문제 유형을 촘촘히 분류해 개념을 적용시키면
수학이 쉬워집니다!

개념을 익히고 그 개념들을 단계별로
연결하여 파악하는 것이 수학 공부의 기본입니다.
만약 개념 이해 과정을 소홀히 하고, 문제만 반복하여 푼다면
개념 사이의 연계성을 파악할 수 없어
오랜 시간 공부해도 성적을 올릴 수 없습니다.

자이스토리 고3 수학은
최신 수능, 평가원, 학력평가 및 경찰대, 삼사 기출 문제를 정밀하게 분석해
개념의 연계성에 따라 문제 유형을 촘촘히 분류하였습니다.
따라서 유형별 기출 문제를 순서대로 차근차근 풀어가면
개념의 연계성이 명쾌하게 파악되어서 문제 풀이가 쉬워집니다.

또한, 자이스토리의 정확하고 자세한 단계별 해설과 풍부한 보충 첨삭은
문제를 풀어가면서 개념을 알맞게 적용하는 방법을
자연스럽게 익힐 수 있습니다.

이 책의 마지막 페이지를 넘길 때쯤 여러분은 이미
수학 1등급에 도달해 있을 것입니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 –



수능 1등급 완성 학습 계획표 [30일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~64		월 일	월 일
2	65~106		월 일	월 일
3	107~125		월 일	월 일
4	B 01~56		월 일	월 일
5	57~96		월 일	월 일
6	97~119		월 일	월 일
7	120~139		월 일	월 일
8	C 01~60		월 일	월 일
9	61~77		월 일	월 일
10	D 01~57		월 일	월 일
11	58~96		월 일	월 일
12	97~144		월 일	월 일
13	145~165		월 일	월 일
14	E 01~54		월 일	월 일
15	55~97		월 일	월 일
16	98~116		월 일	월 일
17	F 01~44		월 일	월 일
18	45~86		월 일	월 일
19	87~98		월 일	월 일
20	G 01~61		월 일	월 일
21	62~101		월 일	월 일
22	102~112		월 일	월 일
23	H 01~44		월 일	월 일
24	45~89		월 일	월 일
25	90~105		월 일	월 일
26	I 01~46		월 일	월 일
27	47~75		월 일	월 일
28	모의 1회		월 일	월 일
29	모의 2회		월 일	월 일
30	모의 3회		월 일	월 일



• 나는 _____ 대학교 _____ 학과 _____ 학번이 된다.

• **磨斧作針** (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

자이스토리 고3 확률과 통계 활용법+α



❶ 개념 · 공식 학습 후 수능 출제 경향 확인!

- 각 단원에 필수적으로 알아야 하는 핵심 개념과 관련된 보충 설명을 꼼꼼히 살펴보세요.
- 최신 출제 경향을 파악하고 앞으로의 수능을 예측하세요.

❷ 수능과 모의고사에 나오는 모든 유형을 촘촘히 섭렵하자!

- 촘촘히 분류된 모든 유형을 확인하고 유형별 풀이 비법을 확인하세요.
- 유형 안에서 난이도 순으로 다시 분류된 문제를 보면서 각 유형에서 쉬운 문제는 어떻게 출제되는지, 고난도 문제는 어떻게 출제되는지 확인하세요.



❸ 부족한 유형을 다시 한 번 점검하자!

- 자신에게 부족한 유형을 찾아낸 후 부족한 부분을 여러 번 반복 학습해 보세요.
- 부족한 유형에 대한 특징과 핵심 개념을 다시 한 번 확인한 후 유형 해결 요령을 터득하세요.

❹ 1등급을 좌우하는 고난도 문항을 완벽하게 마스터하자!

- 1등급 대비 문제는 복합적인 개념을 묻기 때문에 여러 개념을 정확히 파악한 뒤 종합적 사고를 하세요.
- 1등급 문제의 핵심이 되는 (단서)로 조건을 파악하고 조건을 이용하여 접근하는 방법을 (발상)해서 문제 풀이에 (적용)하는 방법을 익히세요.



❺ 쉽게 이해되는 입체 첨삭 해설을 공부해서 다시는 틀리지 말자!

- [첨삭 해설]과 [실수, 함정, 주의 첨삭]을 따라가다 보면 풀이 과정에서 놓치기 쉬운 부분이나 이해가 어려운 부분을 쉽게 풀어 주어 해설을 완벽하게 이해할 수 있어요.
- 쉬운 풀이, 톡톡 풀이, 다른 풀이를 꼼꼼히 읽어서 시간을 줄일 수 있는 풀이법을 찾아보세요.
- 문제 해결 과정에 사용된 개념 · 공식을 다시 한 번 확인하여 놓치고 있었던 내용이 없는지 확인하세요.
- 수능 핵강으로 문제에 대한 개념을 완벽하게 이해하세요.



❻ 오답노트를 만들어 100% 활용하자!

- 반드시 오답노트를 만들어 보세요. 해설에 제시된 단서 또는 접근법도 같이 기록하여 풀어 봤던 문제는 다시는 틀리지 않도록 여러 번 풀어보세요.
- 시간이 지난 후 오답노트를 읽어 보며 해설의 아이디어를 바탕으로 풀이를 따라가 보고 자신만의 풀이도 추가해 보세요.

단원별 핵심 문제 + 최신 · 중요 문제 동영상 강의 QR코드

1. 개념 강의로 핵심 개념을 이해하고 개념이 문제에 적용되는 것을 확인해 보세요!
2. 동영상 문제 풀이로 해설을 좀 더 빠르게 이해할 수 있어요!
3. 해설의 풀이를 읽어보고 동영상 강의를 시청하면 더 쉽게 이해될 거예요!
4. 풀기 어려운 고난도 문제는 동영상 강의를 여러 번 반복 시청해 보세요!

차 례 [총 83개 유형 분류]



Ⅰ 경우의 수

A 여러 가지 순열 – 11개 유형 분류

핵심 개념 정리 12
기본 기출 문제 13
수능 유형별 기출 문제 14
1등급 마스터 문제 37
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 40
동아리 소개/서울대 Caffe人 42

B 중복조합 – 8개 유형 분류

핵심 개념 정리 44
기본 기출 문제 45
수능 유형별 기출 문제 46
1등급 마스터 문제 65
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 73

C 이항정리 – 6개 유형 분류

핵심 개념 정리 76
기본 기출 문제 77
수능 유형별 기출 문제 78
1등급 마스터 문제 89
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 90

Ⅱ 확률

D 여러 가지 확률 – 10개 유형 분류

핵심 개념 정리 92
기본 기출 문제 93
수능 유형별 기출 문제 94
1등급 마스터 문제 121
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 127
동아리 소개/서울대 ImageBand 130

E 조건부확률 – 8개 유형 분류

핵심 개념 정리 132
기본 기출 문제 133
수능 유형별 기출 문제 134
1등급 마스터 문제 155
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 158
동아리 소개/서울대 총연극회 160

F 독립시행의 확률 – 10개 유형 분류

핵심 개념 정리 162
기본 기출 문제 163
수능 유형별 기출 문제 164
1등급 마스터 문제 180
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 182

Ⅲ 통계

G 이산확률분포 – 10개 유형 분류

핵심 개념 정리 184
기본 기출 문제 185
수능 유형별 기출 문제 186
1등급 마스터 문제 210
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 212
동아리 소개/성균관대 성균지 214

H 연속확률분포 – 11개 유형 분류

핵심 개념 정리 216
기본 기출 문제 217
수능 유형별 기출 문제 218
1등급 마스터 문제 237
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 239

I 통계적 추정 – 9개 유형 분류

핵심 개념 정리 242
기본 기출 문제 243
수능 유형별 기출 문제 244
1등급 마스터 문제 259
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 260
동아리 소개/연세대 연세국궁부 262

Special 확률과 통계 실전 기출 모의고사

1회 모의고사 [2025학년도 수능 대비 ①] 264
2회 모의고사 [2025학년도 수능 대비 ②] 266
3회 모의고사 [2025학년도 수능 대비 ③] 268

빠른 정답 찾기[문제편] 271

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

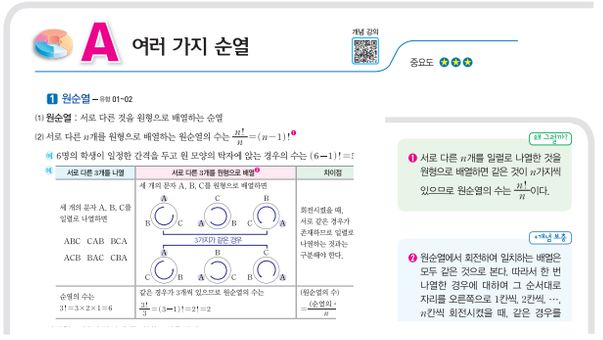
셀프수학

개념 총정리 + 촘촘한 유형 분류 기출 문제 = 수능 1등급

1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 제공되는 강의와 보충 설명으로 개념과 공식의 이해를 돕고 실전 문제에서 적절하게 개념을 사용할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

- **중요도** ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요도 제시
- +개념 보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2024학년도 수능과 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시



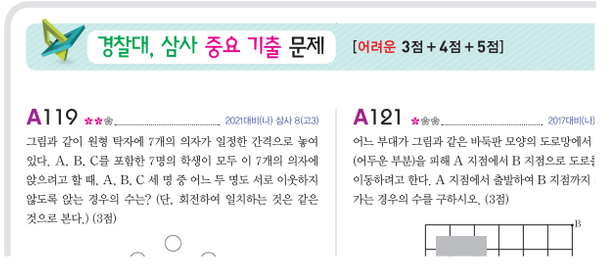
2 기본 기출 문제 – 쉬운 기출 문제로 개념 점검

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 기본 개념과 공식을 확인하는 기출 문제를 수록하였습니다. 이는 개념 이해를 강화하고 응용 문제를 풀 수 있는 초석을 쌓는 과정입니다.



3 경찰대·삼사 기출 문제 – 최신 중요 기출 문제 수록

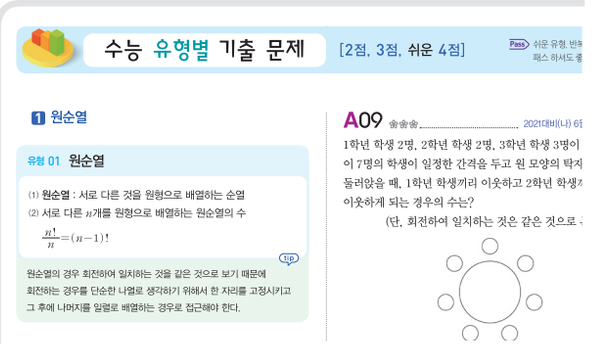
경찰대 기출과 삼사 기출 문제 중 수능 출제 기준에 맞는 중요 문항을 엄선하여 수록하였습니다.



4 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하여 유형, 개념, 난이도 순서대로 문항을 배열하였습니다. 기출 문제가 부족한 단원이나 유형은 고품격 수능 기출 변형 문제를 출제하여 추가 수록하였습니다.

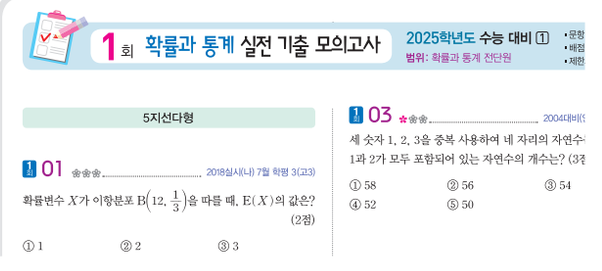
- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- QR코드 : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.



- 유형 분류 : 출제 – 2024 수능, 평가원에서 출제된 유형
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형
- 난이도 : ❀❀❀ – 기본 문제 ✿❀❀ – 중급 문제
  ✿✿❀ – 중상급 문제 ✿✿✿ – 상급 문제
- Pass : 간단한 계산 문제로 패스해도 좋은 문제
- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2024대비 수능 1(고3) : 2023년 11월에 실시한 수능
  - 2024대비 6월 모평 2(고3) : 2023년 6월에 실시한 평가원
  - 2023실시 4월 학평 3(고3) : 2023년 4월에 실시한 학력평가
  - 2024대비 9월 모평 2(고3) : 2023년 9월에 실시한 평가원

5 확률과 통계 실전 기출 모의고사

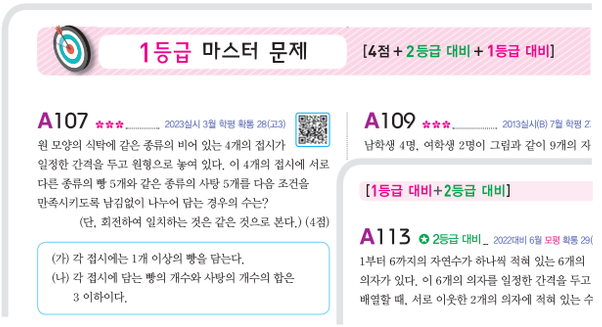
기출 문제로 구성한 3회의 실전 모의고사입니다.
수능을 대비하여 실력을 점검하는 데 큰 도움이 될 것입니다.



