## 고등 수학,
## 개념과 유형을 제대로 익히면 누구나 잘 할 수 있습니다.

고등학교 수학은 개념이 어렵다고
공식만 암기하면서 공부해서는 안 됩니다.
개념을 꼼꼼히 이해하고 각 개념의 필수 공식과 문제 유형들을
단계화된 문제를 통해서 정확히 익혀야 합니다.

자이스토리는 학교시험과 최신 학력평가 문제를
철저히 분석해 촘촘하게 유형을 분류하고 개념을 알맞게 적용시키는
세분화된 문제 유형 훈련으로 수학 기본 실력이 탄탄하게 다져집니다.
그래서 하루가 다르게 수학 성적이 향상됨을 느낄 수 있습니다.

또한, 자이스토리의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설,
다른 풀이, 톡톡 풀이, 쉬운 풀이 등은 수학 공부에
흥미와 성취감을 북돋아 줄 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1 등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

**- 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 -**



# 학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [34일]

| Day | 문항 번호 | 틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기 | 날짜 | 복습 날짜 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A 01~56 | | 월 일 | 월 일 |
| 2 | 57~115 | | 월 일 | 월 일 |
| 3 | 116~151 | | 월 일 | 월 일 |
| 4 | B 01~70 | | 월 일 | 월 일 |
| 5 | 71~134 | | 월 일 | 월 일 |
| 6 | 135~172 | | 월 일 | 월 일 |
| 7 | C 01~64 | | 월 일 | 월 일 |
| 8 | 65~104 | | 월 일 | 월 일 |
| 9 | 105~145 | | 월 일 | 월 일 |
| 10 | 146~182 | | 월 일 | 월 일 |
| 11 | 183~216 | | 월 일 | 월 일 |
| 12 | D 01~68 | | 월 일 | 월 일 |
| 13 | 69~128 | | 월 일 | 월 일 |
| 14 | 129~175 | | 월 일 | 월 일 |
| 15 | E 01~66 | | 월 일 | 월 일 |
| 16 | 67~106 | | 월 일 | 월 일 |
| 17 | 107~151 | | 월 일 | 월 일 |
| 18 | 152~200 | | 월 일 | 월 일 |
| 19 | 201~229 | | 월 일 | 월 일 |
| 20 | F 01~50 | | 월 일 | 월 일 |
| 21 | 51~98 | | 월 일 | 월 일 |
| 22 | 99~136 | | 월 일 | 월 일 |
| 23 | G 01~56 | | 월 일 | 월 일 |
| 24 | 57~99 | | 월 일 | 월 일 |
| 25 | 100~138 | | 월 일 | 월 일 |
| 26 | 139~162 | | 월 일 | 월 일 |
| 27 | H 01~68 | | 월 일 | 월 일 |
| 28 | 69~129 | | 월 일 | 월 일 |
| 29 | 130~171 | | 월 일 | 월 일 |
| 30 | I 01~57 | | 월 일 | 월 일 |
| 31 | 58~89 | | 월 일 | 월 일 |
| 32 | 모의 A, B, C | | 월 일 | 월 일 |
| 33 | 모의 D, E, F | | 월 일 | 월 일 |
| 34 | 모의 G, H, I | | 월 일 | 월 일 |



- 나는 _____ 대학교 _____ 학과 _____ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

# 집필진 · 감수진 선생님들



자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

## [ 집필진 ]

**김덕환** 대전 대성여자고등학교
**김대식** 하남 하남고등학교
**민경도** 서울 강남 종로학원
**박소희** 안양 안양외국어고등학교
**박숙녀** 아산 충남삼성고등학교
**배수나** 서울 가인아카데미
**신건률** 대치 다원교육
**신명선** 안양 신성고등학교
**신현준** 안양 신성고등학교
**윤장노** 안양 신성고등학교
**이종석** 일등급 수학 저자
**이창희** 서울 다원교육 고등부
**위경아** 서울 강남대성기숙의대관
**장광걸** 김포 김포외국어고등학교
**장경호** 오산 운천고등학교
**장철희** 서울 보성고등학교
**전경준** 서울 풍문고등학교
**조승원** 수원 경기과학고등학교
**지강현** 안양 신성고등학교
**홍지우** 안양 평촌고등학교
**홍지언** 부산대 수학 박사과정
**황광희** 시흥 시흥고등학교
**수경 수학 컨텐츠 연구소**

[다른 풀이 집필]

**김연주** 목동쌤올림수학
**김호원** 성남 원수학학원
**박소영** 분당 수이학원
**사공 원** 의정부 호연지기
**유대호** 평촌 플랜지에듀
**이강수** 반포 뉴파인
**장영환** 제주 제로링수학교실
**정광조** 서울 로드맵수학

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널 '셀프수학'

## [ 특별 감수진 ]

**김윤기** 가평 가평고등학교
**김인하** 김포 양곡고등학교
**김자영** 고양 백석고등학교
**김재영** 울산 현대청운고등학교
**박우혁** 광주 종로학원/원픽학원
**양경진** 성남 성일고등학교
**양해영** 서울 청출어람학원
**양호석** 남양주 광동고등학교
**오승미** 파주 한민고등학교
**원기찬** 부산 용인고등학교
**이나라** 이천 양정여자고등학교
**이현래** 문경 점촌고등학교
**최선락** 서울 중계수학의중심학원
**허재민** 안동 성희여자고등학교
**황화연** 전주 근영여자고등학교

## [ 감수진 ]

**강마루** 이천 이강학원
**강명훈** 광주 강샘수학
**강성운** 광주 더오름학원
**강승혁** 제주 탐수학
**강하나** 수원 강하나수학
**강학구** 성남 대두수학학원
**권상수** 울산 호크마에듀
**기진영** 인천 밀턴수학
**김광찬** 울산 탑엘리트학원
**김리안** 인천 수리안학원
**김민영** 군포 산본상승수학
**김상윤** 의정부 골드클래스학원
**김서준** 대전 도안쭌쌤수학
**김석영** 부산 영매쓰수학학원
**김이수** 대구 엠프로학원
**김주희** 인천 비콘수학
**김진혁** 세종 일등급수학학원
**김충현** 통영 메카수학전문학원
**김혜영** 창원 프라임수학
**김호원** 성남 분당원수학학원
**노유진** 광주 휴브레인수학학원
**류가은** 광주 이지엘수학
**마계춘** 광주 어썸수학전문학원
**맹규영** 화성 배움트리2지구학원
**박경득** 대구 파란수학
**박경훈** 부산 에듀스미스학원
**박래정** 광주 RJ수학
**박승철** 동탄 마테마티카초중등수학
**박유건** 대구 닥터박수학학원
**박재홍** 용인 열린학원
**박제성** 청주 PJS Math
**박진재** 파주 운정원픽학원
**배지후** 세종 해밀학원
**서동원** 대전 수학의중심학원
**서영란** 천안 아너스수학학원
**서영준** 대전 힐탑학원
**서지은** 성남 분당지은쌤수학
**송우성** 서울 에듀서강
**양우석** 서울 강의하는아이들
**오성민** 광주 프리마수학학원
**오종민** 울산 수학공작소학원
**오진석** 서울 장안동맨투맨학원
**유연준** 인천 두드림수학
**윤성희** 청주 윤성수학
**이규철** 대구 좋은수학
**이민규** 인천 투스카이수학학원
**이민형** 서울 목동PGA학원
**이병준** 대구 경문학원
**이선경** 대구 아르케수학학원
**이애희** 인천 에이탑수학
**이영주** 제주 피드백수학학원
**이유진** 창원 멘토수학
**이정아** 대전 연세수학
**이준용** 서울 강동대산학원
**이지훈** 인천 쌤과통하는학원
**이창민** 부산 참수학
**이창현** 서울 중계미래탐구
**이화정** 서울 잠실구주이배수학학원
**장혜민** 성남 분당수학의아침
**전호동** 대전 호동쌤수학학원
**정미년** 청주 큐엔에이학원
**정소라** 대구 에이원수학
**정황우** 파주 정석수학학원
**조정권** 서울 서초베리타스수학학원
**채준호** 성남 우리들학원
**최상민** 안양 디피에듀학원
**최순학** 서울 수본수학학원
**최영석** 시흥 펀한수학학원
**최정원** 수원 MNB수학학원
**하홍민** 포항 홍수학
**한철용** 광주 위드런수학학원
**함정용** 서울 반포샤크에듀
**현 명** 용인 카이스트학원
**홍동균** 시흥 (배곧)M2수학학원
**황금별** 군포 하이엔드고밀도학원
**황금주** 울산 제이티수학전문학원
**황보정** 서울 구주이배(송파)

[My Top Secret 집필]

**곽지훈** 서울대 수학교육과
**김진형** 서울대 약학과
**정서린** 서울대 약학과
**정호재** 서울대 경제학부
**황대윤** 서울대 수리과학부

# 차 례 [총 156개 유형 분류]

다른 풀이, 쉬운, 톡톡 풀이 대폭 강화

## Ⅰ 지수함수와 로그함수

### A 지수 – 12개 유형 분류


핵심 개념 정리 ..... 10
개념 확인 문제 ..... 11
수능 유형별 기출 문제 ..... 12
내신 유형별 서술형 문제 ..... 30
1등급 마스터 문제 ..... 32
동아리 소개/ 서울대 방그사 ..... 34


### B 로그 – 16개 유형 분류


핵심 개념 정리 ..... 36
개념 확인 문제 ..... 37
수능 유형별 기출 문제 ..... 38
내신 유형별 서술형 문제 ..... 60
1등급 마스터 문제 ..... 62


### C 지수함수와 로그함수 – 23개 유형 분류


핵심 개념 정리 ..... 64
개념 확인 문제 ..... 65
수능 유형별 기출 문제 ..... 66
내신 유형별 서술형 문제 ..... 102
1등급 마스터 문제 ..... 104


### D 지수함수와 로그함수의 활용 – 19개 유형 분류


핵심 개념 정리 ..... 108
개념 확인 문제 ..... 109
수능 유형별 기출 문제 ..... 110
내신 유형별 서술형 문제 ..... 138
1등급 마스터 문제 ..... 140


## Ⅱ 삼각함수

### E 삼각함수 – 27개 유형 분류


핵심 개념 정리 ..... 142
개념 확인 문제 ..... 143
수능 유형별 기출 문제 ..... 144
내신 유형별 서술형 문제 ..... 178
1등급 마스터 문제 ..... 180


### F 삼각함수의 활용 – 12개 유형 분류


핵심 개념 정리 ..... 184
개념 확인 문제 ..... 185
수능 유형별 기출 문제 ..... 186
내신 유형별 서술형 문제 ..... 210
1등급 마스터 문제 ..... 212
동아리 소개/ 포항공대 CHEERO ..... 216

## Ⅲ 수열


### G 등차수열과 등비수열 – 23개 유형 분류

핵심 개념 정리 ..... 218
개념 확인 문제 ..... 219
수능 유형별 기출 문제 ..... 220
내신 유형별 서술형 문제 ..... 242
1등급 마스터 문제 ..... 244
동아리 소개 / 연세대 연세문학회 ..... 246

### H 수열의 합 – 16개 유형 분류

핵심 개념 정리 ..... 248
개념 확인 문제 ..... 249
수능 유형별 기출 문제 ..... 250
내신 유형별 서술형 문제 ..... 276
1등급 마스터 문제 ..... 278

### I 수학적 귀납법 – 8개 유형 분류

핵심 개념 정리 ..... 282
개념 확인 문제 ..... 283
수능 유형별 기출 문제 ..... 284
내신 유형별 서술형 문제 ..... 300
1등급 마스터 문제 ..... 302
동아리 소개 / 서울대 Caffe 人 ..... 304


## Special 내신+수능 대비 단원별 모의고사


A 지수 (10문항) ..... 306
B 로그 (10문항) ..... 308
C 지수함수와 로그함수 (10문항) ..... 310
D 지수함수와 로그함수의 활용 (11문항) ..... 312
E 삼각함수 (11문항) ..... 314
F 삼각함수의 활용 (10문항) ..... 316
G 등차수열과 등비수열 (13문항) ..... 318
H 수열의 합 (10문항) ..... 320
I 수학적 귀납법 (8문항) ..... 322

빠른 정답 찾기 ..... 324



개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

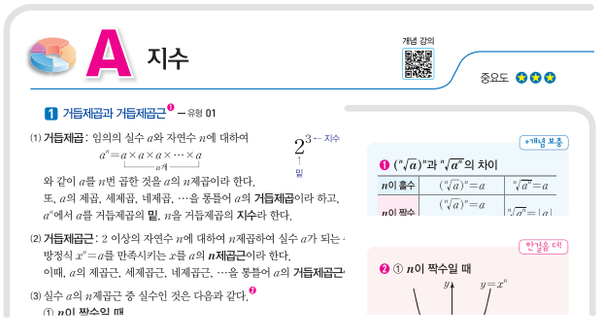
'셀프수학'

# 세분화된 유형 문제 + 서술형 문제 훈련으로 내신 1등급 완성

## 1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

고2 수학의 각 단원에서 가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념을 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 강의하였습니다.

- **중요도** ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- +개념보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2024 수능과 2025 대비 평가원 출제 경향 분석




## 2 개념 확인 문제 – 개념에 대한 이해도 확인 문제

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지 확인할 수 있는 개념 이해 필수 문제를 수록하였습니다.




## 3 내신 유형별 서술형 문제 – 단계별 문제 해결 방법 제시

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계별 풀이 과정을 훈련해서 서술형 문제에 대한 자신감을 키울 수 있게 구성하였습니다.

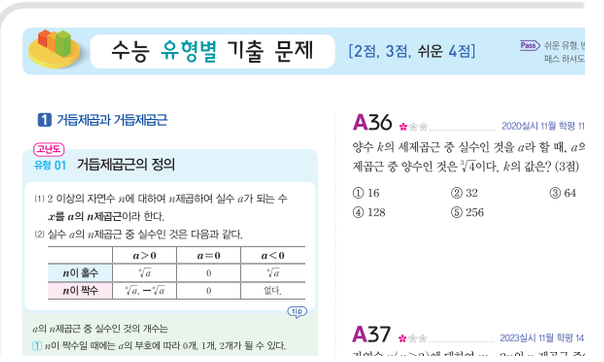



- 1st, 2nd, 3rd : 풀이의 시작과 끝을 막힘없이 따라갈 수 있게 도와주는 단계별 접근을 제시하였습니다.

## 4 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 출제 유형을 촘촘하게 세분화하여 유형순, 개념순, 난이도순으로 문항을 배열하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- QR 코드 : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.



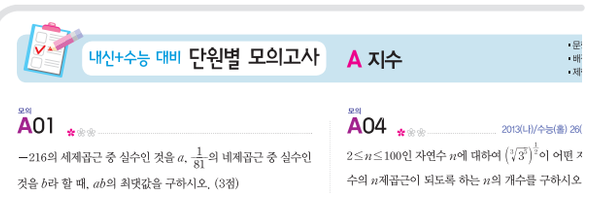

- 유형 분류 : 빈출 – 시험에서 자주 출제되는 유형
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- 대표 : 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.

- 난이도 : ❀❀❀ – 기본 문제 ✿❀❀ – 중급 문제
  ✿✿❀ – 중상급 문제
- Pass : 중복되는 간단한 계산 문제로 패스해도 되는 문제입니다.

