

고등 수학, 개념과 유형을 제대로 익히면 누구나 잘 할 수 있습니다.

고등학교 수학은 개념이 어렵다고
공식만 암기하면서 공부해서는 안 됩니다.
개념을 꼼꼼히 이해하고 각 개념의 필수 공식과 문제 유형들을
단계화된 문제를 통해서 정확히 익혀야 합니다.

자이스토리는 학교시험과 최신 학력평가 문제를
철저히 분석해 촘촘하게 유형을 분류하고 개념을 알맞게 적용시키는
세분화된 문제 유형 훈련으로 수학 기본 실력이 탄탄하게 다져집니다.
그래서 하루가 다르게 수학 성적이 향상됨을 느낄 수 있습니다.

또한, 자이스토리의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설,
다른 풀이, 톡톡 풀이, 쉬운 풀이 등은 수학 공부에
흥미와 성취감을 북돋아 줄 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1 등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

- 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 -



차례 [총 140개 유형 분류]



I 함수의 극한과 연속

A 함수의 극한 - 20개 유형 분류

핵심 개념 정리	10
개념 확인 문제	11
수능 유형별 기출 문제	12
내신 유형별 서술형 문제	40
1등급 마스터 문제	42

B 함수의 연속 - 13개 유형 분류

핵심 개념 정리	46
개념 확인 문제	47
수능 유형별 기출 문제	48
내신 유형별 서술형 문제	70
1등급 마스터 문제	72
동아리 소개/연세대 어울림	74

II 미분

C 미분계수와 도함수 - 19개 유형 분류

핵심 개념 정리	76
개념 확인 문제	77
수능 유형별 기출 문제	78
내신 유형별 서술형 문제	100
1등급 마스터 문제	102
동아리 소개/한양대 + 한양여대 소리로 크는 나무	104

D 도함수의 활용(1) - 25개 유형 분류

핵심 개념 정리	106
개념 확인 문제	107
수능 유형별 기출 문제	108
내신 유형별 서술형 문제	132
1등급 마스터 문제	134
동아리 소개/서울대 빛소리	136

E 도함수의 활용(2) - 19개 유형 분류

핵심 개념 정리	138
개념 확인 문제	139
수능 유형별 기출 문제	140
내신 유형별 서술형 문제	160
1등급 마스터 문제	162



III 적분

F 부정적분과 정적분 - 28개 유형 분류

핵심 개념 정리	166
개념 확인 문제	167
수능 유형별 기출 문제	168
내신 유형별 서술형 문제	196
1등급 마스터 문제	198

G 정적분의 활용 - 16개 유형 분류

핵심 개념 정리	202
개념 확인 문제	203
수능 유형별 기출 문제	204
내신 유형별 서술형 문제	226
1등급 마스터 문제	228



내신+수능 대비 단원별 모의고사

A 함수의 극한(11문항)	230
B 함수의 연속(9문항)	232
C 미분계수와 도함수(11문항)	234
D 도함수의 활용(1)(12문항)	236
E 도함수의 활용(2)(11문항)	238
F 부정적분과 정적분(12문항)	240
G 정적분의 활용(10문항)	242

빠른 정답 찾기 244

개념 & 문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

‘셀프수학’





세분화된 유형 문제 + 서술형 문제 훈련으로 내신 1등급 완성

1 핵심 개념 정리 - 쉽게 이해되는 개념과 공식

고2 수학의 각 단원에서 가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념을 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 강의하였습니다.

- **중요도** 🌟🌟🌟: 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- **+ 개념 보충, 한걸음 더, 왜 그럴까?**: 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- **출제**: 2024 수능과 2025 대비 평가원 출제 경향 분석

개념 강의

중요도 🌟🌟🌟

A 함수의 극한

1 좌극한과 우극한 - 유형 01-02

함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ (a 는 실수)이면 $x=a$ 에서 $f(x)$ 의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값은 a 로 같다.
또, 그 역도 성립하므로
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a$

2 함수의 극한에 대한 성질 - 유형 03, 14-16

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (a, β 는 실수)일 때, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a$ 에 대하여

(1) $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = ka$ (k 는 상수)
(2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a \pm \beta$ (복호동순)

극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하지 않는 경우는

(i) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 의 값이 존재하지 않거나
(ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 의 값이 존재하지 않거나
(iii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 일 때이다.

한걸음 더 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값은

2 개념 확인 문제 - 개념에 대한 이해도 확인 문제

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지 확인할 수 있는 개념 이해 필수 문제를 수록하였습니다.

1 좌극한과 우극한

[A01~06] 다음 극한을 구하시오.

A01 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x+1)$ A02 $\lim_{x \rightarrow -2} (-2x+1)$

A03 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ A04 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

A05 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

3 함수의 극한값의 계산

[A15~20] 다음 극한값을 구하시오.

A15 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ A16 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

A17 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-6}{x+2}$ A18 $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x-1}$

A19 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{x-9}$ A20 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2+1-1}$

3 내신 유형별 서술형 문제 - 단계별 문제 해결 방법 제시

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계별 풀이 과정을 훈련해서 서술형 문제에 대한 자신감을 키울 수 있게 구성하였습니다.

문제를 단계별로 풀이 방법을 생각해 냅니다!

내신 유형별 서술형 문제

A177 ★★☆☆ - 유형 16

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여
 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3f(x)}} - \frac{1}{2f(x)} \right) = -\frac{1}{32}$
일 때, $f(3)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A179 ★☆☆☆ - 유형 03

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,
 $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

● **1st, 2nd, 3rd**: 풀이의 시작과 끝을 막힘없이 따라갈 수 있게 도와주는 단계별 접근을 제시하였습니다.

4 유형별 기출 문제 - 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 출제 유형을 촘촘하게 세분화하여 유형순, 개념순, 난이도순으로 문항을 배열하였습니다.

- **tip**: 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR 코드**: 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.

수능 유형별 기출 문제

[2점, 3점, 쉬운 4점] **Pass** 쉬운 유형 패스 하세요

1 좌극한과 우극한

고난도 유형 01 함수의 좌극한과 우극한

(1) 좌극한: x 의 값이 a 보다 작으면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 a 에 가까워지면 a 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 좌극한이라 하고, 기호로 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a$ 로 나타낸다.
(2) 우극한: x 의 값이 a 보다 크면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 β 에 가까워지면 β 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 우극한이라 하고, 기호로 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \beta$ 로 나타낸다.

A30 ☆☆☆☆ - 2025대비 6월 모평

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? (3점)

- **유형 분류**: **빈출** - 시험에서 자주 출제되는 유형입니다.
고난도 - 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- **대표**: 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.

- **난이도**: ☆☆☆ - 기본 문제 ☆☆☆ - 중급 문제
☆☆☆ - 중상급 문제
- **Pass**: 중복되는 간단한 계산 문제로 패스해도 되는 문제입니다.

- **출처표시**: 수능, 평가원 - 대비연도, 학력평가 - 실시연도
 - **2022대비 수능 1(고3)**: 2021년 11월에 실시한 수능
 - **2022대비 6월 모평 2(고3)**: 2021년 6월에 실시한 평가원
 - **2022실시 4월 학평 3(고3)**: 2022년 4월에 실시한 학력평가
 - **2023대비 9월 모평 4(고3)**: 2022년 9월에 실시한 평가원
 - **표시 없는 문제**: 기출 변형 문제

5 내신+수능 대비 단원별 모의고사 - 최종 실력 점검

중단원별 학교시험 필수 문제와 수능형 문항, 서술형 문항을 수록하여 학교시험을 더욱 충실히 대비할 수 있습니다.