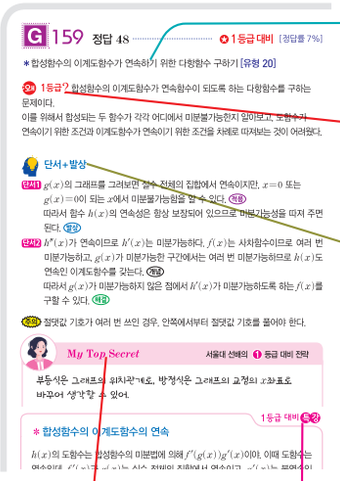
6 1등급 마스터 문제 – 1등급 대비, 2등급 대비, 4점 문제 수록

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 키워서 반드시 수학 1등급에 도달할 수 있습니다.

- ●★★★ – 상급 문제
- ✪ 2등급 대비 – 정답률이 9~20 %인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- ✪ 1등급 대비 – 정답률이 9 % 미만인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제



7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설



My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
- 단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
- 개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
- 유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
- 발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
- 적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
- 해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

8 입체 첨삭 해설!

정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

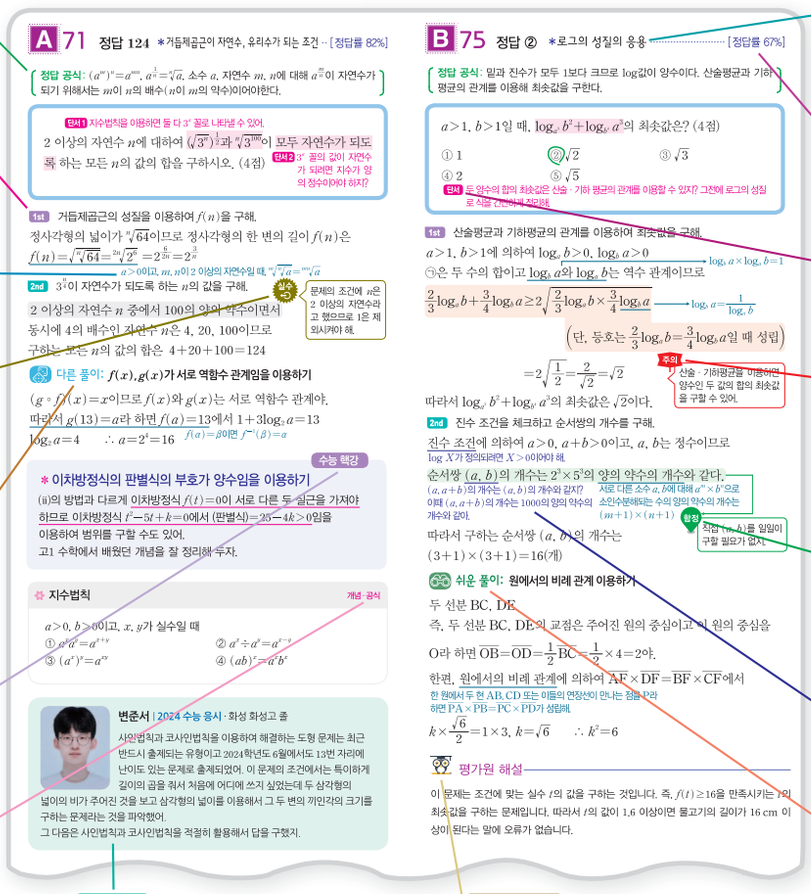
해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수 주의
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.



출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빼먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

집필진 · 감수진 선생님들



자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여고
김대식 경기 하남고
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 안양 안양외고
박숙녀 아산 충남삼성고
배수나 서울 가인아카데미
신건률 대치 오름학원
신명선 안양 신성고
신현준 안양 신성고
윤장노 안양 신성고
윤혜미 서울 세종과학고
이종석 일등급 수학 저자
이준석 서울 이가수학학원
이창희 서울 다원교육 고등부
위경아 서울 강남대성기숙의대관
장광걸 김포 김포외고
장경호 오산 운천고
장철희 서울 보성고
전경준 서울 풍문고
전수현 서울 전)페르마수학학원
조승원 서울 경기과학고
지강현 안양 신성고
홍지우 안양 평촌고

[다른 풀이 집필]

김기웅 구미 브리튼영어수학학원
김우진 세종 정진수학학원
김정태 서울 미래산업과학고
김준호 대구 유신학원
문선영 서울 로드맵수학학원
문정탁 대구 STM수학학원
박혜린 전주 싸이매스수학과학학원
사공 원 의정부 호연지기
서봉원 충남 SM수학교습소
성지희 파주 snt수학학원
양해영 대치 청출어람학원
유한별 김과외수리물리고수
이상구 익산 이일여자고
조은영 김포 고려수학

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널
셀프수학

[감수진]

강종철 서울 쿠메수학교습소
기소연 남양주 매쓰키수학
김기덕 서울 메가매쓰수학학원
김덕한 대전 더칸수학학원
김동민 서울 호크마수학학원
김동욱 서울 디파인수학전문학원
김동현 광명 수능수학 전문컨설턴트
김미영 서울 명수학교습소
김민경 강릉 강릉고
김보라 제주 라딕스수학
김상호 전주 휴민고등수학
김새로미 화성 스터디온학원
김영대 천안 탑씨크리트학원
김영준 서울 매쓰탑학원
김장훈 제주 프로젝트M수학학원
김재광 광주 디투엠 수학학원
김재혁 천안 불당동 라온프라임학원
김지선 남양주 스튜디오D코딩수학학원
김지선 서울 수학전문 순수
김진식 대구 경신고
김착한 구리 수능수학 전문컨설턴트
남병조 서울 로드맵플러스
노명훈 원주 노명훈쌤의 알수학학원
박경보 서울 최고수챌린지에듀학원
박동훈 안산 에스엠수학
박묘인 용인 이투스수학
박소영 서울 정상수학학원
박영선 세종 유얼수학
박재홍 용인 열린학원
박정희 인천 수능수학 전문컨설턴트
박진홍 군포 고밀도학원
박한얼 나주 두드림영수학원
방성의 시흥 초고수수학학원
성수경 울산 위룰수학영어학원
신선호 화성 하버드수학
신정훈 서울 온챌아카데미
심재현 용인 웨이메이커 수학학원
심혜림 성주 별고을교육원
안병훈 부산 팀매쓰수학전문학원
양유식 부여 정석학원
오선화 부산 다대 대성제넥스학원
오정민 인천 갈루아수학학원
옥승길 부산 옥승길수학학원
유재영 평택 비전고
유형기 서울 유형기 수학교습소
이동헌 평택 s4국영수학원
이동훈 대구 이동훈수학학원
이상혁 광주 감성수학
이서윤 화성 목동 곰수학학원
이세진 부산 서용기과학이세진수학학원
이양근 용인 양지메가스터디 기숙학원
이연희 부산 오른수학
이원희 대치 수학공작소
이은경 익산 베리타스영수학원
이지훈 세종 공부수다 학원
이지훈 서울 백향목학원
이창현 양주 U2M 옥정 캠퍼스
이한나 울산 꿈꾸는고래학원
이한샘 광명 진성고
이혜진 평택 S4국영수학원
이호균 인천 투스카이수학과학학원
임명진 안양 서연고 학원
장성인 부산 노마드수학전문학원
전호완 성남 숭신여자고
정민정 평택 S4국영수학원
정지민 청주 스텝업수학
정지훈 용인 최상위권수학학원
정진영 인천 정선생수학연구소
정한울 포천 한울스터디
정화진 서울 진화수학학원
조일형 금산 별무리고
채송화 부산 채송화수학
채은영 서울 사당베스트수학
최고은 익산 수학코치
최백화 서울 최백화수학
최지현 대구 CMC수학
최현섭 울산 세인학원
홍성진 서울 대치 김앤홍 수학전문학원
홍준서 서울 퍼씰수학전문학원
홍진국 대전 저스트수학

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
황대윤 서울대 수리과학부

수능 선배들의 비법 전수 – 수험장 생생 체험 소개

긴장되고 떨리는 수험장에서 선배들이
문제를 풀면서 겪은 생생한 체험과 나만의 풀이 비법을
자이스토리 해설편에 수록했습니다.

• 2023년

강 한 서울 배재고 졸(고려대 융합에너지공학과)
권주원 서울 배재고 졸(서울대 정치외교학부)
김보겸 광주서석고 졸(연세대 지구시스템과학과)
김수정 부산국제고 졸(고려대 서어서문학과)
김준서 부산 대연고 졸(부산대 의예과)
김태산 광주서석고 졸(고려대 정치외교학과)
김현서 경기 평택고 졸(서강대 정치외교학과)
나인규 광주 국제고 졸(한양대 경영학과)
명준하 광주서석고 졸(연세대 사회환경시스템공학부)
박서영 부산 해운대고 졸(서울대 심리학과)
박세민 광주 광덕고 졸(서울대 의예과)
장경은 서울 세화여고 졸(고려대 통계학과)
장성욱 부산 대연고 졸(동아대학교 의예과)
정서린 서울 세화여고 졸(서울대 약학과)
조현준 익산 이리고 졸(전북대 의예과)
최윤성 서울 양정고 졸(서울대 공과대학 광역)
홍채연 서울 한영고 졸(고려대 불어불문학과)

• 2022년

강민성 부산 해운대고 졸(성균관대 의예과)
강연욱 서울 한영고 졸(연세대 노어노문학과)
고현웅 광주서석고 졸(전남대 의예과)
공준형 경기 우성고 졸(가톨릭관동대 의예과)
김서윤 경기 우성고 졸(성균관대 글로벌경제학과)
김예리 서울 수명고 졸(고려대 의예과)
김찬우 익산 이리고 졸(전남대 의예과)
김혜윰 경기 숭신여고 졸(서울대 인문대학)
박정빈 익산 이리고 졸(고려대 한국사학과)
박준현 전남 장성고 졸(육군사관학교)
송홍준 광주 국제고 졸(고려대 융합에너지공학과)
양예진 전주 상산고 졸(이화여대 의예과)
오석우 공주 한일고 졸(서울대 의예과)
오연주 전주 솔내고 졸(서강대 사회학과)
이수현 대구 송현여고 졸(고려대 정치외교학과)
장인우 광주 고려고 졸(서울대 인문학부)
전수현 경기 숭신여고 졸(한림대 의예과)
정지호 익산 남성고 졸(경찰대학교)
최준명 서울 양정고 졸(KAIST 전기 및 전자공학부)

2024 응시



곽지훈
서울 한영외고 졸업
– 세계지리



곽태웅
서울 강서고 졸업
– 윤리와 사상



권민재
서울 광영여고 졸업
– 생명과학 I



김동현
안성 안법고 졸업
– 고3 수학 I, 고3 확률과 통계



김서현
대전한빛고 졸업
– 지구과학 I



김수민
광주 금호중앙여고 졸업
– 화학 II



김신유
익산 남성고 졸업
– 화법과 작문 실전



김아린
대전한빛고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전



김용희
화성 화성고 졸업
– 언어와 매체 실전



김지희
광주 국제고 졸업
– 한국지리



김태현
부산 대연고 졸업
– 물리학 I



노규민
부산 용인고 졸업
– 지구과학 II



류이레
광주대동고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전



문지민
대구 정화여고 졸업
– 생활과 윤리



박주은
대전외고 졸업
– 동아시아사



백혜원
대구남산고 졸업
– 문학 실전



변준서
화성 화성고 졸업
– 고3 수학 I, 고3 수학 II



심기현
대구 계성고 졸업
– 화학 I



오서윤
서울 광문고 졸업
– 고3 수학 II, 고3 미적분



이준수
익산 남성고 졸업
– 고3 수학 II, 기하



전성연
부산국제고 졸업
– 사회·문화



조수근
성남 태원고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전



조인성
성남 태원고 졸업
– 수능 한국사



천원준
부산 동인고 졸업
– 생명과학 II



허다현
부산 사직여고 졸업
– 독서 실전

문항 배열 및 구성 [1036제]

❶ 개념 이해 체크를 위한 기본 기출 문제 (50제)

필수 개념과 공식을 확인할 수 있는 기출 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초 실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 최신 6개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항 수록 (920제)

- 최근 출제 경향을 파악할 수 있도록 최신 6개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항을 수록하였습니다.
- 2018~1994 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문항 중 새수능 출제 기준에 맞는 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

❸ 경찰대, 삼사 중요 기출 문제 수록 (61제)

경찰대, 삼사 기출 문항 중 중요 문항을 선별하여 수록하였습니다.