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2022대비 수능(홀) 1(고3) : 2021년 11월에 실시한 수능
  - 2022대비 6월 모평 2(고3) : 2021년 6월에 실시한 평가원
  - 2022실시 4월 학평 3(고3) : 2022년 4월에 실시한 학력평가
  - 2023대비 9월 모평 4(고3) : 2022년 9월에 실시한 평가원
  - 표시 없는 문제 : 기출 변형 문제

## 5 내신+수능 대비 단원별 모의고사 – 최종 실력 점검

중단원별 학교시험 필수 문제와 수능형 문항, 서술형 문항을 수록하여 학교시험을 더욱 충실히 대비할 수 있습니다.



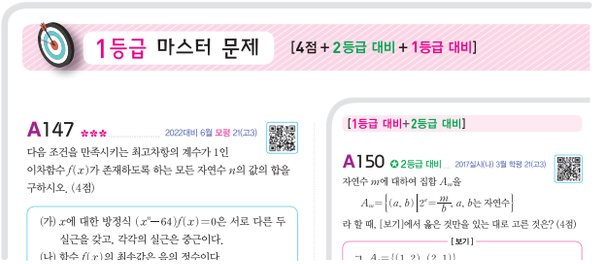
## 6 1등급 마스터 문제 – 대비 문제로 1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다.

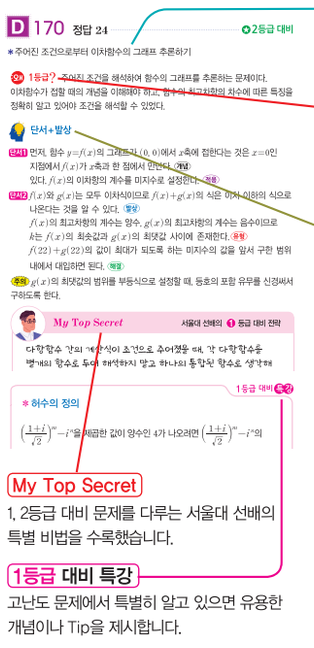
●✻✻✻ – 상급 문제

✪ 2등급 대비 : 정답률이 9~15%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제

✪ 1등급 대비 : 정답률이 9% 미만인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제




## 7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설




**문제 분석**
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

**왜 1등급, 왜 2등급**
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

**My Top Secret**
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

**1등급 대비 특강**
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

**단서+발상**
**단서** 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
**개념** 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
**유형** 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
**발상** 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
**적용** 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
**해결** 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

## 8 입체 첨삭 해설!

**정답 공식**
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

**단계별 명쾌 풀이**
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

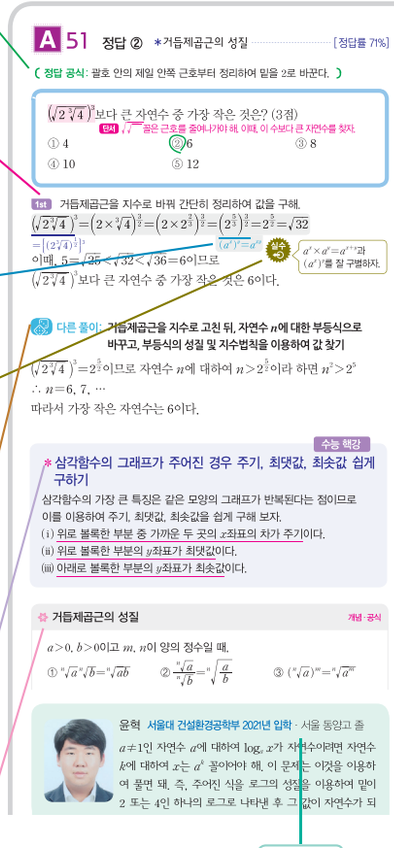
**해설 적용 공식**
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

**실수 주의**
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

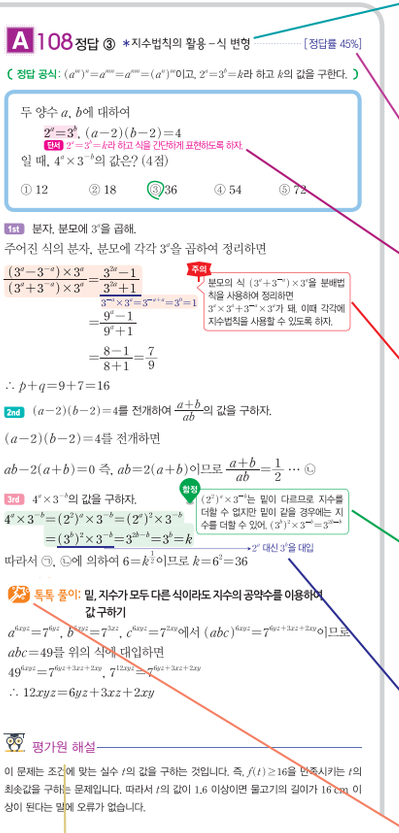
**다른 풀이**
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

**수능 핵강**
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

**개념 공식**
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.




**생생체험**
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.




**평가원 해설**
오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.

**출제 개념**
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

**정답률**
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

**핵심 단서**
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

**주의**
풀이 과정에서 주어진 조건을 빼먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

**참정**
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

**보충 설명**
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

**쉬운 풀이, 톡톡 풀이**
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

# 문항 배열 및 구성 [1594제]

### ❶ 개념 이해를 체크할 수 있는 개념 확인 문제 [227제]

개념 하나하나에 대한 맞춤 확인 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초실력을 쌓도록 구성하였습니다.

### ❷ 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문제 [156유형, 문제 1148제]

- 최신 5개년 고2 학력평가 전문항 수록+2019~2005 고2 학력평가 문제 선별 수록 [580제]
- 고2 난이도에 맞는 고3 수능+평가원+학력평가 문제 선별 수록 [557제]
- 고2 난이도에 맞는 고1 학력평가 문제 선별 수록 [11제]

### ❸ 학교시험+수능 대비를 위한 수능 기출 변형 문제 [131제]

수능에 적합한 개념과 공식을 이해하고 활용할 수 있도록 수능 기출 문제를 변형하여 추가 수록하였습니다.

### ❹ 서술형 단계별 훈련 – 내신 기출 변형 서술형 문제 [90제]

각 단원 중 서술형 출제 방식에 적합하고 출제 비율이 높은 내신 기출 변형 문제를 새롭게 구성하였습니다.

### ❺ 내신+수능 단원별 모의고사 [기출 문제 + 수능 기출 변형 문제 93제]

각 단원에 출제 빈도가 높은 문제를 최신 출제 경향에 따라 구성하였습니다.

## [고2 수학 Ⅰ 문항 구성표]

| | 고1, 2(실시 연도) | | | | 고3(대비 연도) – 고2 난이도 수준 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 연도 | 3월 학평 | 6월 학평 | 9월 학평 | 11월 학평 | 3월 학평 | 4,5월 학평 | 6월 모평 | 7월 학평 | 9월 모평 | 10월 학평 | 수능 | 합계 |
| 2024 | 0 | 30 | 26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 56 |
| 2023 | 0 | 29 | 25 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 70 |
| 2022 | 0 | 30 | 27 | 19 | 6 | 4 | 6 | 5 | 2 | 1 | 3 | 103 |
| 2021 | 0 | 25 | 22 | 19 | 5 | 6 | 5 | 3 | 5 | 7 | 4 | 101 |
| 2020 | 0 | 24 | 23 | 18 | 10 | 5 | 5 | 3 | 5 | 0 | 2 | 95 |
| 2019 | 0 | 44 | 29 | 29 | 14 | 9 | 6 | 7 | 4 | 0 | 4 | 146 |
| 2018 | 3 | 3 | 15 | 11 | 12 | 10 | 5 | 6 | 6 | 2 | 5 | 78 |
| 2017 | 5 | 7 | 3 | 2 | 12 | 7 | 4 | 5 | 7 | 8 | 6 | 66 |
| 2017 이전 | 28 | 32 | 17 | 11 | 48 | 56 | 63 | 31 | 50 | 25 | 59 | 420 |
| 2022, 2014, 2005 대비 예비 평가 문항 수 | | | | | | | | | | | | 11 |
| 수능 기출 변형 문항 수 (156개 유형 수능 기출 변형 문제) | | | | | | | | | | | | 131 |
| 개념 확인 문항 수 | | | | | | | | | | | | 227 |
| 서술형 문항 수 | | | | | | | | | | | | 90 |
| 총 문항 수 | | | | | | | | | | | | 1594 |



# A 지수

## ★ 유형 차례


유형 01 거듭제곱근의 정의
중요 유형 02 거듭제곱근의 성질
유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산
중요 유형 04 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈)
유형 05 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (덧셈)
유형 06 거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건
유형 07 지수법칙의 활용 – 문자로 표현하기
유형 08 지수법칙의 활용 – 식 변형
유형 09 지수법칙의 활용 – $a^x+a^{-x}$ 꼴
유형 10 지수법칙의 활용 – $\frac{a^{kx}\pm a^{-kx}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴
유형 11 지수법칙의 활용
유형 12 지수법칙의 실생활 응용





## ★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

| 학년도 | | 출제 유형 | 난이도 |
|---|---|---|---|
| 2025 | 수능 | | |
| | 9월 | 유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산 | ❀❀❀ |
| | 6월 | 유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산 | ❀❀❀ |
| 2024 | 수능 | 유형 04 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈) | ❀❀❀ |
| | 9월 | 유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산 | ❀❀❀ |
| | 6월 | 유형 04 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈) | ❀❀❀ |
| 2023 | 수능 | 유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산 | ❀❀❀ |
| | 9월 | 유형 02 거듭제곱근의 성질<br>유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산 | ❀❀❀<br>❀❀❀ |
| | 6월 | 유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산 | ❀❀❀ |

## ★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 최근 거듭제곱근의 성질을 이용하여 거듭제곱근이 자연수가 되도록 하는 자연수를 구하는 유형의 문제의 출제 빈도가 높아지고 있다. 기본적인 거듭제곱근에 대한 성질을 정확히 알고 있으면 풀리는 문제들이다. 그리고 거듭제곱근으로 나오는 실근의 개수에 대한 문제도 종종 나오고 있으므로 거듭제곱근의 해에 대한 지식이 필요하다.
- 지수법칙을 이용하는 간단한 계산문제는 지수의 여러 가지 성질과 함께 출제될 가능성이 높다. 쉬운 문제이지만 계산 실수에 주의하여야 하고 지수법칙을 정확히 알고 있어야 한다.
- 지수를 포함한 등식의 활용 문제는 곱셈 공식, 인수분해, 유리식이나 비례식 등을 활용하여 변형하는 연습이 충분히 되어야 한다. 고1 수학에서 배웠던 내용도 한 번 더 정리하자.
- 지수를 사용하여 정의된 식이 주어지는 실생활 문제의 출제 비율이 높으므로 문제의 문자가 의미하는 것을 바르게 파악하여 주어진 식에 정확히 대입하도록 충분한 연습이 필요하다.

# A 지수

개념 강의

중요도 ★★★

## 1 거듭제곱과 거듭제곱근[1] — 유형 01

(1) **거듭제곱**: 임의의 실수 $a$와 자연수 $n$에 대하여

$$a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{개}}$$

$2^3$ ← 지수, $2$ ↑ 밑

와 같이 $a$를 $n$번 곱한 것을 $a$의 $n$제곱이라 한다.
또, $a$의 제곱, 세제곱, 네제곱, …을 통틀어 $a$의 **거듭제곱**이라 하고,
$a^n$에서 $a$를 거듭제곱의 **밑**, $n$을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

(2) **거듭제곱근**: 2 이상의 자연수 $n$에 대하여 $n$제곱하여 실수 $a$가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 $x$를 $a$의 ***n*제곱근**이라 한다.
이때, $a$의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 $a$의 **거듭제곱근**이라 한다.

(3) 실수 $a$의 $n$제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.[2]

① ***n*이 짝수일 때**
$a>0$이면 양수 $\sqrt[n]{a}$와 음수 $-\sqrt[n]{a}$의 2개가 있고,
그 절댓값은 같다.
$a=0$이면 $\sqrt[n]{0}$, 즉 0뿐이다.
$a<0$이면 없다.

② ***n*이 홀수일 때**
$a$의 $n$제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ 오직 하나뿐이다.

| $n$ \ $a$ | $a>0$ | $a=0$ | $a<0$ |
|---|---|---|---|
| $n$이 홀수일 때 | $\sqrt[n]{a}$ | 0 | $\sqrt[n]{a}$ |
| $n$이 짝수일 때 | $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ | 0 | 없다. |

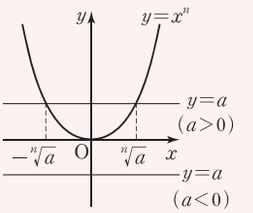
+개념 보충

❶ $(\sqrt[n]{a})^n$과 $\sqrt[n]{a^n}$의 차이

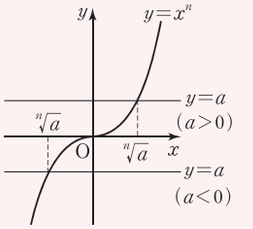
| | $(\sqrt[n]{a})^n$ | $\sqrt[n]{a^n}$ |
|---|---|---|
| $n$이 홀수 | $(\sqrt[n]{a})^n=a$ | $\sqrt[n]{a^n}=a$ |
| $n$이 짝수 | $(\sqrt[n]{a})^n=a$ $(a>0)$ | $\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert$ |

한 걸음 더!

❷ ① $n$이 짝수일 때




② $n$이 홀수일 때




❸ $a>0$이고 $n$이 2 이상의 자연수일 때, $\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$

## 2 거듭제곱근의 성질[3] — 유형 02

$a>0$, $b>0$이고 $m$, $n$이 양의 정수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ ⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, $p$는 자연수)

## 3 지수의 확장[4] — 유형 03~12

### (1) 지수가 0 또는 음의 정수인 경우

$a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ (단, $a\neq0$, $n$은 자연수)

### (2) 지수가 유리수인 경우

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ (단, $a>0$, $m$, $n$은 정수, $n>0$)

### (3) 지수법칙[5]

$a>0$, $b>0$이고 $x$, $y$가 실수일 때,

① $a^xa^y=a^{x+y}$ 예 $2^2\times2^3=2^{2+3}=2^5$

② $a^x\div a^y=a^{x-y}$ 예 $3^5\div3^2=3^{5-2}=3^3$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ 예 $(5^2)^4=5^{2\times4}=5^8$

④ $(ab)^x=a^xb^x$ 예 $(7\times11)^2=7^2\times11^2$

출제 2025 9월 모평 1번, 2025 6월 모평 1번, 2024 수능 1번

★ 주어진 식에서 밑을 통일하고 지수법칙을 이용하여 값을 구하는 아주 쉬운 문제가 1번 문제로 계속 출제되고 있다.

+개념 보충

❹ $a^{\frac{m}{n}}$과 같이 지수가 유리수인 경우, $a$가 자연수일 때, $a^{\frac{m}{n}}$이 자연수가 되기 위한 조건은 $m$이 $n$의 배수 또는 $n$이 $m$의 약수일 때이다.