문항 수 17개
배점 40점
제한시간 50

내신+수능 대비 단원별 모의고사 A 함수의 극한

A01 ★☆☆☆ - 2017실시(나) 6월 학평 기고2

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

A04 ☆☆☆☆

$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2+15x+13} - \sqrt{x^2-13x})$ 의 값을 구하시오. (3점)



6 1등급 마스터 문제 - 대비 문제로 1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다.

*** - 상급 문제

2등급 대비 : 정답률이 9~15%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제

1등급 대비 : 정답률이 9% 미만인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A187 ★★★, 2024학시 9월 학평 2(고2)

두 실수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-a} & (x \leq 0) \\ (x+b)^2 & (x > 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ 와 $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ 를 모두 만족시키는 양수 b 가 존재한다

[1등급 대비 + 2등급 대비]

A191 1등급 대비, 2024학시 9월 학평 2(고2)

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x}-f(x)}{x+f(x)} \times \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x}-f(x)}{x+f(x)} = -2$

(나) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-4)f(x+1)}{f(x-3)}$ 의 값이 존재하지 않는 실수

7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설

A184 정답 311

1등급 대비 [정답률 9%]

* 좌극한값과 우극한값에 대한 조건을 만족시키는 함수 찾기 [유형 01-14-16]

20. 1등급? 함수의 극한의 성질을 이용해 조건을 해석하고, 대수 관계에 따라 나누어진 경우를 중 조건을 만족하는 그래프를 찾는 문제이다. 여러 경우 중에서 조건을 모두 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 찾는 과정에서 배제된다.

단서+발상

20. $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$ 에서 $t=0$ 에서의 좌극한값과 우극한값의 차이가 20이므로 $t=0$ 에서 극한값이 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다. 20. $t=0$ 에서 극한값이 존재한다면 좌극한값과 우극한값이 일치하기 때문에 $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$ 이다. 즉, 조건 (나)에 의하여 $g(0)=1$ 이 되어야 한다. 하는데 이는 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 2인 조건에 맞지 않는다. 따라서 $t=0$ 에서 극한값이 존재하지 않는다. 20. 또한 함수 $y=f(x)$ 와 그래프의 꼭짓점의 y 좌표와 y 절편의 대소 관계에 따라 세 조건 (가), (나), (다)를 모두 만족시키는 경우를 찾는다. 20. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점과 y 절편의 위치에 따라 직선 $y=t$ 와의 교점의 개수가 달라짐을 파악하고 함수 $g(t)$ 를 구한다.

My Top Secret

서울대 선배의 1등급 대비 전략

문제가 0이면 함수가 0이아도 돼. 또, 분자가 0이면 극한값이 0이 아니면 분모가 0인 것을 잘 알아 두어야 해.

1등급 대비 Tip

* 함수의 정의

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n - i^n$ 를 제곱한 값이 양수인 n 가 나오려면 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n - i^n$ 의

문제 분석

어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

왜 1등급, 왜 2등급

1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실하게 알려주어 제시해줍니다.

단서+발상

단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.

개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.

유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.

발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.

적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.

해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

8 입체 탐사 해설!

정답 공식

출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이

문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

해설 적용 공식

해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수

문제를 푸는 과정에서 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이

문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 해강

문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식

문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

출제 개념

출제 개념

문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률

교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서

문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의

풀이 과정에서 주어진 조건을 빼먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정

개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명

더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 특목 풀이

직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

A99 정답 3

* 인수분해를 이용한 미정승의 결정 ... [정답률 88%]

정답 공식: 분수 꼴의 극한의 극한값이 존재하고 $x \rightarrow a$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이면 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

두 상수 a, b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax}{x-1} = b$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (3점)

20. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax) = 0$ 이어야 해

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

18. 함수 $f(x)$ 의 그래프를 이용하여 부등식을 만족시키는 a 의 값을 찾아.

(i) $x=-1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=0$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=3$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) < \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$x \rightarrow a$ 일 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 a 에 한없이 가까워지면 a 를 $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 극한값이라 하고 이것을 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ 로 나타낸다.

(ii) $x=1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=-1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) < \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

20. $f(1)$ 의 값이 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 와 같지 않다면, 우 극한값은 다를 수 도 있어.

20. 다른 풀이: 조건을 만족하는 함수를 구하여 극한값 구하기

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 해. $\therefore f(0)=0 \dots$

* 직선 l 과 선분 PQ가 수직인 이유

원의 중심 A에 대하여 두 선분 AP, AQ는 원의 반지름이므로 AP=AQ이고 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 점선의 길이는 서로 같으므로 OP=OQ이다. 따라서 $\angle OHP = \angle OHQ = 90^\circ$ 이므로 직선 l 과 선분 PQ는 서로 수직이다.

* 다항함수의 극한

다항함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $x \rightarrow k$ 일 때의 극한값의 존재하고 극한값은 $x=k$ 에서의 함수값과 같다. 즉, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$ 가 성립한다.

오석우, 서울대 의예과 2022년 입학 · 공주 한일고 졸업

입성함수의 미분법에 관해 물어보는 아주 기본적인 문장이 있어, 미적분은 다른 과목에 비해 분량이 많기 때문에 개념

수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

D54 정답 2

* 공통된 점선 ... [정답률 62%]

정답 공식: 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 점선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이다.

직선 $y=f(x)$ 가 두 곡선 $y=x^2$, $y=x^2-4$ 에 각각 접할 때, $f(5)$ 의 값은? (4점)

20. 곡선 $y=x^2-4$ 는 곡선 $y=x^2$ 을 y 축의 방향으로 4단 이동한 그래프이다. 즉, 직선 $y=f(x)$ 와 두 곡선이 각각 접하는 점은 서로 같다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

18. 점선의 x좌표를 각각 $x=a$, $x=\beta$ 라 하고 점선의 방정식을 구해

$g(x)=x^2$, $h(x)=x^2-4$ 라 하면 $g'(x)=2x$, $h'(x)=2x$ 이므로, 직선 $y=f(x)$ 와 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 점선의 좌표를 각각 (a, a^2) , (β, β^2-4) 라 하면 $a \neq \beta$ 이고, 점선의 방정식은 각각

$y=2a^2(x-a)+a^2 \dots$

20. 두 곡선이 서로 평행이동한 관계를 가지므로 접점의 직선 $y=f(x)$ 와 같은 접점을 가질 수 있음을 이해하면, 즉 $a \neq \beta$ 라

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이고 미분가능하다.

먼저, 함수 $g(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3)$ 이어야 한다.

20. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

20. 특목 풀이: 방정식 $f(x) = -2x$ 의 세 근 이용하기

두 점 $(2, 4)$, $(-1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y-1 = \frac{4-1}{2+1}(x+1)$ 에서 $y=x+2$ 이다.

이때, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x+2$ 가 $x=2$ 인 점에서 접하고 $x=-1$ 인 점에서 만나지? 즉, 방정식 $f(x)-(x+2)=0$ 은 중근 $x=2$ 와 실근 $x=-1$ 을 가지므로 $f(x)-(x+2)=(x-2)^2(x+1)$ 이라 놓을 수 있어.

