\} = 20$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$2 \times 20 = 40$$



My Top Secret

서울대 선배의 ① 등급 대비 전략

정사각형 R 의 네 변을 지나기 위해 항상 지나가야 하는 점의 위치를 구한 뒤 나머지 작은 정사각형 8개 중 네 변을 모두 지나게 될 수 있는 정사각형을 골라내면, R_1, R_3, R_5, R_4 가 나오지?

이들 정사각형의 네 변을 지나는 경로를 구하여 R 의 네 변을 지나는 경우의 수에서 제외하면 R 의 네 변만 지나는 경우의 수를 구할 수 있어.



A 내신+수능 대비 단원별 모의고사

문제편
p. 150

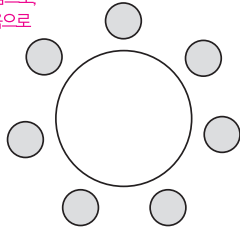
모의

A 01 정답 96 *원순열 [정답률 80%]

(정답 공식: A학교와 B학교 학생을 각각 하나로 묶어 원순열의 수를 구한다.)

그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A학교 학생 2명, B학교 학생 2명, C학교 학생 3명이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A학교 학생 2명이 서로 이웃하여 앉고 B학교 학생 2명도 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

단서 A학교 학생을 한 묶음으로
B학교 학생을 한 묶음으로
생각해야겠지?



1st A학교 학생 2명과 B학교 학생 2명을 각각 한 학생으로 생각하여 원형으로 배열하는 경우의 수를 구하자.

A학교 학생 2명과 B학교 학생 2명을 각각 묶어서 한 학생으로 생각하면 전체 학생은 5명이다.

따라서 5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{5} = 4! = 24 \quad \text{서로 다른 } n \text{ 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 } \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

2nd A학교 학생 2명과 B학교 학생 2명이 각각 자리를 바꾸는 경우의 수를 구하자.

1st 의 각각에 대하여 A학교 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2, B학교 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$24 \times 2 \times 2 = 96$$

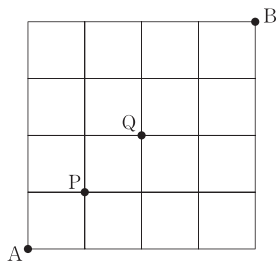
모의

A 02 정답 24 *같은 것이 있는 순열 - 최단 경로 ... [정답률 80%]

(정답 공식: 주어진 문자 n 개 중에서 같은 것이 $p, q, \dots, r$ 개 있는 것들을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{n!}{p!q!\dots r!}$ 이다.)

그림과 같이 직사각형으로 이루어진 도로망이 있다. A지점에서 B지점까지 최단거리로 갈 때, P와 Q 두 지점을 모두 지나는 경로의 수를 구하시오. (2점)

단서 A → B의 최단 경로 중 두 점 P, Q를 지나는 경로로 나누어 생각해 볼까?



1st $A \rightarrow P, P \rightarrow Q, Q \rightarrow B$ 로 가는 최단 경로의 수를 각각 구하여 곱의 법칙을 이용해.

A지점에서 P지점으로 가는 최단 경로의 수는 $\rightarrow$ 로 1칸, $\uparrow$ 로 1칸 이동해야 하므로 $2! = 2$ (가지)

P지점에서 Q지점으로 가는 최단 경로의 수는 $\rightarrow$ 로 1칸, $\uparrow$ 로 1칸 이동해야 하므로 $2! = 2$ (가지)

Q지점에서 B지점으로 가는 최단 경로의 수는 $\rightarrow$ 로 2칸, $\uparrow$ 로 2칸 이동해야 하므로

오른쪽, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 각각 a, b 라 하면 Q지점에서 B지점으로 가는 최단 경로는 a, a, b, b 를 일렬로 배열하는 경우와 같다.

$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ (가지)}$$

n 개 중에서 서로 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때,

이들 n 개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\dots r!}$ (단, $p+q+\dots+r=n$)

따라서 구하는 경로의 수는 $2 \times 2 \times 6 = 24$

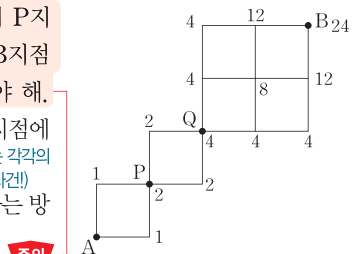
$A \rightarrow P$ 이고 $P \rightarrow Q$ 이고 $Q \rightarrow B$ 인 경우는 잇달아 일어나는 사건으로 각 경우의 수를 곱해

쉬운 풀이: 각 점에 최단거리로 가는 방법의 수를 더하여 최단 경로 구하기

그림과 같이 A지점에서 출발하여 P지점과 Q지점을 지나 최단거리로 B지점까지 가려면 다음 경로로만 지나야 해.