❺ 밑이 같을 때와 다를 때를 구분해! 간단한 계산 문제뿐만 아니라 문장제 문제도 꼭 하나씩 출제된다. 지수법칙을 이용할 때는 먼저 밑이 같은지 다른지를 확인하고 같은 밑에 대해서 지수끼리 더할지, 곱할지를 정확하게 계산하자.

## 1 거듭제곱과 거듭제곱근

[A01~02] 다음 거듭제곱근을 구하시오.

**A01** $-1$의 세제곱근

**A02** $16$의 네제곱근

[A03~04] 다음 거듭제곱근 중 실수인 것을 구하시오.

**A03** $-8$의 세제곱근

**A04** $81$의 네제곱근

[A05~08] 다음 값을 구하시오.

**A05** $\sqrt[3]{8}$

**A06** $-\sqrt[4]{16}$

**A07** $\sqrt[5]{(-5)^5}$

**A08** $\sqrt[4]{256}$

## 2 거듭제곱근의 성질

[A09~12] 다음 식을 간단히 하시오.

**A09** $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25}$

**A10** $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$

**A11** $(\sqrt[8]{100})^4$

**A12** $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

[A13~14] 다음 식을 간단히 하시오.

**A13** $\sqrt[3]{3\sqrt{4}}\times\sqrt[6]{\dfrac{16}{9}}$

**A14** $\dfrac{\sqrt[6]{27}\times\sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}$

[A15~16] 다음 거듭제곱근의 값을 구하시오.

**A15** $\sqrt{\dfrac{9^7+3^{11}}{9^4+3^5}}$

**A16** $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$

## 3 지수의 확장

[A17~20] 다음 값을 구하시오.

**A17** $(-3)^0$

**A18** $5^{-2}$

**A19** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$

**A20** $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}$

[A21~23] 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a\neq0$)

**A21** $a^4\times a^3\div a^6$

**A22** $(a^{-2})^4\times(a^{-3})^{-5}$

**A23** $\dfrac{(a^{-6})^3\times(a^3)^6}{a^3\times a^{-6}}$

[A24~26] 다음 식을 간단히 하시오.

**A24** $2^{-2}\times8^{\frac{7}{3}}$

**A25** $(5^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}}\div125$

**A26** $9^{\frac{1}{2}}\times3^{-3}\div27^{-\frac{2}{3}}$

[A27~28] $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$일 때, 다음 거듭제곱을 $a$, $b$를 이용하여 나타내시오.

**A27** $\sqrt[6]{12}$

**A28** $6^6$

[A29~31] 곱셈공식을 이용하여 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a$, $b$는 양수)

**A29** $(a-b)\div\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$

**A30** $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

**A31** $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

**A32** 두 실수 $x$, $y$에 대하여 $15^x=25$, $375^y=125$일 때, $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}$의 값을 구하시오.

**A33** $a^{2x}=\sqrt{2}-1$일 때, $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 값을 구하시오.

❖ 정답 및 해설 2~3p

# 수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

Pass 쉬운 유형, 반복 계산 문제로 패스 하셔도 좋습니다.

## 1 거듭제곱과 거듭제곱근

### 유형 01 거듭제곱근의 정의

(1) 2 이상의 자연수 $n$에 대하여 $n$제곱하여 실수 $a$가 되는 수 $x$를 $a$의 $n$**제곱근**이라 한다.

(2) 실수 $a$의 $n$제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

| | $a>0$ | $a=0$ | $a<0$ |
|---|---|---|---|
| $n$이 홀수 | $\sqrt[n]{a}$ | 0 | $\sqrt[n]{a}$ |
| $n$이 짝수 | $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ | 0 | 없다. |

tip

$a$의 $n$제곱근 중 실수인 것의 개수는

1 $n$이 짝수일 때에는 $a$의 부호에 따라 0개, 1개, 2개가 될 수 있다.

2 $n$이 홀수일 때에는 항상 1개이다.

**A34** 대표 2024실시 9월 학평 14(고2)

$2\le n\le 10$인 자연수 $n$에 대하여 $n^2+1$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$, $n^2-8n+12$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n)=2g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 $n$의 값의 합은? (4점)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

**A35** 2016실시(나) 11월 학평 13(고2)

실수 $a$, $b$에 대하여 $a$는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 $b$의 네제곱근일 때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

**A36** 2020실시 11월 학평 11(고2)

양수 $k$의 세제곱근 중 실수인 것을 $a$라 할 때, $a$의 네제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[3]{4}$이다. $k$의 값은? (3점)

① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

**A37** 2023실시 11월 학평 14(고2)

자연수 $n(n\ge 2)$에 대하여 $m-2n$의 $n$ 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(3)+f(4)=3$을 만족시키는 모든 자연수 $m$의 값의 합은? (4점)

① 18 ② 23 ③ 28
④ 33 ⑤ 38

**A38** 2019실시(가) 6월 학평 26(고2)

두 집합 $A=\{5, 6\}$, $B=\{-3, -2, 2, 3, 4\}$가 있다. 집합 $C=\{x\,|\,x^a=b, x$는 실수, $a\in A, b\in B\}$에 대하여 $n(C)$의 값을 구하시오. (4점)

**A39** 2024실시 6월 학평 26(고2)

자연수 $n$에 대하여 $\sqrt[n+1]{8}$이 어떤 자연수의 네제곱근이 되도록 하는 모든 $n$의 값의 합을 구하시오. (4점)

# 내신 유형별 서술형 문제

문제에서 단서를 찾고 풀이 방법을 생각해 냅니다!

## A137 ✻❀❀ 유형 01

2 이상 30 이하인 자연수 $n$에 대하여 $n-9$의 $n$제곱근 중 양의 실수가 존재하고, $n-20$의 $n$제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 $n$의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st $n-9$의 $n$제곱근 중 양의 실수가 존재하는 $n$의 조건을 구한다.

2nd $n-20$의 $n$제곱근 중 음의 실수가 존재하는 $n$의 조건을 구한다.

3rd 자연수 $n$의 개수를 구한다.

## A138 ✻✻❀ 유형 06

2 이상의 두 자연수 $m$, $n$에 대하여 $x$에 대한 방정식

$$(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$$

이 서로 다른 세 실근 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$을 가진다. 세 수 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$이 모두 정수일 때, $m+n=k$를 만족시키는 모든 자연수 $k$의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st 세 실근을 가지기 위한 $m$, $n$의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$을 구한다.

2nd $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$이 서로 다른 정수가 되기 위한 $m$, $n$, $k$의 값을 각각 구한다.

## A139 ✻❀❀ 유형 11

등식

$$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}=(2^a+2^b)^3$$

을 만족시키는 유리수 $a$, $b$에 대하여 $3a+b$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $a>b$) (10점)

1st $\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}$의 값을 구한다.

2nd $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$의 값을 구한다.

3rd $3a+b$의 값을 구한다.

## A140 ❀❀❀ 유형 02

1이 아닌 세 양수 $a$, $b$, $c$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $a$는 $b$의 5제곱근이다.
(나) $c$는 $\sqrt[3]{a}$의 네제곱근이다.

$\frac{b}{c}=a^x$일 때, 실수 $x$의 값을 $\frac{q}{p}$라 하자. $q-p$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $p$, $q$는 서로소인 자연수이다.) (10점)

1st 거듭제곱근의 정의를 활용해서 $a$, $b$, $c$의 관계를 구한다.

2nd $a$, $b$, $c$를 한 문자로 표현하여 $x$의 값을 구한다.

## A141 ✿❀❀ 유형 08

0이 아닌 네 실수 $a$, $b$, $c$, $k$가 다음 조건을 만족시킬 때, $k$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

(가) $27^a=25^b=15^c$
(나) $kab=(2b+3a)c$

## A142 ✿✿❀ 유형 11

$x$에 대한 이차방정식

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x^2-18x+\sqrt{a}\times\sqrt[2\times3]{a}\times\sqrt[3\times4]{a}=0$$

의 서로 다른 두 실근 $\alpha$, $\beta$에 대하여 $\alpha\times\beta$의 값이 정수가 되도록 하는 모든 자연수 $a$의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

## A143 ✿❀❀ 유형 09

1이 아닌 두 양수 $a$, $b$와 두 실수 $x$, $y$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a^{\frac{b}{a}}=b^a=(ab)^{ab}$
(나) $a^{\frac{2}{x}}=3$
(다) $b^{2y}+1=6b^{y+1}$

$36\times3^x-\dfrac{2+b^{2y}+b^{-2y}}{3^x-1}$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

## A144 ✿✿❀ 유형 06

$\left(\dfrac{n}{18}\right)^{\frac{n}{12}}$이 자연수가 되도록 하는 500보다 작은 모든 자연수 $n$의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

## A145 ✿❀❀ 유형 06

$x=\dfrac{1}{2}(3^{10}-2\times3^{-10})$일 때, $\sqrt[n]{x+\sqrt{x^2+2}}$가 자연수가 되는 1보다 큰 자연수 $n$의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

## A146 ✿❀❀ 유형 12

사람의 몸 안에 들어온 방사성 물질 세슘 137은 신체 대사 작용을 통해 시간이 지남에 따라 일정한 비율로 몸 밖으로 빠져나간다. 이때 이 물질이 절반만큼 몸 밖으로 빠져나가는 데 걸리는 시간을 세슘 137의 생물학적 반감기라 하고 세슘 137의 생물학적 반감기는 110일이다. 세슘 137이 몸 안에 들어왔을 때 응급약인 프러시안 블루를 처방하면 세슘 137의 생물학적 반감기를 30일로 줄일 수 있다고 한다.
어떤 사고로 A와 B의 몸 안에 세슘 137이 각각 320 mg, 20 mg이 들어와서 응급조치가 필요한 A에게만 프러시안 블루를 처방하였을 때, A의 체내 세슘 137의 양이 B의 세슘 137의 양과 같아지는 시점은 사고일로부터 $n$일 후라고 한다. 자연수 $n$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.
(단, $n$은 자연수) (10점)

❖ 정답 및 해설 26~31p

# 1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

## A147 ★★★ 2022대비 6월 모평 21(고3)

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 $n$의 값의 합을 구하시오. (4점)

(가) $x$에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

## A148 ★★★ 2019실시(가) 6월 학평 21(고2)

자연수 $n$에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\sqrt[4]{9\times 2^{n+1}} & (n\text{이 홀수})\\ \sqrt[4]{4\times 3^{n}} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 $p$, $q$에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(p, q)$의 개수는? (4점)

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

## A149 ★★★ 2017실시(가) 6월 학평 17(고2)

두 집합 $A=\{3, 4\}$, $B=\{-9, -3, 3, 9\}$에 대하여 집합 $X$를

$$X=\{x \mid x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x \text{는 실수}\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$

ㄴ. 집합 $X$의 원소의 개수는 8이다.

ㄷ. 집합 $X$의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 $\sqrt[4]{3^7}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## [1등급 대비+2등급 대비]

## A150 ✪2등급 대비 2017실시(나) 3월 학평 21(고3)

자연수 $m$에 대하여 집합 $A_m$을

$$A_m=\left\{(a, b)\,\middle|\, 2^a=\frac{m}{b},\ a, b\text{는 자연수}\right\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_4=\{(1, 2), (2, 1)\}$

ㄴ. 자연수 $k$에 대하여 $m=2^k$이면 $n(A_m)=k$이다.

ㄷ. $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 $m$의 개수는 23이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## A151 ✪2등급 대비 2016대비(A) 수능 16(고3)

어느 금융상품에 초기자산 $W_0$을 투자하고 $t$년이 지난 시점에서의 기대자산 $W$가 다음과 같이 주어진다고 한다.

$$W=\frac{W_0}{2}\times 10^{at}(1+10^{at})$$

(단, $W_0>0$, $t\geq 0$이고, $a$는 상수이다.)

이 금융상품에 초기자산 $w_0$을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 $w_0$을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 $k$배일 때, 실수 $k$의 값은? (단, $w_0>0$) (4점)

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

❖ 정답 및 해설 32~34p

# 내신+수능 대비 단원별 모의고사

# A 지수

- 문항 수 10개
- 배점 40점
- 제한시간 50분

모의
## A01 ❀❀❀

$-216$의 세제곱근 중 실수인 것을 $a$, $\frac{1}{81}$의 네제곱근 중 실수인 것을 $b$라 할 때, $ab$의 최댓값을 구하시오. (3점)

모의
## A02 ❀❀❀

$3\times\sqrt[3]{16}+2\times\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{k}$를 만족시키는 자연수 $k$에 대하여 $\frac{k}{48}$의 값은? (4점)

① 12 ② 36 ③ 54
④ 72 ⑤ 96

모의
## A03 ❀❀❀ 2017실시(나) 3월 학평 3(고2)

$8^{\frac{2}{3}}\times 27^{-\frac{1}{3}}$의 값은? (2점)

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

모의
## A04 ✿❀❀ 2013대비(나) 수능 26(고3)

$2\le n\le 100$인 자연수 $n$에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 $n$제곱근이 되도록 하는 $n$의 개수를 구하시오. (4점)

모의
## A05 ✿❀❀ 2007대비(나) 9월 모평 20(고3)

세 양수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $a^6=3$, $b^5=7$, $c^2=11$일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 최소의 자연수 $n$의 값을 구하시오. (3점)

모의
## A06 ❀❀❀ 2015실시(A) 3월 학평 7(고3)

두 실수 $a$ , $b$에 대하여 $2^a=3$, $3^b=\sqrt{2}$가 성립할 때, $ab$의 값은? (3점)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

모의

## A07 ✿❀❀

2010대비(나) 6월 모평 4(고3)

실수 $a$가 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, $4^a+4^{-a}$의 값은? (3점)

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{17}{4}$

④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

모의

## A08 ✿✿❀

2005실시(나) 3월 학평 22(고3)

$f(n)=a^{\frac{1}{n}}$ (단, $a>0$, $a\neq1$)일 때,

$f(2\times3)\times f(3\times4)\times\cdots\times f(9\times10)=f(k)$

를 만족하는 상수 $k$에 대하여 $10k$의 값을 구하시오. (4점)

모의

## A09 ✿✿❀

2009실시(가) 3월 학평 16(고3)

원기둥 모양의 수도관에서 단면인 원의 넓이를 $S$, 원의 둘레의 길이를 $L$이라 하고, 수도관의 기울기를 $I$라 하자. 이 수도관에서 물이 가득 찬 상태로 흐를 때 물의 속력을 $v$라 하면

$$v=c\left(\frac{S}{L}\right)^{\frac{2}{3}}\times I^{\frac{1}{2}}$$ (단, $c$는 상수이다.)

이 성립한다고 한다.

단면인 원의 반지름의 길이가 각각 $a$, $b$인 원기둥 모양의 두 수도관 A, B에서 물이 가득 찬 상태로 흐르고 있다. 두 수도관 A, B의 기울기가 각각 0.01, 0.04이고, 흐르는 물의 속력을 각각 $v_A$, $v_B$라고 하자. $\frac{v_A}{v_B}=2$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은? (단, 두 수도관 A, B에 대한 상수 $c$의 값은 서로 같다.) (4점)

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 8

④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 16

## 서술형

모의

## A10 ✿✿❀

어떤 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 시각 $t$에서의 개체수를 $N(t)$라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$N(t)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-bt}}$$ (단, $a$, $b$, $c$는 양의 상수)

이때, $K$는 이 생물의 최대개체량이다.

