

문제 유형을 촘촘히 분류해 개념을 적용시키면 수학이 쉬워집니다!

개념을 익히고 그 개념들을 단계별로
연결하여 파악하는 것이 수학 공부의 기본입니다.
만약 개념 이해 과정을 소홀히 하고, 문제만 반복하여 풀다면
개념 사이의 연계성을 파악할 수 없어
오랜 시간 공부해도 성적을 올릴 수 없습니다.

자이스토리 고3 수학은
최신 수능, 평가원, 학력평가 및 경찰대, 삼사 기출 문제를 정밀하게 분석해
개념의 연계성에 따라 문제 유형을 촘촘히 분류하였습니다.
따라서 유형별 기출 문제를 순서대로 차근차근 풀어가면
개념의 연계성이 명쾌하게 파악되어서 문제 풀이가 쉬워집니다.

또한, 자이스토리의 정확하고 자세한 단계별 해설과 풍부한 보충 첨삭은
문제를 풀어가면서 개념을 알맞게 적용하는 방법을
자연스럽게 익힐 수 있습니다.

이 책의 마지막 페이지를 넘길 때쯤 여러분은 이미
수학 1등급에 도달해 있을 것입니다.

- 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 -



수능 1등급 완성 학습 계획표 [23일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헛갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A01~49		월 일	월 일
2	50~82		월 일	월 일
3	83~117		월 일	월 일
4	118~144		월 일	월 일
5	145~183		월 일	월 일
6	184~210		월 일	월 일
7	B01~47		월 일	월 일
8	48~81		월 일	월 일
9	82~110		월 일	월 일
10	C01~48		월 일	월 일
11	49~87		월 일	월 일
12	88~120		월 일	월 일
13	121~155		월 일	월 일
14	156~182		월 일	월 일
15	D 01~44		월 일	월 일
16	45~85		월 일	월 일
17	86~119		월 일	월 일
18	E 01~49		월 일	월 일
19	50~89		월 일	월 일
20	90~116		월 일	월 일
21	모의 1회		월 일	월 일
22	모의 2회		월 일	월 일
23	모의 3회		월 일	월 일



- 나는 _____ 대학교 _____ 학과 _____ 학년이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 비늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

자이스토리 기하 활용법 + α

① 개념 · 공식 학습 후 수능 출제 경향 확인!

- 각 단원에 필수적으로 알아야 하는 핵심 개념과 관련된 보충 설명을 꼼꼼히 살펴보세요.
- 최신 출제 경향을 파악하고 앞으로의 수능을 예측하세요.



② 수능과 모의고사에 나오는 모든 유형을 촘촘히 섭렵하자!

- 촘촘히 분류된 모든 유형을 확인하고 유형별 풀이 방법을 확인하세요.
- 유형 안에서 난이도 순으로 다시 분류된 문제를 보면서 각 유형에서 쉬운 문제는 어떻게 출제되는지, 고난도 문제는 어떻게 출제되는지 확인하세요.

③ 부족한 유형을 다시 한 번 점검하자!

- 자신에게 부족한 유형을 찾아낸 후 부족한 부분을 여러 번 반복 학습해 보세요.
- 부족한 유형에 대한 특징과 핵심 개념을 다시 한 번 확인한 후 유형 해결 요령을 터득하세요.



④ 1등급을 좌우하는 고난도 문항을 완벽하게 마스터하자!

- 1등급 대비 문제는 복합적인 개념을 묻기 때문에 여러 개념을 정확히 파악한 뒤 종합적 사고를 하세요.
- 1등급 문제의 핵심이 되는 (단서)로 조건을 파악하고 조건을 이용하여 접근하는 방법을 (발상)해서 문제 풀이에 (적용)하는 방법을 익히세요.

⑤ 쉽게 이해되는 입체 침삭 해설을 공부해서 다시는 틀리지 말자!

- [침삭 해설]과 [실수, 함정, 주의 침삭]을 따라가다 보면 풀이 과정에서 놓치기 쉬운 부분이나 이해가 어려운 부분을 쉽게 풀어 주어 해설을 완벽하게 이해할 수 있어요.
- 쉬운 풀이, 톡톡 풀이, 다른 풀이를 꼼꼼히 읽어서 시간을 줄일 수 있는 풀이법을 찾아보세요.
- 문제 해결 과정에 사용된 개념 · 공식을 다시 한 번 확인하여 놓치고 있었던 내용이 없는지 확인하세요.
- 수능 핵강으로 문제에 대한 개념을 완벽하게 이해하세요.



⑥ 오답노트를 만들어 100% 활용하자!

- 반드시 오답노트를 만들어 보세요. 해설에 제시된 단서 또는 접근법도 같이 기록하여 풀어 봤던 문제는 다시는 틀리지 않도록 여러 번 풀어보세요.
- 시간이 지난 후 오답노트를 읽어 보며 해설의 아이디어를 바탕으로 풀이를 따라가 보고 자신만의 풀이도 추가해 보세요.



단원별 핵심 문제 + 최신 · 중요 문제

동영상 강의 QR코드



- 1 개념 강의로 핵심 개념을 이해하고 개념이 문제에 적용되는 것을 확인해 보세요!
- 2 동영상 문제 풀이로 해설을 좀 더 빠르게 이해할 수 있어요!
- 3 해설의 풀이를 읽어보고 동영상 강의를 시청하면 더 쉽게 이해될 거예요!
- 4 풀기 어려운 고난도 문제는 동영상 강의를 여러 번 반복 시청해 보세요!



차 례 [총 81개 유형 분류]



I 이차곡선

A 이차곡선 – 25개 유형 분류

핵심 개념 정리	12
개념 확인 문제	13
수능 유형별 기출 문제	14
1등급 마스터 문제	54
동아리 소개 / 포항공대 CHEERO	58

B 이차곡선과 직선 – 14개 유형 분류

핵심 개념 정리	60
개념 확인 문제	61
수능 유형별 기출 문제	62
1등급 마스터 문제	78
동아리 소개 / 서울대 방그사	80

II 평면벡터

C 평면벡터의 연산 – 18개 유형 분류

핵심 개념 정리	82
개념 확인 문제	83
수능 유형별 기출 문제	84
1등급 마스터 문제	109



III 공간도형과 공간좌표

D 공간도형과 정사영 - 9개 유형 분류

핵심 개념 정리	116
개념 확인 문제	117
수능 유형별 기출 문제	118
1등급 마스터 문제	140
동아리 소개/연세대 연세문학회	146

E 공간좌표와 구 - 15개 유형 분류

핵심 개념 정리	148
개념 확인 문제	149
수능 유형별 기출 문제	150
1등급 마스터 문제	164



기하 실전 기출 모의고사

1회 모의고사 [2025학년도 수능 대비①]	168
2회 모의고사 [2025학년도 수능 대비②]	170
3회 모의고사 [2025학년도 수능 대비③]	172

빠른 정답 찾기 174

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

셀프수학





개념 총정리 + 촘촘한 유형 분류 기출 문제 = 수능 1등급

1 핵심 개념 정리 - 쉽게 이해되는 개념과 공식

가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 제공되는 강의와 보충 설명으로 개념과 공식의 이해를 돕고 실전 문제에서 적절하게 개념을 사용할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

- **중요도** 🌟🌟🌟 : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요도 제시
- **가늠임 보충**, **한걸음 더**, **왜 그럴까?** : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- **출제** : 2024학년도 수능과 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시

A

이차곡선

개념 강의

중요도 🌟🌟🌟

1 포물선 - 유형 01-08

(1) 포물선의 방정식

① 점 $F(p, 0)$ 을 초점, 직선 $x = -p$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ (단, $p \neq 0$)

② 점 $F(0, p)$ 를 초점, 직선 $y = -p$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식은 $x^2 = 4py$ (단, $p \neq 0$)

(2) 포물선의 평행이동

포물선 $y = 4px$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 $(y-n)^2 = 4p(x-m)$

2 타원 - 유형 09-16

(1) 타원의 방정식

① 두 점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 에서의 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a > b > 0, c^2 = a^2 - b^2$)

② 두 점 $F(0, c), F'(0, -c)$ 에서의 거리의 합이 $2b$ 인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $b > a > 0, c^2 = b^2 - a^2$)

가늠임 보충

1 포물선의 정의

평면 위의 한 점 F 와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 주어질 때, 점 F 와 직선 l 에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다. 이때, 점 F 를 포물선의 초점, 직선 l 을 준선이라 한다.

한걸음 더

1 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 의 장축과 단축의 길이는 각각 $2a, 2b$ 이고 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 의 장축과 단축의 길이는 각각 $2b, 2a$ 이다.

왜 그럴까?

1 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 y 에 대하여 정리하면 $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ 이고 $|x| \rightarrow \infty$ 이면 $\frac{a^2}{x^2} \rightarrow 0$ 이므로

2 개념 확인 문제 - 개념에 대한 이해도 확인 문제

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 개념 이해를 위한 필수 문제를 수록하였습니다.

개념 강의

중요도 🌟🌟🌟

1 포물선

[A01~04] 초점과 준선의 방정식이 다음과 같은 포물선의 방정식을 구하시오.

A01 초점 $(4, 0)$, 준선 $x = -4$

A02 초점 $(-\frac{1}{2}, 0)$, 준선 $x = \frac{1}{2}$

A03 초점 $(0, 3)$, 준선 $y = -3$

A04 초점 $(0, -4)$, 준선 $y = 4$

[A05~08] 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 각각 구하시오.

A05 $y^2 = 8x$

A06 $y^2 = -10x$

A07 $x^2 = 4y$

A08 $x^2 = -\frac{1}{4}y$

[A14~17] 다음 타원의 초점의 좌표, 장축의 길이를 각각 구하시오.

A14 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$

A15 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{81} = 1$

A16 $4x^2 + 9y^2 = 36$

A17 $4x^2 + y^2 = 4$

A18 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

3 쌍곡선

[A19~20] 다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

A19 두 초점 $F(5, 0), F'(-5, 0)$ 으로부터 6인 쌍곡선

A20 두 초점 $F(0, 3), F'(0, -3)$ 으로부터 4인 쌍곡선

3 유형별 기출 문제 - 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하여 유형, 개념, 난이도 순서대로 문항을 배열하였습니다. 기출 문제가 부족한 단원이나 유형은 고품격 수능 기출 변형 문제를 출제하여 추가 수록하였습니다.

- **Tip** : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR코드** : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.

수능 유형별 기출 문제

[2점, 3점, 쉬운 4점]

Pass: 쉬운 유형 반복 학습도 좋음

1 포물선

유형 01 포물선의 정의 및 방정식

(1) 포물선의 정의

평면 위의 한 점 F 와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 주어질 때, 점 F 와 직선 l 에 이르는 거리가 각각 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다.