이때, 합의 법칙에 의하여 점 A지점에 A 또는 B 또는 C가 일어날 경우의 수는 각각의 경우의 수를 더해주면 돼. (단, 서로 배반사건)서 출발하여 각 점에 최단거리로 가는 방법의 수를 구하면 다음과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 24야.



주의 최단 경로 문제에서 꼭 지나야 하는/지나면 안 되는 점이 주어지면 갈 수 있는 경로들로 새로 경로를 그려봐.

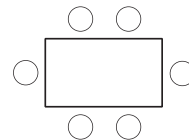
모의

A 03 정답 ④ *다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수 ... [정답률 88%]

(정답 공식: 직사각형 모양의 탁자에 앉히는 경우의 수는 (회전시켰을 때, 겹치지 않는 경우의 수) × (원순열의 수)이다.)

그림과 같이 직사각형 모양의 탁자 둘레에 6개의 의자가 놓여 있다. 이때, 6명의 가족이 의자에 앉는 방법의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (2점)

단서 원순열을 고려한 뒤, 탁자 모양을 고려해서 회전해서 다른 경우를 생각해.



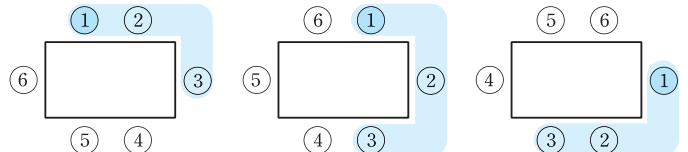
- ① 180 ② 240 ③ 300 ④ 360 ⑤ 420

1st 2인용 의자이니가 부부를 묶어서 3명이라고 생각하자.

6명이 원형 탁자에 둘러앉는 방법의 수는 $(6-1)! = 5!$ (가지)이다.

(원순열의 수) = $\frac{(직순열의 수)}{(배열하는 것의 개수)}$ 이야.

이때, 직사각형 모양의 식탁에서는 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 회전해도 겹쳐지지 않는 경우가 3가지 있다.



따라서 구하는 방법의 수는

$$5! \times 3 = 120 \times 3 = 360 \text{ (가지)}$$

*** 원순열의 특징을 다각형에 적용할 때 주의할 점 알아보기**

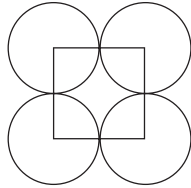
돌러있는 방법의 수를 구하는 경우 원순열을 이용하게 돼.
원순열은 회전하여 일치하는 배열을 같은 것으로 보기 때문에 일렬로 배열하는 순열의 수에서 겹쳐지는 수만큼 나누어 주어야 해. 다각형의 경우는 다각형의 모양에 따라 회전해도 겹쳐지지 않을 수 있음을 기억하자.

모의

A 04 정답 ② *원순열과 조합 [정답률 75%]

[정답 공식: (원순열의 수) = $\frac{(\text{직순열의 수})}{(\text{배열하는 것의 개수})}$ 를 이용한다.]

그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 4개와 이 네 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정사각형이 있다. 원의 내부 또는 정사각형의 내부에 만들어지는 9개의 영역에 서로 다른 9가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



- ① $\frac{9!}{3}$ ② $\frac{9!}{4}$ ③ $\frac{9!}{5}$ ④ $\frac{8!}{3}$ ⑤ $\frac{8!}{4}$

1st 9개 영역을 9가지의 색으로 색칠해야 하므로 각각의 영역의 중앙에서부터 따져보자.

그림의 가운데 어두운 부분에 색을 칠하는 방법의 수는 9가지이다.

a, b, c, d에 칠하는 방법의 수는 가운데 칠한 색을 제외한 8가지 색에서 4가지 색을 선택하여 a, b, c, d에 칠하는 경우의 수와 같으므로 원순열에 의하여 ${}_8C_4 \times (4-1)!$ (색 선택) × (배치)

a, b, c, d가 결정되어서 나머지 4가지 색을 e, f, g, h에 칠하는 방법의 수는 4! (a, b, c, d에서 회전하여 일치하는 것은 배제시켰으므로 가장 바깥쪽인 e, f, g, h를 일렬로 배치하는 경우를 생각할 수 있어.)
∴ $9 \times {}_8C_4 \times (4-1)! \times 4!$

$$= 9 \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= \frac{9!}{4}$$

수능 해강

*** 각 영역을 다른 색으로 색칠하는 문제 쉽게 풀기**

색칠 문제는 다음과 같은 순서로 접근하자.