이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=5$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{1}{2}$이었고, $t=7$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{3}{4}$이었다. 이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=9$일 때의 개체수를 $\frac{q}{p}K$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) (10점)



❖ 정답 및 해설 526~528p

# A 지수

## 개념 확인 문제

**A 01** 정답 $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

$-1$의 세제곱근을 $x$라 하면 $x^3=-1$이므로

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 $-1$의 세제곱근은 $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

**A 02** 정답 $\pm 2i, \pm 2$ ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

16의 네제곱근을 $x$라 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0$, $(x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x+2i)(x-2i)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm 2$

따라서 16의 네제곱근은 $\pm 2i$, $\pm 2$이다.

**A 03** 정답 $-2$ ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

$-8$의 세제곱근을 $x$라 하면 $x^3=-8$이므로

$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

이때, $x^2-2x+4=0$은 실근을 갖지 않으므로 $x+2=0$에서 $x=-2$

따라서 $-8$의 세제곱근 중 실근인 것은 $-2$이다.

**A 04** 정답 $-3, 3$ ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

81의 네제곱근을 $x$라 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0$, $(x^2-9)(x^2+9)=0$

이때, $x^2+9=0$은 실근을 갖지 않으므로 $x^2-9=0$에서

$(x+3)(x-3)=0$ $\therefore\ x=-3$ 또는 $x=3$

따라서 81의 네제곱근 중 실근인 것은 $-3$, 3이다.

**A 05** 정답 2 ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

**A 06** 정답 $-2$ ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

$-\sqrt[4]{16}=-\sqrt[4]{2^4}=-2$

**A 07** 정답 $-5$ ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

$\sqrt[5]{(-5)^5}=-5$

**A 08** 정답 4 ····· *거듭제곱과 거듭제곱근

$\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$

**A 09** 정답 5 ····· *거듭제곱근의 성질

$\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5\times 25}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

**A 10** 정답 3 ····· *거듭제곱근의 성질

$\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}=\sqrt[4]{\frac{729}{9}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

**A 11** 정답 10 ····· *거듭제곱근의 성질

$(\sqrt[8]{100})^4=\sqrt[8]{100^4}=\sqrt[8]{10^8}=10$

**A 12** 정답 2 ····· *거듭제곱근의 성질

$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

**A 13** 정답 2 ····· *거듭제곱근의 성질

$\sqrt[3]{3\sqrt{4}}\times\sqrt[6]{\frac{16}{9}}=\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{6\times\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

**A 14** 정답 1 ····· *거듭제곱근의 성질

$\frac{\sqrt[6]{27}\times\sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[12]{3^2}}{\sqrt[6]{3^4}}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{3^4}}=\sqrt[6]{\frac{3^3\times 3}{3^4}}=\sqrt[6]{\frac{3^4}{3^4}}=\sqrt[6]{1}=1$

**A 15** 정답 27 ····· *거듭제곱근의 성질

$\sqrt{\frac{9^7+3^{11}}{9^4+3^5}}=\sqrt{\frac{3^{14}+3^{11}}{3^8+3^5}}=\sqrt{\frac{3^{11}(3^3+1)}{3^5(3^3+1)}}=\sqrt{3^6}=3^3=27$

**A 16** 정답 16 ····· *거듭제곱근의 성질

$\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}=\sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}=\sqrt{\frac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}}=\sqrt{2^8}=2^4=16$

**A 17** 정답 1 ····· *지수의 확장

$(-3)^0=1$

**A 18** 정답 $\frac{1}{25}$ ····· *지수의 확장

$5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

**A 19** 정답 32 ····· *지수의 확장

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=2^5=32$

**A 20** 정답 $\frac{27}{64}$ ····· *지수의 확장

$\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

**A 21** 정답 $a$ ····· *지수의 확장

$a^4\times a^3\div a^6=a^{4+3-6}=a$

**A 22** 정답 $a^7$ ····· *지수의 확장

$(a^{-2})^4\times(a^{-3})^{-5}=a^{-8}\times a^{15}=a^{-8+15}=a^7$

## A 23 정답 $a^3$ *지수의 확장

$$\frac{(a^{-6})^3\times(a^3)^6}{a^3\times a^{-6}}=\frac{a^{-18}\times a^{18}}{a^{3+(-6)}}=\frac{a^{(-18)+18}}{a^{-3}}=a^{0-(-3)}=a^3$$

## A 24 정답 32 *지수의 확장

$$2^{-2}\times 8^{\frac{7}{3}}=2^{-2}\times(2^3)^{\frac{7}{3}}=2^{-2}\times 2^7=2^{-2+7}=2^5=32$$

## A 25 정답 5 *지수의 확장

$$(5^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}}\div 125=5^{\sqrt{16}}\div 5^3=5^4\div 5^3=5^{4-3}=5$$

## A 26 정답 1 *지수의 확장

$$\begin{aligned}9^{\frac{1}{2}}\times 3^{-3}\div 27^{-\frac{2}{3}}&=(3^2)^{\frac{1}{2}}\times 3^{-3}\div(3^3)^{-\frac{2}{3}}\\&=3\times 3^{-3}\div 3^{-2}\\&=3^{1+(-3)-(-2)}=3^0=1\end{aligned}$$

## A 27 정답 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ *지수의 확장

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$$\sqrt[6]{12}=12^{\frac{1}{6}}=\left(2^2\right)^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{6}}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$$

## A 28 정답 $a^{12}b^{18}$ *지수의 확장

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$$6^6=2^6\times 3^6=(2^{\frac{1}{2}})^{12}\times(3^{\frac{1}{3}})^{18}=a^{12}b^{18}$$

## A 29 정답 $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ *지수의 확장

$$(a-b)\div\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$$

## A 30 정답 $a+b$ *지수의 확장

$$\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3=a+b$$

## A 31 정답 $a-b$ *지수의 확장

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)&=\left\{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right\}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\\&=\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\\&=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2\\&=a-b\end{aligned}$$

## A 32 정답 $-2$ *지수의 확장

$25^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{2}{x}}=15$, $125^{\frac{1}{y}}=5^{\frac{3}{y}}=375$이므로

$$5^{\frac{2}{x}}\div 5^{\frac{3}{y}}=5^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}=\frac{15}{375}=\frac{1}{25}=5^{-2}$$

$$\therefore\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-2$$

## A 33 정답 $2\sqrt{2}-1$ *지수의 확장

분모, 분자에 $a^x$을 각각 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}&=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2+\frac{1}{\sqrt{2}-1}}{(\sqrt{2}-1)+1}\\&=\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}-2}{2}=2\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

### 수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

## A 34 정답 ③ *거듭제곱근의 정의 [정답률 74%]

**정답 공식**: $a$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것의 개수는 $a>0$일 때 $n$이 홀수이면 1, 짝수이면 2이고, $a<0$일 때 $n$이 홀수이면 1, 짝수이면 0이다.

$2\le n\le 10$인 자연수 $n$에 대하여 $n^2+1$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$, $n^2-8n+12$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n)=2g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 $n$의 값의 합은? (4점)

단서 $a$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것의 개수는 $a$의 부호에 따라 $n$이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 생각해.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

**1st** $f(n)$을 구해.

$2\le n\le 10$인 자연수 $n$에 대하여 $n^2+1>0$이므로 $n^2+1$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것은 $n$이 홀수일 때 1개, $n$이 짝수일 때 2개이다.

$n^2+1$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것은 $n$이 홀수이면 $\sqrt[n]{n^2+1}$이고 $n$이 짝수이면 $\pm\sqrt[n]{n^2+1}$이야.

$$\therefore f(n)=\begin{cases}1 & (n=3,\ 5,\ 7,\ 9)\\ 2 & (n=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10)\end{cases}$$

**2nd** $g(n)$을 구해.

$n^2-8n+12=(n-2)(n-6)$이므로

$n<2$ 또는 $n>6$일 때, $n^2-8n+12>0$

$n=2$ 또는 $n=6$일 때, $n^2-8n+12=0$

$2<n<6$일 때, $n^2-8n+12<0$

따라서 $n^2-8n+12$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것은

(i) $n<2$ 또는 $n>6$일 때, $n$이 홀수이면 1개, $n$이 짝수이면 2개이다.

$n^2-8n+12>0$이므로 $n^2-8n+12$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것은 $n$이 홀수이면 $\sqrt[n]{n^2-8n+12}$, $n$이 짝수이면 $\pm\sqrt[n]{n^2-8n+12}$이야.

(ii) $n=2$ 또는 $n=6$일 때, 1개이다.

$n^2-8n+12=0$이고 0의 $n$ 제곱근은 0이야.

(iii) $2<n<6$일 때, $n$이 홀수이면 1개, $n$이 짝수이면 0개이다.

$n^2-8n+12<0$이므로 $n^2-8n+12$의 $n$ 제곱근 중 실수인 것은 $n$이 홀수이면 $\sqrt[n]{n^2-8n+12}$, $n$이 짝수이면 없어.

(i)~(iii)에 의하여 $g(n)=\begin{cases}0 & (n=4)\\ 1 & (n=2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9)\\ 2 & (n=8,\ 10)\end{cases}$

**3rd** $f(n)=2g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 $n$의 값을 구해.

$f(n)=2g(n)$을 만족시켜야 하므로 $f(n)=2$, $g(n)=1$이다.

$f(n)=1$이면 $g(n)=\frac{1}{2}$, $f(n)=2$이면 $g(n)=1$이어야 해. 그런데 $g(n)$으로 가능한 값은 0, 1, 2이므로 $f(n)=2g(n)$을 만족시키는 경우는 $f(n)=2$, $g(n)=1$ 뿐이야.

즉, 이것을 만족시키는 모든 자연수 $n$의 값은 2, 6이고 그 합은 $2+6=8$이다.

## A 50 정답 ② *거듭제곱근의 성질 [정답률 79%]

정답 공식: $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^n}=a$이고, 곱셈 공식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$\sqrt{(-2)^6}+(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$의 값은? (3점)

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

단서 $\sqrt[3]{9}=(\sqrt[3]{3})^2$, $\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{2})^2$이므로 곱셈 공식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$을 생각하자.

1st 거듭제곱근의 성질을 이용하여 $\sqrt{(-2)^6}$을 간단히 하자.

$\sqrt{(-2)^6}=\sqrt{2^6}=\sqrt{8^2}=8$

$\sqrt[n]{a^n}=a$가 성립하려면 $a>0$이어야 하므로 $(-2)^6=2^6$으로 고쳐서 계산한 거야.

2nd 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식의 값을 구하자.

$(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$

$=(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})\{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2\}$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$=(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3$

$=3-2=1$

$\therefore \sqrt{(-2)^6}+(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=8+1=9$

## A 51 정답 15 *거듭제곱근의 성질 [정답률 62%]

정답 공식: $a<0$일 때, $n$이 짝수이면 $a$의 $n$제곱근 중에서 실수인 것은 없고, $n$이 홀수이면 실수인 것은 음수 한 개뿐이다.

단서 $\sqrt[n]{a}$에서 $n$이 홀수이면 $a$의 $n$제곱근 중 실수인 것은 한 개뿐이고 음수가 되기 위해서는 $a<0$이어야 하지.

모든 실수 $x$에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$가 음수가 되도록 하는 모든 자연수 $a$의 값의 합을 구하시오. (3점)

1st 세제곱근이 음수가 되기 위해서는 세제곱근 안의 값이 음수일 때밖에 없지?

모든 실수 $x$에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$가 음수가 되려면

$-x^2+2ax-6a<0$

세제곱근 $\sqrt[3]{\ }$이 음수가 되기 위해서 근호 안의 값이 음수가 되어야 해.

$x^2-2ax+6a>0$

2nd 모든 실수 $x$에 대하여 (이차식)$>0$이 되기 위해서는 (이차식)$=0$의 판별식이 음수일 때야.

이차방정식 $x^2-2ax+6a=0$의 판별식을 $D$라 할 때,

$\frac{D}{4}=a^2-6a=a(a-6)<0$

$y=x^2-2ax+6a$라 하면 이차함수의 그래프가 $x$축보다 위에 있어야 하므로 $x$축과 만나지 않아야 해.
즉, 이차방정식 $x^2-2ax+6a=0$은 실근을 가지지 않아야 하므로 판별식 $D<0$이야.

$\therefore 0<a<6$

따라서 자연수 $a$는 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$1+2+3+4+5=15$

## A 52 정답 ② *거듭제곱근의 성질 [정답률 71%]

정답 공식: 괄호 안의 제일 안쪽 근호부터 정리하여 밑을 2로 바꾼다.

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? (3점)

단서 $\sqrt{\ }$ 꼴은 근호를 줄여나가야 해. 이때, 이 수보다 큰 자연수를 찾자.

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

1st 거듭제곱근을 지수로 바꿔 간단히 정리하여 값을 구해.

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=\left(2\times\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2\times2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$

$=\left\{\left(2\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^3$ $(a^x)^y=a^{xy}$

실수 ⭕ $a^x\times a^y=a^{x+y}$과 $(a^x)^y$을 잘 구별하자.

이때, $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

6, 7, 8, …

다른 풀이: **거듭제곱근을 지수로 고친 뒤, 자연수 $n$에 대한 부등식으로 바꾸고, 부등식의 성질 및 지수법칙을 이용하여 값 찾기**

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=2^{\frac{5}{2}}$이므로 자연수 $n$에 대하여 $n>2^{\frac{5}{2}}$이라 하면 $n^2>2^5$

$\therefore n=6, 7, \cdots$

따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

## A 53 정답 ③ *거듭제곱근의 성질 [정답률 55%]

정답 공식: $x^n=a$를 만족시키는 실근의 개수는

$n$이 짝수이면 $\begin{cases} a>0 \text{ (2개)} \\ a=0 \text{ (1개)} \\ a<0 \text{ (0개)} \end{cases}$

$n$이 홀수이면 $a$의 값에 관계없이 항상 1개임을 적용한다.

단서 자연수 $n$에 대하여 $x^3=n(n-4)$를 만족시키는 $x$의 개수를 구하는 거야.

자연수 $n$에 대하여 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하고, $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n)>g(n)$을 만족시키는 모든 $n$의 값의 합은? (4점)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

1st 세제곱근의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구해.

자연수 $n$에 대하여 $n(n-4)$의 세제곱근은

$x^3=n(n-4)$

$a$의 세제곱근은 $x^3=a$를 만족시키는 $x$를 구하는 것이고 $a$의 세제곱근은 $a^3$이야. 혼동하지 말자!!

이때, $y=x^3$이라 하면 원점에 대하여 대칭이므로

$n(n-4)$의 값이 음수이든 양수이든 항상 실수인 것은 1개이다.

$f(x)=x^4$에서 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$이므로 $y=x^3$은 원점에 대하여 대칭인 그래프야.

$\therefore f(n)=1$

2nd 네제곱근의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구해.

자연수 $n$에 대하여 $n(n-4)$의 네제곱근은

$x^4=n(n-4)$

이때, $y=x^4$이라 하면 $y$축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=x^4$에서 $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$이므로 $y=x^4$은 $y$축에 대하여 대칭인 그래프야.