$\therefore f(x)=(x^2-3x+4)+(x+2)$

20. 1이므로 함수 $f(x)=(x^2-3x+4)+(x+2)$ 도 최고차항의 계수가 1인 삼차함수기 돼

따라서 $f'(x)=3x^2-6x+1$ 이므로

$f'(3)=3 \times 3^2 - 6 \times 3 + 1 = 10$

20. 평가원 해설

8번 문항과 관련된 이의 제기 내용을 정리하면 3가지로 요약될 수 있습니다. [보기]와 'c'가 'b'인 성립하므로, 'c'가 거짓이라는 주장

부동소수점 'd'의 의미는 '작거나 같다'입니다. 즉, '작다'와 '같다' 중에서 어느 하나만 참이 됩니다. 예를 들어, '2 < 3'과 '2 > 2'는 모두 참인 명제입니다.

평가원 해설

오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.



함수의 극한

★ 유형 차례

- ★ 중요 유형 01 함수의 좌극한과 우극한
- 유형 02 함수의 극한값의 존재
- ★ 중요 유형 03 함수의 극한에 대한 성질
- 유형 04 간단한 함수의 극한값
- 유형 05 가우스 기호를 포함한 함수의 극한
- ★ 중요 유형 06 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 - 분수식
- 유형 07 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 - 무리식
- 유형 08 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한
- 유형 09 $\infty - \infty$ 꼴의 극한
- 유형 10 $\infty \times 0$ 꼴의 극한
- ★ 중요 유형 11 인수분해를 이용한 함수의 미정계수의 결정
- ★ 중요 유형 12 유리화를 이용한 함수의 미정계수의 결정
- 유형 13 분수식의 극한값이 존재할 조건
- ★ 중요 유형 14 새롭게 정의된 함수의 극한
- 유형 15 합성함수의 극한
- ★ 중요 유형 16 함수의 극한을 이용한 다항함수의 결정
- 유형 17 함수의 극한의 대소 관계
- 유형 18 도형의 길이에 대한 극한
- 유형 19 도형의 넓이에 대한 극한
- 유형 20 좌표평면에서의 여러 가지 극한



★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도	출제 유형	난이도
2025	수능	
	9월 유형 01 함수의 좌극한과 우극한	***
2024	6월 유형 01 함수의 좌극한과 우극한	***
	수능 유형 14 새롭게 정의된 함수의 극한	***
2023	9월 유형 01 함수의 좌극한과 우극한	***
	6월 출제되지 않음	
2022	수능 유형 08 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 - 분수식	***
	9월 유형 18 도형의 길이에 대한 극한	***
2021	6월 유형 01 함수의 좌극한과 우극한	***

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 그래프를 주고 우극한값 또는 좌극한값을 구하는 문제가 최근 계속해서 출제되고 있으므로 극한, 우극한, 좌극한의 개념을 확실히 알고 있어야 한다.
- 분수식의 극한값이 존재하는 조건에서의 분모와 분자의 미정계수를 결정하는 유형은 출제 가능성이 매우 높은 유형이다. 극한값이 존재하고 분모(또는 분자)가 0으로 다가갈 때, 분자(또는 분모)의 극한값이 어떻게 되는지 꼭 기억하자.
- 두 함수 이상을 사칙연산으로 정의한 함수나 합성함수의 극한값을 구하는 문제는 함수의 극한 단원에서 고난도로 출제될 수 있는 유형으로 극한의 성질, 합성함수의 성질 등을 정확히 파악하고 있어야 문제에 접근할 수 있다. 고1때 배운 함수의 정의를 한 번 더 복습해 놓자.



A

함수의 극한

개념 강의



중요도 ★★○

1 좌극한과 우극한 - 유형 01~02

함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ (a 는 실수)이면 $x=a$ 에서 $f(x)$ 의
우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 a 로 같다.
또, 그 역도 성립하므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = a$$

출제

2025 9월 모평 4번
2025 6월 모평 4번

★ 주어진 불연속인 그래프를
보고 함수의 좌, 우극한을
찾는 쉬운 난이도의 문제가
계속해서 출제되었다.

★ 개념 보충

1 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하지 않는
경우는

- (i) $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 의 값이 존재하지 않거나
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 의 값이 존재하지 않거나
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 일 때이다.

2 함수의 극한에 대한 성질 - 유형 03, 14~16

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (a, β 는 실수)일 때, $x \rightarrow a+, x \rightarrow a-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ 일 때도 성립한다.

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = ka$ (단, k 는 상수)
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a \pm \beta$ (복호동순)
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a\beta$
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{a}{\beta}$ (단, $g(x) \neq 0, \beta \neq 0$)

3 함수의 극한값의 계산 - 유형 04~10, 14~16, 18~20

실수 k 에 대하여 다항함수 $f(x)$ 의 $x=k$ 에서의
극한값은 $x=k$ 에서의 함수값 $f(k)$ 와 같다. 즉, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$ 이다.

(1) $\frac{0}{0}$ 꼴 : 분자, 분모가 모두 다항식이면 분자, 분모를 각각

인수분해한 다음 약분한다. 분모, 분자 중 무리식이
있으면 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

(3) $\infty - \infty$ 꼴 : 다항식은 최고차항으로 묶고, 무리식은 근호가
있는 쪽을 유리화한다.

(4) $\infty \times 0$ 꼴 : 통분이나 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 또는 $\frac{0}{0}$ 꼴로 변형한다.

출제

2024 수능 14번

★ 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선
 $y=t$ 가 만나는 점의 개수가
3이면 $g(t)$ 의 함수값,
좌극한과 우극한의 값은
모두 3이 되어 합이 9가
된다는 점을 파악하여
함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선
 $y=t$ 가 만나는 점의 개수가
3인 자점이 1개인 경우를
생각해 내야 하는 최상
난이도의 문제가 출제되었다.

★ 개념 보충

2 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값은

- (1) (분모의 차수) < (분자의 차수)이면
 ∞ 또는 $-\infty$ 로 발산한다.
- (2) (분모의 차수) = (분자의 차수)이면
분모와 분자의 최고차항의 계수의
비로 수렴한다.
- (3) (분모의 차수) > (분자의 차수)이면
0으로 수렴한다.

4 미정계수의 결정 - 유형 11~13, 16

실수 a 와 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a$ (a 는 상수)일 때,

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이다.
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이다. (단, $a \neq 0$)

5 함수의 극한과 대소 관계 - 유형 17

실수 a 와 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (a, β 는 실수)일 때,

- (1) $f(x) \leq g(x)$ 이면 $a \leq \beta$
- (2) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고 $a = \beta$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = a$

★ 왜 그럴까?

4 $a \neq 0$ 이라는 조건이 필요하다.
 $f(x) = x-1, g(x) = x+10$ 라 하면
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0,$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$
이지만
 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \neq 0$

★ 한걸음 더!

5 a 에 가까운 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x) < g(x)$ 이지만
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 인 경우가 있기
때문에 $f(x) < g(x)$ 의 양변에 $\lim_{x \rightarrow a}$ 를
취하면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 이다.



1 좌극한과 우극한

[A01~06] 다음 극한을 구하시오.

A01 $\lim_{x \rightarrow 2+} (3x+1)$

A02 $\lim_{x \rightarrow 2-} (-2x+1)$

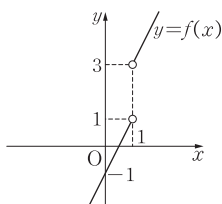
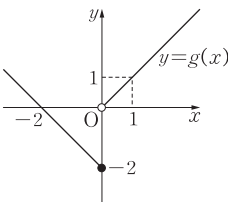
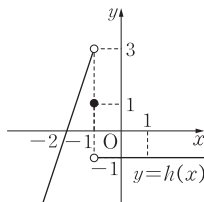
A03 $\lim_{x \rightarrow 0-} |x|$

A04 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|}$

A05 $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

A06 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$

[A07~09] 다음 물음에 답하시오.