(2) 포물선의 방정식

$y^2 = 4px$ (단, $p > 0$)	$x^2 = 4py$ (단, $p > 0$)
$F(p, 0)$	$F(0, p)$
$x = -p$	$y = -p$

- **유형 분류** : **출제** - 2024 수능, 평가원에서 출제된 유형
- **고난도** - 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형

- **대표** : 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.
- **난이도** : 🌟🌟🌟 - 기본 문제 🌟🌟🌟 - 중급 문제
- 🌟🌟 - 중상급 문제 🌟🌟🌟 - 상급 문제
- **Pass** : 간단한 계산 문제로 패스해도 좋은 문제

- **출처표시** : 수능, 평가원 - 대비연도, 학력평가 - 실시연도
- **2024대비 수능 기하 23(고3)** : 2023년 11월에 실시한 수능
- **2024대비 6월 모평 기하 24(고3)** : 2023년 6월에 실시한 평가원
- **2023실시 4월 학평 기하 25(고3)** : 2023년 4월에 실시한 학력평가
- **2024대비 9월 모평 기하 26(고3)** : 2023년 9월에 실시한 평가원

4 기하 실전 기출 모의고사

기출 문제로 구성된 3회의 실전 모의고사입니다. 수능을 대비하여 실력을 점검하는 데 큰 도움이 될 것입니다.

1회 기하 실전 기출 모의고사

2025학년도 수능 대비 ①

5지선다형

범위: 기하 전단원

03 🌟🌟🌟 2011대비

좌표평면에서 점 $A(0, 4)$ 와 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 대하여 두 점 A 와 P 를 지나는 직선이 원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 과 만나는 두 점 중에서 A 가 아닌 점을 Q 라 하자. 점 I 위의 모든 점을 지날 때, 점 Q 가 나타내는 도형의 길이를 구하시오. (2점)



집필진 · 감수진 선생님들



자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여고	윤장노 안양 신성고	전경준 서울 풍문고
김대식 경기 하남고	윤혜미 서울 세종과학고	조승원 수원 경기과학고
민경도 서울 강남 종로학원	이종석 제 일등급 수학	지강현 안양 신성고
박소희 안양 안양외고	이창희 서울 THE 다원수학	홍지연 부산 피보나치 수학
박숙녀 아산 충남삼성고	위경아 서울 강남대성기숙의대관	홍지우 안양 평촌고
배수나 서울 가인아카데미	장광걸 김포 김포외고	황광희 경기 시흥고
신건률 대치 오름학원	장경호 오산 운천고	수경 수학 컨텐츠 연구소
신명선 안양 신성고	장영환 제주 제로링 수학교실	
신현준 안양 신성고	장철희 서울 보성고	

[다른 풀이 집필]

김병노 대구 태전시스템수학
김지운 서울 더블유매쓰(W-Math) 수학
박진산 인천 절대학원
신은숙 마곡 펜타곤학원

개념&문제 풀이
강의 선생님
유튜브 채널



셀프수학

[감수진]

강성철 서울 일타수학학원	배진수 용인 수학의 진수 학원	임정혁 김포 하이엔드 수학
강현아 서울 수능수학 전문컨설턴트	송지민 창원 석동 지음학원	임지민 시흥 피타고라스 수학학원
강호선 광주 강효선수학학원	신건률 서울 오름학원	임현아 분당 수이학원
고지윤 김포 고수학전문학원	신영진 전주 유나이츠학원	장우희 남양주 서연고학원
곽웅수 광주 카르페영수학학원	심재인 김포 현준쌤 수학학원	장진영 충주 수능수학 전문컨설턴트
권혁재 성남 수학의 아침	심혜정 부산 영풍수학	전수현 전)서울 페르미수학 학원
김건우 부산 4퍼센트의 논리	안보현 군포 LSE학원	전하윤 대전 하몽수학
김기호 서울 대치파인만학원	안준석 부산 이든수학교습소	정다원 광주 인성고
김대운 대구 중앙SKY학원	안지환 울산 수능수학 전문컨설턴트	정은경 목포 베스트 수학
김민수 서울 원수학	양형준 전주 대들보 수학	정희정 부산 정샘수학교습소
김선영 대구 청림수학학원	양해영 대치 청출어람학원	조용희 부산 최상위수학학원
김성민 부산 직관수학학원	원기찬 부산 양운고	주기호 창원 비상한수학국어학원
김연일 서울 미래인재학원	유선형 강릉 P1 math	차슬기 고양 브레인리그
김유진 서울 수능수학 전문컨설턴트	유승준 서울 해볼수학학원	차영진 울산 창조적소수수학전문학원
김인하 김포 양곡고	윤성호 서울 혜성코멧학원 의대관	최경락 인천 경서대신학원
김지은 김포 수학학원	윤혜영 성남 부티풀수학	최규식 서울 CMS관악영재관
김찬규 의왕 올마이트매쓰학원	이경미 포천 학원빠빠	최규종 울산 뉴토모수학전문학원
김태환 대구 로고스 수학학원(침산원)	이경민 서울 대치에스학원	최동훈 김포 고수학전문학원
김혜정 서울 우리샘수학학원	이경수 부산 경수학	최세남 서울 엑시엄수학학원
남지혜 부산 수능수학 전문컨설턴트	이경화 의정부 의정부여고	최영광 대전 우범석영어수학전문학원
마지희 고양 이안의학원	이경호 고양 효수학학원	최정현 부산 더쌤수학학원
문재웅 수원 수학의공간	이상협 인천 마스터수학학원	하수민 창원 컨덤영재학원
박경준 용인 수학의준석	이상훈 대구 명석수학학원	한양근 광주 TAP라운학원
박미화 전주 엄쌤수학전문학원	이영현 파주 대치명인학원	한제윤 서울 정명수학학원
박보경 부산 화명고	이용희 청주 주성박미숙수학학원	홍승원 계룡 The채움수학
박성찬 수원 성찬쌤's 수학의공간	이재선 김해 하이퍼 학원	홍유미 광주 채흥수학학원
박은하 서울 이지매쓰수학학원	이재희 대전 집단지성학원	
박장호 구미 현일고	이정민 김해 하이퍼 수학, 영어 전문학원	[My Top Secret 집필]
박재윤 천안 박재윤수학학원	이준현 구미 진샘제이메스학원	곽지훈 서울대 수학교육과
박정일 통영 SM학원	이진희 서울 서준학원	김진형 서울대 약학과
박혜인 양산 참좋은학원	이현웅 서울 웅수학학원	정서린 서울대 약학과
박희수 광주 대전고	인수진 청주 청주여상	정호재 서울대 경제학부
		황대운 서울대 수리과학부

수능 선배들의 **비법** 전수 - 수험장 생생 체험 소개

긴장되고 떨리는 수험장에서 선배들이
문제를 풀면서 겪은 생생한 체험과 나만의 풀이 비법을
자이스토리 해설편에 수록했습니다.

• 2023년

강 한 서울 배재고 졸 (고려대 융합에너지공학과)
권주원 서울 배재고 졸 (서울대 정치외교학부)
김보겸 광주서석고 졸 (연세대 지구시스템과학과)
김수정 부산국제고 졸 (고려대 서어서문학과)
김준서 부산 대연고 졸 (부산대 의예과)
김태산 광주서석고 졸 (고려대 정치외교학과)
김현서 경기 평택고 졸 (서강대 정치외교학과)
나인규 광주 국제고 졸 (한양대 경영학과)
명준하 광주서석고 졸 (연세대 사회환경시스템공학부)
박서영 부산 해운대고 졸 (서울대 심리학과)
박세민 광주 광덕고 졸 (서울대 의예과)
장경은 서울 세화여고 졸 (고려대 통계학과)
장성욱 부산 대연고 졸 (동아대학교 의예과)
정서린 서울 세화여고 졸 (서울대 약학과)
조현준 익산 이리고 졸 (전북대 의예과)
최윤성 서울 양정고 졸 (서울대 공과대학 광역)
홍채연 서울 한영고 졸 (고려대 불어불문학과)

• 2022년

강민성 부산 해운대고 졸 (성균관대 의예과)
강연욱 서울 한영고 졸 (연세대 노어노문학과)
고현웅 광주서석고 졸 (전남대 의예과)
공준형 경기 우성고 졸 (가톨릭관동대 의예과)
김서윤 경기 우성고 졸 (성균관대 글로벌경제학과)
김예리 서울 수명고 졸 (고려대 의예과)
김찬우 익산 이리고 졸 (전남대 의예과)
김혜음 경기 송신여고 졸 (서울대 인문대학)
박정빈 익산 이리고 졸 (고려대 한국사학과)
박준현 전남 장성고 졸 (육군사관학교)
송홍준 광주 국제고 졸 (고려대 융합에너지공학과)
양예진 전주 상산고 졸 (이화여대 의예과)
오석우 공주 한일고 졸 (서울대 의예과)
오연주 전주 솔네고 졸 (서강대 사회학과)
이수현 대구 송현여고 졸 (고려대 정치외교학과)
장인우 광주 고려고 졸 (서울대 인문학부)
전수현 경기 송신여고 졸 (한림대 의예과)
정지호 익산 남성고 졸 (경철대학교)
최준명 서울 양정고 졸 (KAIST 전기 및 전자공학부)

2024 응시



곽지훈
서울 한영외고 졸업
- 세계지리



곽태웅
서울 강서고 졸업
- 윤리와 사상



권민재
서울 광영여고 졸업
- 생명과학 I



김동현
안성 안법고 졸업
- 고3 수학 I, 고3 확률과 통계



김서현
대전한빛고 졸업
- 지구과학 I



김수민
광주 금호중앙여고 졸업
- 화학 II



김신유
익산 남성고 졸업
- 화법과 작문 실전



김아린
대전한빛고 졸업
- 독해 실전, 어법·어휘 실전



김용희
화성 화성고 졸업
- 언어와 매체 실전



김지희
광주 국제고 졸업
- 한국지리



김태현
부산 대연고 졸업
- 물리학 I



노규민
부산 용인고 졸업
- 지구과학 II



류지레
광주대동고 졸업
- 독해 실전, 어법·어휘 실전



문지민
대구 정화여고 졸업
- 생활과 윤리



박주은
대전외고 졸업
- 동아시아사



백혜원
대구남산고 졸업
- 문학 실전



변준서
화성 화성고 졸업
- 고3 수학 I, 고3 수학 II



심기현
대구 계성고 졸업
- 화학 I



오서윤
서울 광문고 졸업
- 고3 수학 II, 고3 미적분



이준수
익산 남성고 졸업
- 고3 수학 II, 기하



전성연
부산국제고 졸업
- 사회·문화



조수근
성남 태원고 졸업
- 독해 실전, 어법·어휘 실전



조인성
성남 태원고 졸업
- 수능 한국사



천원준
부산 동인고 졸업
- 생명과학 II



허다현
부산 사직여고 졸업
- 독서 실전

문항 배열 및 구성 [761제]

① 개념 이해 체크를 체크할 수 있는 개념 확인 문제(133제)

개념 하나하나에 대한 맞춤 확인 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초 실력을 쌓도록 구성하였습니다.

② 최신 6개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항 수록(486제)

- 최근 출제 경향을 파악할 수 있도록 최신 6개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항을 수록하였습니다.
- 2018~1994 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문항 중 새수능 출제 기준에 맞는 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

③ 삼사 중요 기출 문제 수록(77제)

삼사 기출 문항 중 중요 문항을 선별하여 수록하였습니다.

④ 새수능 대비를 위한 고품격 수능 기출 변형 문제(65제)

새수능을 대비해서 충분한 문제로 훈련할 수 있도록 수능 기출 변형 문제를 추가 수록하였습니다.