$g(n)=\begin{cases} 0 & (n(n-4)<0) \\ 1 & (n(n-4)=0) \\ 2 & (n(n-4)>0) \end{cases}$

3rd $f(n)>g(n)$을 만족시키는 자연수 $n$의 값을 구해.

$f(n)>g(n)$을 만족시키는 경우는 $g(n)=0$일 때이므로

$n(n-4)<0$ $\therefore 0<n<4$

따라서 자연수 $n$은 1, 2, 3으로 합은 $1+2+3=6$

톡톡 풀이: **$n$이 짝수 또는 홀수일 때, 방정식 $x^n=a$의 실근의 개수의 특징을 이용하여 합 구하기**

자연수 $n$의 값에 상관없이 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로 $f(n)=1$

$f(n)=1>g(n)$이 성립하는 경우는 $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.

$n(n-4)<0$

$\therefore 0<n<4$

따라서 자연수 $n$의 값은 1, 2, 3이므로 합은 $1+2+3=6$

## A 54 정답 ④ *거듭제곱근의 성질 [정답률 68%]

( 정답 공식: ${}^n\sqrt{a}\,{}^n\sqrt{b}={}^n\sqrt{ab}$임을 이용한다. )

$x$에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 $b$일 때, $ab$의 값은? ($a$, $b$는 상수이다.) (4점)

단서 이차방정식에서 두 근이 주어졌으니 근과 계수의 관계를 이용해.

① 6 ② $3\sqrt[3]{9}$ ③ $6\sqrt[3]{3}$
④ 12 ⑤ $6\sqrt[3]{9}$

**1st** 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $a$, $b$에 관한 식을 구해.

$x$에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 $b$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x$에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{3}b=a$

**2nd** $a$, $b$에 관한 식을 이용하여 $ab$를 계산해야 해.

$b=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{3^4}=\sqrt[3]{3^3\times3}=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{3}=3\times\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$

$a=\sqrt[3]{3}b=\sqrt[3]{3}\times2\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3^2}$

$\therefore\ ab=2\sqrt[3]{3^2}\times2\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{3^3}=4\times3=12$

$2\sqrt[3]{3^2}\times2\sqrt[3]{3}=2\times2\times\sqrt[3]{3^2\times3}=4\sqrt[3]{3^3}$

## A 55 정답 ② *거듭제곱근의 성질 [정답률 67%]

( 정답 공식: $A=10^{\frac{1}{6}}$, $B=5^{\frac{1}{2}}=125^{\frac{1}{6}}$, $C=28^{\frac{1}{6}}$이다. )

세 수 $A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}$, $B=\sqrt{5}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? (3점)

단서 지수법칙을 이용하여 지수를 통일하여 크기를 비교해 볼까?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

**1st** 지수법칙을 이용하여 거듭제곱근 $A$, $B$, $C$의 지수를 통일해 볼까?

${}^m\sqrt{a}=a^{\frac{1}{m}}$

$A=\sqrt[6]{10}=10^{\frac{1}{6}}$, $B=\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$, $C=\sqrt[6]{28}=28^{\frac{1}{6}}$

이 세 수를 각각 6제곱하면

실수 지수인 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$을 통분하기 위해서 6, 2, 6의 최소공배수를 곱해.

$A^6=10$, $B^6=5^3=125$, $C^6=28$

$\therefore\ A^6<C^6<B^6\ \Rightarrow A<C<B$ ($\because A>0$, $B>0$, $C>0$)

양수의 거듭제곱근이니까.

**다른 풀이: 거듭제곱근의 성질 ${}^m\sqrt{{}^n\sqrt{a}}={}^{mn}\sqrt{a}$임을 이용하여 계산하기**

세 수 $A$, $B$, $C$를 같은 거듭제곱근인 ${}^6\sqrt{\ }$으로 나타내 볼까?

$A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}$, $B=\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}=\sqrt[6]{28}$

${}^m\sqrt{a^n}={}^{mk}\sqrt{a^{nk}}$

$\therefore\ A<C<B$

${}^m\sqrt{{}^n\sqrt{a}}={}^{mn}\sqrt{a}$

### 지수법칙 개념·공식

$a>0$, $b>0$이고, $x$, $y$가 실수일 때

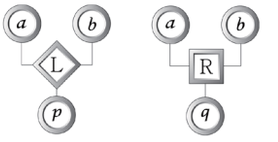
① $a^xa^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$
③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

## A 56 정답 ③ *거듭제곱근의 성질 [정답률 69%]

( 정답 공식: ${}^m\sqrt{a}={}^{mn}\sqrt{a^n}$이다. )

[그림 1]과 같은 두 종류의 연산 장치 L, R가 있다.

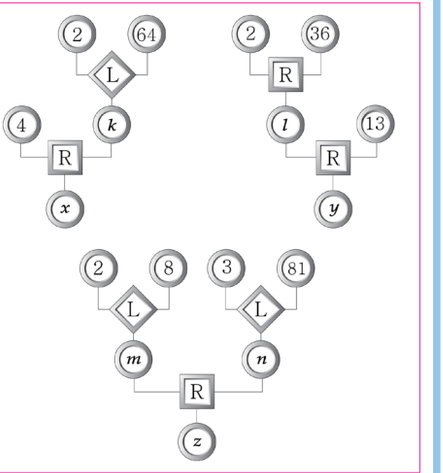
2 이상의 두 자연수 $a$, $b$에 대하여 연산 장치 L에 두 수 $a$, $b$가 입력될 때 출력되는 수 $p$는 $p=\log_a b$이고, 연산 장치 R에 두 수 $a$, $b$가 입력될 때 출력되는 수 $q$는 $q={}^q\sqrt{b}$이다.




[그림 1]

위의 두 종류의 연산 장치를 결합하여 만든 [그림 2]의 각 연산 장치에서 출력되는 세 수 $x$, $y$, $z$의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (4점)

단서 L의 계산인 $p=\log_a b$에 입력되는 두 수는 거듭제곱 관계에 있으므로 계산 결과가 자연수로 나와 어렵지 않지만 R의 계산 결과는 자연수로 나오지 않으므로 제곱근을 이용하여 간단하게 정리해서 나타내야 해.




[그림 2]

① $x<y<z$ ② $x<z<y$ ③ $y<x<z$
④ $y<z<x$ ⑤ $z<x<y$

**1st** $x$, $y$, $z$의 값을 각각 구하자.

$k=\log_2 64=\log_2 2^6=6$이므로 $x=\sqrt[4]{6}$

$\log_a a^b=b$

$l=\sqrt{36}=6$이므로 $y=\sqrt[6]{13}$

$m=\log_2 8=\log_2 2^3=3$, $n=\log_3 81=\log_3 3^4=4$이므로 $z=\sqrt[3]{4}$

$\log_a a^b=b$ $\log_a a^b=b$

**2nd** $x$, $y$, $z$의 크기를 비교하자.

$x$, $y$, $z$가 서로 다른 거듭제곱근으로 나타나 있지? 같은 거듭제곱근으로 통일해서 비교해.

세 수 4, 6, 3의 최소공배수는 12이므로 거듭제곱의 성질을 이용하여 세 수 $x$, $y$, $z$를 십이제곱근으로 모두 나타내면

$x=\sqrt[4]{6}=\sqrt[12]{6^3}=\sqrt[12]{216}$

$y=\sqrt[6]{13}=\sqrt[12]{13^2}=\sqrt[12]{169}$

$z=\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}$

${}^m\sqrt{a^p}={}^{mn}\sqrt{a^{pn}}$

이고, $\sqrt[12]{169}<\sqrt[12]{216}<\sqrt[12]{256}$이므로 $y<x<z$

$169<216<256$이므로 $\sqrt[12]{169}<\sqrt[12]{216}<\sqrt[12]{256}$이야.

## A 79 정답 25 *지수법칙 – 밑이 같은 계산 ····· [정답률 90%]

( **정답 공식**: $a^m \div a^n = a^{m-n}$임을 이용한다. )

$5^{\frac{7}{3}} \div 5^{\frac{1}{3}}$의 값을 구하시오. (3점) **단서** 밑이 5로 같은 두 수의 나눗셈은 지수의 뺄셈으로 계산할 수 있어.

**1st** 지수법칙을 이용하자.

$5^{\frac{7}{3}} \div 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}} = 5^2 = 25$

$a>0$일 때, 두 실수 $m, n$에 대하여 $a^m \div a^n = a^{m-n}$

## A 80 정답 ③ *지수법칙 – 밑이 같은 계산 ····· [정답률 90%]

( **정답 공식**: 양수 $a$에 대하여 $(a^m)^n = a^{mn}$ (단, $m$, $n$은 실수) )

$(3^{2+\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}}$의 값은? (2점)

**단서** 지수가 실수일 때의 지수법칙을 적용할 수 있어.

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

**1st** 지수법칙을 활용하여 지수를 간단히 나타내.

지수법칙에 의하여

$(3^{2+\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}} = 3^{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

**2nd** 곱셈공식을 이용하여 주어진 식의 값을 구해.

$3^{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 3^{2^2-(\sqrt{2})^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$

지수를 간단하게 나타내기 위해 곱셈공식 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$을 활용해.

## A 81 정답 ② *지수법칙–밑이 같은 계산 ····· [정답률 91%]

( **정답 공식**: $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$ )

$(2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2}$의 값은? (2점)

**단서** 지수법칙을 이용하여 계산해.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

**1st** $(2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2}$의 값을 구해.

$(2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2} = (2^{\sqrt{3}} \times 2^2)^{\sqrt{3}-2} = (2^{\sqrt{3}+2})^{\sqrt{3}-2}$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



**김찬우** 전남대 의예과 2022년 입학 · 전북 이리고 졸

1번 문제부터 지수에 무리수가 있어서 순간 당황했지? 근데 지수법칙으로 식을 정리하면 지수는 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$을 이용하여 간단히 정리가 돼. 지수에 무리수가 나왔다고 당황하지 말고 차분히 계산하면 쉽게 풀 수 있는 문제였어!

## A 82 정답 ③ *지수법칙 – 밑이 다른 계산(곱셈) ····· [정답률 97%]

( **정답 공식**: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ )

$24 \times 2^{-3}$의 값은? (2점)

**단서** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$이지?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**1st** 지수법칙을 이용해.

$24 \times 2^{-3} = 24 \times \frac{1}{8} = 3$

$2^{-n} = \frac{1}{2^n}$

## A 83 정답 ③ *지수법칙 – 밑이 다른 계산(곱셈) ····· [정답률 98%]

( **정답 공식**: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ )

$6 \times 2^{-1}$의 값은? (2점)

**단서** 지수법칙을 이용하자.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**1st** 지수법칙을 이용해.

$6 \times 2^{-1} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$

$a \neq 0$이고 $n$이 자연수일 때, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

## A 84 정답 ④ *지수법칙 – 밑이 다른 계산(곱셈) ····· [정답률 92%]

( **정답 공식**: $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}}$임을 이용한다. )

$6 \times 8^{\frac{1}{3}}$의 값은? (2점)

**단서** $8 = 2^3$이니까 두 자연수의 곱으로 계산해.

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

**1st** 지수법칙을 이용하여 계산을 해보자.

$6 \times 8^{\frac{1}{3}} = 6 \times (2^3)^{\frac{1}{3}} = 6 \times 2^{3 \times \frac{1}{3}}$

$= 6 \times 2 = 12$

**실수 주의** $(a^x)^y = a^{xy}$으로 $8^{\frac{1}{3}}$을 간단히 할 수 있어.

## A 85 정답 ① *지수법칙 – 밑이 다른 계산(곱셈) ····· [정답률 95%]

( **정답 공식**: $27^{\frac{1}{3}} = 3^{3 \times \frac{1}{3}}$임을 이용한다. )

$2 \times 27^{\frac{1}{3}}$의 값은? (2점) **단서** $27 = 3^3$이니까 두 자연수의 곱으로 계산해.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

**1st** $27^{\frac{1}{3}}$을 정리하여 계산해.

$2 \times 27^{\frac{1}{3}} = 2 \times (3^3)^{\frac{1}{3}} = 2 \times 3^{3 \times \frac{1}{3}} = 2 \times 3^1 = 6$

$(a^m)^n = a^{mn}$

## A 135 정답 ② *지수법칙의 실생활 응용 ····· [정답률 65%]

**정답 공식:** 부패지수가 각각 $P_1$, $4P_1$일 때 관계식의 각 문자에 해당하는 값을 대입하고, 두 식을 나눠서 구하고자 하는 값을 찾는다.

어떤 물질의 부패지수 $P$와 일평균 습도 $H(\%)$, 일평균 기온 $t(℃)$ 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$P=\frac{H-65}{14}\times(1.05)^{t}\cdots ⓐ$$

❶일평균 습도가 72 %, 일평균 기온이 10 ℃인 날에 이 물질의 부패지수를 $P_1$이라 하자.❷일평균 습도가 79 %, 일평균 기온이 $x$ ℃인 날에 이 물질의 부패지수가 $4P_1$일 때, $x$의 값은? (단, $1.05^{14}=2$로 계산한다.) (4점)

단서 ⓐ를 가지고 ❶과 ❷의 자료를 대입하여 정리해. 이때, ❷는 ❶의 4배이지?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

**1st** 주어진 식에 조건을 각각 대입해.

$P_1$일 때 $H=72(\%)$, $t=10(℃)$이므로

$$P_1=\frac{72-65}{14}\times(1.05)^{10}=\frac{1}{2}\times(1.05)^{10}\cdots ㉠$$

$P_2$일 때 $H=79(\%)$, $t=x(℃)$이므로

$$4P_1=\frac{79-65}{14}\times(1.05)^{x}=(1.05)^{x}\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 → ㉡은 ㉠의 4배이니까 $4\times$㉠$=$㉡

$$4\times\left\{\frac{1}{2}\times(1.05)^{10}\right\}=(1.05)^{x}$$ → $a^m=a^n$일 때 $a^m\div a^n=1$, 즉 $a^{m-n}=1$

$(1.05)^{x-10}=2$

그런데 $1.05^{14}=2$이므로 $(1.05)^{x-10}=1.05^{14}$

밑이 1.05로 같으니까 지수를 비교해.

$x-10=14$ $\therefore x=24$

## A 136 정답 ③ *지수법칙의 실생활 응용 ····· [정답률 71%]

**정답 공식:** 2006년도 인구수를 구하고 그 값의 2배가 될 때, $t$의 값은 어떻게 될지 구해본다.

어느 도시의 $t$년도 인구수를 $P\times10^6$(명)이라 하면

$P=5\times2^{\frac{t-2001}{15}}$ ($t=2006$을 대입!)

단서 2006년의 인구수를 구한 뒤, 그 2배가 되는 해를 찾자.