A07 그림과 같은 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 의 값을 구하시오.A08 그림과 같은 함수 $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$ 의 값을 구하시오.A09 그림과 같은 함수 $h(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow -1-} h(x)$ 의 값을 구하시오.

2 함수의 극한에 대한 성질

[A10~14] 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 6$ 일 때, 다음 극한값을 구하시오.

A10 $\lim_{x \rightarrow 1} 8f(x)$

A11 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\}$

A12 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\}$

A13 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$

A14 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

3 함수의 극한값의 계산

[A15~20] 다음 극한값을 구하시오.

A15 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

A16 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

A17 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x+2}$

A18 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-1}$

A19 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

A20 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

[A21~24] 다음 극한값을 구하시오.

A21 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x+1}$

A22 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x+1}{2x^2+3}$

A23 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+2}{3x^2+x+1}$

A24 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4x}-7}$

4 미정계수의 결정

[A25~26] 다음 물음에 답하시오.

A25 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+a}{x+1}$ 가 수렴할 때, 상수 a 의 값을 구하시오.A26 두 상수 a, b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2}x+a}{x-2} = b$ 를 만족시킬 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

5 함수의 극한과 대소 관계

[A27~28] 임의의 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 의 값을 구하시오.

A27 $\frac{3x^2+1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{3x+1}{x}$

A28 $x+7 < (x+1)f(x) < x+9$



수능 유형별 기출 문제

[2점, 3점, 쉬운 4점]

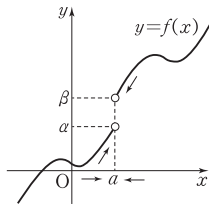
Pass 쉬운 유형, 반복 계산 문제로 패스 하셔도 좋습니다.

1 좌극한과 우극한

유형 01 함수의 좌극한과 우극한



- (1) 좌극한 : x 의 값이 a 보다 작으면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 가까워지면 α 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 좌극한이라 하고, 기호로 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \alpha$ 로 나타낸다.
- (2) 우극한 : x 의 값이 a 보다 크면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 β 에 가까워지면 β 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 우극한이라 하고, 기호로 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \beta$ 로 나타낸다.



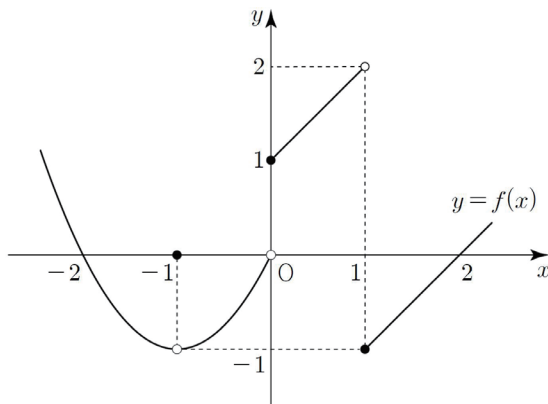
tip

x 의 값이 a 보다 크면서 a 에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \rightarrow a+$ 와 같이 나타내고, x 의 값이 a 보다 작으면서 a 에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \rightarrow a-$ 와 같이 나타낸다.

A29 대표 2024실시 9월 학평 5(고2)



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



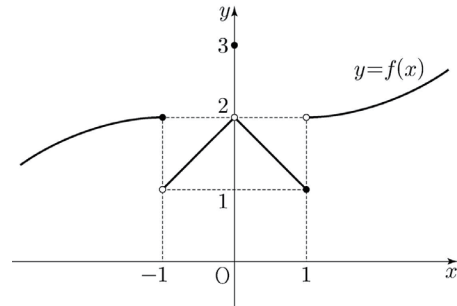
$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은? (3점)

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

A30 2025대비 6월 모평 4(고3)



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



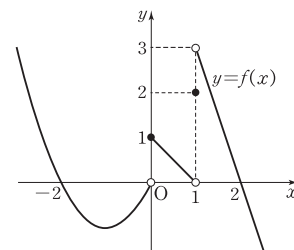
$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 의 값은? (3점)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A31 2018대비(나) 수능 5(고3)



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



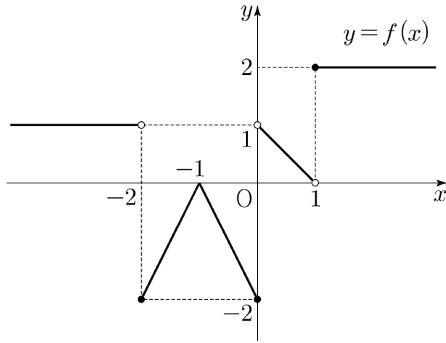
$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$ 의 값은? (3점)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A32 *** 2024대비 9월 모평 4(고3)



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



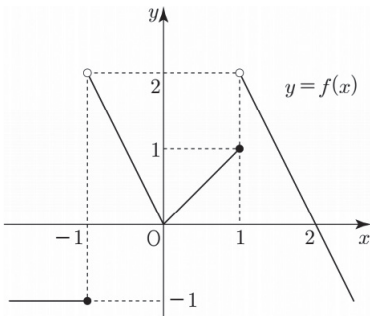
$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 의 값은? (3점)

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

A33 *** 2021실시 9월 학평 5(고2)



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



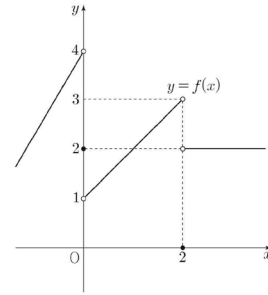
$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 의 값은? (3점)

- ① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

A34 *** 2023실시 11월 학평 4(고2)



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

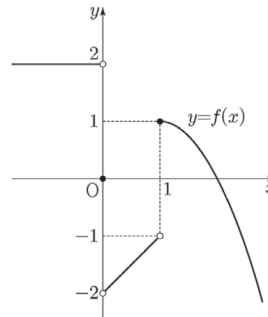


$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$ 의 값은? (3점)

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

A35 *** 2022대비 5월 예시 4(고2)

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$ 의 값은? (3점)

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2



내신 유형별 서술형 문제



문제에서 단서를 찾고
풀이 방법을 생각해 냅니다!



A177 ***

유형 16



최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x+3}f(x)} - \frac{1}{2f(x)} \right\} = -\frac{1}{32}$$

일 때, $f(3)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st $f(x) = 2x^2 + ax + b$ 라 하고 식을 정리한다.

2nd 함수의 극한에 대한 성질을 적용하여 $f(x)$ 를 구한다.

3rd $f(3)$ 의 값을 구한다.

A178 ***

유형 16



최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} x-3 & (x \geq 4) \\ -x+2 & (2 < x < 4) \\ 1 & (x=2) \\ -3x+6 & (x < 2) \end{cases}$$

에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x+2)}$ 와 $\lim_{x \rightarrow 4} f(2x-3)g(x)$ 의 값이

모두 존재할 때, $f(10)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st 함수 $f(x)$ 의 일차항의 계수와 상수항을 결정한다.