❹ 새수능 대비를 위한 고품격 수능 기출 변형 문제 (5제)

새수능을 대비해서 충분한 문제로 훈련할 수 있도록 수능 기출 변형 문제를 추가 수록하였습니다.

[고3 확률과 통계 수록 문항 구성표]

대비연도	3월	4·5월	6월	7월	9월	10월	수능	합계	비고
2024	8	8	8	8	8	8	8	56	*2025학년도 수능에 적합한 전 문항 수록
2023	7	8	8	8	7	8	8	54	
2022	6	8	8	8	8	7	7	52	
2021	5	10	11	14	13	17	13	83	
2020	3	5	8	10	10	11	12	59	
2019	3	6	9	10	11	11	12	62	
2018	2	6	6	11	11	13	12	61	*수능, 평가원, 학력평가 엄선 수록
2017	2	5	7	11	10	8	10	53	
2016	0	0	2	7	10	10	11	40	
2015	0	0	2	3	10	3	10	28	
2014	0	0	2	3	8	3	8	24	
2013	0	0	2	5	9	8	8	32	
2012	0	0	2	1	8	2	8	21	
2011	7	3	8	7	11	4	12	52	
2010	4	3	9	4	10	6	11	47	
2009	5	3	5	7	14	2	12	48	
2009이전	14	8	15	10	43	25	45	160	
2022, 2014, 2005 대비 예비 평가								25	
수능 기출 변형 문제								5	
고1/고2 학력평가								13	
경찰대 및 삼사								61	
총 문항 수								1036	

2024학년도 6월, 9월 평가원+수능
확률과 통계 문항 배치표

문항 번호	6월		9월		수능	
	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호
23	확률과 통계	A43	확률과 통계	G63	확률과 통계	A42
24		D82		A86		F10
25		D113		D98		D112
26		C38		H64		G100
27		E49		D15		I52
28		B87		G22		E45
29		B97		F87		B109
30		D138		B123		H92

• 확률과 통계 : 2024 자이스토리 확률과 통계



A 여러 가지 순열

★ 유형 차례

중요 유형 01 원순열
유형 02 원순열을 이용하여 색칠하는 방법의 수 구하기
유형 03 자연수의 개수와 중복순열
유형 04 신호 또는 문자 만들기와 중복순열
중요 유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열
유형 06 같은 것이 있는 수의 나열로 만든 자연수의 개수
유형 07 배분과 같은 것이 있는 순열
유형 08 배분과 같은 것이 있는 순열 – 조건이나 표가 주어진 경우
중요 유형 09 도로망에서 최단 경로 – 점 P를 지나는 경우
유형 10 도로망에서 최단 경로 – 제외되는 점이나 장애물이 있는 경우
유형 11 분할 및 분배의 수



★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2024	수능	유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	❀❀❀
	9월	유형 09 도로망에서 최단 경로 – 점 P를 지나는 경우	❀❀❀
	6월	유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	❀❀❀
2023	수능	유형 03 자연수의 개수와 중복순열	✿❀❀
	9월	출제되지 않음	
	6월	유형 04 신호 또는 문자 만들기와 중복순열 유형 05 같은 것이 있는 문자의 나열	✿❀❀ ❀❀❀
2022	수능	출제되지 않음	
	9월	출제되지 않음	
	6월	유형 01 원순열 유형 06 같은 것이 있는 수의 나열로 만든 자연수의 개수	✿✿✿ ✿✿❀
	예시	출제되지 않음	

★ 2024 수능 출제 경향 분석

• 같은 문자가 포함되어 있는 5개의 문자를 일렬로 나열하는 같은 것이 있는 순열의 문제였다. [A42 문항]

★ 2025 수능 예측

1. n개의 자연수가 주어졌을 때, 이를 중복을 허락하여 만들 수 있는 m자리의 자연수의 개수를 정확하게 구할 수 있어야 한다. 특히, 홀수이려면 일의 자리의 수가 1, 3, 5, 7, 9여야 하고, 짝수이려면 일의 자리의 수가 2, 4, 6, 8, 0이어야 한다.
2. 원순열, 중복순열의 수의 공식을 구분하여 정확하게 계산할 수 있어야 한다.
3. 여사건의 경우를 이용하려면 사건에 대한 여사건을 표현하는 연습을 하고, 직접 구할 수 있어야 한다.

A 여러 가지 순열

개념 강의

중요도 ★★★

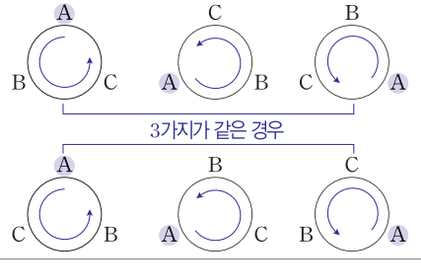
1 원순열 – 유형 01~02

(1) **원순열** : 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열

(2) 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ ❶

예 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$

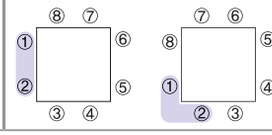
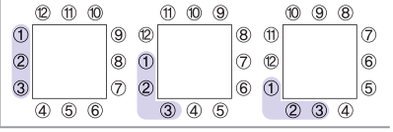
예

서로 다른 3개를 나열	서로 다른 3개를 원형으로 배열 ❷	차이점
세 개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하면 ABC CAB BCA ACB BAC CBA	세 개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하면 	회전시켰을 때, 서로 같은 경우가 존재하므로 일렬로 나열하는 것과는 구분해야 한다.
순열의 수는 $3!=3\times2\times1=6$	같은 경우가 3개씩 있으므로 원순열의 수는 $\frac{3!}{3}=(3-1)!=2!=2$	(원순열의 수) $=\frac{(\text{순열의 수})}{n}$

(3) **다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수**

① 정다각형 모양의 탁자 : n명이 정다각형 모양의 탁자에 한 변에 k명씩 앉는 경우의 수는 $k\times(n-1)!$ ❸

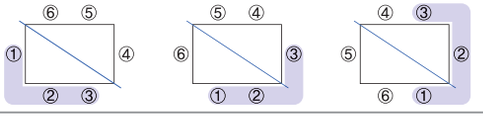
예

정다각형	한 변에 2명이 앉을 수 있는 경우	한 변에 3명이 앉을 수 있는 경우
(i) 정삼각형 모양의 탁자에 배열하는 한 가지 경우 중 서로 다른 경우		
(ii) 정사각형 모양의 탁자에 배열하는 한 가지 경우 중 서로 다른 경우		

② 직사각형 모양의 탁자 : (회전시켰을 때, 겹치지 않는 경우의 수) × (원순열의 수)

직사각형을 대각선으로 나눈 뒤, 그 절반의 자리의 수

예

직사각형	한 변에 6명이 앉을 수 있는 경우 ❹
배열하는 한 가지 경우 중 서로 다른 경우	

2 중복순열 – 유형 03~04

(1) **중복순열** : 중복을 허락하여 만든 순열

(2) 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r=n^r$

3 같은 것이 있는 순열 ❺ – 유형 05~11

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

출제 2024 수능 23번, 2024 9월 24번, 2024 6월 23번

★ 수능과 6월에는 같은 것이 있는 순열을 이용하여 문자를 일렬로 나열하는 쉬운 문제가, 9월에는 직사각형 모양의 도로망에서 P지점을 꼭 거쳐야 하는 최단 거리의 경우의 수를 구하는 쉬운 문제가 출제되었다.

왜 그럴까?

❶ 서로 다른 n개를 일렬로 나열한 것을 원형으로 배열하면 같은 것이 n가지씩 있으므로 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}$이다.

+개념 보충

❷ 원순열에서 회전하여 일치하는 배열은 모두 같은 것으로 본다. 따라서 한 번 나열한 경우에 대하여 그 순서대로 자리를 오른쪽으로 1칸씩, 2칸씩, …, n칸씩 회전시켰을 때, 같은 경우를 반드시 따져주어 전체 경우를 n으로 나눠 주어야 한다.

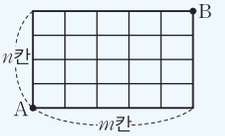
왜 그럴까?

❸ 다각형 모양의 탁자를 원형이라고 생각하자. 원순열에 의해 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 일단 $(n-1)!$이다. 그러나 실제는 원형이 아니라 다각형 모양의 탁자이므로 탁자의 모양에 의하여 서로 다른 경우가 존재할 수 있다. 이때, 탁자에 둘러 앉는 경우를 하나 생각하고, 그 경우에서 서로 다른 경우가 존재하도록 앉힌 사람들을 회전시키면 된다.

❹ 단순히 회전시켰을 때,
① → ② → ③ → ④ → ⑤ → ⑥으로 같은 경우이지만 직사각형 탁자에 앉혔으므로
(1) 직사각형의 세로에 ①이 앉은 경우
(2) 직사각형의 가로의 왼쪽에 ①이 앉은 경우
(3) 직사각형의 가로의 오른쪽에 ①이 앉은 경우
가 모두 다른 경우이다.

+개념 보충

❺ **A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 방법의 수**

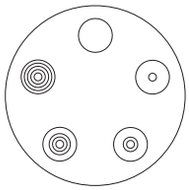


가로로 m칸, 세로로 n칸인 경로일 때 같은 것이 각각 m개, n개 있는 것을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다.
즉, A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 방법의 수는 $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

1 원순열

A01 기본 2018대비(나) 9월 모평 6(고3)

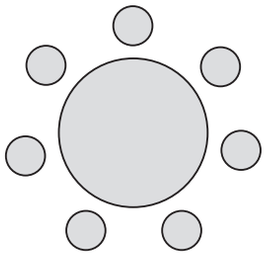
서로 다른 5개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

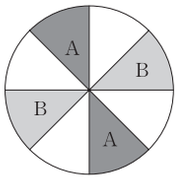
A02 기본 2020실시(가) 4월 학평 25(고3)

그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A학교 학생 2명, B학교 학생 2명, C학교 학생 3명이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A학교 학생 2명이 서로 이웃하여 앉고 B학교 학생 2명도 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



A03 기본 2009실시(나) 10월 학평 20(고3)

8등분된 원판에 A, B, C, D, E, F의 6가지 색을 모두 사용하여 영역을 구분하려고 한다. 그림과 같이 A, B 두 가지 색은 이미 칠해져 있을 때, 칠해져 있지 않은 영역에 칠할 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색을 칠하고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지 방법으로 한다.) (3점)



2 중복순열

A04 기본 2017대비(가) 수능 5(고3)

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의 수는? (3점)

① 115 ② 120 ③ 125
④ 130 ⑤ 135

3 같은 것이 있는 순열

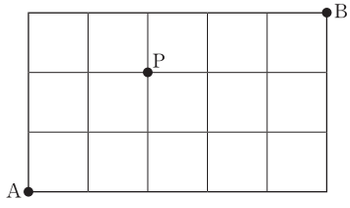
A05 기본 1996대비(인) 수능 5(고3)

영문자 P, A, S, S를 일렬로 배열하는 방법의 수는? (1점)

① 6 ② 8 ③ 12
④ 18 ⑤ 24

A06 기본 2018대비(나) 6월 모평 7(고3)

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? (3점)



① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

❖ 정답 및 해설 2~4p

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

Pass 쉬운 유형, 반복 계산 문제로 패스 하셔도 좋습니다.

1 원순열

유형 01 원순열

(1) **원순열** : 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열

(2) 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

tip

원순열의 경우 회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보기 때문에 회전하는 경우를 단순한 나열로 생각하기 위해서 한 자리를 고정시키고 그 후에 나머지를 일렬로 배열하는 경우로 접근해야 한다.