2024학년도 6월, 9월 평가원+수능

[기하 수록 문항 구성표]

대비연도	3월	4월	6월	7월	9월	10월	수능	합계	비고
2024	8	8	8	8	8	8	8	56	*2025학년도 수능에 적합한 전 문항 수록
2023	8	8	8	8	8	8	8	56	
2022	8	8	8	8	8	8	8	56	
2021	0	0	0	0	0	0	0	0	
2020	0	3	5	6	5	7	6	32	
2019	0	4	3	7	6	5	6	31	
2018	0	2	4	5	6	4	4	25	*수능, 평가원, 학력평가 엄선 수록
2017	0	4	5	6	7	5	4	31	
2016	0	0	3	4	4	4	4	19	
2015	0	0	2	4	4	3	5	18	
2014	0	0	3	3	3	5	3	17	
2013	0	0	2	4	3	4	5	18	
2012	0	0	2	1	4	3	4	14	
2011	0	0	0	0	4	2	5	11	
2010	0	0	0	0	2	3	3	8	
2009이전	0	1	5	0	23	22	28	79	
2022, 2014, 2005대비 예비 평가								15	
수능 기출 변형 문제								65	
개념 확인 문제								133	
삼사 문제								77	
총 문항수								761	

기하 문항 배치표

문항 번호	6월		9월		수능	
	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호
23	기하	A68	기하	E57	기하	E68
24		C45		B83		B55
25		C93		C154		C92
26		A137		E92		D78
27		A138		A55		A62
28		C162		E109		D51
29		A206		A202		A151
30		C167		C163		C161

• 기하: 자이스토리 기하



이차곡선

★ 유형 차례



유형 01 포물선의 정의 및 방정식

유형 02 포물선의 정의와 피타고라스 정리의 활용

유형 03 포물선의 정의와 닮음의 활용

유형 04 포물선의 정의와 방정식의 활용

유형 05 포물선의 정의와 초점을 지나는 직선의 활용

유형 06 포물선의 평행이동

유형 07 포물선과 원

유형 08 포물선과 곡선



유형 09 타원의 정의 및 방정식

유형 10 타원의 초점과 단축, 장축



유형 11 타원의 정의의 활용

유형 12 타원과 피타고라스 정리의 활용

유형 13 타원과 삼각비의 활용

유형 14 타원의 평행이동

유형 15 타원과 원

유형 16 타원과 타원, 타원과 포물선



유형 17 쌍곡선의 정의 및 방정식

유형 18 쌍곡선의 초점과 주축의 길이

유형 19 쌍곡선의 점근선

유형 20 쌍곡선의 점근선의 활용

유형 21 쌍곡선과 도형의 넓이

유형 22 쌍곡선과 도형의 길이

유형 23 쌍곡선의 평행이동

유형 24 쌍곡선과 원

유형 25 쌍곡선과 곡선

★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2024	수능	유형 05 포물선의 정의와 초점을 지나는 직선의 활용	***
		유형 18 쌍곡선의 초점과 주축의 길이	***
	9월	유형 04 포물선의 정의와 방정식의 활용	**
		유형 15 타원과 원	***
	6월	유형 06 포물선의 평행이동	**
		유형 16 타원과 타원, 타원과 포물선	***
유형 16 타원과 타원, 타원과 포물선		***	
유형 22 쌍곡선과 도형의 길이	***		
2023	수능	유형 01 포물선의 정의 및 방정식	**
		유형 20 쌍곡선의 점근선의 활용	***
	9월	유형 06 포물선의 평행이동	***
		유형 12 타원과 피타고라스 정리의 활용	**
	6월	유형 06 포물선의 평행이동	***
		유형 19 쌍곡선의 점근선	**
2022	수능	유형 06 포물선의 평행이동	***
		유형 15 타원과 원	***
		유형 18 쌍곡선의 초점과 주축의 길이	**
	9월	유형 05 포물선의 정의와 초점을 지나는 직선의 활용	* **
		유형 19 쌍곡선의 점근선	**
	6월	유형 05 포물선의 정의와 초점을 지나는 직선의 활용	***
		유형 10 타원의 초점과 단축, 장축	**
	예시	유형 03 포물선의 정의와 닮음의 활용	***
유형 17 쌍곡선의 정의 및 방정식		**	

★ 2024 수능 출제 경향 분석

- 포물선의 정의와 초점을 지나는 직선의 활용 : 포물선의 정의를 이용하여 선분의 길이를 나타낸 다음 삼각형의 닮음을 이용하여 선분의 길이와 삼각형의 넓이를 차례로 구하는 문제가 출제되었다. [A62 문항]
- 쌍곡선의 초점과 주축의 길이 : 주어진 조건과 쌍곡선의 정의를 이용하여 초점의 좌표를 구하는 문제가 출제되었다. [A151 문항]

★ 2025 수능 예측

1. 이차곡선의 정의를 이용하여 포물선, 타원, 쌍곡선에서 만들어지는 선분의 길이 또는 도형의 넓이를 구하는 문제가 출제될 수 있다.
2. 고1 수학에서 배운 원과 이차곡선이 통합된 유형이나 삼각함수와 이차곡선의 정의를 이용한 문제가 출제될 수 있다.
3. 이차곡선끼리의 성질을 이용하여 통합적인 개념을 묻는 문제도 출제 가능성이 있다.

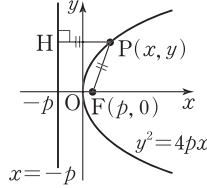


1 포물선¹ - 유형 01~08

+개념 보충

(1) 포물선의 방정식

- ① 점 $F(p, 0)$ 을 초점, 직선 $x = -p$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ (단, $p \neq 0$)
- ② 점 $F(0, p)$ 를 초점, 직선 $y = -p$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식은 $x^2 = 4py$ (단, $p \neq 0$)



출제 2024 수능 27번
2024 9월 모평 27번
2024 6월 모평 23번

★ 수능과 9월 모평에서는 포물선의 정의를 이용하여 선분의 길이를 나타내어 해결하는 중 난이도의 문제가 출제되었고, 6월 모평에서는 평행이동한 포물선의 준선의 방정식을 구하는 쉬운 난이도의 문제가 출제되었다.

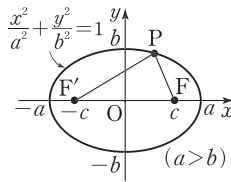
(2) 포물선의 평행이동

포물선 $y^2 = 4px$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 $(y-n)^2 = 4p(x-m)$ ²

2 타원³ - 유형 09~16

(1) 타원의 방정식⁴

- ① 두 정점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 에서의 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a > b > 0$, $c^2 = a^2 - b^2$)
- ② 두 정점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ 에서의 거리의 합이 $2b$ 인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $b > a > 0$, $c^2 = b^2 - a^2$)



출제 2024 9월 모평 29번
2024 6월 모평 26번, 27번

★ 9월 모평에서는 타원의 정의와 성질을 이용하여 타원 위의 점 P와 원 위의 점 Q로 나타낸 선분의 길이의 차의 최솟값을 구하는 고난도 문제가 출제되었고, 6월 모평에서는 한 초점을 공유하는 두 타원에서 여러 선분의 길이를 구하는 문제와 포물선 위의 점 P에 따라 움직이는 점 Q가 타원 위의 점임을 구해야 하는 중 난이도의 문제가 출제되었다.

한걸음 더!

- ④ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)의 장축과 단축의 길이는 각각 $2a$, $2b$ 이고 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)의 장축과 단축의 길이는 각각 $2b$, $2a$ 이다.

+개념 보충

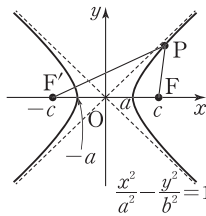
(2) 타원의 평행이동

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 타원의 방정식은 $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ ⁵

3 쌍곡선⁶ - 유형 17~25

(1) 쌍곡선의 방정식

- ① 두 정점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 에서의 거리의 차이가 $2a$ 인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $c^2 = a^2 + b^2$)
- ② 두 정점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ 에서의 거리의 차이가 $2b$ 인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (단, $c^2 = a^2 + b^2$)



출제 2024 수능 29번
2024 6월 모평 29번

★ 수능에서는 쌍곡선의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 초점의 좌표의 합을 구하는 중 난이도의 문제가 출제되었고, 6월 모평에서는 두 쌍곡선의 초점과 쌍곡선 위의 점 사이의 거리가 등차수열을 이룰 때, 직선의 기울기를 구하는 중상 난이도의 문제가 출제되었다.

왜 그럴까?

- ⑦ 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 y 에 대하여 정리하면 $y = \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ 이고 $|x| \rightarrow \infty$ 이면 $\frac{a^2}{x^2} \rightarrow 0$ 이므로 쌍곡선은 직선 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 에 한없이 가까워진다. 즉, 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 이다.

+개념 보충

- ⑧ 평행이동한 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{b}{a}(x-m) + n$ 이다.

**1 포물선**

[A01~04] 초점과 준선의 방정식이 다음과 같은 포물선의 방정식을 구하시오.

A 01 초점 (4, 0), 준선 $x = -4$

A 02 초점 $(-\frac{1}{2}, 0)$, 준선 $x = \frac{1}{2}$

A 03 초점 (0, 3), 준선 $y = -3$

A 04 초점 (0, -4), 준선 $y = 4$

[A05~08] 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 각각 구하시오.

A 05 $y^2 = 8x$

A 06 $y^2 = -10x$

A 07 $x^2 = 4y$

A 08 $x^2 = -\frac{1}{4}y$

A 09 포물선 $y^2 = \frac{1}{4}x$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

2 타원

[A10~13] 다음 타원의 방정식을 구하시오.

A 10 두 초점 F(4, 0), F'(-4, 0)으로부터의 거리의 합이 10인 타원

A 11 두 초점이 F($\sqrt{7}$, 0), F'(- $\sqrt{7}$, 0)으로부터의 거리의 합이 8인 타원

A 12 두 초점이 F(0, 1), F'(0, -1)으로부터의 거리의 합이 4인 타원

A 13 두 초점이 F(0, $\sqrt{5}$), F'(0, - $\sqrt{5}$)으로부터의 거리의 합이 6인 타원

[A14~17] 다음 타원의 초점의 좌표, 장축의 길이, 단축의 길이를 각각 구하시오.

A 14 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$

A 15 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{81} = 1$

A 16 $4x^2 + 9y^2 = 36$

A 17 $4x^2 + y^2 = 4$

A 18 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

3 쌍곡선

[A19~20] 다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

A 19 두 초점 F(5, 0), F'(-5, 0)으로부터의 거리의 차가 6인 쌍곡선

A 20 두 초점 F(0, 3), F'(0, -3)으로부터의 거리의 차가 4인 쌍곡선

[A21~24] 다음 쌍곡선의 초점의 좌표와 주축의 길이를 각각 구하시오.

A 21 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

A 22 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = -1$

A 23 $5x^2 - 4y^2 = 20$

A 24 $4x^2 - 9y^2 = -36$

[A25~26] 다음 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하시오.

A 25 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

A 26 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = -1$

A 27 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

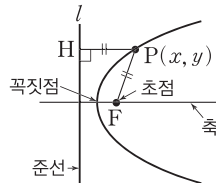


1 포물선

유형 01 포물선의 정의 및 방정식

(1) 포물선의 정의

평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 주어질 때, 점 F와 직선 l 에 이르는 거리가 각각 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다.