2nd 함수 $f(x)$ 의 이차항의 계수를 결정한다.

3rd $f(10)$ 의 값을 구한다.

A179 ***

유형 03



두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x) = \frac{1}{3}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 4$$

$$(다) h(x) = \frac{2g(x) + x^3 f(x)}{6g(x) - 7x^2 f(x)g(x)}$$

1st 분모, 분자를 x 로 나누어 함수의 극한의 성질을 적용할 수 있는 형태로 $h(x)$ 의 식을 변형한다.

2nd 함수의 극한의 성질을 이용하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ 의 값을 구한다.

A180 ***

유형 16



삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,

$f(2)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

$$(가) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \left(\frac{6}{x^2+x+2} - 3 \right) = -\frac{3}{2}$$

1st 함수의 극한의 성질을 이용하여 $f(1), f(0)$ 의 값을 구한다.

2nd 함수의 극한의 성질을 이용하여 $f(x)$ 를 결정한다.

3rd $f(2)$ 의 값을 구한다.



1등급 마스터 문제

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]



A187 *** 2024실시 9월 학평 21(고2)



두 실수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+a} & (x \leq 0) \\ (x+b)^2 & (x > 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{t \rightarrow k-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow k+} g(t)$ 와 $\lim_{t \rightarrow 2k-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow 2k+} g(t)$ 를 모두 만족시키는 양수 k 가 존재한다.

$\lim_{t \rightarrow 16-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16+} g(t) = 2$ 가 되도록 하는 두 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은? (4점)

- ① -11 ② -10 ③ -9
④ -8 ⑤ -7

A188 *** 2023실시 11월 학평 28(고2)



상수항과 계수가 모두 음이 아닌 정수인 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2) + g(2)$ 의 값을 구하시오. (4점)

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2 g(x)}{x^5} = 4$

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \{g(x)\}^2}{x^5} = 2$

A189 *** 2023실시 9월 학평 20(고2)



이차함수 $f(x) = (x-k)^2 (k > 0)$ 이 있다.

양수 a 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 3) \\ kf(x-a) & (x > 3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

(가) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ 가 존재한다.

(나) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 x 축과 오직 한 점에서만 만난다.

[보기]

ㄱ. $f(1) = 1$ 이면 $g(2) = 0$ 이다.

ㄴ. $g(k+a) < g(3)$

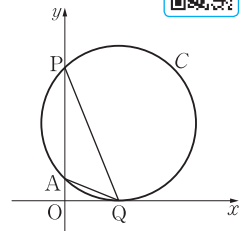
ㄷ. $(k-1)(k-2) \geq 0$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A190 *** 2015실시(가) 6월 학평 15(고2)



그림과 같이 좌표평면 위의 점 $A(0, 1)$ 을 지나고 x 축에 접하는 원 C 가 있다. 원 C 가 y 축과 만나는 또 다른 점을 P 라 하고, x 축과 접하는 점을 $Q(t, 0)$ 이라 하자. 삼각형 APQ 의 넓이를 $S(t)$, 원 C 의 반지름의 길이를 $r(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t \times r(t)}$ 의 값은? (단, $t > 1$ 이다.)



(4점)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$



★ 내신 + 수능 대비

단원별 모의고사

[제한시간 50분]

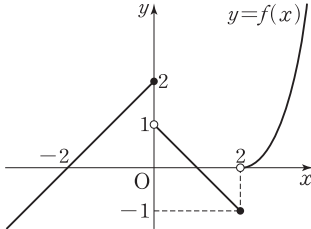
- A 함수의 극한 - 11문항
- B 함수의 연속 - 9문항
- C 미분계수와 도함수 - 11문항
- D 도함수의 활용(1) - 12문항
- E 도함수의 활용(2) - 11문항
- F 부정적분과 정적분 - 12문항
- G 정적분의 활용 - 10문항





모의
A01 ※※※ 2017실시(나) 6월 학평 7(고2)

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 의 값은? (3점)

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

모의
A02 ※※※ 2015대비(A) 6월 모평 3(고3)

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$ 의 값은? (2점)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

모의
A03 ※※※ 2014실시(B) 7월 학평 3(고3)

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$ 의 값은? (2점)

- ① 12 ② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

모의
A04 ※※※ 2006대비(가) 6월 모평 3(고3)

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+15x+13} - \sqrt{x^2-13x})$ 의 값을 구하시오. (3점)

모의
A05 ※※※ 2006대비(가) 6월 모평 3(고3)

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+ax} = b$ (단, $b \neq 0$)가 성립하도록 상수 a, b 의 값을

정할 때, $a+b$ 의 값은? (2점)

- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

모의
A06 ※※※ 2015실시(나) 9월 학평 13(고2)

이차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(4+x)=f(4-x)$ 를

만족시킨다. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$ 일 때, $f(0)$ 의 값은? (3점)

- ① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

모의

A07 * * *

2017실시(나) 9월 학평 16(고2)

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? (4점)

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{3x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{3}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 + x} = -1$$

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

모의

A08 * * *

2013실시(B) 3월 학평 8(고3)

다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x} = 3, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)f(x)} = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? (3점)

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

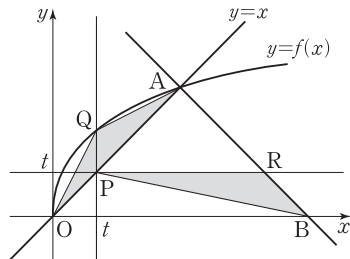
모의

A09 * * *

2016실시(가) 9월 학평 28(고2)



그림과 같이 무리함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 와 만나는 두 점 중에서 원점 O가 아닌 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 직선 $y=x$ 와 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 B라 하자. 직선 $x=t$ 가 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 P, 직선 $x=t$ 가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 Q, 직선 $y=t$ 가 직선 AB와 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 OAQ와 삼각형 PBR의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{T(t)}{S(t)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < t < 1$) (4점)



서술형

모의

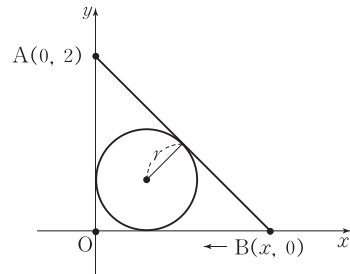
A10 * * *

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x^2+x-3}+ax} = b$ 가 성립하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, $b \neq 0$) (5점)

모의

A11 * * *

그림과 같이 세 점 $A(0, 2)$, $O(0, 0)$, $B(x, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 그 삼각형에 내접하는 원이 있다. 점 B가 x 축을 따라 원점에 한없이 가까워질 때, $\triangle AOB$ 에 내접하는 원의 반지름의 길이 r 에 대하여 $\frac{r}{x}$ 가 k 에 한없이 가까워진다. 이때, $2k$ 의 값을 구하시오. (단, $x > 0$) (9점)





A 함수의 극한



개념 확인 문제

A 01 정답 7 *좌극한과 우극한

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (3x+1) = 3 \times 2 + 1 = 7$$

A 02 정답 -3 *좌극한과 우극한

$$\lim_{x \rightarrow 2-} (-2x+1) = (-2) \times 2 + 1 = -3$$

A 03 정답 0 *좌극한과 우극한

$$\lim_{x \rightarrow 0-} |x| = 0$$

A 04 정답 1 *좌극한과 우극한

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$$

A 05 정답 -2 *좌극한과 우극한

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2-1}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1-} (x+1) = -2 \end{aligned}$$