A07 ❀❀❀ 2023실시 3월 학평 확통 24(고3)

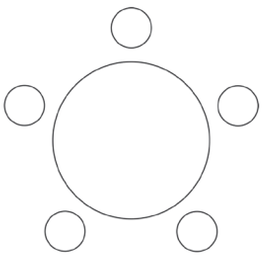
5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

A08 ❀❀❀ 2023실시 4월 학평 확통 25(고3)

세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 있다.
이 7명의 학생 중에서 A, B, C를 포함하여 5명을 선택하고, 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

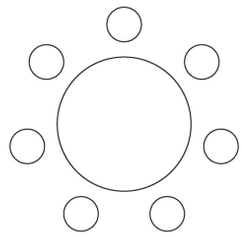


① 120 ② 132 ③ 144
④ 156 ⑤ 168

A09 ❀❀❀ 2021대비(나) 6월 모평 12(고3)

1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다.
이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

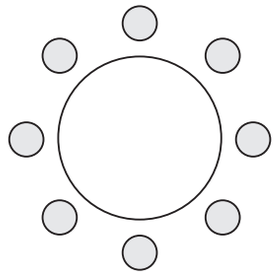


① 96 ② 100 ③ 104
④ 108 ⑤ 112

A10 ❀❀❀ 2021실시 3월 학평 25(고3)

어느 고등학교 3학년의 네 학급에서 대표 2명씩 모두 8명의 학생이 참석하는 회의를 한다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 같은 학급 학생끼리 서로 이웃하게 되는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

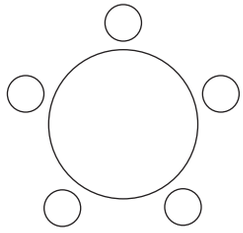


① 92 ② 96 ③ 100
④ 104 ⑤ 108

A11 ❀❀❀ 2021대비(나) 9월 모평 14(고3)

다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는?

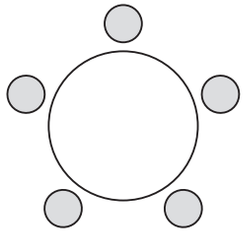
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)



① 180 ② 200 ③ 220
④ 240 ⑤ 260

A12 ❀❀❀ 2019실시(가) 3월 학평 9(고3)

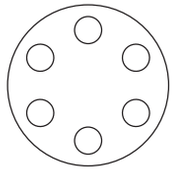
그림과 같이 원형 탁자에 5개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 1명이 모두 이 5개의 의자에 앉으려고 할 때, 1학년 학생 2명이 서로 이웃하도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

A13 ❀❀❀ 2012대비(가) 9월 모평 6(고3)

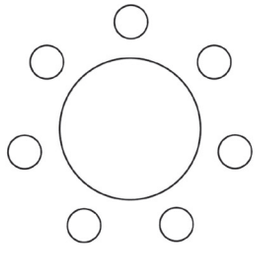
그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험기구가 있다. 서로 다른 6개의 용기 A, B, C, D, E, F를 이 실험 기구에 모두 넣을 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



① 36 ② 48 ③ 60
④ 72 ⑤ 84

A14 ❀❀❀ 2022실시 3월 학평 확통 25(고3)

A 학교 학생 5명, B 학교 학생 2명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, B 학교 학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



① 320 ② 360 ③ 400
④ 440 ⑤ 480

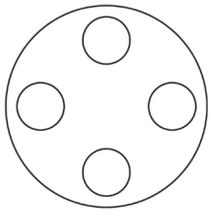
❖ 정답 및 해설 4~7p

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A107 ★★★ 2023실시 3월 학평 확통 28(고3)

원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

(가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다.
(나) 각 접시에 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합은 3 이하이다.

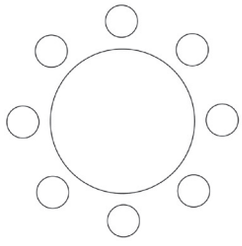


① 420 ② 450 ③ 480
④ 510 ⑤ 540

A108 ★★★ 2021실시 4월 학평 29(고3)

두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

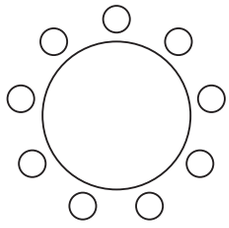
(가) A와 B는 이웃한다.
(나) C는 여학생과 이웃하지 않는다.



A109 ★★★ 2013실시(B) 7월 학평 27(고3)

남학생 4명, 여학생 2명이 그림과 같이 9개의 자리가 있는 원탁에 다음 두 조건에 따라 앉으려고 할 때, 앉을 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

(가) 남학생, 여학생 모두 같은 성별끼리 2명씩 조를 만든다.
(나) 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워 둔다.



A110 ★★☆ 2023실시 3월 학평 확통 29(고3)

숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. (4점)

(가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다.
(나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 4의 배수이다.

❖ 정답 및 해설 42~45p

A111 ★★★ 2022실시 4월 학평 확통 29(고3)

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들려고 한다. 숫자 0과 1을 각각 1개 이상씩 선택하여 만들 수 있는 모든 자연수의 개수를 구하시오. (4점)

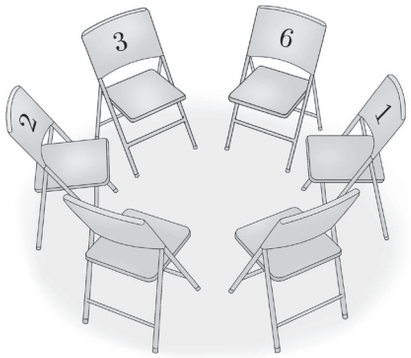
A112 ★★★ 2021실시 10월 학평 29(고3)

숫자 1, 2, 3 중에서 모든 숫자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 6개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 같은 자연수의 개수를 구하시오. (4점)

[1등급 대비+2등급 대비]

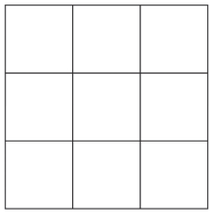
A113 ✪ 2등급 대비 2022대비 6월 모평 확통 29(고3)

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)



A114 ✪ 1등급 대비 2020실시(가) 3월 학평 27(고3)

오른쪽 그림과 같이 합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다. 빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.



(가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.
(나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.
(다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다.

색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k \times 7!$이다. k의 값을 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

A115 ✪ 1등급 대비 .. 2023실시 4월 학평 확통 30(고3)

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 각각 5개 이하씩 모두 7개를 택해 다음 조건을 만족시키는 7자리의 문자열을 만들려고 한다.

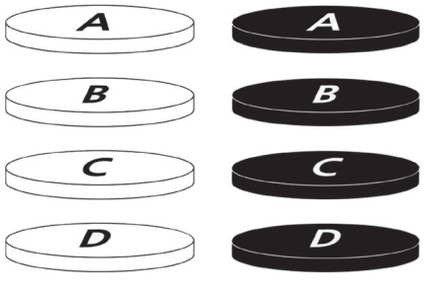
(가) 한 문자가 연달아 3개 이어지고 그 문자는 a뿐이다.
(나) 어느 한 문자도 연달아 4개 이상 이어지지 않는다.

예를 들어, *baaacca*, *ccbbaaa*는 조건을 만족시키는 문자열이고 *aabbcca*, *aaabccc*, *ccbaaaa*는 조건을 만족시키지 않는 문자열이다.
만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구하시오. (4점)

A116 ✪ 1등급 대비 .. 2022실시 3월 학평 확통 30(고3)

흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.) (4점)

(가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다.
(나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.



A117 ✪ 1등급 대비 ..... 2016실시(가) 10월 학평 30(고3)

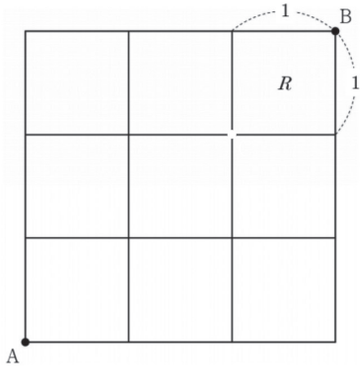
1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i번째($i=1, 2, \cdots, 9$) 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i라 하자. $1<p<q<9$인 두 자연수 p, q에 대하여 a_i가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1\le i<p$이면 $a_i<a_{i+1}$이다.
(나) $p\le i<q$이면 $a_i>a_{i+1}$이다.
(다) $q\le i<9$이면 $a_i<a_{i+1}$이다.

$a_1=2$, $a_p=8$인 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) (4점)

A118 ✪ 2등급 대비 ..... 2020실시(나) 4월 학평 29(고3)

그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다.



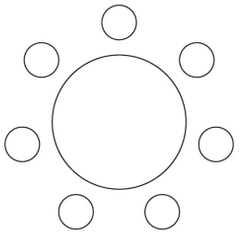
이 도로망을 따라 최단거리로 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 다시 A 지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (4점)

(가) 정사각형 R의 네 변을 모두 지나야 한다.
(나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R뿐이다.

❖ 정답 및 해설 45~52p

A119 ✻✻❀ 2021대비(나) 삼사 8(고3)

그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A, B, C를 포함한 7명의 학생이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A, B, C 세 명 중 어느 두 명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)



① 120 ② 132 ③ 144
④ 156 ⑤ 168

A120 ✻❀❀ 2021대비 경찰대 14(고3)

$(x-y+1)^{n+2}$의 전개식에서 $x^n y^2$의 계수를 $f(n)$이라 할 때,

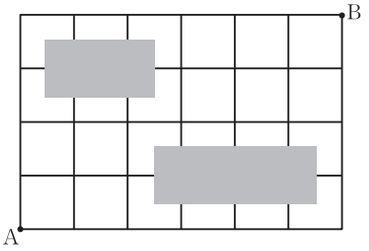
$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(2020)}=\frac{a}{b}$$

이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) (4점)

① 2019 ② 2020 ③ 2021
④ 2022 ⑤ 2023

A121 ✻❀❀ 2017대비(나) 삼사 23(고3)

어느 부대가 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 장애물(어두운 부분)을 피해 A 지점에서 B 지점으로 도로를 따라 이동하려고 한다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오. (3점)

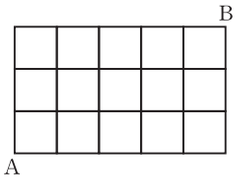


A122 ✻❀❀ 2020대비(가) 삼사 25(고3)

1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공을 같은 종류의 세 상자에 3개씩 나누어 넣으려고 한다. 세 상자 중 어떤 한 상자에 들어 있는 3개의 공에 적힌 수의 합이 나머지 두 상자에 들어 있는 6개의 공에 적힌 수의 합보다 크도록 9개의 공을 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 공을 넣는 순서는 고려하지 않는다.) (3점)

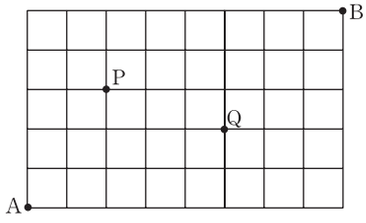
A123 ★★★ 2019대비 경찰대 25(고3)

그림과 같이 인접한 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로가 있다. A지점에서 B지점까지의 최단 경로 중에서 가로 또는 세로의 길이가 3 이상인 직선 구간을 포함하는 경로의 개수를 구하시오. (5점)



A124 ★★★ 2017대비 경찰대 9(고3)

아래 그림은 어느 도시의 도로를 선으로 나타낸 것이다. 교차로 P에서는 좌회전을 할 수 없고, 교차로 Q는 공사 중이어서 지나갈 수 없다고 한다. A를 출발하여 B에 도달하는 최단 경로의 개수는? (4점)

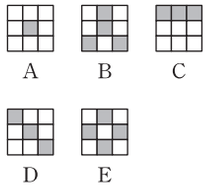


① 818 ② 825 ③ 832
④ 839 ⑤ 846

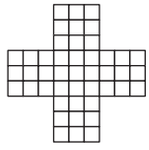
[1등급 대비+2등급 대비]

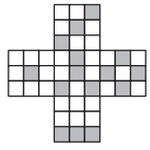
A125 ✪ 2등급 대비 2019대비(나) 삼사 20(고3)

[그림 1]과 같이 5개의 스티커 A, B, C, D, E는 각각 흰색 또는 회색으로 칠해진 9개의 정사각형으로 이루어져 있다. 이 5개의 스티커를 모두 사용하여 [그림 2]의 45개의 정사각형으로 이루어진  모양의 판에 빈틈없이 붙여 문양을 만들려고 한다. [그림 3]은 스티커 B를  모양의 판의 중앙에 붙여 만든 문양의 한 예이다.