인 관계가 성립한다고 한다. 이 도시의 인구수가 2006년 인구수의 2배가 되는 해는? (3점)

① 2017년 ② 2019년 ③ 2021년
④ 2023년 ⑤ 2025년

**1st** 먼저 2006년도의 인구수 $P$를 구해야겠지?

2006년도의 인구수를 $P\times10^6$(명)이라 하면

$$P=5\times2^{\frac{2006-2001}{15}}=5\times2^{\frac{5}{15}}=5\times2^{\frac{1}{3}}\cdots ㉠$$

**2nd** 인구수가 2배가 되는 해를 구하자.

이 도시의 인구수 $P'\times10^6$(명)이 2006년 인구수의 2배가 되는 해를 $t$라 하자.

$$P'=5\times2^{\frac{t-2001}{15}}=2P$$

㉠에서 $2P=2\times5\times2^{\frac{1}{3}}=5\times2^{\frac{4}{3}}$이므로 지수를 비교하면

[지수법칙] $a^n\times a^m=a^{n+m}$

$\frac{4}{3}=\frac{t-2001}{15}$, $20=t-2001$

$\therefore t=2021$

## 내신 유형별 서술형 문제

## A 137 정답 10 *거듭제곱근의 정의 ····· [정답률 67%]

**정답 공식:** $a$의 $n$제곱근 중 실수는 $x$에 대한 방정식 $x^n=a$의 실근이다.

단서 $n$의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 각 경우에서의 부호에 따른 실근을 조사해.

2 이상 30 이하인 자연수 $n$에 대하여 $n-9$의 $n$제곱근 중 양의 실수가 존재하고, $n-20$의 $n$제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 $n$의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

### 단서+발상

단서 $a$의 $n$제곱근 중 실수는 $x$에 대한 방정식 $x^n=a$의 실근과 같다. $a$의 $n$제곱근 중 양의 실근이 존재하기 위해서 $a>0$이어야 하고, $a$의 $n$제곱근 중 음의 실근이 존재하기 위해서 $a>0$이고 $n$은 짝수이거나, $a<0$이고 $n$은 홀수이어야 한다. (개념)

따라서 $n$의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 $n-9$와 $n-20$의 부호에 따른 실수가 존재하는 $n$의 조건을 구할 수 있다. (적용)

### [문제 풀이 순서]

**1st** $n-9$의 $n$제곱근 중 양의 실수가 존재하는 $n$의 조건을 구하자.

$n-9$의 $n$제곱근 중 양의 실수가 존재하기 위해서는

$n-9>0$이어야 한다. $\therefore n>9\cdots ㉠$

**2nd** $n-20$의 $n$제곱근 중 음의 실수가 존재하는 $n$의 조건을 구하자.

$n-20$의 $n$제곱근 중 음의 실수가 존재하기 위해서는

[$a$의 $n$제곱근 중 음의 실수가 존재하는 경우]

$a>0$, $n$이 짝수인 경우 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$, $x=-a^{\frac{1}{n}}$이고 $-a^{\frac{1}{n}}<0$이야.

$a<0$, $n$이 홀수인 경우 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$이고 $a^{\frac{1}{n}}<0$이야.

$n$이 홀수이고 $n-20<0$이거나 $n$이 짝수이고 $n-20>0$이어야 한다.

따라서 자연수 $n$은

$n<20$인 홀수 또는 $n>20$인 짝수이다. $\cdots ㉡$

**3rd** 자연수 $n$의 개수를 구하자.

㉠, ㉡에 의하여 30 이하인 자연수 $n$은 $9<n<20$인 홀수 또는 $20<n\le30$인 짝수이다.

(i) $n$이 $9<n<20$인 홀수 $\Rightarrow n=11, 13, 15, 17, 19$이므로 5개이다.

(ii) $n$이 $20<n\le30$인 짝수

$n=22, 24, 26, 28, 30$이므로 5개이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 자연수 $n$의 개수는 10이다.

### [채점 기준표]

| | | |
|---|---|---|
| 1st | $n-9$의 $n$제곱근 중 양의 실수가 존재하는 $n$의 조건을 구한다. | 3점 |
| 2nd | $n-20$의 $n$제곱근 중 음의 실수가 존재하는 $n$의 조건을 구한다. | 4.5점 |
| 3rd | 자연수 $n$의 개수를 구한다. | 2.5점 |

## A 138 정답 20 *거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 57%]

정답 공식: 양수 $a$와 짝수인 자연수 $n$에 대하여 $a$의 $n$제곱근 중 실근은 $a^{\frac{1}{n}}$ 또는 $-a^{\frac{1}{n}}$이다.

단서 서로 다른 실근이 3개 가지고 있음을 알 수 있고, $m$, $n$의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 실근의 개수를 확인해 보자.

2 이상의 두 자연수 $m$, $n$에 대하여 $x$에 대한 방정식

$(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$

이 서로 다른 세 실근 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$을 가진다. 세 수 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$이 모두 정수일 때, $m+n=k$를 만족시키는 모든 자연수 $k$의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

### 단서+발상

단서 $x^n=a$의 실근에서 $n$이 짝수인 경우 실수 $a$에 대하여 $a>0$이면 $a$의 $n$제곱근 중 실근은 $a^{\frac{1}{n}}$, $-a^{\frac{1}{n}}$이고, $n$이 홀수인 경우 $a$의 $n$제곱근 중 실근은 $a^{\frac{1}{n}}$이다. (개념)
방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 해는 방정식 $x^m=2^6$ 또는 $x^n=-2^9$의 해와 같고, 이때 $x$의 지수 $m$, $n$의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 각 경우의 실근의 개수를 구할 수 있다. (적용)
실근 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$에서 같은 근이 생기는 $m$, $n$의 값이 존재하는지 확인하여 자연수 $k$의 값을 구할 수 있다. (해결)

### [문제 풀이 순서]

1st 세 실근을 가지기 위한 $m$, $n$의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$을 구하자.
방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$이려면 $x^m=2^6$ 또는 $x^n=-2^9$이다.
$n$이 짝수이면 방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 존재하지 않는다.
$n$이 짝수일 때, 방정식 $x^n=a$에서 $a\geq 0$이어야 실근이 존재해.
방정식 $x^m=2^6$의 실근은 최대 2개이므로
방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$이 세 실근을 가질 수 없다.
따라서 $n$은 홀수이다.
$n$은 홀수이므로 방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 $x=-2^{\frac{9}{n}}$으로 1개,
$n$이 홀수일 때, 실수 $a$에 대해 방정식 $x^n=a$의 실근은 항상 1개야.
방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 3개이므로
방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2개이다.
따라서 $m$은 짝수이고 방정식 $x^m=2^6$의 실근은 $x=2^{\frac{6}{m}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{m}}$이다.
$a>0$, $n$이 짝수인 경우 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$ 또는 $x=-a^{\frac{1}{n}}$
$\therefore \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}=\left\{-2^{\frac{9}{n}}, 2^{\frac{6}{m}}, -2^{\frac{6}{m}}\right\}$

2nd $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$이 서로 다른 정수가 되기 위한 $m$, $n$, $k$의 값을 각각 구하자.
$2^{\frac{6}{m}}$, $-2^{\frac{6}{m}}$이 정수이므로 $m=2, 6$
$m$이 2 이상인 자연수 중 짝수이면서 6의 약수는 2, 6이야.
$-2^{\frac{9}{n}}$이 정수이므로 $n=3, 9$
조건을 만족시키는 $m$, $n$의 값을 순서쌍 $(m, n)$으로 나타내자.
(i) $(2, 3)$인 경우
방정식 $x^m=2^6$의 실근은 $2^3$, $-2^3$
방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 $-2^3$
따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 $2^3$, $-2^3$으로 서로 다른 세 정수가 될 수 없다.
(ii) $(2, 9)$인 경우
방정식 $x^m=2^6$의 실근은 $2^3$, $-2^3$
방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 $-2$
따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 $2^3$, $-2^3$, $-2$이므로 서로 다른 세 정수이다.
$\therefore m+n=11$
(iii) $(6, 3)$인 경우
방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2, $-2$
방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 $-2^3$
따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 2, $-2$, $-2^3$이므로 서로 다른 세 정수이다.
$\therefore m+n=9$
(iv) $(6, 9)$인 경우
방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2, $-2$
방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 $-2$
따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 서로 다른 세 정수가 될 수 없다.
(i)~(iv)에 의해 모든 자연수 $k$의 값의 합은 $11+9=20$
서로 다른 근이 나오는지 확인하기 위해 가능한 경우의 자연수 $m$, $n$을 대입해봐야 해.

### [채점 기준표]

| | | |
|---|---|---|
| 1st | 세 실근을 가지기 위한 $m$, $n$의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$을 구한다. | 4점 |
| 2nd | $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$가 서로 다른 정수가 되기 위한 $m$, $n$, $k$의 값을 각각 구한다. | 6점 |

## A 139 정답 21 *지수법칙의 활용 [정답률 68%]

정답 공식: $(ab)^n=a^nb^n$, $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$

등식 $\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}=(2^a+2^b)^3$

단서1 분자의 항이 복잡하므로 분모와 분자에 일정한 값을 곱하여 식을 간단히 만들 수 있어.

단서2 곱셈공식을 활용해 식을 변형하여 계산할 수 있어.

을 만족시키는 유리수 $a$, $b$에 대하여 $3a+b$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $a>b$) (10점)

### 단서+발상

단서1 분자가 계산이 번거로운 $2^{-k}$ 꼴의 항들로 이루어져 있으므로 분모와 분자에 $2^5$을 곱하여 식을 간단히 만들고 같은 부호의 항끼리 묶어 계산할 수 있다. (발상)

단서2 $\sqrt[3]{2}=A$라 하면 $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$는 $A^2-A+1$로 나타낼 수 있다. (발상)
곱셈공식 $(A+1)(A^2-A+1)=A^3+1$을 활용해 식을 변형하여 계산할 수 있다. (적용)

### [문제 풀이 순서]

1st $\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}$의 값을 구하자.

$$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-1}$$
$$=\frac{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}=\frac{1}{2^{-5}}\left(\frac{1+2+2^2+2^3+2^4+2^5}{2^5-2^4+2^3-2^2+2-1}\right)$$
$$=2^5\left\{\frac{1+2^2+2^4+2(1+2^2+2^4)}{2(1+2^2+2^4)-(1+2^2+2^4)}\right\}=2^5\left\{\frac{3(1+2^2+2^4)}{1+2^2+2^4}\right\}=3\times 2^5$$
$$\therefore \left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}=(3\times 2^5)^3 \cdots ㉠$$

2nd $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$의 값을 구하자.

$$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}\right)^3=\left\{\frac{\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3+1}\right\}^3$$
$$=\frac{(\sqrt[3]{2}+1)^3}{27} \cdots ㉡$$
$$\left\{\frac{\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}\right\}^3$$

## 1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

## A 147 정답 24 *거듭제곱근의 활용 ····· [정답률 41%]

**정답 공식:** $n$이 짝수일 때 양수 $a$의 $n$제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 2이고 $n$이 홀수일 때 실수 $a$의 $n$제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 1이다.

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 $n$의 값의 합을 구하시오. (4점)

(가) $x$에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.

(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

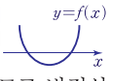
단서 2 단서 1에서 찾은 $f(x)=0$의 실근이 모두 방정식 $x^n-64=0$의 실근이 되어야 각각의 실근이 중근이 돼.

단서 1 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음의 정수이므로 방정식 $f(x)=0$의 실근을 개수를 알 수 있어.

**1st** 자연수 $n$의 조건을 찾아내.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음의 정수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

최고차항의 계수가 양수인 이차함수의 그래프는 아래로 볼록한 포물선이야. 그런데 $f(x)$의 최솟값이 음수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가져.




이때, $(x^n-64)f(x)=0$에서 $x^n-64=0$ 또는 $f(x)=0$이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 방정식 $x^n-64=0$의 실근과 동일해야 중근이 되어 조건 (가)를 만족시킨다.

$\alpha, \beta$라 하자.

① $\alpha, \beta$를 근으로 가져야하므로 $n$은 짝수야.
② $\alpha, \beta$ 이외의 근을 가질 수 있고, 그들도 모두 중근이어야 조건 (가)를 만족시켜.

(i) $n$이 홀수일 때,

$x^n-64=0$의 실근은 $x=\sqrt[n]{64}$로 1개이다.

따라서 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 실근이 모두 중근일 수 없다.

$x=\sqrt[n]{64}$가 방정식 $f(x)=0$의 실근이면 $x=\sqrt[n]{64}$는 중근이 돼. 그런데 방정식 $f(x)=0$의 실근이 또 하나 있고 그 실근은 중근이 될 수 없지?

(ii) $n$이 짝수일 때,

$x^n-64=0$의 실근은 $x=\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}$로 2개이다.

따라서 $x=\sqrt[n]{64}$, $x=-\sqrt[n]{64}$가 방정식 $f(x)=0$의 실근이면 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 실근이 모두 중근일 수 있다.

(i), (ii)에 의하여 $n$은 짝수이다.

**2nd** 함수 $f(x)$를 구하고 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수가 되기 위한 자연수 $n$의 값을 모두 구해.

(ii)에 의하여

$x=\sqrt[n]{64}$, $x=-\sqrt[n]{64}$가 방정식 $f(x)=0$의 실근이 되어야 하므로

$$f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$$
$$=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$$

이어야 한다.

이때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=-2^{\frac{6}{n}}\times 2^{\frac{6}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$이고 이 값이 음

이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭이지? 그리고 최고차항의 계수가 양수인 이차함수는 꼭짓점에서 최솟값을 가져. 이때, 방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{n}}$이므로 $f(x)$는 $x=\frac{2^{\frac{6}{n}}+(-2^{\frac{6}{n}})}{2}=0$에서 최솟값을 가져.

의 정수이어야 하므로 $\frac{12}{n}$는 자연수가 되어야 한다.

즉, 자연수 $n$은 12의 약수이면서 짝수이어야 하므로 가능한 $n$의 값은 2, 4, 6, 12이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 $n$의 값의 합은

$2+4+6+12=24$이다.

## A 148 정답 ⑤ *거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 ··· [정답률 32%]

**정답 공식:** $\sqrt[n]{a^m}$이 자연수가 되기 위해서는 $m$이 $n$의 배수($n$이 $m$의 약수)이어야 한다.

자연수 $n$에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\sqrt[4]{9\times 2^{n+1}} & (n\text{이 홀수})\\ \sqrt[4]{4\times 3^n} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 $p$, $q$에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(p, q)$의 개수는? (4점)

단서 자연수가 되기 위해서는 거듭제곱근의 근호가 없어져야 하지.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

**1st** $p$, $q$가 모두 홀수일 때, 순서쌍 $(p, q)$의 개수를 구하자.

(i) $p$, $q$가 모두 홀수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}=\sqrt[4]{81\times 2^{p+q+2}}$$
$$=\sqrt[4]{81}\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}=3\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}$$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\,(a>0, b>0)$

여기서 $p+q+2$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 $p$, $q$가 각각 10 이하의 홀수이므로 조건에 맞는 순서쌍 $(p, q)$는

$p+q+2=4m$($m$은 자연수)이면 $\sqrt[4]{2^{p+q+2}}=\sqrt[4]{2^{4m}}=(\sqrt[4]{2^4})^m=2^m$

i) $p+q+2=4$일 때, $p+q=2$이므로 $(1, 1)$

ii) $p+q+2=8$일 때, $p+q=6$이므로 $(1, 5)$, $(3, 3)$, $(5, 1)$

iii) $p+q+2=12$일 때, $p+q=10$이므로 $(1, 9)$, $(3, 7)$, $(5, 5)$, $(7, 3)$, $(9, 1)$

$p+q=6$인 두 자연수 $p$, $q$의 순서쌍을 구하기 위해서는 $p$가 홀수이므로 1, 3, 5를 대입하여 $q$의 값을 찾으면 돼.

iv) $p+q+2=16$일 때, $p+q=14$이므로 $(5, 9)$, $(7, 7)$, $(9, 5)$

v) $p+q+2=20$일 때, $p+q=18$이므로 $(9, 9)$

즉, 모든 순서쌍 $(p, q)$의 개수는 $1+3+5+3+1=13$이다.