- 이웃하는 영역이 가장 많은 영역부터 고려해.
- 특정한 영역을 기준으로 삼고 한 가지 색을 칠했다고 가정 한 다음 다른 칸에 칠할 수 있는 경우의 수를 따져 보.
- 사용 가능한 색의 개수를 확인해. 만일, 색을 중복하여 사용할 수 있다면 한 색으로 칠할 수 있는 영역이 어디인지를 고려해 경우에 따라 나누어야 해.

모의

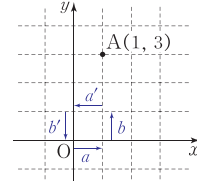
A 05 정답 90 *도로망에서 최단 경로 [정답률 67%]

[정답 공식: 상하, 좌우 각 방향을 조합하여 6번 움직여서 점 A(1, 3)에 도착하는 방법의 수를 구한다.]

좌표평면 위에서 상하 또는 좌우방향으로 한 번에 1만큼씩 움직이는 점 P가 있다. 이때, 원점을 출발한 점 P가 6번 움직여서 최종 위치가 점 A(1, 3)이 되는 경우의 수를 구하시오. (4점)

단서 원점에서 점 A까지 가는 최단 경로를 생각하면 오른쪽 1칸, 위쪽 3칸이므로 4번 움직이는거지? 그럼 2번 더 움직이는 방법을 생각해야겠네.

1st 각각의 경우를 모두 생각해.



주의

6번이 채워지려면 최단 거리로 이동하고 난 후 한번만 갔다가 되돌아오면 되겠지?

원점에서 점 A(1, 3)까지 최단거리로 움직이는 경우는 위쪽 방향으로 3칸, 오른쪽 방향으로 1칸 움직여야 한다. < 점 P가 원점을 출발한 후 4번 이동 그런데 6번 움직여야 하므로 왼쪽으로 1칸 또는 아래쪽으로 1칸을 반드시 움직인 후 오른쪽 또는 위쪽으로 옮겨가야 한다. < 점 O에서 점 A로 향하는 방향과 반대가 되도록
이때, 오른쪽, 왼쪽으로 1칸 움직이는 경우를 각각 a, a', 위쪽, 아래쪽으로 1칸 움직이는 경우를 각각 b, b'이라 하자.

2nd 같은 것을 포함하는 순열을 이용해.

점 P가 원점에서 점 A(1, 3)으로 움직이는 경우는 다음과 같이 나눠서 구할 수 있다.

(i) a를 2개, a'을 1개, b를 3개 나열하는 경우

$$(\text{경우의 수}) = \frac{6!}{2!1!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{2} = 60$$

(ii) a를 1개, b'을 1개, b를 4개 나열하는 경우

$$(\text{경우의 수}) = \frac{6!}{1!1!4!} = 6 \times 5 = 30$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $60 + 30 = 90$
[합의 법칙] 동시에 일어나지 않는 두 사건

모의

A 06 정답 ② *같은 것이 있는 순열 [정답률 78%]

[정답 공식: 같은 것이 p, q, ..., r개 있는 것들을 일렬로 나열하는 경우의 수 $\frac{n!}{p!q!\dots r!}$ 을 이용한다.]

7명의 학생이 양로원으로 봉사활동을 갔다. 청소 도우미 2명, 빨래 도우미 2명, 식사 도우미 3명으로 역할을 나누려고 할 때, 가능한 방법의 수는? (4점) 단서 7명을 2, 2, 3명으로 분할하면 돼. 단, 각각의 도우미가 구분되므로 2명, 2명을 같은 경우로 보면 안돼.

- ① 105 ② 210 ③ 315
④ 420 ⑤ 630

1st 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 생각해 보.

청소 도우미를 a, 빨래 도우미를 b, 식사 도우미를 c라 하자.

구하는 경우는 aabbccc를 나열한 후 7명과 일대일대응 시키면 돼.

이는 같은 것이 있는 순열이므로

$$\frac{7!}{2!2!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 2} = 210$$

a가 2개, b가 2개, c가 3개이므로!!

모의고사

A