[그림 1]


[그림 2]


[그림 3]

다음은 5개의 스티커를 모두 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 문양의 개수를 구하는 과정의 일부이다. (단,  모양의 판을 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

 모양의 판의 중앙에 붙이는 스티커에 따라 다음과 같이 3가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) A 또는 E를 붙이는 경우
나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 $3!$
이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 $1\times2\times4\times4$
그러므로 이 경우의 수는 $2\times3!\times32$

(ii) B 또는 C를 붙이는 경우
나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 (가)
이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 $1\times1\times2\times4$
그러므로 이 경우의 수는 $2\times$(가)$\times8$

(iii) D를 붙이는 경우
나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 (나)
이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 (다)
그러므로 이 경우의 수는 (나)$\times$(다)

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? (4점)

① 52 ② 54 ③ 56
④ 58 ⑤ 60

❖ 정답 및 해설 53~57p

Special

★확률과 통계

실전 기출 모의고사

[8문항형 / 제한시간 50분]

1회 모의고사 – 2025학년도 수능 대비 ①

2회 모의고사 – 2025학년도 수능 대비 ②

3회 모의고사 – 2025학년도 수능 대비 ③



1회 확률과 통계 실전 기출 모의고사

2025학년도 수능 대비 ①

범위: 확률과 통계 전단원

- 문항 수 8개
- 배점 26점
- 제한시간 40분

5지선다형

1회 01 ❀❀❀ 2018실시(나) 7월 학평 3(고3)

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(12, \frac{1}{3}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1회 02 ❀❀❀ 2012대비(나) 9월 모평 4(고3)

두 사건 A, B가 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? (3점)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

1회 03 ✿❀❀ 2004대비(인) 수능 14(고3)

세 숫자 1, 2, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 1과 2가 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는? (3점)

① 58 ② 56 ③ 54
④ 52 ⑤ 50

1회 04 ❀❀❀ 2009대비(가) 9월 모평 27(고3)

사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스 중에서 8병을 선택하려고 한다. 사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스를 각각 적어도 1병 이상씩 선택하는 경우의 수는? (단, 각 종류의 주스는 8병 이상씩 있다.) (3점)

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

1회 05 ✿❀❀ 2009실시(나) 10월 학평 29(고3)

어느 지역에서 생산되는 귤의 당도는 평균이 m이고 표준편차가 1.5인 정규분포를 따른다고 한다. 표는 이 지역에서 생산된 귤 중에서 임의로 9개를 추출하여 당도를 측정한 결과를 나타낸 것이다.

당도	10	11	12	13	합계
귤의 개수	4	2	2	1	9

이 결과를 이용하여 이 지역에서 생산되는 귤의 당도의 평균 m을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은?
(단, $P(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$이고 당도의 단위는 브릭스이다.) (3점)

① $10.02 \le m \le 11.98$ ② $9.77 \le m \le 12.23$
③ $9.53 \le m \le 12.47$ ④ $9.35 \le m \le 12.65$
⑤ $9.04 \le m \le 12.96$

1회 06 ✿❀❀ 2008대비(나) 수능 13(고3)

어느 회사의 전체 신입 사원 1000명을 대상으로 신체 검사를 한 결과, 키는 평균 m, 표준편차 10인 정규분포를 따른다고 한다. 전체 신입 사원 중에서 키가 177 이상인 사원이 242명이었다. 전체 신입 사원 중에서 임의로 선택한 한 명의 키가 180 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 키의 단위는 cm이다.) (4점)

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.7	0.2580
0.8	0.2881
0.9	0.3159
1.0	0.3413

① 0.1587 ② 0.1841 ③ 0.2119
④ 0.2267 ⑤ 0.2420

단답형

1회 07 ✿❀❀ 2005대비(나) 9월 모평 23(고3)

A 주머니에 흰 공 2개, 검은 공 5개 그리고 B 주머니에 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있다. A 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 B 주머니에 넣은 다음 다시 B 주머니에서 하나의 공을 꺼내기로 한다. B에서 꺼낸 공이 흰 공일 때, A에서 B로 옮겨진 공이 흰 공이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

1회 08 ✪ 1등급 킬러 2011대비(나) 9월 모평 24(고3)

주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

차 례

Ⅰ 경우의 수

A 여러 가지 순열 2

B 중복조합 57

C 이항정리 134

Ⅱ 확률

D 여러 가지 확률 157

E 조건부확률 239

F 독립시행의 확률 297

Ⅲ 통계

G 이산확률분포 337

H 연속확률분포 385

I 통계적 추정 437

Special 확률과 통계 실전 기출 모의고사

1회 모의고사 [2025학년도 수능 대비 ①] 473

2회 모의고사 [2025학년도 수능 대비 ②] 476

3회 모의고사 [2025학년도 수능 대비 ③] 480

A 여러 가지 순열

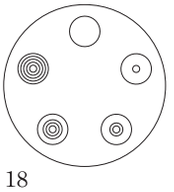
기본 기출 문제

A01 정답 ④ *원순열 [정답률 91%]

(정답 공식: 원에서 서로 다른 대상 n개를 배열하는 방법의 수는 $(n-1)!$이다.)

서로 다른 5개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 ❶원형으로 놓는 경우의 수는? (단, ❷회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

단서 조건 ❶, ❷와 같이 원형이고 회전하여 일치하는 것은 원순열의 키워드야.



① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

1st 5개의 접시를 원탁에 나열하는 원순열의 수를 구하자.

5개를 일렬로 나열한 후 5로 나누거나, 1개를 고정한 후 나머지를 일렬로 나열하는 경우의 수이지? 즉, $\frac{5!}{5}$ 또는 $1\times(5-1)!$

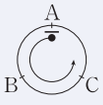
$\frac{{}_5P_5}{5}=(5-1)!=4!=24$

[원순열] n개를 원형으로 나열하는 경우의 수 $\frac{{}_nP_n}{n}$ 또는 $1\times(n-1)!$

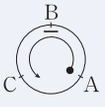
수능 핵강

* ABC를 원형으로 나열하는 원순열의 수 알아보기

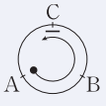
원순열이란? 원형으로 나열하는 순열이야.
원순열에서는 회전하여 일치하면 같은 경우로 취급해.
A, B, C의 순열, 즉 직순열의 수는
${}_3P_3=3!=6$



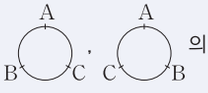
$\left.\begin{matrix}ABC=BCA=CAB\\ACB=BAC=CBA\end{matrix}\right\}$ 원순열에서는 각각 같은 경우



직순열에서는 다른 경우지만 원순열에서는 회전하면 일치하므로 모두 같은 경우야. 또, 맨 위에 올 수 있는 문자는 A, B, C 3개니까, 회전하여 같은 경우는 3개씩 발생해.



$\therefore$ (원순열의 수)$=\frac{{}_3P_3}{3}=2$

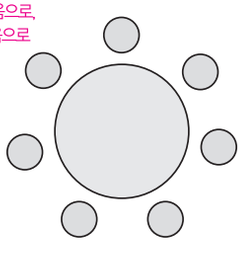
실제로  의 2가지뿐이야.

A02 정답 96 *원순열 [정답률 80%]

(정답 공식: A학교와 B학교 학생을 각각 하나로 묶어 원순열의 수를 구한다.)

그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A학교 학생 2명, B학교 학생 2명, C학교 학생 3명이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A학교 학생 2명이 서로 이웃하여 앉고 B학교 학생 2명도 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

단서 A학교 학생을 한 묶음으로, B학교 학생을 한 묶음으로 생각해야겠지?



1st A학교 학생 2명과 B학교 학생 2명을 각각 한 학생으로 생각하여 원형으로 배열하는 경우의 수를 구하자.

A학교 학생 2명과 B학교 학생 2명을 각각 묶어서 한 학생으로 생각하면 전체 학생은 5명이다.
따라서 5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{5}=4!=24$ 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

2nd A학교 학생 2명과 B학교 학생 2명이 각각 자리를 바꾸는 경우의 수를 구하자.

1st의 각각에 대하여 A학교 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2, B학교 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이다.

3rd 경우의 수를 구하자.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$24\times2\times2=96$

원순열 개념·공식

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 한다.
서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$이다.

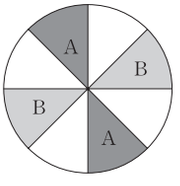
A03 정답 12 *원순열 – 색 배치 [정답률 78%]

(정답 공식: 이미 A, B의 색이 칠해진 영역을 제외한 나머지 부분에 C, D, E, F를 색칠하는 원순열의 수를 구한다.)

단서 1 회전하므로 원순열을 생각하자.

8등분된 원판에 A, B, C, D, E, F의 6가지 색을 모두 사용하여 영역을 구분하려고 한다. 그림과 같이 A, B 두 가지 색은 이미 칠해져 있을 때, 칠해져 있지 않은 영역에 칠할 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색을 칠하고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지 방법으로 한다.) (3점)

단서 2 A, B를 제외한 부분에서 회전하여 중복되는 경우가 생기지? 이때, A, B가 자리를 바꾸는 경우도 가능하네.



1st A, B를 제외한 4가지 색을 칠하는 방법의 수를 생각해 볼까?

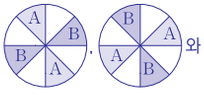
한 칸씩 띄어진 부분도 회전하면 같은 것이 발생하니까 원순열을 이용해.

먼저 C, D, E, F를 8등분된 원판에 한 칸씩 띄어 색칠하는 방법의 수는
$(4-1)!=3!$

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(n-1)!=(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1$

2nd 주어진 그림과 같이 A, B 색의 위치로 생각하여 칠할 수 있는 방법의 수를 계산해.

남은 빈칸에 그림과 같이 A는 A끼리, B는 B끼리 마주보도록 색칠하는 방법의 수는 2가지이므로 구하는 방법의 수는 $3!\times2=12$

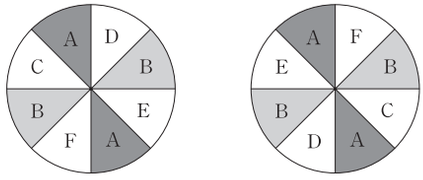
 와 같이 2가지 경우가 생기지?

톡톡 풀이: A, B를 제외한 나머지 4가지를 색칠하는 방법의 수에서 중복되는 경우의 수로 나누기

중복되는 경우를 고려하여 계산해 보자. A, B를 제외한 나머지 4가지 색을 칠하는 방법의 수는 4!이야.

그런데 그림과 같이 각 경우에 대해 중복되는 경우는 2가지씩 나와.

왼쪽 그림을 시계 방향으로 180° 회전시키면 오른쪽 그림이 나오므로
왼쪽 그림과 같이 색을 칠하는 경우와 오른쪽 그림과 같이 색을 칠하는 경우는 같은 경우야.



따라서 구하는 방법의 수는

중복되는 경우가 C, D, E, F를 배열할 때마다 2가지씩 나오므로
C, D, E, F를 배열하는 경우의 수를 2로 나누어야 하는 거야.

$\frac{4!}{2}=12$야.

A 04 정답 ③ *중복순열 – 수 나열 [정답률 95%]

정답 공식: 일의 자리가 0, 5이면 그 수는 5의 배수다.

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의 수는? (3점)

① 115 ② 120 ③ 125
④ 130 ⑤ 135

단서 '중복을 허락하여 일렬로 나열' 바로 중복순열을 뜻하는 말이야.
이때, 5의 배수이려면 일의 자리 수가 5이거나 0이면 되겠지?

1st 5의 배수가 되어야 하니까 일의 자리 수를 5로 고정시켜 놓고 나머지 수를 결정하자. 일의 자리 수가 5이거나 0이면 돼.

일의 자리수가 5이므로 나머지 세 자리에는 → 5가 또 반복될 수 있는 걸 주의해.
1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복 선택하여 나열하면 된다.

따라서 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우는

일의 자리는 결정되었으니까 나머지 세 자리에 오는 수를 정해야 해.
서로 다른 5개 중 중복을 허락하여 3개를 선택하는 순열이지?