(2) 포물선의 방정식

	$y^2=4px$ (단, $p>0$)	$x^2=4py$ (단, $p>0$)
그래프		
초점의 좌표	$(p, 0)$	$(0, p)$
준선의 방정식	$x = -p$	$y = -p$
꼭짓점	$(0, 0)$	$(0, 0)$
축	$y=0$ (x 축)	$x=0$ (y 축)

tip

- 포물선 위의 임의의 점 P와 초점 F, 점 P에서 준선에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{PH} = \overline{PF}$
- x 축에 평행한 축을 갖는 포물선의 방정식의 일반형은 $y^2 + Ax + By + C = 0$ (단, $A \neq 0$)
- y 축에 평행한 축을 갖는 포물선의 방정식의 일반형은 $x^2 + Ax + By + C = 0$ (단, $B \neq 0$)

A28 대표 2019대비(가) 수능 6(고3)

초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF}=9$ 일 때, 점 P의 x 좌표는? (3점)

- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8



A29 2019대비(가) 9월 모평 5(고3)

초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P(a, b)에 대하여 $\overline{PF}=4$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $b>0$) (3점)

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

A30 2023대비 수능 기하 24(고3)

초점이 $F(\frac{1}{3}, 0)$ 이고 준선이 $x = -\frac{1}{3}$ 인 포물선이 점 ($a, 2$)를 지날 때, a 의 값은? (3점)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5



A31 2022실시 3월 학평 기하 23(고3)

초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P와 y 축 사이의 거리가 3일 때, 선분 PF의 길이는? (2점)

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8



A32 *** 2019실시(가) 4월 학평 26(고3)

좌표평면에서 점 $P(-2, k)$ 와 초점이 F 인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ}=\overline{QF}=10$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오. (4점)

A33 *** 2017실시(가) 4월 학평 25(고3)

좌표평면에서 점 $(2, 0)$ 을 지나고 기울기가 양수인 직선이 포물선 $y^2=8x$ 와 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자. 선분 PQ 의 길이가 17일 때, 두 점 P, Q 의 x 좌표의 합을 구하시오. (3점)

A34 *** 2023실시 3월 학평 기하 24(고3)

포물선 $x^2=8y$ 의 초점과 준선 사이의 거리는? (3점)



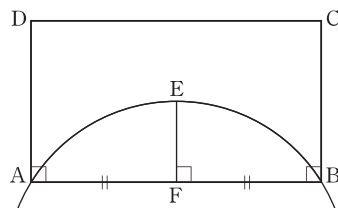
- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

A35 *** 2017대비(가) 9월 모평 25(고3)

좌표평면에서 초점이 F 인 포물선 $x^2=4y$ 위의 점 A 가 $\overline{AF}=10$ 을 만족시킨다. 점 $B(0, -1)$ 에 대하여 $\overline{AB}=a$ 일 때, a^2 의 값을 구하시오. (3점)

A36 *** 2001실시(자) 4월 학평 6(고3)

그림의 사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고, 곡선 AEB 는 $\overline{AB}$ 의 중점 F 를 초점으로 하는 포물선의 일부분이다. $\overline{BC}=2\overline{EF}$ 이고 $\overline{AB}=60$ 일 때, $\overline{BC}$ 의 길이는? (3점)

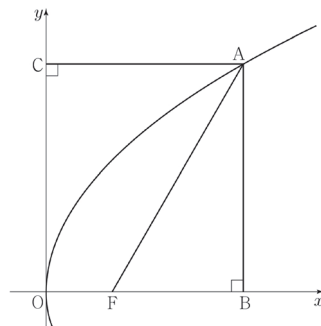


- ① 20 ② 24 ③ 30
④ 36 ⑤ 40

A37 * 2021실시 4월 학평 기하 26(고3)



그림과 같이 꼭짓점이 원점 O 이고 초점이 $F(p, 0)$ ($p>0$)인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 A 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 B, C 라 하자. $\overline{FA}=8$ 이고 사각형 $OFAC$ 의 넓이와 삼각형 FBA 의 넓이의 비가 $2:1$ 일 때, 삼각형 ACF 의 넓이는? (단, 점 A 는 제1사분면 위의 점이고, 점 A 의 x 좌표는 p 보다 크다.) (3점)



- ① $\frac{27}{2}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ 18
④ $12\sqrt{3}$ ⑤ 24



1등급 마스터 문제

[4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]



B104 *** 2022실시 4월 학평 기하 29(고3)

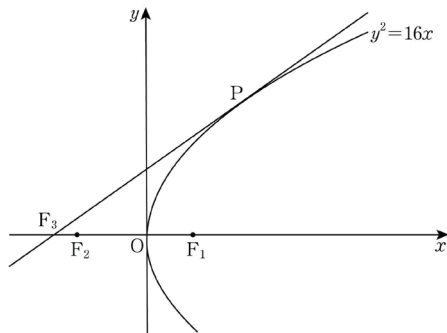


초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ ($p>0$)에 대하여
이 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이
직선 $x=-p$ 와 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 직선
 $x=-p$ 에 수직인 직선이 포물선과 만나는 점을 R라 하자.
 $\angle PRQ=\frac{\pi}{2}$ 일 때, 사각형 PQRF의 둘레의 길이가 140이
되도록 하는 상수 p 의 값을 구하시오. (4점)

B105 *** 2022실시 10월 학평 기하 29(고3)



두 점 $F_1(4, 0)$, $F_2(-6, 0)$ 에 대하여 포물선
 $y^2=16x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P가 $\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=6$ 을
만족시킨다. 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에서의 접선이 x 축과
만나는 점을 F_3 이라 하면 두 점 F_1 , F_3 을 초점으로 하는 타원의
한 꼭짓점은 선분 PF_3 위에 있다. 이 타원의 장축의 길이가
 $2a$ 일 때, a^2 의 값을 구하시오. (4점)



B106 *** 2023실시 4월 학평 기하 29(고3)



그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$

($c>0$)인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{27}=1$ 위의

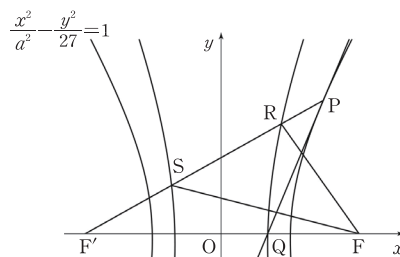
점 $P\left(\frac{9}{2}, k\right)$ ($k>0$)에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q라

하자. 두 점 F, F'을 초점으로 하고 점 Q를 한 꼭짓점으로 하는
쌍곡선이 선분 PF'과 만나는 두 점을 R, S라 하자.

$\overline{RS}+\overline{SF}=\overline{RF}+8$ 일 때, $4 \times (a^2+k^2)$ 의 값을 구하시오.

(단, a 는 양수이고, 점 R의 x 좌표는 점 S의 x 좌표보다 크다.)

(4점)

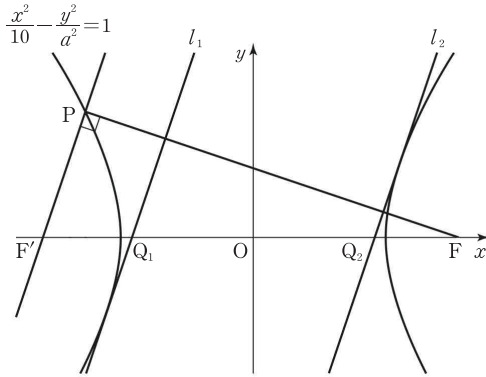


B107 *** 2022실시 4월 학평 기하 30(고3)



그림과 같이 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ 이 있다. 쌍곡선 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P 에 대하여 삼각형 $F'FP$ 는 넓이가 15이고 $\angle F'PF = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다. 직선 PF' 과 평행하고 쌍곡선에 접하는 두 직선을 각각 l_1 , l_2 라 하자. 두 직선 l_1 , l_2 가 x 축과 만나는 점을 각각 Q_1 , Q_2 라 할 때, $\overline{Q_1Q_2} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이고, a 는 양수이다.) (4점)



[1등급 대비+2등급 대비]

B108 ★2등급 대비 2019대비(가) 6월 모평 19(고3)



0이 아닌 실수 p 에 대하여 좌표평면 위의 두 포물선 $x^2 = 2y$ 와 $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4px$ 에 동시에 접하는 직선의 개수를 $f(p)$ 라 하자. $\lim_{p \rightarrow k^+} f(p) > f(k)$ 를 만족시키는 실수 k 의 값은? (4점)

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{9}$
 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B109 ★2등급 대비 2014대비(B) 6월 모평 29(고3)



좌표평면에서 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 점 A 에 대하여 점 B 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 점 A 가 원점이면 점 B 도 원점이다.
 (나) 점 A 가 원점이 아니면 점 B 는 점 A , 원점 그리고 점 A 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A 가 포물선 $y^2 = 16x$ 위를 움직일 때 점 B 가 나타내는 곡선을 C 라 하자. 점 $(3, 0)$ 을 지나는 직선이 곡선 C 와 두 점 P , Q 에서 만나고 $\overline{PQ} = 20$ 일 때, 두 점 P , Q 의 x 좌표의 값의 합을 구하시오. (4점)

09 DAY

B110 ★1등급 대비 2020대비(가) 9월 모평 21(고3)



좌표평면에서 두 점 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 직사각형의 넓이의 최댓값은? (4점)

직사각형 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값은 점 P 의 좌표가 $(0, 6)$ 일 때 최대이고 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 일 때 최소이다.

- ① $\frac{200}{19}$ ② $\frac{210}{19}$ ③ $\frac{220}{19}$
 ④ $\frac{230}{19}$ ⑤ $\frac{240}{19}$



★ 기하

실전 기출 모의고사

[8문항형 / 제한시간 40분]

1 회 모의고사 - 2025학년도 수능 대비 ①

2 회 모의고사 - 2025학년도 수능 대비 ②

3 회 모의고사 - 2025학년도 수능 대비 ③





1 회 기하 실전 기출 모의고사

2025학년도 수능 대비 ①

범위: 기하 전단원

- 문항 수 8개
- 배점 26점
- 제한시간 40분

5지선다형

1 회 01 ※※※ 2016대비(B) 삼사 3(고3)

좌표공간에서 두 점 $A(2, 3, -1)$, $B(-1, 3, 2)$ 에 대하여 선분 AB 를 1:2로 내분하는 점의 좌표를 (a, b, c) 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은? (2점)

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

1 회 02 ※※※ 2018대비(B) 삼사 3(고3)

한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC 에서 $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ 가 성립한다. 실수 s, t 에 대하여 $s+t=3(s \geq 0, t \geq 0)$ 일 때, 점 P 가 그리는 도형의 길이는? (3점)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1 회 03 ※※※ 2011대비(가) 수능 5(고3)

좌표평면에서 점 $A(0, 4)$ 와 타원 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 위의 점 P 에 대하여 두 점 A 와 P 를 지나는 직선이 원 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ 과 만나는 두 점 중에서 A 가 아닌 점을 Q 라 하자. 점 P 가 타원 위의 모든 점을 지날 때, 점 Q 가 나타내는 도형의 길이는? (3점)

- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi$

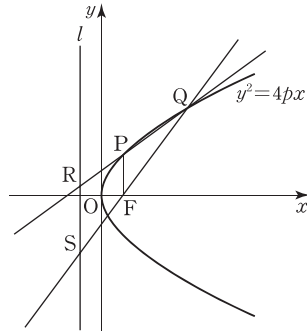
1 회 04 ※※※ 2018실시(가) 4월 학평 12(고3)