**2nd** $p$가 홀수, $q$가 짝수일 때, 순서쌍 $(p, q)$의 개수를 구하자.

(ii) $p$는 홀수, $q$는 짝수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{4\times 3^q}=\sqrt[4]{2^{p+3}\times 3^{q+2}}=\sqrt[4]{2^{p+3}}\times\sqrt[4]{3^{q+2}}$$

여기서 $p+3$과 $q+2$가 각각 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

$p+3$과 $q+2$가 각각 4의 배수이어야 $\sqrt[4]{2^{p+3}}$, $\sqrt[4]{3^{q+2}}$이 각각 자연수가 되지.

두 자연수 $p$, $q$가 각각 10 이하의 홀수, 짝수이므로

$p+3$은 4, 8, 12이고, $q+2$는 4, 8, 12

즉, $p$는 1, 5, 9 중 하나이고, $q$는 2, 6, 10 중 하나이다.

$p$가 될 수 있는 수가 1, 5, 9이고, $q$가 될 수 있는 수가 2, 6, 10이므로 순서쌍 $(p, q)$의 개수는 $3\times 3=9$야.

조건에 맞는 순서쌍 $(p, q)$는

$(1, 2)$, $(1, 6)$, $(1, 10)$, $(5, 2)$, $(5, 6)$, $(5, 10)$, $(9, 2)$, $(9, 6)$, $(9, 10)$이므로 모든 순서쌍 $(p, q)$의 개수는 9이다.

**3rd** $p$가 짝수, $q$가 홀수일 때, 순서쌍 $(p, q)$의 개수를 구하자.

(iii) $p$는 짝수, $q$는 홀수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^p}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}$$
$$=\sqrt[4]{2^{q+3}\times 3^{p+2}}$$
$$=\sqrt[4]{2^{q+3}}\times\sqrt[4]{3^{p+2}}$$

여기서 $q+3$과 $p+2$가 각각 4의 배수일 때,

$f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 $p$, $q$가 각각 10 이하의 짝수, 홀수이므로 $p+2$는 4, 8, 12이고, $q+3$은 4, 8, 12

즉, $p$는 2, 6, 10 중 하나이고, $q$는 1, 5, 9 중 하나이다.

조건에 맞는 순서쌍 $(p, q)$는

$(2, 1)$, $(2, 5)$, $(2, 9)$, $(6, 1)$, $(6, 5)$, $(6, 9)$, $(10, 1)$, $(10, 5)$, $(10, 9)$이므로 모든 순서쌍 $(p, q)$의 개수는 9이다.

4th $p$, $q$가 모두 짝수일 때, 순서쌍 $(p, q)$의 개수를 구하자.

(iv) $p$, $q$가 모두 짝수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^{p}}\times\sqrt[4]{4\times 3^{q}}$$
$$=\sqrt[4]{16\times 3^{p+q}}$$
$$=\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{3^{p+q}}$$
$$=2\times\sqrt[4]{3^{p+q}}$$

여기서 $p+q$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 $p$, $q$가 각각 10 이하의 짝수이므로 조건에 맞는 순서쌍 $(p, q)$는

i) $p+q=4$일 때, $(2, 2)$

ii) $p+q=8$일 때, $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$

iii) $p+q=12$일 때, $(2, 10)$, $(4, 8)$, $(6, 6)$, $(8, 4)$, $(10, 2)$

iv) $p+q=16$일 때, $(6, 10)$, $(8, 8)$, $(10, 6)$

v) $p+q=20$일 때, $(10, 10)$

즉, 모든 순서쌍 $(p, q)$의 개수는 $1+3+5+3+1=13$이다.

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(p, q)$의 개수는 $13+9+9+13=44$이다.

## A 149 정답 ⑤ *지수법칙의 활용 [정답률 36%]

( 정답 공식: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^m\times a^n=a^{m+n}$ )

두 집합 $A=\{3, 4\}$, $B=\{-9, -3, 3, 9\}$에 대하여 집합 $X$를

$X=\{x\,|\,x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x$는 실수$\}$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

단서1 $a$ 대신 3, 4를 대입하고, $b$ 대신 $-9$, $-3$, 3, 9를 대입해서 집합 $X$의 원소를 모두 찾아보자.

[보기]

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$ 단서2 집합 $X$의 원소는 $b$의 $a$제곱근 중 실수인 것만 해당되므로 $\pm\sqrt[a]{b}$의 값 중 실수인 것이 몇 개인지 찾아야 해.

ㄴ. 집합 $X$의 원소의 개수는 8이다.

ㄷ. 집합 $X$의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 $\sqrt[4]{3^7}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st $a=3$, 4를 대입하고, $b=-9$, $-3$, 3, 9를 대입해서 집합 $X$의 원소를 모두 찾아보자.

집합 $X$의 원소는 ← $x$에 대한 방정식 $x^a=b$의 근 중 실수인 것은 ① $a$가 짝수, $b$가 양수일 때 $x=\pm\sqrt[a]{b}$ (두 개) ② $a$가 짝수, $b$가 음수일 때 없다. ③ $a$가 홀수일 때, $b$의 값에 관계없이 $x=\sqrt[a]{b}$ (한 개)

| $a$ \ $b$ | $-9$ | $-3$ | $3$ | $9$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | $\sqrt[3]{-9}$ | $\sqrt[3]{-3}$ | $\sqrt[3]{3}$ | $\sqrt[3]{9}$ |
| 4 | 없다. | 없다. | $\pm\sqrt[4]{3}$ | $\pm\sqrt[4]{9}$ |

이므로

$X=\{\sqrt[3]{-9}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, -\sqrt{3}, -\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt{3}\}$

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$ (참)

ㄴ. 집합 $X$의 원소의 개수는 8이다. (참)

ㄷ. 집합 $X$의 원소 중 양수인 것은 ← $x=\sqrt[a]{b}$에서 $x$가 양수이려면 $b$가 양수이어야 해.

$\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{3}$이므로 양수인 모든 원소의 곱은

$$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt{3}=3^{\frac{1}{3}}\times 9^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{1}{2}}$$ ← $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$
$$=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=3^{\frac{7}{4}}$$
$$=\sqrt[4]{3^7}\ (\text{참})$$

실수 ${}^b\sqrt{a}$는 $a^{\frac{1}{b}}$로 나타낼 수 있어. 지수법칙을 잘 지켜서 계산하도록 하자.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## A 150 정답 ⑤ ✪2등급 대비 [정답률 15%]

*$m$의 값에 따라 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 순서쌍의 개수 구하기 [유형 06]

자연수 $m$에 대하여 집합 $A_m$을

$$A_m=\left\{(a, b)\,\middle|\,2^a=\frac{m}{b},\ a, b\text{는 자연수}\right\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_4=\{(1, 2), (2, 1)\}$ 단서1 $m=4$를 직접 대입해서 $A_4$의 원소를 나타내봐.

ㄴ. 자연수 $k$에 대하여 $m=2^k$이면 $n(A_m)=k$이다.

ㄷ. $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 $m$의 개수는 23이다. 단서2 $n(A_m)=1$이 되도록 하는 집합 $A_m$의 원소 $(a, b)$에 대하여 $a$, $b$의 조건을 따져보자.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

오! 2등급? 이 문제는 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 순서쌍의 개수를 구하는 문제이다.

$m$을 소인수분해할 때 2의 지수가 얼마인지 따져볼 수 있어야 한다.

### 단서+발상

단서1 $m=4$를 대입하여 $2^a\times b=4$가 되도록 하는 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$의 개수를 구한다. 이때 $a$가 지수에 있으므로 $a=1$부터 차례대로 $b$가 자연수가 될 수 있는지 따져본다. 적용

단서2 $b=\frac{m}{2^a}$을 만족시키는 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$의 개수가 1이 되도록 하는 $m$의 조건을 따져볼 수 있다. 적용

$a=1$부터 차례대로 $b$가 자연수가 될 수 있는지 따져보면서 순서쌍의 개수를 세었으므로 $a=1$일 때만 되도록 하는 $m$의 조건을 구할 수 있다. 해결

주의 $b=\frac{m}{2^a}$에서 $a=p$일 때, $b$가 자연수가 아니면 $a>p$일 때도 $b$가 자연수가 될 수 없으므로 $a=1$일 때부터 차례대로 따져본다.

( 핵심 정답 공식: $2^a\times b=m$, $m=2^k$이면 $a$는 1부터 $k$까지 가능하다. )

### [문제 풀이 순서]

1st $m=4$를 대입하여 ㄱ의 진위를 판단하자.

ㄱ. 집합 $A_4$는 $2^a=\frac{4}{b}$에서 $4=2^a\times b$인 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$를 원소로 갖는 집합이므로 $4=2^1\times 2$, $4=2^2\times 1$

$\therefore A_4=\{(1, 2), (2, 1)\}$ (참)

2nd $m=2^k$을 대입하여 집합 $A_m$을 직접 구해보자.

ㄴ. $m=2^k$일 때, $A_m=A_{2^k}$

$A_{2^k}$은 $2^a=\frac{2^k}{b}$에서

$2^k=2^a\times b$인 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$를 원소로 갖는 집합이므로 ← 지수법칙에 의해 $2^{k-a}=b$

$A_m=\{(1, 2^{k-1}), (2, 2^{k-2}), (3, 2^{k-3}), \cdots, (k, 2^0)\}$

$\therefore n(A_m)=k$ (참)

3rd $n(A_m)=1$이 되기 위한 조건을 따져보고 두 자리 자연수 $m$의 개수를 구하자.

ㄷ. $2^a=\frac{m}{b}$에서 $m=2^a\times b$인 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$가 존재한다고 하자.

실수 $b'$은 자연수이고 $b$가 짝수일 때 $b=2b'$으로 나타낼 수 있고 $b$가 홀수일 때 $b=2b'-1$로 나타낼 수 있어.

이때, $b$가 짝수, 즉 $b=2b'$ ($b'$은 자연수)이면

$m=2^a\times 2b'=2^{a+1}\times b'$이므로 순서쌍 $(a+1,\ b')$도 집합 $A_m$의 원소이다. 즉, $b$가 짝수이면 $n(A_m)\geq 2$가 되므로 $n(A_m)=1$이 되기 위해서는 $b$는 홀수이어야 한다. 또, $n(A_m)=1$이 되기 위해서는 $b=\frac{m}{2^k}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 $k$가 오직 하나만 존재하므로 $k=1$이어야 한다.

$k\geq 2$인 경우, $b=\frac{m}{2^k}\iff 2b=\frac{m}{2^{k-1}}$이므로 $(k-1,\ 2b)$도 주어진 방정식을 만족하므로 $n(A_m)\neq 1$

즉, $m=2\times$(홀수)이어야 한다.

두 자리의 자연수 중에서 $2\times$(홀수)인 자연수는

$2\times 5,\ 2\times 7,\ 2\times 9,\ \cdots,\ 2\times 49$

$n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 $m$은 5, 7, 9, …, 49의 개수와 같으므로 조건을 만족시키는 두 자리의 자연수 $m$의 개수는 23이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1등급 대비 특강

### ✻ 자연수 $a$, $b$, $m$의 조건을 이용하기

집합 안의 등식을 $b=\frac{m}{2^a}$으로 나타내면 $b$가 자연수가 되기 위한 조건을 한눈에 파악할 수 있어. 그것은 바로 $m$이 $2^a$을 약수로 가지는 거야. 이때, $b$가 홀수인지 짝수인지에 따라 $\left(a+1,\ \frac{b}{2}\right)$가 $A_m$에 속하는지 따져보면 $A_m$의 원소를 파악할 수 있어.

### 지수법칙 개념·공식

$a>0$, $b>0$이고, $x$, $y$가 실수일 때

① $a^x a^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^x b^x$

## A 151 정답 ② ····· ✪2등급 대비 [정답률 15%]

✻실생활에서 쓰이는 관계식에 대입하여 지수법칙을 활용하기 [유형 12]

어느 금융상품에 초기자산 $W_0$을 투자하고 $t$년이 지난 시점에서의 기대자산 $W$가 다음과 같이 주어진다고 한다.

$W=\frac{W_0}{2}\times 10^{at}(1+10^{at})$ (단, $W_0>0$, $t\geq 0$이고, $a$는 상수이다.)

단서1 위에 주어진 관계를 이용하여 새로운 관계식을 유도할 수 있어.

이 금융상품에 초기자산 $w_0$을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 $w_0$을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 $k$배일 때, 실수 $k$의 값은? (단, $w_0>0$) (4점)

단서2 $t=30$일 때, $\frac{W}{W_0}=k$의 값을 구해.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

오개 2등급? 이 문제는 주어진 관계식에 대입하여 $k$의 값을 구하는 문제이다. 이를 위해서는 공통인 부분 $10^{15a}$을 치환하여 따져볼 수 있어야 한다.

### 단서+발상

단서1 초기자산 $w_0$, 투자 이후 시점 15년, 기대자산 $3w_0$을 관계식에 대입한다. 식을 정리하여 얻은 $6=10^{15a}(1+10^{15a})$에서 $10^{15a}$을 $X$로 치환하여 $X$의 값을 구한다. 적용

단서2 이제, 초기자산은 $w_0$이고, 기대자산이 초기자산의 $k$배이므로 $kw_0$, 투자 이후 시점 30년을 대입하여 식을 정리한 뒤 $X$의 값을 대입하여 $k$의 값을 구한다. 해결

주의 $10^{15a}=X>0$이므로 $X\neq -3$이다.

핵심 정답 공식: 15년이 지난 시점에서의 기대자산 값을 통해 $10^{15a}$의 값을 구한 뒤, 이를 이용해 30년이 지난 시점에서의 기대자산 값을 구한다.

### [문제 풀이 순서]

1st 15년이 지난 시점의 주어진 자료를 관계식에 대입하자.

어느 금융상품에 초기자산 $w_0$을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산이 $3w_0$이므로 $W_0=w_0$, $t=15$, $W=3w_0$ ❶에 의하여 초기자산의 3배이니까.

이것을 주어진 관계식에 대입하면

$3w_0=\frac{w_0}{2}\times 10^{15a}(1+10^{15a})$ $\therefore\ 6=10^{15a}(1+10^{15a})$

2nd 공통인 부분을 치환하여 $10^{15a}$의 값을 구해.

참정 치환을 할 때 범위는 필수야. $10>0$이니까 $10^a>0$

이때, $10^{15a}=X\ (X>0)$라 하면 $6=X(1+X)$에서

$X^2+X-6=0$, $(X+3)(X-2)=0$

$\therefore\ X=2\ (\because\ X>0)\Rightarrow 10^{15a}=2\ \cdots$ ㉠

❷에 의하여 초기자산의 $k$배이니까.