${}_5\Pi_3=5^3=125$

쉬운 풀이: 천, 백, 십의 자리에 올 수 있는 경우의 수를 각각 계산하여 경우의 수 구하기

천의 자리에 올 수 있는 수는 5가지, 백의 자리에 올 수 있는 수는 5가지, 십의 자리에 올 수 있는 수는 5가지이고, 이는 동시에 일어나므로

$5\times5\times5=125$(가지)

또한, 일의 자리는 5로 고정되어 있으므로 1가지

따라서 구하는 경우의 수는

$125\times1=125$

A 05 정답 ③ *같은 것이 있는 순열 [정답률 90%]

정답 공식: 4개 중 같은 것이 2개 있으므로 $\frac{4!}{2!}$이다.

영문자 P, A, S, S를 일렬로 배열하는 방법의 수는? (1점)

단서 같은 문자가 있는 경우 ${}_4P_4$가 아니므로 주의하자.

① 6 ② 8 ③ 12 ④ 18 ⑤ 24

1st 서로 같은 것이 p, q, r개 있을 때, 일렬로 배열하는 방법의 수는 $\frac{n!}{p!q!r!}$ ($p+q+r=n$)임을 이용해.

P가 1개, A가 1개, S가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

→ 같은 것이 2개 있으므로 이것을 나열하는 경우의 수를 2!로 나누어야 해.

$\frac{4!}{2!1!1!}=\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times1\times1}=12$

같은 것이 있는 순열 개념·공식

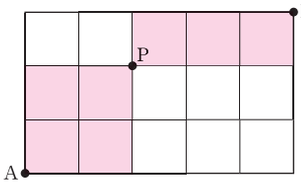
n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, 이들 n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는

$\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

A 06 정답 ⑤ *도로망에서 최단 경로 [정답률 81%]

정답 공식: A에서 P까지 가는 경우의 수, P에서 B까지 가는 경우의 수를 각각 구한다. 오른쪽으로 한 칸 가는 이동, 위쪽으로 한 칸 가는 이동, 이 두 가지 이동을 통해 경로를 표시할 수 있다.

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? (3점)

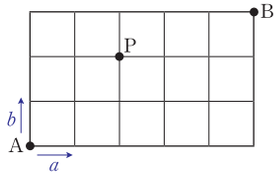


단서 A 지점에서 P 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수와 P 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수의 곱이 구하는 경우의 수야. 이때, 최단거리로 가려면 위쪽, 오른쪽으로만 이동해야 해.

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

1st 같은 것이 있는 순열을 이용하여 A → P까지 가는 경우의 수와 P → B까지 가는 경우의 수를 각각 구하자.

n개 중 같은 것이 p개, q개, …, r개가 각각 같을 때, 이 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)



주어진 도로망에서 오른쪽으로 한 칸 옮기는 이동을 a, 위쪽으로 한 칸 옮기는 이동을 b라 하면 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 갈 때, P 지점을 지나야 하므로 다음과 같이 경우를 나누자.

(i) A 지점에서 P 지점까지 최단거리로 가는 방법은 a가 2번, b가 2번 이므로 경우의 수는 $\frac{(2+2)!}{2!2!}=\frac{4!}{2!2!}=6$

a, a, b, b를 일렬로 나열

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 방법은 a가 3번, b가 1번이므로 경우의 수는 $\frac{(3+1)!}{3!1!}=\frac{4!}{3!1!}=4$

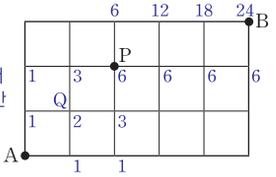
a, a, a, b를 일렬로 나열

2nd 곱의 법칙을 이용하여 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하자.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $6\times4=24$
두 사건이 연달아 일어나는 경우에 두 사건이 일어날 경우의 수를 곱하는 거야.

쉬운 풀이: 합의 법칙을 이용하여 최단 경로의 수 구하기

합의 법칙을 이용하여 최단 경로의 수 24를 다음과 같이 구할 수도 있어.



주어진 그림과 같은 도로망에서 최단 경로는 위쪽, 오른쪽으로만 이동해야 하니까 A 지점에서 이 도로망의 임의의 한 점 Q까지 최단 경로의 수는
(점 Q의 왼쪽 지점까지 오는 경로의 수)+(점 Q의 아래 지점까지 오는 경로의 수)
로 구할 수 있어. 이 방법은 도로가 불규칙한 모양일 때 유용하니까 꼭 익혀두자.

수능 핵강

* a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수 이해하기

a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우를 생각해 보면 a가 2개니까 a에 임시로 번호를 부여하면 a_1, a_2, b, c이지?
이것을 일렬로 나열해 보면 (a_1, a_2, b, c), (a_2, a_1, b, c)와 같은 경우가 나오는데 이 두 경우에 번호를 삭제하면 결국 같은 배열이 되지?
따라서 전체 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수 4!을 a가 중복되는 경우의 수 2!로 나눠야 하는 거야.

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 07 정답 ③ *원순열 [정답률 90%]

(**정답 공식**: 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(n-1)!$이다.)

단서 원 모양에 둘러 앉는 경우의 수를 구할 때는 원순열을 떠올리자.

5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

1st 원 모양의 탁자에 모두 앉히는 경우의 수는 원순열로 구하자.
학생 5명을 원 모양의 탁자에 앉히는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(5-1)!=4\times3\times2\times1$
$=24$
서로 다른 5개에서 하나를 고정한 후 나머지 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수이므로 $(5-1)!$

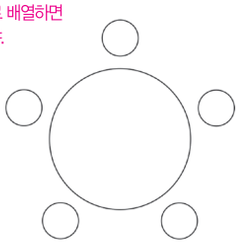
A 08 정답 ③ *원순열 [정답률 89%]

(**정답 공식**: 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 경우의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$이다.)

단서 1 7명 학생 중에서 5명을 뽑는데, 학생 A, B, C가 포함되어 있으니까 남은 4명 중에서 2명을 선택하면 되겠지?

세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 있다. 이 7명의 학생 중에서 A, B, C를 포함하여 5명을 선택하고, 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

단서 2 5명을 원형으로 배열하면 $(5-1)!$ 이야.



① 120 ② 132 ③ 144
④ 156 ⑤ 168

1st 7명의 학생 중 A, B, C를 제외하고, 두 명을 선택하는 경우의 수를 구하자.
7명의 학생 중에서 A, B, C를 포함하여 5명을 선택하므로
7명 중 A, B, C를 제외한 4명 중에 2명을 먼저 선택하는 경우의 수는
${}_4C_2=6$ → ${}_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!r!}$

2nd 5명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수를 구하자.
$(5-1)!=4!=24$ $(n-1)!=(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times1$

실수 문제 조건에 있듯이 원순열은 회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 세어야 해.
원순열 문제를 해결함에 있어 학생들이 주로 하는 실수가 중복을 고려하지 않는 것이야.

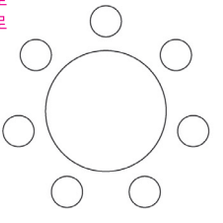
3rd 구하는 경우의 수를 구하자.
5명을 선택하는 경우의 수가 6가지이고 이 각각의 경우에 대한 경우의 수는 24가지이므로 구하는 경우의 수는
$6\times24=144$
두 사건이 동시에 일어나는 경우엔 곱의 법칙을 적용해.

A 09 정답 ① *원순열 [정답률 80%]

(**정답 공식**: 1학년 학생과 2학년 학생을 각각 하나로 묶어 원순열의 수를 구한다.)

1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

단서 1학년 2명을 한 학생으로 2학년 2명을 한 학생으로 생각해.



① 96 ② 100 ③ 104
④ 108 ⑤ 112

1st 1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명을 각각 한 학생으로 생각하여 원형으로 배열하는 경우의 수를 구하자.

1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명을 각각 묶어서 한 학생으로 생각하면 전체 학생은 5명이다.

따라서 5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{5}=4!=24$ → n개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}$

2nd 1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 각각 자리를 바꾸는 경우의 수를 구하자.

1st 의 각각에 대하여 1학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2, 2학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이다.

3rd 경우의 수를 구하자.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$24\times2\times2=96$

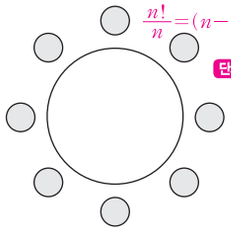
A 10 정답 ② *원순열 [정답률 82%]

(정답 공식: 같은 학급 학생을 각각 하나로 묶어 원순열의 수를 구한다.)

어느 고등학교 3학년의 네 학급에서 대표 2명씩 모두 8명의 학생이 참석하는 회의를 한다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 같은 학급 학생끼리 서로 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

단서 2 회전하여 같은 경우는 중복되는 것으로 생각해서 빼야겠지? 그래서 원순열의 수를 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ 이렇게 구하는 거야.

단서 1 서로 이웃하기 위해서는 같은 학급의 학생을 한 학생으로 생각해.



① 92 ② 96 ③ 100
④ 104 ⑤ 108

1st 같은 학급의 학생을 각각 한 학생으로 생각하여 원형으로 배열하는 경우의 수를 구하자.

같은 학급의 학생 2명을 한 학생으로 보고 네 학생을 먼저 배열하는 원순열의 수는

$\frac{4!}{④}=3\times2\times1=6$ [원순열]

서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

→ 네 학생이 원 모양의 탁자에 둘러앉으므로 4가지의 중복되는 경우가 생겨.

2nd 각 학급마다 대표 2명씩의 자리를 정하자.

각 학급마다 대표 2명씩 자신의 자리를 정하는 경우의 수는

$2^4=16$

→ 각 학급마다 대표가 2명이고 이들이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 2가지씩이야.

3rd 경우의 수를 구하자.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $6\times16=96$

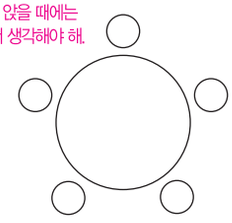
A 11 정답 ④ *원순열 [정답률 89%]

(정답 공식: 서로 다른 n개를 일렬로 나열한 것을 원형으로 배열하면 같은 것이 n가지씩 있으므로 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}$이다.)

다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)

단서 1 그럼 A, B를 제외한 학생 6명 중에서 3명을 선택해야 해.

단서 2 서로 이웃하게 앉을 때에는 하나로 묶어서 생각해야 해.



① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260

1st 먼저 학생을 선택하자.

8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하려면 8명 중에서 A, B를 제외한 나머지 6명의 학생 중에서 3명만 선택하면 되므로 경우의 수는

주의 학생 수와 앉을 수 있는 의자 개수가 다르지? 원순열의 문제에서는 어떤 경우들이 서로 중복되어 나누어야 하는지를 명확히 알고 있어야 실수하지 않을 수 있어. 단순히 사람 수로 나누지 않도록 주의하렴.

6명 중에서 5명을 선택하지 않도록 주의해야 해.

$_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

2nd A, B를 이웃하게 앉히자.

A, B를 하나로 묶어서 총 4명을 원 모양의 탁자에 앉힌 후, A, B의 자리를 바꾸는 경우까지 생각하면 경우의 수는

2명을 하나로 묶으면 자리를 바꾸는 경우를 반드시 생각해 봐야 해.

$(4-1)!\times2=3!\times2=12$

3rd 경우의 수를 구하자.

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times12=240$이다.

경우의 수에 대한 곱의 법칙에 의하여 두 경우의 수를 곱해야 해.

수능 핵강

* 원순열 관련된 문제에서 자주 나오는 유형

원순열은 최근 다각형 모양의 탁자가 아닌 원 모양의 탁자에서 조건을 추가하여 묻는 문제가 나오고 있어. 이웃하거나 마주보는 등의 유형을 많이 접해두면 문제를 해결하는 데 수월할 거야.

원순열 개념·공식

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 한다.

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$이다.