A 06 정답 0 *좌극한과 우극한

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} (x+1) + \lim_{x \rightarrow 0-} (-x-1) \\ &= 1 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

A 07 정답 1 *좌극한과 우극한

그림에서 x 값이 1보다 작으면서 1에 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1보다 작으면서 1에 가까워진다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$$

A 08 정답 0 *좌극한과 우극한

그림에서 x 값이 0보다 크면서 0에 가까워질 때, $g(x)$ 의 값은 0보다 크면서 0에 가까워진다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 0$$

A 09 정답 3 *좌극한과 우극한

그림에서 x 값이 -1보다 작으면서 -1에 가까워질 때, $h(x)$ 의 값은 3보다 작으면서 3에 가까워진다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1-} h(x) = 3$$

A 10 정답 -8 *함수의 극한에 대한 성질

$$\lim_{x \rightarrow 1} 8f(x) = 8 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 8 \times (-1) = -8$$

A 11 정답 5 *함수의 극한에 대한 성질

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1 + 6 = 5$$

A 12 정답 -7 *함수의 극한에 대한 성질

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1 - 6 = -7$$

A 13 정답 -6 *함수의 극한에 대한 성질

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = (-1) \times 6 = -6$$

A 14 정답 $-\frac{1}{6}$ *함수의 극한에 대한 성질

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$$

A 15 정답 2 *함수의 극한값의 계산

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

A 16 정답 6 *함수의 극한값의 계산

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

A 17 정답 -5 *함수의 극한값의 계산

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-3) = -5$$

A 18 정답 1 *함수의 극한값의 계산

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-1} = \sqrt{2 \times 1 - 1} = 1$$

A 19 정답 $\sqrt{2}+2$ *함수의 극한값의 계산

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{\sqrt{x}-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} \\ &= \sqrt{2}+2 \end{aligned}$$

A 20 정답 2 *함수의 극한값의 계산

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) \\ &= \sqrt{1}+1 = 2 \end{aligned}$$

A 21 정답 3 *함수의 극한값의 계산

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x+1} = \frac{3}{1} = 3$$

A 22 정답 $\frac{1}{2}$ *함수의 극한값의 계산

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 3} = \frac{1}{2}$$

A 23 정답 0 *함수의 극한값의 계산

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 2}{3x^2 + x + 1} = 0$$

A 24 정답 3 *함수의 극한값의 계산

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4x} - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x}} = \frac{3}{\sqrt{1}} = 3$$

A 25 정답 1 *미정계수의 결정

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + a}{x + 1} \text{가 수렴하고 } \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x + a) = 0$$

$$1 - 2 + a = 0 \quad \therefore a = 1$$

A 26 정답 $-\frac{1}{2}$ *미정계수의 결정

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2}x + a}{x - 2} = b \text{로 수렴하고 } \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2}x + a\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \times 2 + a = 0 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2}x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2}(x - 2)}{x - 2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b = -\frac{1}{2}$$

A 27 정답 3 *함수의 극한과 대소 관계

$$\frac{3x^2 + 1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{3x + 1}{x}$$

각 변에 $\lim$ 를 취하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x}$$

여기서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2} = 3, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x} = 3$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$

A 28 정답 1 *함수의 극한과 대소 관계

$$x + 7 < (x + 1)f(x) < x + 9$$

각 변에 $\frac{1}{x + 1}$ 을 곱하면

$$\frac{x + 7}{x + 1} < f(x) < \frac{x + 9}{x + 1}$$

각 변에 $\lim$ 를 취하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 7}{x + 1} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 9}{x + 1}$$

여기서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 7}{x + 1} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 9}{x + 1} = 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$



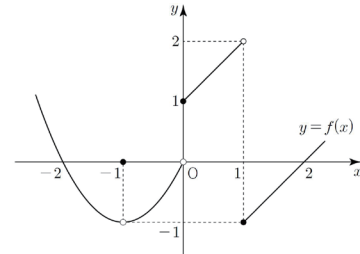
수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]



A 29 정답 ④ *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 83%]

[정답 공식: 함수의 그래프가 제시된 경우 그래프를 따라가며 좌극한과 우극한의 값을 구한다.]

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



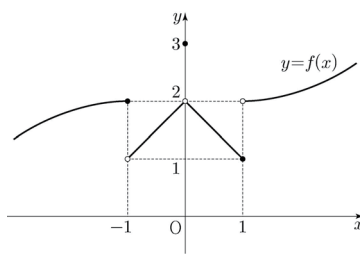
단서1 $x = -1$ 에서의 좌극한값과 우극한값을 찾아.
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은? (3점)
 단서2 $x = 1$ 에서의 좌극한값을 찾아.
 ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

1st $x = -1$ 에서의 극한값과 $x = 1$ 에서의 좌극한값을 각각 구하여 계산하자.
 $x = -1$ 에서의 좌극한값은 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$
 $x = -1$ 에서의 우극한값은 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$
 $x = 1$ 에서의 좌극한값은 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1 + 2 = 1$
 단서: $x = 1$ 의 왼쪽에서 주어진 함수의 그래프를 따라 $x = 1$ 로 접근할 때 y 의 값은 2에 수렴해.

A 30 정답 ③ *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 94%]

[정답 공식: $x \rightarrow 0+$ 는 $x = 0$ 의 오른쪽에서 $x = 0$ 으로 접근하는 것이고, $x \rightarrow 1-$ 는 $x = 1$ 의 왼쪽에서 $x = 1$ 로 접근하는 것이다.]

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



단서 $x = 0$ 에서의 우극한값과 $x = 1$ 에서의 좌극한값의 합이야.
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 의 값은? (3점)
 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 주어진 그래프를 이용하여 극한값을 구해.
 $x = 0$ 의 오른쪽에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 따라 $x = 0$ 으로 접근하면 y 의 값은 2에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2 \rightarrow x = 0$ 에서의 우극한값이야.
 또, $x = 1$ 의 왼쪽에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 따라 $x = 1$ 로 접근하면 y 의 값은 1에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1 \rightarrow x = 1$ 에서의 좌극한값이야.
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2 + 1 = 3$

A 31 정답 ③ *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 91%]

[정답 공식: x 가 특정 값에 가까워질 때 함수값이 가까워지는 값을 그래프에서 찾아 본다.]

단서 1 $x=0$ 에서의 좌극한값을 찾아. $\leftarrow$
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 의 값은? (3점) 단서 2 $x=1$ 에서의 우극한값을 찾아. $\leftarrow$

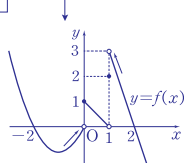
① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

1st 각 점에서의 좌극한값과 우극한값을 각각 구해.

$x=0$ 에서의 좌극한값은 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

$x=1$ 에서의 우극한값은 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 + 3 = 3$



A 32 정답 ① *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 92%]

[정답 공식: 그래프를 따라가며 우극한, 좌극한을 찾는다.]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

단서 1 $x \rightarrow -2+$ 는 $x=-2$ 의 오른쪽에서 -2 로 접근하는 것이야.
 단서 2 $x \rightarrow 1-$ 는 $x=1$ 의 왼쪽에서 1 로 접근하는 것이야.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 의 값은? (3점)

① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

1st 주어진 그래프에서 $x=-2$ 에서의 우극한, $x=1$ 에서의 좌극한을 구하자.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x=-2$ 의 우극한을 구하면

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2$ $\leftarrow x$ 의 값이 -2 의 오른쪽에서 -2 로 접근할 때, 그래프를 따라가면 $f(x)$ 는 -2 에 접근해.