3rd 30년이 지난 시점의 주어진 자료를 대입하여 $k$의 값을 구해.

한편, 이 금융상품에 초기자산 $w_0$을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 $kw_0$이므로 $W_0=w_0$, $t=30$, $W=kw_0$

이것을 주어진 관계식에 대입하면 $kw_0=\frac{w_0}{2}\times 10^{30a}(1+10^{30a})$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}\times(10^{15a})^2\{1+(10^{15a})^2\}=\frac{1}{2}\times 2^2\times(1+2^2)\ (\because$ ㉠$)=10$

### My Top Secret 서울대 선배의 ❶ 등급 대비 전략

식이 복잡하게 주어지면 식을 관찰하여 공통인 부분을 치환해보면 해결의 실마리가 보일 거야. 이 문제의 경우 $6=10^{15a}(1+10^{15a})$에서 $10^{15a}$을 X로 치환할 수 있는데, 이를 통해 X의 값을 구해낼 수 있어. 이 문제에서 만약 $15a=t$와 같이 치환하면 식을 해결할 수 없으므로 공통인 부분을 최대한 치환해야 해.

# A 내신+수능 대비 단원별 모의고사 문제편 p. 312

## 모의 A 01 정답 2 *거듭제곱근의 정의 ····· [정답률 89%]

( **정답 공식**: $a>0$일 때, $n$이 홀수이면 $\sqrt[n]{a}$이고, $n$이 짝수이면 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$이다. )

❶ $-216$의 세제곱근 중 실수인 것을 $a$, ❷ $\frac{1}{81}$의 네제곱근 중 실수인 것을 $b$라 할 때, $ab$의 최댓값을 구하시오. (3점)

**단서** 거듭제곱근의 정의를 알아야 해. 이때, ❶은 음수, ❷는 실수의 거듭제곱근이므로 주의하자.

**1st** 거듭제곱근의 정의를 이용하여 두 실수 $a$, $b$의 값을 각각 구하자.

$-216$의 세제곱근을 $x$라 하면

$x^3=-216$이므로 $x^3+216=0$

$(x+6)(x^2-6x+36)=0$

이때, $x^2-6x+36=0$은 실근을 갖지 않으므로

$x+6=0$에서 $x=-6$

($x^2-6x+36=0$에서 $x=3\pm3\sqrt{3}i$이므로 실수가 아닌 허수야.)

**주의** 실근과 허근의 차이를 잘 알고 있자.

$\therefore a=-6$

$\frac{1}{81}$의 네제곱근을 $x$라 하면

$x^4=\frac{1}{81}$이므로 $81x^4-1=0$

$(3x+1)(3x-1)(9x^2+1)=0$

이때, $9x^2+1=0$은 실근을 갖지 않으므로

$(3x+1)(3x-1)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

($9x^2+1=0$에서 $x^2\geq0$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $9x^2+1\geq1$이야. 즉, $9x^2+1=0$을 만족시키는 실근은 존재하지 않아.)

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=\frac{1}{3}$

**2nd** $ab$의 최댓값을 구하자.

$ab=-6\times\left(-\frac{1}{3}\right)=2$ 또는 $ab=-6\times\frac{1}{3}=-2$이므로

$ab$의 최댓값은 2이다.

## 모의 A 02 정답 ④ *거듭제곱근의 성질 ····· [정답률 87%]

( **정답 공식**: $\sqrt[n]{a^n}=a(a>0)$ )

$3\times\sqrt[3]{16}+2\times\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{k}$를 만족시키는 자연수 $k$에 대하여 $\frac{k}{48}$의 값은? (4점)

**단서** $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^n}=a$임을 이용하자.

① 12 ② 36 ③ 54
④ 72 ⑤ 96

**1st** $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^n}=a$지?

$3\times\sqrt[3]{16}+2\times\sqrt[3]{54}$

$=3\times\sqrt[3]{2^3\times2}+2\times\sqrt[3]{3^3\times2}$

$=6\times\sqrt[3]{2}+6\times\sqrt[3]{2}$ ($\sqrt[n]{a^n}=a(a>0)$)

$=12\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{12^3\times2}$

따라서 $k=12^3\times2$이므로

$\frac{k}{48}=\frac{12^3\times2}{48}=\frac{12^3\times2}{12\times2^2}=\frac{144}{2}=72$

## 모의 A 03 정답 ② *지수법칙 – 밑이 다른 계산(곱셈) ····· [정답률 92%]

( **정답 공식**: $(a^m)^n=a^{mn}$, $a^{-1}=\frac{1}{a}$임을 이용한다. )

$8^{\frac{2}{3}}\times27^{-\frac{1}{3}}$의 값은? (2점)

**단서** $8=2^3$, $27=3^3$임을 이용하자.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

**1st** 지수법칙을 이용하자.

$8^{\frac{2}{3}}\times27^{-\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}\times(3^3)^{-\frac{1}{3}}$

$=2^2\times3^{-1}$ ($(a^m)^n=a^{mn}$)

$=\frac{4}{3}$ ($a^{-1}=\frac{1}{a}$)

## 모의 A 04 정답 16 *거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 67%]

( **정답 공식**: 어떤 자연수의 $n$제곱근은 $n$제곱을 했을 때 자연수가 나옴을 의미한다. )

$2\leq n\leq100$인 자연수 $n$에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 $n$제곱근이 되도록 하는 $n$의 개수를 구하시오. (4점)

**단서** 어떤 자연수를 $N$이라 하면 $\sqrt[n]{N}$이지? 이때, $n$은 자연수이고 $2\leq n\leq100$이야.

**1st** 어떤 자연수를 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$으로 나타내.

어떤 자연수를 $N$이라 하면 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 자연수 $N$의 $n$제곱근이므로

($x$가 $a$의 $n$제곱근이면 $x^n=a$이야.)

$\left\{\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^n=\left\{\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^n=3^{\frac{5n}{6}}=N$

($\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$)

($n=6k$ ($k$는 자연수)라 하면 $\frac{5}{6}n=\frac{5}{6}\times6k=5k$도 자연수야.)

**2nd** $N$, $n$이 자연수이니까 $2\leq n\leq100$에서 $n$의 개수를 구해.

$n$이 6의 배수이면 $N$은 3의 거듭제곱으로 자연수가 된다.

즉, $n$의 개수는 100 이하의 자연수 중 6의 배수의 개수와 같다.

따라서 자연수 $n$의 개수는 16이다. ($\frac{100}{6}=16.\times\times\times$)

## 모의 A 05 정답 30 *지수법칙의 활용 ····· [정답률 69%]

( **정답 공식**: 최소의 자연수 $n$은 2, 5, 6의 최소공배수가 되어야 한다. )

세 양수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $a^6=3$, $b^5=7$, $c^2=11$일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 최소의 자연수 $n$의 값을 구하시오. (3점)

**단서** $(abc)^n$이 자연수가 되려면 $(abc)$의 지수가 0, 1, 2, …가 되어야 해. 이때, $a$, $b$, $c$는 지수가 유리수인 수이니까 그 곱의 지수가 자연수가 되는 경우를 생각해 보자.

**1st** 세 양수 $a$, $b$, $c$를 지수가 유리수인 수로 간단히 나타내.

$a^6=3$에서 $a=3^{\frac{1}{6}}$

($a^6=3$이면 $a$는 3의 6제곱근이지? 즉, $a=\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}}$이야.)

$b^5=7$에서 $b=7^{\frac{1}{5}}$

$c^2=11$에서 $c=11^{\frac{1}{2}}$

$\therefore (abc)^n=\left(3^{\frac{1}{6}}\times7^{\frac{1}{5}}\times11^{\frac{1}{2}}\right)^n$ … ㉠

**실수** ($(a^n\times b^m)^l=a^{n\times l}\times b^{m\times l}$이므로 6, 5, 2의 최소공배수를 구해야 해.)

**2nd** 주어진 값이 자연수가 되기 위한 조건을 생각하여 $n$의 값을 구해.

㉠이 자연수가 되려면 $n$은 6, 5, 2의 공배수가 되어야 한다.

(세 수 $a$, $b$, $c$를 곱한 수의 지수가 0 또는 자연수이어야 해. 즉 ㉠의 지수로 자연수를 만들어야 하니까 지수의 분수를 통분해야 해.)

따라서 최소의 자연수 $n$은 6, 5, 2의 최소공배수이므로 30이다.

(공배수 중에서 가장 작은 것을 최소공배수라 해.)

모의 **A 06** 정답 ④ *지수법칙의 활용 – 식 변형 [정답률 88%]

정답 공식: $2^a$, $3^b$의 값에서 지수를 밑에 따라 비교해본다.

두 실수 $a$, $b$에 대하여 $2^a=3$, $3^b=\sqrt{2}$가 성립할 때, $ab$의 값은? (3점)

단서 $3^b=\sqrt{2}$의 3에 $2^a$을 대입해 봐.

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

1st $2^a=3$을 $3^b=\sqrt{2}$에 대입하자.

$2^a=3$이므로 이 식을 $3^b=\sqrt{2}$에 대입하면

$(2^a)^b=\sqrt{2}$ → $(a^m)^n=a^{mn}$

이 식을 정리하면 $2^{ab}=2^{\frac{1}{2}}$이므로 $ab=\frac{1}{2}$

$a>0$이고 $x$, $y$가 실수일 때, $a^x=a^y$이면 $x=y$야.

다른 풀이: **로그의 정의 이용하기**

로그의 정의에 의해

$a=\log_2 3$, $b=\log_3\sqrt{2}$

주의 $\log_a b\times\log_b a=1$임을 알고 있어야 해.

$\therefore ab=\log_2 3\times\log_3\sqrt{2}=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

모의 **A 07** 정답 ② *지수법칙의 활용 – 식 변형 [정답률 73%]

정답 공식: 양변을 제곱해 본다.

실수 $a$가 ❶ $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, ❷ $4^a+4^{-a}$의 값은? (3점)

단서 ❶의 양변을 제곱하면 곱셈 공식에 의하여 ❷의 꼴이 나오지?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{17}{4}$
④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

1st 주어진 식의 양변을 제곱하여 $4^a+4^{-a}$ 꼴로 나타내.

주어진 식에서 $2^a+2^{-a}=-2(2^a-2^{-a})$

양변을 제곱하면 $4^a+4^{-a}+2=4(4^a+4^{-a}-2)$이므로

$3(4^a+4^{-a})=10$ → $\left(t+\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2$

$\therefore 4^a+4^{-a}=\frac{10}{3}$

다른 풀이: **분모, 분자에 $2^a$을 곱하여 식 변형하기**

$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$의 좌변의 분모, 분자에 $2^a$을 곱하면

$\frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=-2$

$2^{2a}+1=-2\times2^{2a}+2$

이항하면 $3\times2^{2a}=1$

$2^{2a}=\frac{1}{3}$

따라서 $4^a=\frac{1}{3}$, $4^{-a}=3$이므로

역수를 취해.

$4^a+4^{-a}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$

모의 **A 08** 정답 25 *지수법칙의 활용 [정답률 51%]

정답 공식: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$f(n)=a^{\frac{1}{n}}$ (단, $a>0$, $a\neq1$)일 때,

$f(2\times3)\times f(3\times4)\times\cdots\times f(9\times10)=f(k)$

를 만족하는 상수 $k$에 대하여 $10k$의 값을 구하시오. (4점)

단서 좌변의 함숫값을 대입하여 우변 $f(k)=a^{\frac{1}{k}}$인 $k$의 값을 구해.

이때, 좌변의 지수인 $\frac{1}{n(n+1)}$은 부분분수로 정리하면 순차적으로 소거할 수 있네!

1st $f(n)$의 정의와 부분분수를 이용하여 주어진 식의 좌변을 간단히 해.

$f(n)=a^{\frac{1}{n}}$이므로 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

$f(2\times3)\times f(3\times4)\times\cdots\times f(9\times10)$

$=a^{\frac{1}{2\times3}}\times a^{\frac{1}{3\times4}}\times\cdots\times a^{\frac{1}{9\times10}}$ → $a^l\times a^m\times\cdots\times a^n=a^{l+m+\cdots+n}$

$=a^{\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10}}$ → $\frac{1}{k(k+1)}$ 꼴이 연속된 유리수의 합은 부분분수를 이용해.

$=a^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)}$

$=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{10}}=a^{\frac{2}{5}}$

2nd 주어진 방정식을 이용하여 $k$의 값을 구해.

$f(2\times3)\times f(3\times4)\times\cdots\times f(9\times10)=f(k)$에서

$a^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{1}{k}}$이므로 $\frac{1}{k}=\frac{2}{5}$ $\therefore k=\frac{5}{2}$

→ 밑이 같으니까 지수만 같으면 OK.

$\therefore 10k=10\times\frac{5}{2}=25$

모의 **A 09** 정답 ③ *지수법칙의 실생활 응용 [정답률 53%]

정답 공식: 반지름의 길이를 이용해 $S$, $L$을 나타낼 수 있고, 물의 속력의 비를 구한다.

원기둥 모양의 수도관에서 단면인 원의 넓이를 $S$, 원의 둘레의 길이를 $L$이라 하고, 수도관의 기울기를 $I$라 하자. 이 수도관에서 물이 가득 찬 상태로 흐를 때 물의 속력을 $v$라 하면

$v=c\left(\frac{S}{L}\right)^{\frac{2}{3}}\times I^{\frac{1}{2}}$ (단, $c$는 상수이다.) … ⓐ 이 성립한다고 한다.

⇒ $L_A=2a\pi$, $L_B=2b\pi$

단면인 원의 반지름의 길이가 각각 $a$, $b$인 원기둥 모양의 두 수도관 A, B에서 물이 가득 찬 상태로 흐르고 있다. 두 수도관 A, B의 기울기가 각각 0.01, 0.04이고, 흐르는 물의 속력을 각각 $v_A$, $v_B$라고 하자. $\frac{v_A}{v_B}=2$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은? (단, 두 수도관 A, B에 대한 상수 $c$의 값은 서로 같다.) (4점)

⇒ $I_A=0.01$, $I_B=0.04$

단서 ⓐ에서 미지수 $S$, $L$, $I$가 문제에서 무엇으로 주어졌는지 확인하는 게 우선!! 그 후 두 수도관에 대한 자료를 정리하자.

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 8 ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 16

1st 수도관 A, B의 물의 속도를 구하자.

수도관 A의 기울기 $I_A=0.01=\frac{1}{100}$이고 단면인 원의 넓이 $S_A=\pi a^2$, 원의 둘레의 길이 $L_A=2\pi a$이므로

→ 단면인 원의 반지름의 길이가 $a$, 수도관의 기울기가 0.01

반지름의 길이가 $r$인 원의 넓이는 $r^2\pi$, 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$

$v_A=c\left(\frac{\pi a^2}{2\pi a}\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}=c\times\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\times\frac{1}{10}$

수도관 B의 기울기 $I_B=0.04=\frac{4}{100}$이고 단면인 원의 넓이 $S_B=\pi b^2$, 원의 둘레의 길이 $L_B=2\pi b$이므로

→ 단면인 원의 반지름의 길이가 $b$, 수도관의 기울기가 0.04

$v_B=c\left(\frac{\pi b^2}{2\pi b}\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(\frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{2}}=c\times\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\times\frac{2}{10}$