좌표평면 위에 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)(c > 0)$ 을 초점으로 하고 점 $A(0, 1)$ 을 지나는 타원 C 가 있다. 두 점 A, F' 을 지나는 직선이 타원 C 와 만나는 점 중 점 A 가 아닌 점을 B 라 하자. 삼각형 ABF 의 둘레의 길이가 16일 때, 선분 FF' 의 길이는? (3점)

- ① 6 ② $4\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{15}$
④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{21}$

1회 05 ※※※ 2011대비(이) 삼사 9(고3)

좌표평면에서 포물선 $y^2=4px$ ($p>0$)의 초점을 F, 준선을 l 이라 하자. 점 F를 지나고 x 축에 수직인 직선과 포물선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 또, 제1사분면에 있는 포물선 위의 점 Q에 대하여 두 직선 QP, QF가 준선 l 과 만나는

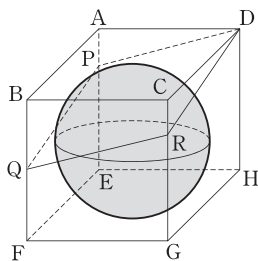


점을 각각 R, S라 하자. $\overline{PF} : \overline{QF} = 2 : 5$ 일 때, $\frac{\overline{QF}}{\overline{FS}}$ 의 값은? (3점)

- ① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

1회 06 ※※※ 2005실시(가) 10월 학평 15(고3)

그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정육면체 ABCD-EFGH에 내접하는 구가 있다. 변 AE, CG를 1:3으로 내분하는 점을 각각 P, R라 하고 변 BF의 중점을 Q라 한다. 네 점 D, P, Q, R를 지나는 평면으로 내접하는 구를 자를 때 생기는 원의 넓이는? (4점)

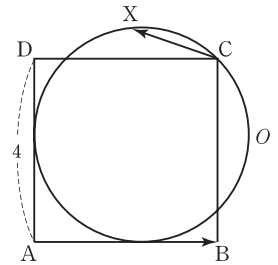


- ① 26π ② 28π ③ 30π
 ④ 32π ⑤ 34π

단답형

1회 07 ※※※ 2015대비(B) 삼사 29(고3)

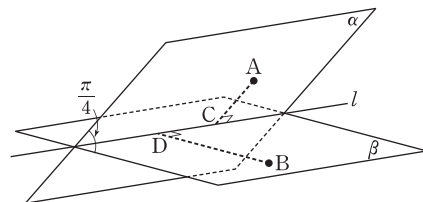
한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB와 변 AD에 모두 접하고 점 C를 지나는 원을 O 라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 X 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CX}$ 의 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CX}$ 의 최댓값은 $a-b\sqrt{2}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 자연수이다.) (4점)



1회 08 ※※※ 2017대비(가) 9월 모평 29(고3)



그림과 같이 직선 l 을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 두 평면 α 와 β 가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$ 이고 직선 AB와 평면 β 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $36(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a , b 는 유리수이다.) (4점)





A 이차곡선



개념 확인 문제

A 01 정답 $y^2=16x$ *포물선의 방정식

$p=4$ 이고 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 포물선의 방정식은
 $y^2=4 \times 4 \times x=16x$

A 02 정답 $y^2=-2x$ *포물선의 방정식

$p=-\frac{1}{2}$ 이고 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 포물선의 방정식은
 $y^2=4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times x=-2x$

A 03 정답 $x^2=12y$ *포물선의 방정식

$p=3$ 이고 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 포물선의 방정식은
 $x^2=4 \times 3 \times y=12y$

A 04 정답 $x^2=-16y$ *포물선의 방정식

$p=-4$ 이고 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 포물선의 방정식은
 $x^2=4 \times (-4) \times y=-16y$

A 05 정답 풀이 참조 *포물선의 방정식

$y^2=8x=4 \times 2 \times x$ 이므로 $p=2$
 따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각
 $(2, 0)$, $x=-2$ 이다.

A 06 정답 풀이 참조 *포물선의 방정식

$y^2=-10x=4 \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times x$ 이므로 $p=-\frac{5}{2}$
 따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각
 $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$, $x=\frac{5}{2}$ 이다.

A 07 정답 풀이 참조 *포물선의 방정식

$x^2=4y=4 \times 1 \times y$ 이므로 $p=1$
 따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각
 $(0, 1)$, $y=-1$ 이다.

A 08 정답 풀이 참조 *포물선의 방정식

$x^2=-\frac{1}{4}y=4 \times \left(-\frac{1}{16}\right) \times y$ 이므로 $p=-\frac{1}{16}$
 따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각
 $\left(0, -\frac{1}{16}\right)$, $y=\frac{1}{16}$ 이다.

A 09 정답 $(y+3)^2=\frac{1}{4}(x-2)$ *포물선의 방정식

포물선 $y^2=\frac{1}{4}x$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $y^2=\frac{1}{4}x$ 에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+3$ 을 대입하면 $(y+3)^2=\frac{1}{4}(x-2)$

A 10 정답 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ *타원의 방정식

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이라 하면
 두 초점이 x 축 위에 있으므로 $2a=10$ 에서 $a=5$
 또, 두 초점의 x 좌표가 각각 4, -4 이므로 $a^2-b^2=4^2$ 에서
 $b^2=a^2-16=25-16=9$
 따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 이다.

A 11 정답 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ *타원의 방정식

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이라 하면
 두 초점이 x 축 위에 있으므로 $2a=8$ 에서 $a=4$
 또, 두 초점의 x 좌표가 각각 $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$ 이므로 $a^2-b^2=(\sqrt{7})^2$ 에서
 $b^2=a^2-7=16-7=9$
 따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 이다.

A 12 정답 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ *타원의 방정식

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이라 하면
 두 초점이 y 축 위에 있으므로 $2b=4$ 에서 $b=2$
 또, 두 초점의 y 좌표가 각각 1, -1 이므로 $b^2-a^2=1^2$ 에서
 $a^2=b^2-1=4-1=3$
 따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 이다.

A 13 정답 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ *타원의 방정식

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이라 하면
 두 초점이 y 축 위에 있으므로 $2b=6$ 에서 $b=3$
 또, 두 초점의 y 좌표가 각각 $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ 이므로 $b^2-a^2=(\sqrt{5})^2$ 에서
 $a^2=b^2-5=9-5=4$
 따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 이다.

A 14 정답 풀이 참조 *타원의 방정식

타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$, 즉 $\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{6})^2}=1$ 의 장축의 길이는
 $2 \times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ 이고 단축의 길이는 $2 \times \sqrt{6}=2\sqrt{6}$ 이다.
 한편, 양수 c 에 대하여 주어진 타원의 두 초점의 좌표를 $(c, 0)$,
 $(-c, 0)$ 이라 하면 $c^2=12-6=6 \quad \therefore c=\sqrt{6}$
 따라서 초점의 좌표는 $(\sqrt{6}, 0)$, $(-\sqrt{6}, 0)$ 이다.

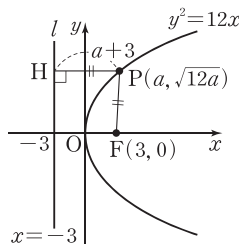
**A 28** 정답 ① *포물선의 초점과 준선 [정답률 97%]

[정답 공식: 포물선 $y^2=4px$ 위의 임의의 점 P와 초점 F(p, 0) 사이의 거리는 점 P에서 준선 $x=-p$ 까지의 거리와 같다.]

초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF}=9$ 일 때, 점 P의 x 좌표는? (3점) **단서** 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{PH}=\overline{PF}$ 이다.

- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

1st 포물선 $y^2=12x$ 의 준선의 방정식을 구하고 $\overline{PF}=9$ 이므로 포물선의 정의를 이용하여 점 P의 x 좌표를 구해.



포물선 $y^2=12x$ 의 준선의 방정식은 $x=-3$ 이다.

포물선 위의 점 P와 초점 F와의 거리는 점 P에서 준선까지의 거리와 같으므로 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PF}=\overline{PH}=9$ 이다.

포물선 $y^2=4px$ (단, $p \neq 0$)의 초점은 F(p, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-p$ 야. 이때 포물선 위의 임의의 점 P에 대하여 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 가 항상 성립해.

즉, 점 P와 준선 $x=-3$ 사이의 거리가 9이다.

따라서 점 P의 x 좌표를 a 라 하면

$\overline{PF}=\overline{PH}=a-(-3)=9$ 에서 $a=6$ 이다.

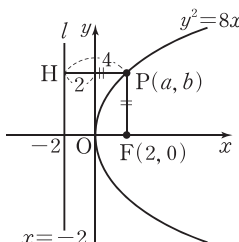
A 29 정답 ④ *포물선의 초점과 준선 [정답률 92%]

[정답 공식: 포물선 $y^2=4px$ 위의 임의의 점 P와 초점 F(p, 0) 사이의 거리는 점 P에서 준선 $x=-p$ 까지의 거리와 같다.]

초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P(a, b)에 대하여 $\overline{PF}=4$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $b>0$) (3점) **단서** 포물선의 정의를 이용하여 a, b의 값을 각각 구해.

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

1st 포물선의 정의를 이용하여 점 P의 x 좌표를 먼저 구하고, 포물선의 방정식을 이용하여 y 좌표도 구해.



포물선의 방정식이 $y^2=8x$ 이므로 포물선의 초점 F의 좌표는 (2, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

그림과 같이 포물선 위의 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

포물선 위의 점에서 준선과 초점 사이의 거리는 각각 같아.

$$\overline{PH}=\overline{PF}=4$$

$$\overline{PH}=|(\text{준선과 } x\text{-축의 교점의 } x\text{-좌표})|+(\text{점 P의 } x\text{-좌표})$$

이때, $4=2+a$ 이므로 점 P의 x 좌표는 $a=2$ 이다.

한편, 점 P는 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$$b^2=8a=16$$

$$\therefore b=4(\because b>0)$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점의 좌표가 (a, b) 이면 $b=f(a)$ 가 성립해.

주의

포물선은 축에 대해 대칭이기 때문에 하나의 a 의 값에 대해 b 의 값이 각각 두 개씩 존재해. 문제의 $b>0$ 이라는 조건을 놓치지 말자.

따라서 $a=2$, $b=4$ 이므로 $a+b=6$

수능 해강

*** 포물선 위의 점과 초점 사이의 거리가 주어지면 알 수 있는 것**

포물선의 방정식을 알고 있으면 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구할 수 있고, 포물선 위의 점과 초점 사이의 거리가 주어지면 포물선 위의 점의 x 좌표를 알 수 있어.

즉, 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하고 초점을 F라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{PH}=\overline{PF}$ 가 성립하고 점 P의 x 좌표를 a 라 할 때, $\overline{PH}=|p|+|a|$ 가 되므로 점 P의 x 좌표를 구할 수 있어.

A 30 정답 ③ *포물선의 정의 및 방정식 [정답률 92%]

[정답 공식: 점 F(p, 0)을 초점, 직선 $x=-p$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ 이다.]

초점이 F($\frac{1}{3}$, 0)이고 준선이 $x=-\frac{1}{3}$ 인 포물선이 점 (a, 2)를 지날 때, a의 값은? (3점) **단서** 포물선의 정의를 이용하여 방정식을 세워.

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 포물선의 방정식을 이용하여 a의 값을 구해.