어린이들을 두 팀으로 나누는 방법의 수는
어른이 (1, 2)로 배치된 두 대의 차량에 어린이를
(i) (1, 4)　(ii) (2, 3)　(iii) (3, 2)　(iv) (4, 1)
로 배치하면 (i)인 경우 최대 탑승 인원 5명을 넘어버린다.
즉, (ii)~(iv)에 의하여 → (1, 2)+(1, 4) ⇒ (2,⑥)
${}_5C_2\times{}_3C_3+{}_5C_3\times{}_2C_2+{}_5C_4\times{}_1C_1=25$

2nd 대관람차 8대 중 2대를 선택하자.
서로 다른 8대 중에서 2대를 선택하는 방법의 수는 ${}_8C_2=28$
두 개의 팀이 두 대의 차량에 나누어 탑승하는 방법의 수는 2!이므로
구하는 방법의 수는
$n=28\times3\times25\times2!=4200$

$\therefore \frac{n}{10}=\frac{4200}{10}=420$

다른 풀이: 조건에 맞게 두 팀으로 나누는 경우의 수 구하기

조건에 맞게 두 팀으로 나누는 경우의 수는 다음과 같아.
(i) (어린이 4명, 어른 1명) / (어른 2명, 어린이 1명)
　(경우의 수)$=({}_5C_4\times{}_3C_1)\times({}_2C_2\times{}_1C_1)=15$
(ii) (어린이 3명, 어른 1명) / (어른 2명, 어린이 2명)
　(경우의 수)$=({}_5C_3\times{}_3C_1)\times({}_2C_2\times{}_2C_2)=30$
(iii) (어린이 2명, 어른 1명) / (어른 2명, 어린이 3명)
　(경우의 수)$=({}_5C_2\times{}_3C_1)\times({}_2C_2\times{}_3C_3)=30$

주의 어른을 두 팀으로 나누는 게 무조건 (1명, 2명)이기 때문에 그에 맞춰서 어린이 명수만 조절하면 돼.

두 팀으로 나눌 때 서로 다른 8대 중 2대의 차량에 탑승하는 방법의 수는
${}_8P_2=56$
[순열] 두 개의 팀이 서로 다른 2대의 차량에 배치되므로 순서가 중요해. 즉, 순열은 순서를 생각!!
$\therefore n=(15+30+30)\times56=4200 \Rightarrow \frac{n}{10}=\frac{4200}{10}=420$

A 106 정답 ② *분할과 분배하는 방법 [정답률 55%]

정답 공식: 6개의 수를 2개씩 세 조로 나누고 크기순으로 정렬하여 경우의 수를 구한다.

단서 1 6개 중 2개의 수의 합은 모두 다르네.
오른쪽 그림과 같은 6개의 빈칸에 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6의 6개의 수를 하나씩 써넣으려고 한다. 1열, 2열, 3열의 숫자들의 합을 각각 a_1, a_2, a_3이라 할 때, $a_1<a_2<a_3$이 되도록 빈칸을 채우는 경우의 수는? (4점)



단서 2 순서가 정해져 있으므로 3묶음으로 만들어 순차적으로 a_1, a_2, a_3을 배열하면 돼.

① 90　② 120　③ 150
④ 180　⑤ 210

1st 서로 다른 n개를 3조로 나누는 방법을 생각해.
2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 중 어느 두 수의 합은 모두 다르다.
그러므로 6개의 수를 2개, 2개, 2개의 세 조로 나누고 각 조의 수의 합을 작은 수부터 크기 순서대로 나열하여 a_1, a_2, a_3과 대응시키면 6개의 수를 각각 1, 2, 3열에 자연스럽게 배치할 수 있다.
또한, 각 조의 2개의 수의 자리는 바뀔 수 있으므로
(구하는 경우의 수)

$=\underbrace{{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}_{\text{6개를 3개조로 배분}}\times\underbrace{\frac{1}{3!}}_{\text{3개조의 크기가 동일}}\times\underbrace{2^3}_{\text{같은 열 내에서 행을 변화시킬 수 있는 경우}}$
$=120$

실수 어느 두 수의 합이 모두 다르기 때문에 세 열의 숫자들의 합은 모두 다른 수가 되고 자동으로 순서가 결정되지. 처음부터 순서가 정해져있다면 순서를 고려하지 않고 경우의 수를 구해야한다는 걸 명심해.

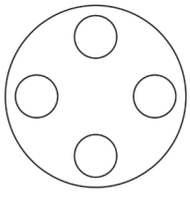
1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A 107 정답 ⑤ *원순열 [정답률 38%]

정답 공식: 원순열을 이용하되, 서로 다른 빵과 같은 종류의 사탕임에 유의하여 케이스를 잘 분류하여 경우의 수를 구한다.

원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

단서 1 서로 다른 5개의 빵을 각 접시에 1개 이상씩 담으면 빵을 2개 담게 되는 접시가 반드시 한 개 생기지.
(가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다.
(나) 각 접시에 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합은 3 이하이다.
단서 2 빵을 먼저 담고 빵의 개수와 사탕의 개수의 합이 3 이하가 되도록 경우를 나눠.



① 420　② 450　③ 480
④ 510　⑤ 540

1st 조건 (가)를 만족시키도록 빵이 2개 담기는 접시를 하나 정하자.
서로 다른 빵은 5개이고, 접시는 4개이므로 조건 (가)를 만족시키려면 반드시 빵이 2개 담기는 접시가 하나 생기게 된다.
빵이 2개 담기는 접시를 맨 위쪽 접시라고 하면, 나머지 세 접시에는 서로 다른 빵이 각각 하나씩만 담기게 된다. 즉, 서로 다른 5개의 빵에서 맨 위쪽 접시에 담을 2개의 빵을 선택하는 경우의 수는
${}_5C_2=10$(가지)
또한, 남은 서로 다른 3개의 빵을 담는 경우의 수는
나머지 세 개의 접시를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

주의 원순열이라고 생각하여 $(3-1)!=2!=2$로 계산하면 안 돼! 이미 빵 2개를 담는 접시를 고정했기 때문에 원순열이 아니라 서로 다른 나머지 3개의 빵을 담는 경우의 수로 순열을 이용해야 해.

$3!=6$(가지)
즉, 빵을 접시 4개에 나누어 담는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$10\times6=60$(가지)이다.

2nd 조건 (나)를 만족시키도록 사탕을 담는 경우의 수를 나누어 구하자.
2개의 빵이 담긴 맨 위쪽 접시를 A, 1개의 빵이 담긴 세 접시를 시계 반대 방향으로 각각 B, C, D라 하자.
(i) 접시 A에 사탕을 담지 않은 경우의 수
　접시 B, C, D에 같은 종류의 사탕 2개, 2개, 1개를 나누어 담아야 한다.
　즉, 세 접시에서 1개의 사탕을 담을 접시 1개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$(가지)이다.

(ii) 접시 A에 사탕을 1개 담는 경우의 수
접시 A에 사탕이 이미 하나 담긴 경우이므로 나머지 사탕 4개를 나누는 경우만 생각하면 돼.

i) 접시 B, C, D에 같은 종류의 사탕 2개, 2개, 0개를 나누어 담는 경우의 수는 세 접시에서 사탕 2개씩 담을 접시 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_2=3$(가지)이다.

ii) 접시 B, C, D에 같은 종류의 사탕 2개, 1개, 1개를 나누어 담는 경우의 수는 세 접시에서 2개의 사탕을 담을 1개의 접시를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$(가지)이다.

i), ii)에 의해 접시 A에 사탕을 1개 담는 경우의 수는
$3+3=6$(가지)이다.

(i), (ii)에 의하여 접시 A, B, C, D에 사탕을 담는 경우의 수는
$3+6=9$(가지)이다.

3rd 조건 (가), (나)를 만족시키는 모든 경우의 수를 구하자.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는
$60\times9=540$(가지)이다.

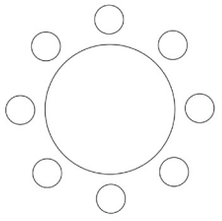
A 108 정답 288 *원순열 [정답률 30%]

정답 공식: 두 남학생 A, B를 묶어 한 학생으로 생각하고, 여학생 C는 여학생들과 이웃하지 않도록 양옆에 남학생을 앉힌다.

두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

(가) A와 B는 이웃한다. 단서 1 A, B는 묶어서 한 학생으로 생각해야 해.
(나) C는 여학생과 이웃하지 않는다. 단서 2 C의 바로 양옆에는 모두 남학생이 앉아야 해.

만약 A가 C 옆에 앉게 되면 AB는 같이 다니니까 BAC 또는 CAB 이런 식으로 앉게 될 걸 예상해 볼 수 있어.



1st 여학생 C의 양옆에 남학생 2명을 앉힌 경우를 생각하자.

A, B가 아닌 두 남학생을 D, E라 하고, 조건 (나)에 의하여 C는 여학생과 이웃하지 않아야 하므로 C의 양옆에 다음과 같이 남학생을 앉히는 경우의 수를 구하자.

(i) 남학생 D, E가 앉는 경우
C의 양옆에 D, E가 각각 앉는 경우의 수는 $2!=2$
조건 (가)에 의하여 A, B가 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2!=2$
남학생 4명과 여학생 4명 즉, 8명을 앉히는 데 남학생 A, B를 한 묶음, 여학생 C와 남학생 D, E를 한 묶음으로 각각 생각해 보면 모두
이렇게 묶고 나면 묶이지 않은 학생은 C를 제외한 여학생 3명만 남게 돼.
5명을 원탁에 앉히는 경우의 수와 같으므로
$(5-1)!=4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times2\times24=96$

(ii) 남학생 A 또는 B와 이웃하여 앉는 경우
A, B는 서로 이웃해야 하므로 C의 양옆에 동시에 앉을 수는 없어.
A, B가 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2!=2$
이 중 한 명이 C와 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2!=2$
남은 C의 옆 자리에 D 또는 E 중의 한 명이 앉는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$
이 각각의 경우에 대하여 A, B, C와 D, E 중 한 명까지 하나의 묶음으로 생각하면 모두 5명을 원탁에 앉히는 경우의 수와 같으므로
$(5-1)!=4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $2\times2\times2\times24=192$

2nd 경우의 수를 구하자.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $96+192=288$이다.

다른 풀이: A, B를 한 사람으로 보고 원탁에 앉히는 경우의 수 구하기

A, B를 한 사람으로 보고 전체 7명을 탁자에 앉히는 경우를 생각하자.
우선 C를 앉히는 경우의 수는 1, C와 이웃하지 않은 남은 4자리에
여학생 3명을 앉히는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$,
나머지 3자리에 남학생을 배치하는 경우의 수는 ${}_3P_3=6$,
마지막으로 A, B가 자리 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로
전체 경우의 수는 $24\times6\times2=288$

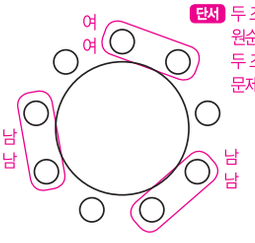
A 109 정답 48 *원순열과 분할과 분배하는 방법 [정답률 35%]

정답 공식: 2명씩 조를 만드는 경우의 수를 구한다. 3개의 조를 원순열의 형태로 배열한다.

남학생 4명, 여학생 2명이 그림과 같이 9개의 자리가 있는 원탁에 다음 두 조건에 따라 앉으려고 할 때, 앉을 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

(가) 남학생, 여학생 모두 같은 성별끼리 2명씩 조를 만든다.
(나) 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워둔다.

단서 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 원순열로 생각해야겠네.
두 조건을 그림에 표시해 보면서 문제를 이해해 보자.



1st 먼저 같은 성별끼리 2명씩 조를 만드는 경우의 수부터 구하자.

조건 (가)에서 같은 성별끼리 2명씩 조를 만들어야 하는데 여학생은 2명뿐이므로 여학생 조는 결정되어 있다.
따라서 6명의 학생을 2명씩 3개 조로 만드는 경우의 수는 남학생 4명을 2개 조로 만드는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$$

나누는 조원의 수가 같을 때, 팀의 개수 n의 계승 $n!$만큼 나누어주자.

2nd 원순열을 이용하여 자리에 앉을 수 있는 경우의 수를 구하자.

또, 조건 (나)에서 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워두어야 하므로 조를 원탁에 앉히고 각 조 사이에 빈 자리를 1개씩 끼워 넣으면 된다.
이때, 경우의 수는 원순열이므로 $(3-1)!=2!=2$
회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 볼 때 적용해.



그런데 같은 조끼리는 자리를 바꿀 수도 있으므로 이 경우의 수는
$2\times2\times2=8$

$\therefore$ (구하는 경우의 수)$=3\times2\times8=48$

실수 주의 여러 명을 한 조로 묶는다는 게 나오면 조 안에서 자리를 바꾸는 걸 꼭 세어야 해.