마찬가지로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x=1$ 의 좌극한을 구하면

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ $\leftarrow x$ 의 값이 1 의 왼쪽에서 1 로 접근할 때, 그래프를 따라가면 $f(x)$ 는 0 에 접근해.

$\therefore \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2 + 0 = -2$

A 33 정답 ⑤ *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 98%]

[정답 공식: $x \rightarrow -1+$ 는 $x=-1$ 의 오른쪽에서 그래프를 따라 -1 로 접근하는 것이고, $x \rightarrow 1-$ 는 $x=1$ 의 왼쪽에서 그래프를 따라 1 로 접근하는 것이다.]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

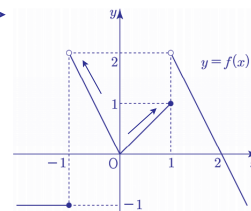
$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 의 값은? (3점)

단서 그래프를 따라가며 $x=-1$ 에서의 우극한값과 $x=1$ 에서의 좌극한값의 합을 구해.

① -1 ② 0 ③ 1
 ④ 2 ⑤ 3

1st 그래프를 이용하여 $x=-1$ 에서의 우극한값과 $x=1$ 에서의 좌극한값을 찾자.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 + 1 = 3$



A 34 정답 ④ *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 95%]

[정답 공식: $x \rightarrow 0-$ 는 $x=0$ 의 왼쪽에서 그래프를 따라 0 으로 접근하는 것이고, $x \rightarrow 2+$ 는 $x=2$ 의 오른쪽에서 그래프를 따라 2 로 접근하는 것이다.]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

단서 주어진 함수의 $x=0$ 에서의 좌극한값과 $x=2$ 에서의 우극한값을 각각 구해.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 의 값은? (3점)

① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

1st $x=0$ 에서의 좌극한값과 $x=2$ 에서의 우극한값을 각각 구해.

$x=0$ 에서의 좌극한값은 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$ $\rightarrow y=f(x)$ 의 그래프를 따라가면 $x=0$ 의 왼쪽에서 0 으로 한없이 접근할 때, 함수값 $f(x)$ 는 4 에 수렴해.

$x=2$ 에서의 우극한값은 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2 = 6$

$y=f(x)$ 의 그래프를 따라가면 $x=2$ 의 오른쪽에서 2 로 한없이 접근할 때, 함수값 $f(x)$ 는 2 에 수렴해.



A 177 정답 12 *함수의 극한을 이용한 다항함수의 결정 · [정답률 60%]

[정답 공식: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = a \neq 0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이다.]

[단서1] $f(x) = 2x^2 + ax + b$

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x+3}f(x)} - \frac{1}{2f(x)} \right\} = -\frac{1}{32}$$

[단서2] $\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x+3}f(x)} - \frac{1}{2f(x)} \right\}$ 은 수렴해

일 때, $f(3)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

[단서3] a, b 의 값을 구하면 $f(3)$ 을 구할 수 있어.



단서+발상

[단서1] $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로

함수 $f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 둘 수 있다. (적용)

[단서2] 극한값이 존재하므로 식을 정리하여 함수의 극한에 대한 성질을 적용할 수 있다. (발상)

[단서3] $f(x)$ 가 결정되면 $f(3)$ 을 계산할 수 있다. 극한의 성질을 적용하여 a, b 의 값을 결정하여 $f(3)$ 의 값을 구할 수 있다. (적용)

--- [문제 풀이 순서] ---

[1st] 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + b$ 라 하고 식을 정리하자.

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{← } f(x) \text{가 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로} \\ f(x) \text{의 이차항의 계수는 2야.} \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2x^2 + ax + b} \times \frac{2 - \sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{2x^2 + ax + b} \times \frac{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})}{2\sqrt{x+3} \times (2 + \sqrt{x+3})} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{2x^2 + ax + b} \times \frac{-(x-1)}{2\sqrt{x+3} \times (2 + \sqrt{x+3})} \right\} = -\frac{1}{32}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(2x^2 + ax + b) \times 2\sqrt{x+3} \times (2 + \sqrt{x+3})} = \frac{1}{32}$$

[2nd] 함수의 극한에 대한 성질을 적용하여 $f(x)$ 를 구하자.

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고,

극한값이 0이 아니므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + ax + b) = 0 \text{에서 } \begin{array}{l} \text{← } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = a \neq 0 \text{이고} \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \end{array}$$

$$2 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x-1}{(2x^2 + ax + b) \times 2\sqrt{x+3} \times (2 + \sqrt{x+3})} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x-1}{(2x^2 + ax - a - 2) \times 2\sqrt{x+3} \times (2 + \sqrt{x+3})} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x-1}{(x-1)(2x+a+2) \times 2\sqrt{x+3} \times (2 + \sqrt{x+3})} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{(2x+a+2) \times 2\sqrt{x+3} \times (2 + \sqrt{x+3})} \right\}$$

$$= \frac{1}{(4+a) \times 4 \times 4} = \frac{1}{32}$$

이므로 $a = -2, b = 0$

[3rd] $f(3)$ 의 값을 구하자.

$$f(x) = 2x^2 - 2x \text{ 이므로 } f(3) = 2 \times 3^2 - 2 \times 3 = 12$$

[채점 기준표]

1st	$f(x) = 2x^2 + ax + b$ 라 하고 식을 정리한다.	4점
2nd	함수의 극한의 성질을 이용하여 $f(x)$ 를 구한다.	5점
3rd	$f(3)$ 의 값을 구한다.	1점

A 178 정답 500 *함수의 극한을 이용한 다항함수의 결정 · [정답률 55%]

[정답 공식: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하면 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 좌극한값과 우극한값이 같다.

[단서1] 상수 a, b, c 에 대하여 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하고 시작해.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} x-3 & (x \geq 4) \\ -x+2 & (2 < x < 4) \\ 1 & (x=2) \\ -3x+6 & (x < 2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{[단서2] } x=0 \text{에서의 함수 } \frac{f(x)}{g(x+2)} \text{의} \\ \text{좌극한값과 우극한값이 같아야 하고} \\ x=4 \text{에서의 함수 } f(2x-3)g(x) \text{의} \\ \text{좌극한값과 우극한값이 같아야 해.} \end{array}$$

에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x+2)}$ 와 $\lim_{x \rightarrow 4} f(2x-3)g(x)$ 의 값이 모두

존재할 때, $f(10)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

[단서3] 주어진 조건을 이용하여 a, b, c 의 값을 결정 후 $f(10)$ 의 값을 구하면 되겠지?



단서+발상

[단서1] $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 상수 a, b, c 에 대하여

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 할 수 있다. (적용)

[단서2] 극한값이 존재하므로 함수의 극한에 대한 성질을 적용할 수 있다. (개념)

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{g(x+2)} \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(2x-3)g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(2x-3)g(x) \text{이어야 한다. (적용)}$$

[단서3] a, b, c 의 값을 각각 결정하고 $f(10)$ 을 계산할 수 있다. (해결)

--- [문제 풀이 순서] ---

[1st] 함수 $f(x)$ 의 일차항의 계수와 상수항을 결정하자.

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라 하자.