초점이 F($\frac{1}{3}$, 0)이고 준선이 $x=-\frac{1}{3}$ 인 포물선의 방정식은

→ 초점과 원점 사이의 거리와 준선과 원점 사이의 거리가 각각 $\frac{1}{3}$ 로

같으므로 원점이 포물선의 꼭짓점이 됨을 알 수 있어.

$$y^2=4 \times \frac{1}{3} \times x$$

→ 점 F(p, 0)을 초점, 직선 $x=-p$ 를 준선으로

하는 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ ($p \neq 0$)

$$\therefore y^2=\frac{4}{3}x$$

점 (a, 2)가 포물선 $y^2=\frac{4}{3}x$ 위의 점이므로 대입하면

$$2^2=\frac{4}{3}a, 4=\frac{4}{3}a$$

$$\therefore a=4 \times \frac{3}{4}=3$$

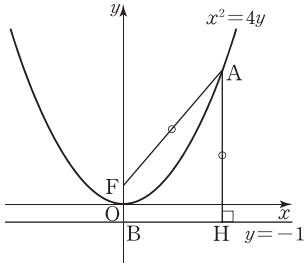
A 35 정답 136 *포물선의 초점과 준선 [정답률 82%]

[정답 공식: 포물선의 정의를 이용해 점 A의 좌표를 구하고, 이를 이용해 a^2 을 계산한다.]

좌표평면에서 초점이 F인 포물선 $x^2=4y$ 위의 점 A가 $\overline{AF}=10$ 을 만족시킨다. 점 B(0, -1)에 대하여 $\overline{AB}=a$ 일 때, a^2 의 값을 구하시오. (3점)

단서 선분 AF의 길이, 즉 포물선 위의 점 A와 초점 F 사이의 거리는 점 A에서 포물선의 준선까지의 거리와 같다.

1st 점 A의 좌표를 구하자.



포물선 $x^2=4y=4 \times 1 \times y$ 의 초점은 $(0, p)$ 이고 준선은 $y=-p$ 이다. 이때, 포물선 위의 점 A에서 준선 $y=-1$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AH}=10$ 이다.

한편, 점 A의 좌표를 임의의 실수 k 에 대하여 $(k, \frac{1}{4}k^2)$ 이라 하면 $\overline{AF}=10$ 이므로

포물선 위의 임의의 점 A에서 초점 F에 이르는 거리 AF와 점 A에서 준선에 이르는 거리는 항상 같다.

점 A의 좌표에서 y좌표를 미지수로 뒤서 $A(\pm\sqrt{4k}, k)$ 로 둘 수도 있지만, $\pm$ 와 제곱근을 포함하는 것보다는 훨씬 간단한 $(k, \frac{1}{4}k^2)$ 으로 두는 것이 좋겠지?

실수

$$\overline{AF} = \sqrt{(k-0)^2 + \left(\frac{1}{4}k^2 - 1\right)^2} = 10 \text{에서}$$

$$\frac{1}{4}k^2 + 1 = 10, k^2 = 36 \rightarrow \sqrt{k^2 + \frac{1}{16}k^4 - \frac{1}{2}k^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}k^2 + 1\right)^2} \text{에서}$$

$$\therefore k = \pm 6$$

따라서 점 A의 좌표는 (6, 9) 또는 (-6, 9)이다.

2nd $\overline{AB}=a$ 에 대하여 a^2 의 값을 구하자.

직각삼각형 ABH의 각 변의 길이는 $\overline{AB}=a$, $\overline{BH}=6$, $\overline{AH}=10$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2 = 6^2 + 10^2 = 136$$

① $\overline{AH}=\overline{AF}=10$
② $\overline{AH}$ 는 x축과 수직이므로 $\overline{AH}=(y\text{좌표의 차})=9-(-1)=10$

다른 풀이: 포물선 위의 점의 좌표 구하기

포물선 $x^2=4y$ 의 초점 F(0, 1)과 준선 $y=-1$ 에 대하여

포물선 위의 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH가 x축과 만나는 점을 H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AH}=\overline{AF}=10 \text{이므로 } \overline{AH'}=\overline{AH}-\overline{HH'}=10-1=9 \text{이지?}$$

즉, 점 A의 y좌표가 9이므로 x좌표는 $x^2=4 \times 9=36$ 에서 $x=\pm 6$ 이야.

따라서 A(6, 9) 또는 A(-6, 9)이므로

$$a^2 = \overline{AB}^2 = (\pm 6 - 0)^2 + \{9 - (-1)\}^2 = 136$$

두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

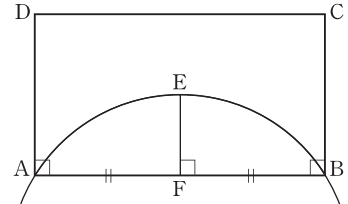
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A 36 정답 3 *포물선의 초점과 준선 [정답률 80%]

[정답 공식: 선분 CD가 포물선의 준선의 일부이므로, 포물선의 정의를 이용해 $\overline{BC}$ 와 같은 길이를 찾는다.]

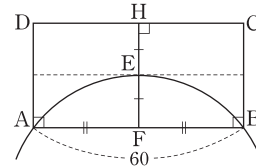
그림의 사각형 ABCD는 직사각형이고, 곡선 AEB는 $\overline{AB}$ 의 중점 F를 초점으로 하는 포물선의 일부분이다. $\overline{BC}=2\overline{EF}$ 이고 $\overline{AB}=60$ 일 때, $\overline{BC}$ 의 길이는? (3점)

단서 이 조건에 의하여 직선 CD는 포물선의 준선이 된다는 걸 알겠지!



- ① 20 ② 24 ③ 30
④ 36 ⑤ 40

1st 포물선의 정의를 생각하면서 준선을 찾자.



그림과 같이 점 E에서 $\overline{DC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 F가 포물선의 초점이고 $\overline{EF}=\overline{EH}$ 이므로 $\overline{DC}$ 는 포물선의 준선이다.

실수

포물선 문제에서는 일단 초점과 준선부터 찾고 시작하는 게 좋아.

2nd 포물선 위의 임의의 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같음을 이용해.

이때, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{FB}=\overline{BC}$ 이고

$\overline{AB}=60$ 이므로

$$\overline{BC} = \overline{FB} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 30$$

* 포물선의 정의 및 방정식

개념·공식

- 포물선의 정의: 평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 주어질 때, 점 F와 직선 l 에 이르는 거리가 각각 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다. 이때, 점 F를 초점, 직선 l 을 준선이라 한다.
- 초점이 F(p , 0), 준선이 $x=-p$ 인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p \neq 0$)
- 초점이 F(0, p), 준선이 $y=-p$ 인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p \neq 0$)

A 48 정답 ④ *포물선의 초점과 준선 [정답률 86%]

[정답 공식: $\overline{AF}=3k$, $\overline{BF}=k$ 라 하고, 포물선의 정의와 삼각형의 닮음을 이용해 k 의 값을 계산한다.]

포물선 $y^2=8x$ 의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\overline{AF}:\overline{BF}=3:1$ 일 때, 선분 AB의 길이는? (3점)

① $\frac{26}{3}$

② $\frac{28}{3}$

③ 10

④ $\frac{32}{3}$

⑤ $\frac{34}{3}$

단서 길이의 비가 주어졌으니 두 점 A, B에서 준선과 x축에 각각 수선의 발을 내려 닮은 삼각형을 찾아 길이의 비를 이용해.

1st 포물선의 정의를 이용하여 두 점 A, B의 x좌표를 구해.

포물선 $y^2=8x=4 \times 2x$ 의 초점은 $F(2, 0)$ 이고 준선은 $x=-2$ 이다. $y^2=4px$ 의 초점은 $(p, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-p$ 이다.

이때, 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하고 준선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 각각 H₁, H₂라 하자.

$\overline{AF}:\overline{BF}=3:1$ 이므로 $\overline{BF}=k$, $\overline{AF}=3k$

(단, $k>0$)로 놓을 수 있다.

포물선의 정의에 의해서 $\overline{AH_1}=3k$, $\overline{BH_2}=k$ 이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $3k-2$, $k-2$ 이다.

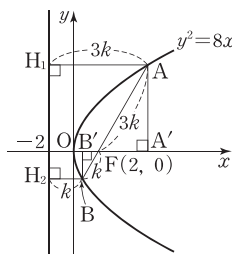
2nd 삼각형의 닮음을 이용해.

두 삼각형의 대응변의 길이의 비가 $\overline{AF}:\overline{BF}=3:1$ 이므로 닮음비는 3:1이다.

삼각형 FAA'과 삼각형 FBB'은 닮음이고 닮음비는 3:1이다. 이때, $\overline{FA'}=(3k-2)-2=3k-4$, $\overline{FB'}=2-(k-2)=4-k$ 이므로 $\overline{FA'}:\overline{FB'}=3:1$ 에서 $(3k-4):(4-k)=3:1$

$$\frac{3(4-k)}{4-k} = \frac{3k-4}{4-k} \quad \therefore k = \frac{8}{3}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = 4k = \frac{32}{3}$$



A 49 정답 ① *포물선의 초점과 준선 [정답률 65%]

[정답 공식: 포물선의 정의로부터 점 A의 좌표를 구하고, 두 점 A, B에서 x축에 각각 수선의 발 M, N을 내려 $\triangle AMF$ 와 $\triangle BNF$ 가 닮음을 이용한다.]

그림과 같이 포물선 $y^2=12x$ 의 초점 F를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점 A, B에서 준선 l 에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}=4$ 일 때, 선분 BD의 길이는? (3점) 단서 선분 BD의 길이를 t 라 놓고 점 B의 좌표를 구해 보.

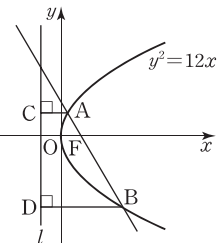
① 12

② $\frac{25}{2}$

③ 13

④ $\frac{27}{2}$

⑤ 14



1st 세 점 F, A, B의 좌표를 각각 구하자.

포물선 $y^2=12x=4 \times 3 \times x$ 의 초점의 좌표는 $F(3, 0)$, 준선 l 의 방정식은 $x=-3$, $\overline{AC}=4$ 이다. 포물선 $y^2=4px$ 의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각 $(p, 0)$, $x=-p$ 이다.

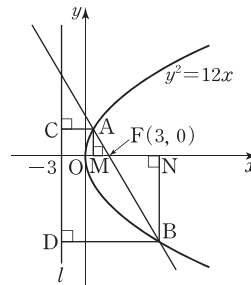
이때, 점 A의 x좌표는 $4-3=1$ 이므로 y좌표를 구하면 $y^2=12 \times 1=12$ 에서 $y=2\sqrt{3}$ ($\because y>0$) 즉, $A(1, 2\sqrt{3})$ 이다.

마찬가지로 $\overline{BF}=\overline{BD}=t$ 라 하면 점 B의 좌표는

$(t-3, -2\sqrt{3(t-3)})$ 포물선의 정의에 의하여 포물선 위의 점 B에서 초점 F와 준선 l 까지의 거리는 같다.

$y^2=12(t-3)$, 그림에서 점 B는 제4사분면 위의 점이므로 $y=-\sqrt{12(t-3)}=-2\sqrt{3(t-3)}$

2nd 삼각형의 닮음을 이용하여 BD의 길이를 구해.



두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면

두 삼각형 AMF와 BNF는 닮은 삼각형이므로

대응변의 길이의 비 $\overline{AF}:\overline{BF}=\overline{AM}:\overline{BN}$ 에서

$$4:t=2\sqrt{3}:2\sqrt{3(t-3)}$$

$$2\sqrt{3}t=4 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{t-3}$$

$$t=4\sqrt{t-3}, t^2=16(t-3)$$

$$t^2-16t+48=0$$

$$(t-4)(t-12)=0$$

$$\therefore t=4 \text{ 또는 } t=12$$

$$\therefore \overline{BD}=12 (\because \overline{BD}>\overline{AC}=4)$$

쉬운 풀이: 직선과 포물선의 방정식을 연립하여 구하기

직선 AF의 방정식을 구하여 점 B의 좌표를 구하자.

두 점 $A(1, 2\sqrt{3})$, $F(3, 0)$ 에서 직선 AF의 방정식은

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{2}(x-3) = -\sqrt{3}(x-3) \quad \text{두 점 } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{를 지나는 직선의 방정식은 } y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

이므로 포물선 $y^2=12x$ 와 직선 AF의 교점을 구하면

$$\{-\sqrt{3}(x-3)\}^2 = 12x \text{에서}$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-1)(x-9) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=9$$

그런데 점 A의 x좌표가 1이므로 점 B의 x좌표는 9야.

$$\therefore B(9, -6\sqrt{3}), \overline{BD}=3+9=12$$

원점 O와 준선 l 사이의 거리 $\leftarrow$ $\rightarrow$ 점 B의 x좌표의 절댓값

*포물선의 정의 및 방정식

개념·공식

① 포물선의 정의: 평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 주어질 때, 점 F와 직선 l 에 이르는 거리가 각각 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다. 이때, 점 F를 초점, 직선 l 을 준선이라 한다.

② 초점이 $F(p, 0)$, 준선이 $x=-p$ 인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p \neq 0$)

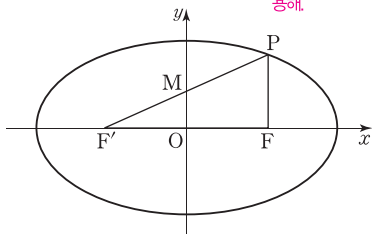
③ 초점이 $F(0, p)$, 준선이 $y=-p$ 인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p \neq 0$)

A 112 정답 ② *타원과 선분의 길이 [정답률 77%]

[정답 공식: 타원의 정의와 $\triangle MOF$ 와 $\triangle PF'F$ 의 닮음비가 1:2라는 조건을 이용한다.]

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F'이라 하자. 타원 위의 점 P에 대하여 선분 PF'의 중점 M의 좌표가 (0, 1)이고 $PM = PF$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 상수이다.) (4점)

단서 점 M이 선분 PF'의 중점이고 점 O는 선분 F'F의 중점임을 이용해



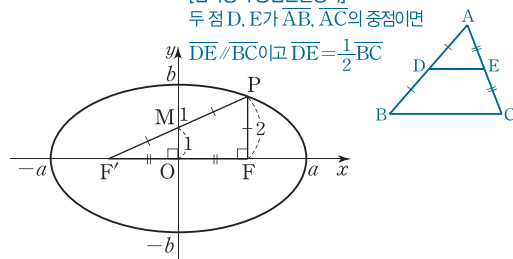
- ① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

1st 타원의 정의를 이용하여 a^2 의 값을 구하자.

두 점 M, O는 각각 $\overline{PF'}$, $\overline{F'F}$ 의 중점이므로 $\overline{MO} \parallel \overline{PF}$
즉, $\overline{MO} \perp \overline{F'F}$ 이므로 $\overline{PF} \perp \overline{F'F}$ 이고 두 직각삼각형 $\triangle MF'O$, $\triangle PF'F$ 는 닮은 삼각형이다.

[삼각형의 중점연결정리]

두 점 D, E가 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 의 중점이면



따라서 $\overline{MO} : \overline{PF} = \overline{F'O} : \overline{F'F} = 1 : 2$ 이고 $\overline{MO} = 1$ 이므로 $\overline{PF} = 2\overline{MO} = 2$

또, $\overline{PF} = \overline{PM} = \overline{MF'}$ 이므로

$$\overline{PF'} = \overline{PM} + \overline{MF'} = 2\overline{PF} = 4$$

이때, 두 점 F, F'은 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이고 점 P는 타원 위의 점이므로 $\overline{PF'} + \overline{PF} = 2|a|$ 에서

$2|a| = 4 + 2 = 6$, $|a| = 3$ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 항상 장축의 길이인 $2a$ 로 일정해.

$$\therefore a^2 = 9$$

2nd 타원의 초점의 좌표를 이용하여 b^2 의 값을 구하자.

한편, 직각삼각형 $\triangle PF'F$ 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{F'F} = \sqrt{\overline{PF'}^2 - \overline{PF}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

즉, 두 점 F, F'의 좌표는 각각 $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = (\sqrt{3})^2 = 3 \rightarrow \text{타원 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{의 두 초점의 좌표는 } (\pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

$$\therefore b^2 = a^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 9 + 6 = 15$$

특독 풀이: 특수각의 삼각비 이용하기

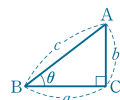
$\overline{PM} = \overline{PF}$, $\overline{PM} = \overline{MF'}$ 이고 $\overline{MF'} = \overline{MF}$ 이므로 삼각형 PMF는 정삼각형이야.

즉, $\angle MFP = 60^\circ$ 이고 $\overline{MO} \parallel \overline{PF}$ 이므로

$$\angle PFF' = 90^\circ \text{에서 } \angle MFO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

이때, 직각삼각형 MFO에서 $\overline{MO} = 1$ 이므로

$$\overline{MF} = \frac{\overline{MO}}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\sin \theta}, b = c \sin \theta \\ \cos \theta = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\cos \theta}, a = c \cos \theta \end{cases}$$



따라서 $\overline{PF} = \overline{MF} = 2$ 이고

$$\overline{PF'} = \overline{PM} + \overline{MF'} = 2\overline{MF} = 4 \text{이므로}$$

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 + 4 = 6$$

$$\therefore 2|a| = 6$$

(이하 동일)

타원의 방정식

개념·공식

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 에 대하여

① 두 초점의 좌표: $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$

② 장축의 길이(두 초점까지의 거리의 합): $2a$

③ 단축의 길이: $2b$

A 113 정답 104 *타원의 초점 [정답률 63%]

[정답 공식: 두 점 Q, R의 정의로부터 장축의 길이를 구하고, 초점 F'에서 선분 PF에 수선의 발을 내린 뒤 도형의 닮음을 이용해 $\overline{F'F}$ 와 b^2 의 값을 구한다.]

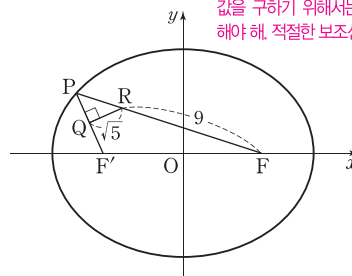
그림과 같이 두 초점이 F(c, 0), F'(-c, 0)인 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

이 있다. 타원 위에 있고 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF'의 중점을 Q, 선분 PF를 1:3으로 내분하는 점을 R라 하자.

$\angle PQR = \frac{\pi}{2}$, $\overline{QR} = \sqrt{5}$, $\overline{RF} = 9$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b, c는 양수이다.) (4점)

단서 타원의 정의를 이용하면 a의 값을 쉽게 구할 수 있을 거야. 다만 문제는 b의 값인데 b의 값을 구하기 위해서는 $\overline{F'F}$ 의 길이부터 구해야 해. 적절한 보조선을 그려 보자.



1st $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ 임을 이용하여 a의 값을 구해.

$$\overline{PR} : \overline{RF} = 1 : 3 \text{이므로}$$

$$\overline{PR} = \frac{1}{3}\overline{RF} = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

직각삼각형 RPQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{RQ}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$$

한편, 점 Q는 선분 PF'의 중점이므로

$$\overline{PF'} = 2\overline{PQ} = 2 \times 2 = 4$$

$$\overline{PF} = \overline{PR} + \overline{RF} = 3 + 9 = 12 \text{이고}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 위의 점 P에 대하여 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 4 + 12 = 16 = 2a$$

$$\therefore a = 8$$

장축의 길이야.

두 정점으로부터의 거리의 합이 일정한 점이 나타내는 도형이야.



A 199 정답 80 *포물선의 정의와 초점을 지나는 직선의 활용 -- [정답률 33%]

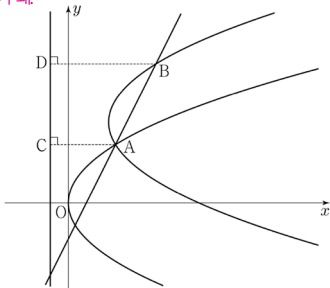
(정답 공식: 포물선 위의 점에서 초점과 준선까지 이르는 거리는 같다.)

단서1 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$ 는 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동시킨 거야.

포물선 $y^2=8x$ 와 직선 $y=2x-4$ 가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a 에 대하여 포물선

$(y-2a)^2=8(x-a)$ 가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$ 와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$ 가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$ 이다. k^2 의 값을 구하시오. (4점)

단서2 직선 $y=2x-4$ 의 기울기는 2야? 이때, $\frac{2a}{a}=2$ 이고 점 B는 직선 $y=2x-4$ 위의 점이므로 점 A를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동시키면 점 B가 돼.



1st 점 A는 포물선 $y^2=8x$ 와 직선 $y=2x-4$ 의 교점임을 이용해.

x 축 위의 점의 y 좌표는 0이므로 직선의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면 $x=2$ 이므로 점 F의 좌표는 $(2, 0)$ 이야.

직선 $y=2x-4$ 가 x 축과 만나는 점을 F라 하면 점 F의 좌표는 $(2, 0)$ 이므로 점 F는 포물선 $y^2=8x=4 \times 2 \times x$ 의 초점이다.

포물선 $y^2=4px$ 의 초점의 좌표는 $(p, 0)$ 이야?

이때, 포물선 $y^2=8x$ 와 직선 $y=2x-4$ 의 두 교점 중 점 A가 아닌 점을 E라 하고 두 점 A, E의 좌표를 구하기 위해 포물선의 방정식과 직선의 방정식을 연립하면 $(2x-4)^2=8x$ 에서

$$4x^2-16x+16=8x, 4x^2-24x+16=0, x^2-6x+4=0$$

$$\therefore x=3 \pm \sqrt{9-4}=3 \pm \sqrt{5}$$

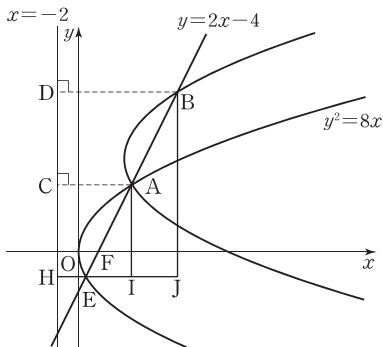
따라서 두 점 A, E의 x 좌표는 각각 $3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$ 이다.

점 A는 점 E보다 오른쪽에 있으므로 점 A의 x 좌표가 점 E의 x 좌표보다 커.

2nd 포물선의 정의를 이용하여 $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$ 의 값을 구해.