이때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x+2)}$ 의 값이 존재하고 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x+2) = 0$ 이므로

$x+2=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0+ \text{일 때 } t \rightarrow 2+ \text{이고 } x \rightarrow 0- \text{일 때 } t \rightarrow 2- \text{이겠지?}$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0+} g(x+2) = \lim_{t \rightarrow 2+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2+} (-t+2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x+2) = \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2-} (-3t+6) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x+2) = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이어야 한다.

따라서 $f(0) = c = 0$ 이므로 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 이다.

한편, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x+2)}$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{g(x+2)} \dots \text{①이어야 한다.}$$

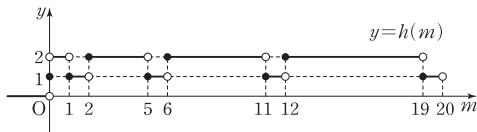
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{-(x+2)+2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (-x^2 - ax - b) = -b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{g(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{-3(x+2)+6} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{-3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{a}{3}x - \frac{b}{3} \right) = -\frac{b}{3} \end{aligned}$$

3rd m 의 값의 범위에 따른 $h(m)$ 의 값을 구하고, 이를 그래프로 나타낸다.
 $h(m)$ 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

m 의 값의 범위	$h(m)$
$m < 0$	$h(m) = 0$
$m = 0$	$h(m) = 1$
$0 < m < 1$	$h(m) = 2$
$1 \leq m < 2$	$h(m) = 1$
$2 \leq m < 5$	$h(m) = 2$
$5 \leq m < 6$	$h(m) = 1$
$6 \leq m < 11$	$h(m) = 2$
$11 \leq m < 12$	$h(m) = 1$
$12 \leq m < 19$	$h(m) = 2$
$19 \leq m < 20$	$h(m) = 1$

따라서 함수 $h(m)$ 의 그래프는 다음과 같다.



4th 그래프를 통해 $\lim_{m \rightarrow a^-} h(m) \neq \lim_{m \rightarrow a^+} h(m)$ 인 a 의 값을 모두 구하여
 $n(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$ 의 값을 구하자.

함수 $h(m)$ 은 $m = 0, 1, 2, 5, 6, 11, 12, 19, 20, \dots$ 에서

$\lim_{m \rightarrow a^-} h(m) \neq \lim_{m \rightarrow a^+} h(m)$ 이다.

$m < 20$ 인 범위에서 함수 $h(m)$ 이 $\lim_{m \rightarrow a^-} h(m) \neq \lim_{m \rightarrow a^+} h(m)$ 을 만족시

키는 서로 다른 실수 a 의 값은 $a = 0, 1, 2, 5, 6, 11, 12, 19$ 로 8개이다.

$$\therefore n(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = 8 \times (0 + 1 + 2 + 5 + 6 + 11 + 12 + 19) = 8 \times 56 = 448$$

[채점 기준표]

1st x 의 값의 범위에 따른 $f(x)$ 의 값을 구한다.	3점
2nd 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프를 그린다.	3점
3rd m 의 값의 범위에 따른 $h(m)$ 의 값을 구하고, 이를 그래프로 나타낸다.	3점
4th 그래프를 통해 $\lim_{m \rightarrow a^-} h(m) \neq \lim_{m \rightarrow a^+} h(m)$ 인 a 의 값을 모두 구하여 $n(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$ 의 값을 구한다.	1점



1등급 마스터 문제

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A 187 정답 ③ *좌표평면에서의 여러 가지 극한 [정답률 40%]

정답 공식: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ 일 때, L 을 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 우극한값이라 하고
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ 일 때, L 을 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 좌극한값이라 한다.

단서1 x 축이 점근선이고 $(0, 2^a)$ 까지 오른쪽 위로 올라가는 곡선이다.

두 실수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+a} & (x \leq 0) \\ (x+b)^2 & (x > 0) \end{cases}$$

단서2 $(-b, 0)$ 이 꼭짓점이고 아래로 볼록한 곡선이다.

이다. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

단서3 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = t$ 는 실수가 만나는 교점의 개수가 서로 다른 실근의 개수이다.

$$\lim_{t \rightarrow -k^-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow -k^+} g(t) \text{와 } \lim_{t \rightarrow -2k^-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow -2k^+} g(t) \text{를 모두}$$

만족시키는 양수 k 가 존재한다. 단서4 $y = g(t)$ 는 $t = k, t = 2k$ 에서 좌극한값과 우극한값이 다르다는 것을 의미해.

$$\lim_{t \rightarrow -16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow -16^+} g(t) = 2 \text{가 되도록 하는 두 실수 } a, b \text{의}$$

순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a + b$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은? (4점)

단서5 $y = f(x), y = t$ 가 두 점에서 만나는 경우가 반드시 있어야 함을 알 수 있어.

- ① -11 ② -10 ③ -9 ④ -8 ⑤ -7

1st 실수 b 의 부호에 따라 각 경우에 따른 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(t)$ 의 그래프를 그려 조건을 만족시키는 경우를 확인하자.

함수 $g(t)$ 에서의 주어진 조건과 $\lim_{t \rightarrow -16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow -16^+} g(t) = 2$ 에서

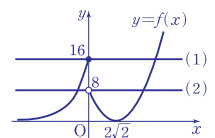
$k = 16$ 또는 $2k = 16$ y 축에 평행한 직선을 그려 보면 (1), (2)처럼 만나는 교점의 개수가 직선 위, 아래를 기준으로 달라지는 경우를 찾을 수 있을 거야.

예를 들어 (1)은 $y = 16$ 과 $y = f(x)$ 와의 교점의 개수가 2이며 16에서의 우극한값은

1(1) 위에서 만나는 교점의 개수가 1)

이고 좌극한값은 2(1) 아래에서 만나는

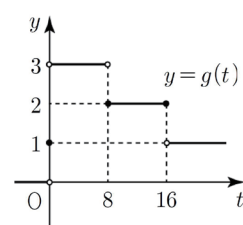
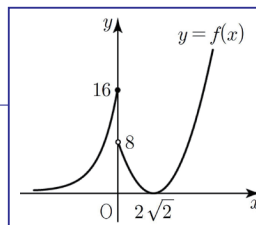
교점의 개수가 2)가 됨을 알 수 있어.



(i) $b < 0$ 인 경우

① $2^a = 16, b^2 = 8$ 일 때,

$k = 8$ 이고 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(t)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



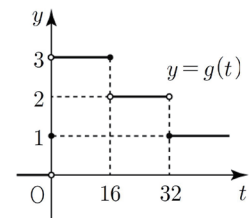
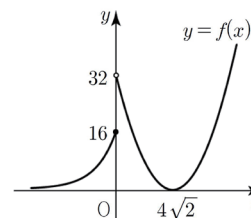
$$\lim_{t \rightarrow -16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow -16^+} g(t) = 2 \times 1 = 2 \text{이므로 조건을 만족시킨다.}$$

$t = 16$ 의 왼쪽에서 주어진 함수의 그래프를 따라 $t = 16$ 으로 접근할 때 $g(t)$ 의 값은 2에 수렴하고,
 $t = 16$ 의 오른쪽에서 주어진 함수의 그래프를 따라 $t = 16$ 으로 접근할 때 $g(t)$ 의 값은 1에 수렴해.

따라서 $a = 4, b = -2\sqrt{2}$

② $2^a = 16, b^2 = 32$ 일 때,

$k = 16$ 이고 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(t)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$$\lim_{t \rightarrow -16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow -16^+} g(t) = 3 \times 2 = 6 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$