포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$ 는 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{AB}=\overline{AE}$ 이다.

점 E, 점 A를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동하면 각각 점 A, 점 B가 돼.



이때, 점 E에서 직선 $x=-2$, 즉 포물선 $y^2=8x$ 의 준선에 내린 수선의

포물선 $y^2=4px$ 의 준선의 방정식은 $x=-p$ 야.

발을 H라 하고 두 점 A, B에서 선분 HE의 연장선에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AC}=\overline{AF}$, $\overline{EH}=\overline{EF}$ 이므로 $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{BD}-(\overline{AF}+\overline{EF})$

$$=\overline{AC}+\overline{BD}-(\overline{AC}+\overline{EH})=\overline{BD}-\overline{EH}=\overline{JH}-\overline{EH}=\overline{EJ}=2\overline{EI}=2\{(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})\}$$

두 선분 AI, BJ는 서로 평행하고

점 A, 점 I는 각각 두 선분 BE, JE

의 중점이므로 삼각형의 중점연결정

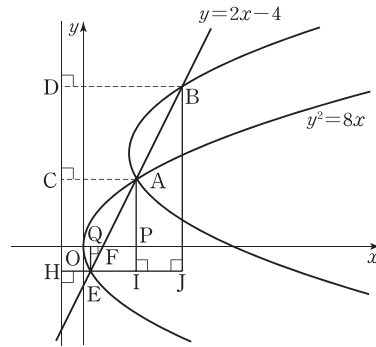
리에 의하여 선분 EI의 길이는 선분

EI의 길이의 2배가 돼.

$$=2 \times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

따라서 $k=4\sqrt{5}$ 이므로 $k^2=(4\sqrt{5})^2=80$

다른 풀이: 삼각비 이용하기



포물선 $y^2=8x$ 와 직선 $y=2x-4$ 가 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 점 E라 하고 직선 $y=2x-4$ 가 x 축과 만나는 점을 F라 하자. 또, 점 E에서 직선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 H, 두 점 A, B에서 선분 EH의 연장선에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하고 선분 AI와 x 축의 교점을 P, 점 E에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q라 하자.

이때, 점 F와 직선 $x=-2$ 는 각각 포물선 $y^2=8x$ 의 초점과 준선이므로 $\overline{AF}=p$, $\overline{EF}=q$ 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AC}=p$, $\overline{EH}=q$ 이므로 두 점 A, E의 x 좌표는 각각 $p-2$, $q-2$ 야.

따라서 $\overline{FP}=p-4$, $\overline{FQ}=4-q$ 이므로

점 P의 x 좌표는 점 A의 x 좌표와 같으므로 선분 FP의 길이는 점 A의 x 좌표에서 점 F의 x 좌표를 빼서 구하면 돼. 즉, $\overline{FP}=(p-2)-2=p-4$ 야. 또, 점 Q의 x 좌표는 점 E의 x 좌표와 같으므로 선분 FQ의 길이는 점 F의 x 좌표에서 점 E의 x 좌표를 빼서 구하면 돼. 즉, $\overline{FQ}=2-(q-2)=4-q$ 야.

직각삼각형 AFP에서 삼각비에 의하여 $\frac{\overline{FP}}{\overline{AF}}=\frac{p-4}{p}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\angle AFP=\theta$ 라 하면 직선 $y=2x-4$ 의 기울기가 2이므로 $\tan \theta=2$ 야. 이때, 한 내각의 크기가 θ 인 직각삼각형에서 밑변의 길이와 높이를 각각 1, 2라 하면 빗변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 $\cos \theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 야.

$$p=\sqrt{5}p-4\sqrt{5}, (\sqrt{5}-1)p=4\sqrt{5}$$

$$\therefore p=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=5+\sqrt{5}$$

또, 직각삼각형 EFQ에서 삼각비에 의하여 $\frac{\overline{FQ}}{\overline{EF}}=\frac{4-q}{q}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$q=4\sqrt{5}-\sqrt{5}q, (\sqrt{5}+1)q=4\sqrt{5}$$

$$\therefore q=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=5-\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{EI}=\overline{HI}-\overline{EH}=\overline{AC}-\overline{EH}=p-q$$

$$=(5+\sqrt{5})-(5-\sqrt{5})=2\sqrt{5} \cdots \textcircled{1}$$

한편, 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$ 는 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동시킨 것이므로 $\overline{AB}=\overline{AE}$ 이다.

*포물선과 타원의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 미지수의 값 찾기 [유형 16]

단서1 타원의 정의를 이용하려는 거야.

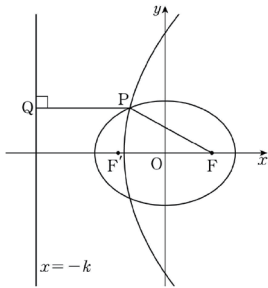
그림과 같이 두 초점 F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선

$x = -k$ (k > 0)이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x = -k$ 에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다. **단서2** 포물선의 정의를 이용하려는 거야.

$$(가) \cos(\angle F'FP) = \frac{7}{8}$$

$$(나) \overline{FP} - \overline{F'Q} = \overline{PQ} - \overline{FF'}$$

c + k의 값을 구하시오. (4점)



Q&A 2등급? 포물선과 타원의 정의를 이용하여 관계식을 찾고 미지수의 값을 구하는 문제이다.

포물선과 타원의 정의를 식으로 표현하고 이를 주어진 조건과 연결하여 필요한 조건을 발견하는 것이 어려웠다.

단서+발상

단서1 타원의 정의에 의해 초점 사이의 거리 $\overline{FF'} = 2c$ 이고 장축의 길이가 12이므로 $\overline{FP} + \overline{PF'} = 12$ 이다. **개념**

단서2 점 P가 포물선 위의 점이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{PQ} = \overline{FP}$ 를 만족한다. **개념**
조건 (나)에 의해 $\overline{F'Q} = \overline{FF'}$ 이고 선분 $\overline{PQ}$ 가 x축과 평행하므로 이를 활용하면 사각형 QF'FP는 마름모임을 알 수 있다. **적용**

단서3 사각형 QF'FP는 마름모이므로 네 변의 길이가 모두 같아 $\overline{FP} = \overline{FF'} = 2c$ 이고 **단서1**에 의해 $\overline{PF'} = 12 - 2c$ 이다. **발상**
삼각형 PFF'에서 코사인법칙에 의하여 미지수 c의 값을 찾고 이 값을 이용하여 k의 값을 찾을 수 있다. **해결**

주의 사각형 QF'FP는 이웃하는 두 변의 길이가 같고 한 쌍의 대변이 평행한 사각형이다. 이러한 사실만으로 평행선의 성질과 한 대각선으로 나뉘어진 두 삼각형의 합동을 통해 사각형 QF'FP가 마름모임을 확인할 수 있어야 한다.

[핵심 정답 공식: 포물선은 초점과 준선에 이르는 거리가 같은 점들의 집합이고 타원은 두 초점으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 집합이다.

[문제 풀이 순서]

1st 포물선, 타원의 정의를 이용하여 c의 값을 구해.

점 F와 직선 $x = -k$ 가 각각 포물선의 초점과 준선이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PQ}$ 이다.

즉, 조건 (나)의 $\overline{FP} - \overline{F'Q} = \overline{PQ} - \overline{FF'}$ 에서 $\overline{F'Q} = \overline{FF'}$ 이다.

따라서 사각형 PQF'F는 마름모이므로 $\overline{PF} = \overline{PQ} = \overline{F'Q} = \overline{FF'}$

1등급 대비 특강에서 확인해.

그런데 타원의 두 초점 F, F'의 좌표가 각각 (c, 0), (-c, 0)이므로 $\overline{PF} = \overline{PQ} = \overline{F'Q} = \overline{FF'} = c - (-c) = 2c$

한편, 타원의 장축의 길이가 12이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 12 \text{에서}$$

타원 위의 한 점에서 두 초점에 이르는 거리의 합은 타원의 장축의 길이와 같다.

$$\overline{PF'} + 2c = 12 \quad \therefore \overline{PF'} = 12 - 2c$$

따라서 삼각형 PFF'에서 코사인법칙에 의하여

삼각형 ABC에서 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 가 성립하고 이를 코사인법칙이라 해.

$$\overline{PF'}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FF'}^2 - 2 \times \overline{PF} \times \overline{FF'} \times \cos(\angle F'FP)$$

$$(12 - 2c)^2 = (2c)^2 + (2c)^2 - 2 \times 2c \times 2c \times \frac{7}{8} \quad (\because \text{조건 (가)})$$

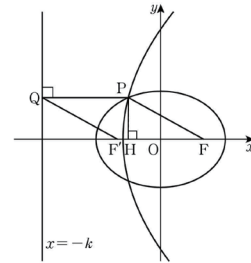
$$144 - 48c + 4c^2 = 4c^2 + 4c^2 - 7c^2, \quad 3c^2 - 48c + 144 = 0$$

$$c^2 - 16c + 48 = 0, \quad (c - 4)(c - 12) = 0$$

$\therefore c = 4$ ($\because 0 < c < 6$) → 장축의 길이가 12이므로 타원이 $x > 0$ 에서 x축과 만나는 점을 A라 하면 $\overline{OA} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ 이고

점 F는 선분 OA 위에 있으므로 $0 < c < 6$ 이다.

2nd k의 값을 구해.



그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 c = 4이므로 직각삼각형 PHF에서

$$\overline{HF} = \overline{PF} \cos(\angle PFH) = 2c \times \frac{7}{8} = 8 \times \frac{7}{8} = 7$$

$$\cos(\angle PFH) = \frac{\overline{HF}}{\overline{PF}}$$

이때, 점 F의 좌표는 (c, 0), 즉 (4, 0)이므로 점 H의 좌표는 (-3, 0)

이다. 한편, 선분 PQ의 길이가 2c = 8이므로 점 Q의 x좌표는

$$-3 - 8 = -11$$

점 Q는 점 P를 x축의 방향으로 -2c = -8만큼 평행이동시킨 점이고 점 P의 x좌표는 점 H의 x좌표와 같으므로 점 Q의 x좌표는 -3 - 8 = -11이다.

따라서 점 Q가 직선 $x = -k$ 위에 있으므로

$$-k = -11 \quad \therefore k = 11$$

$$\therefore c + k = 4 + 11 = 15$$

1등급 대비 특강

* 사각형 FF'QP가 마름모인 이유

두 삼각형 PQF, F'FQ에서 두 변 PQ, F'F가 평행하므로

$$\angle PQF = \angle F'FQ \text{ (엇각)}$$

또, 두 삼각형 PQF, F'FQ는 모두 이등변삼각형이므로

$$\angle PQF = \angle PFQ = \angle F'FQ = \angle F'QF \text{이고, 선분 FQ는 공통이므로}$$

두 삼각형 PQF, F'FQ는 ASA 합동이다. 따라서 사각형 FF'QP는 마름모야.



My Top Secret

서울대 선배의 1등급 대비 전략

포물선과 타원이 동시에 적용되는 문제의 경우 두 정의를 모두 활용할 수 있도록 조건이 제시돼. 특히 교점은 두 이차곡선의 정의를 모두 활용할 수 있는 점이기에 때문에 정의에 관한 두 식을 먼저 써두고 문제에서 주어진 조건과 어떻게 연결할지 고민하는 연습이 필요해.