A 110 정답 120 *같은 것이 있는 문자의 나열 ··· [정답률 43%]

정답 공식: n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. (4점)

단서 1 1, 2, 3을 각각 하나씩 뽑아 두고, 나머지 세 개만 뽑으면 돼.

(가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다.
(나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 4의 배수이다.

단서 2 미리 뽑은 수들의 합은 1+2+3=6이고, 나머지 세 수들의 합의 최솟값은 1+1+1=3, 최댓값은 3+3+3=9이므로 선택한 숫자 여섯 개의 합은 9 이상 15 이하겠지?

1st 숫자 1, 2, 3을 중복을 허락하여 뽑을 때, 조건 (가)를 만족시키기 위한 조건을 구하자.

조건 (가)를 만족시키도록 먼저 1, 2, 3을 각각 하나씩 뽑고, 나머지 뽑은 세 수를 a, b, c라 하자.

그럼, 뽑은 6개의 수는 각각 1, 2, 3, a, b, c (a, b, c는 3 이하의 자연수)이므로 $a+b+c$의 값의 범위를 구하면

$3\le a+b+c\le 9$ … ㉠

$a+b+c$는 $a=b=c=1$일 때 3을 최솟값으로 갖고, $a=b=c=3$일 때 9를 최댓값으로 가지지.

2nd 조건 (나)를 만족시키는 나머지 세 수 a, b, c를 이용하여 경우의 수를 구하자.

㉠의 각 변에 1+2+3을 더하면

$9\le 1+2+3+a+b+c\le 15$

조건 (나)에 의해 6개의 수의 합이 4의 배수가 되려면

$1+2+3+a+b+c=12$인 경우밖에 없다.

즉, $a+b+c=6$이다.

1, 2, 3에서 세 개를 선택해 합이 6이 되게 하는 경우는 a, b, c가 1, 2, 3 또는 2, 2, 2인 경우 두 가지뿐이야.

(i) a, b, c가 1, 2, 3인 경우

6개의 숫자는 1, 1, 2, 2, 3, 3이고 이를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!2!2!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1\times2\times1}=90$(가지)

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

(ii) a, b, c가 2, 2, 2인 경우

6개의 숫자는 1, 2, 2, 2, 2, 3이고 이를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{4!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=30$(가지)

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$90+30=120$(가지)이다.

A 111 정답 115 *중복순열 – 수 나열 ····· [정답률 25%]

정답 공식: 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 만든 다섯 자리 자연수의 개수에서 숫자 0을 선택하지 않거나 숫자 1을 선택하지 않거나 숫자 0과 1을 모두 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우를 제외한다.

단서 1 만의 자리에는 0이 올 수 없고, 나머지 네 자리에는 중복순열 공식을 이용할 수 있어.

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들려고 한다. 숫자 0과 1을 각각 1개 이상씩 선택하여 만들 수 있는 모든 자연수의 개수를 구하시오. (4점)

단서 2 나머지 3개의 자연수를 택하는 것이 쉽지 않으므로 여사건으로 접근하는 것이 좀 더 편할 거야.

1st 경우를 나누는 기준을 정하자.

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리 자연수의 개수에서 숫자 0 또는 숫자 1을 선택하지 않고 만든 다섯 자리 자연수의 개수와 같다.

다섯 자리 자연수가 되려면 만의 자리에는 0이 오면 안 되겠지? 그 경우를 제외하고 생각해야 해.

다음과 같은 3가지 경우가 있어.
① 숫자 0을 선택하지 않은 경우
② 숫자 1을 선택하지 않은 경우
③ 숫자 0과 1을 모두 선택하지 않은 경우

2nd 각 경우에 따른 자연수의 개수를 구하자.

(i) 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 2이므로 만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 2이고, 남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

서로 다른 3개의 숫자 0, 1, 2 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같겠지?

∴ (자연수의 개수)$=2\times81=162$

(ii) 숫자 0을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

숫자 1, 2의 2개 중에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_5=2^5=32$ ∴ (자연수의 개수)$=32$

(iii) 숫자 1을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 2뿐이므로 만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 1이고, 남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 숫자 0, 2의 2개 중에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_4=2^4=16$

∴ (자연수의 개수)$=1\times16=16$

(iv) 숫자 0과 1을 모두 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

(i)과 (ii)가 모두 (iii)에 속하는 자연수를 포함시키고 있으니 이를 마지막에 제외해 주어야 해.

남은 숫자 2만을 선택하여 만들 수 있는 자연수는 22222의 1개이다.

3rd 자연수의 개수를 구하자.

(i)~(iv)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

(i)$-$((ii)$+$(iii)$-$(iv)) $=162-(32+16-1)=115$

(iv) → 숫자 0과 1을 모두 선택하지 않고 만든 자연수의 개수

((ii)$+$(iii)) → 숫자 0 또는 숫자 1을 선택하지 않고 만든 자연수의 개수

중복순열 개념·공식

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_n\Pi_r=n^r$

A 112 정답 150 *같은 것이 있는 순열 – 수 배열 ····· [정답률 32%]

정답 공식: 같은 것이 있는 조건에서 지정된 위치나 제한된 조건이 있는 경우 먼저 배열을 한 후 나머지 p', q', …, r'을 배열할 때, 그 경우의 수는 $\frac{n'!}{p'!q'!\cdots r'!}$ (단, $p'+q'+\cdots+r'=n'<n$)

단서 1 1, 2, 3은 모두 한 개 이상씩 쓰여야 하니 총 3개의 숫자를 추가로 선택해야 해. 이때, 중복해서 추가해도 된다는 조건을 잊으면 안돼.

숫자 1, 2, 3 중에서 모든 숫자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 6개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 같은 자연수의 개수를 구하시오. (4점)

단서 2 일의 자리와 백의 자리, 이 두 자리에는 중복되어 뽑은 숫자만 위치하도록 한 후에 나머지 자리에 남은 숫자를 나열해야 함을 알 수 있어.

1st 경우를 나누어야 할 기준을 정하자.

1, 2, 3 각각의 모든 숫자가 한 개 이상씩 포함되어야 하므로 6개의 숫자를 정함에 있어 3개의 숫자만 어떻게 결정해야 할지 생각하면 된다. 즉, 3개의 숫자를 결정할 때, 중복되는 숫자가 1개, 2개, 3개인 경우로 나누어 생각해 보자.

2nd 각 경우마다 조건에 맞는 자연수의 개수를 구하자.

(i) 중복되는 숫자가 1개일 때

1, 2, 3, ○, ○, ○에서 ○=1 또는 ○=2 또는 ○=3

한 개의 숫자가 3번 중복되어 추가로 선택되어야 한다.

중복될 수 있는 숫자는 1 또는 2 또는 3의 3가지이고, 이때 일의 자리의 수와 백의 자리의 수는 같은 수가 와야 하는데 그 경우는 일의 자리와 백의 자리에 중복된 숫자가 오는 경우 한 가지 경우 뿐이다.

예를 들어 1, 1, 1, 1, 2, 3의 경우 일의 자리와 백의 자리에 올 수 있는 같은 숫자는 1, 1의 경우뿐이야.

이제 나머지 네 개의 자리에 대하여 나열하는 경우의 수를 찾으면 4개의 숫자 중 1개의 숫자가 두 번 중복되기에 이를 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열에 의하여 $\frac{4!}{2!}=12$이므로

구하는 경우의 수는 $3\times1\times12=36$이다.

(ii) 중복되는 숫자가 2개일 때

1, 2, 3, ○, ○, ● 또는 1, 2, 3, ○, ●, ●이야.

순서쌍 (○, ●)은 (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)가 가능해.

한 개의 숫자를 2번, 다른 한 개의 다른 숫자를 1번 중복되어 추가로 선택하는 경우의 수는 $3\times2=6$이다.

예를 들어, 중복되는 수가 1, 2이면 1, 1, 1, 2, 2, 3 또는 1, 1, 2, 2, 2, 3의 경우로 생각해 볼 수 있어.

중복되는 숫자를 2개 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$

두 숫자 1, 2를 중복하여 선택하는 데 있어 1, 1, 2를 선택하는 경우와 1, 2, 2를 선택하는 경우의 수가 다르다는 것을 염두해 둬야 해. $2!=2$

그중 한 가지 경우인 1, 1, 1, 2, 2, 3에 대하여 일의 자리의 수와 백의 자리의 수에 같은 수가 오는 경우는 다음과 같다.

Ⅰ. 1, 1이 오는 경우

나머지 1, 2, 2, 3의 네 개의 숫자를 나머지 네 개의 자리에 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

Ⅱ. 2, 2가 오는 경우

나머지 1, 1, 1, 3의 네 개의 숫자를 나머지 네 개의 자리에 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

Ⅰ, Ⅱ에 의하여 구하는 경우의 수는 $12+4=16$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times16=96$이다.

(iii) 중복되는 숫자가 3개일 때

1, 2, 3, ○, ●, △에서 ○, ●, △는 각각 1, 2, 3이 돼야 해.

1, 2, 3의 모든 숫자가 1번씩 중복되어 추가로 선택되어야 하므로 그 경우의 수는 1이다.

이때, 일의 자리의 수와 백의 자리의 수는 같은 수가 와야 하므로 가능한 경우의 수는 3이다.

나머지 4개의 숫자는 2종류의 숫자가 각각 2개씩 중복된 형태로 있기 때문에 이를 일의 자리와 백의 자리를 제외한 나머지 네 개의 자리에 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열에 의하여

$\frac{4!}{2!2!}=6$이므로

구하는 경우의 수는 $1\times3\times6=18$

3rd 경우의 수를 구하자.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$36+96+18=150$이다.

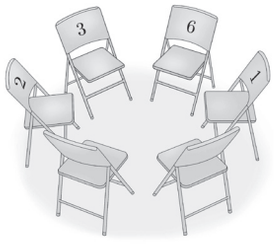
A 113 정답 48 ★2등급 대비 [정답률 15%]

*조건을 만족시키는 원순열의 수 계산하기 [유형 01]

단서1 1부터 6까지의 자연수 중에서 곱이 12가 되는 경우는 2×6과 3×4뿐이야.

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

단서2 회전하여 일치하는 경우가 생기지 않도록 처음에 하나의 수를 기준으로 잡고 나머지 수를 배치하는 것이 좋아.



오! 2등급? 조건을 만족시키는 원순열의 수를 찾는 문제이다.

조건을 만족시키는 경우가 무엇인지, 그리고 그에 따라 원순열의 개수를 어떻게 셀 수 있는지 파악하는 게 쉽지 않다.

단서+발상

단서1 먼저, 서로 이웃한 2개의 의자에 적힌 수의 곱이 12가 되는 경우는 3×4와 6×2 뿐이다. 따라서 두 가지 경우로 나누어 계산하도록 한다. 발상

이제, 12가 되지 않도록 하기 위해서는 전체 경우의 수에서 12가 되는 경우의 수를 빼는 방식으로 계산한다. 적용

단서2 마지막으로, 회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보기 때문에 원순열이므로 원순열을 계산하기 위해서는 처음 하나의 수를 고정하여 기준으로 삼고 나머지를 배치하는 방식으로 경우의 수를 세야 한다. 해결

주의 12가 되는 경우는 3×4와 6×2의 두 가지가 각각 이웃하면서 모두 이웃하게 배열되는 경우가 있다. 이 경우는 3×4가 서로 이웃하는 경우의 수와 6×2가 서로 이웃하는 경우의 수의 중복되는 경우이므로 이를 고려하여 구하는 경우의 수에서 빼야 한다.

핵심 정답 공식: 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

[문제 풀이 순서]

1st 전체 경우의 수를 구하자.

6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

2nd 여사건의 경우의 수를 이용하기 위하여 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우의 수를 구하자.

서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우는 다음과 같이 생각할 수 있다.

여사건의 경우의 수를 이용해. 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않는 경우의 수를 구하려면 (전체 경우의 수)−(서로 이웃한 의자에 적힌 수의 곱이 12인 경우)

(i) 2, 6이 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우

2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=4\times3\times2\times1=24$

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이 경우의 수는 $24\times2=48$

(ii) 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우

3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=4\times3\times2\times1=24$

이 각각에 대하여 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이 경우의 수는 $24\times2=48$

(iii) 2, 6이 각각 적힌 두 의자와 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 모두 이웃하게 배열되는 경우

2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=3\times2\times1=6$

이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!\times2!=4$

따라서 이 경우의 수는 $6\times4=24$

(i)~(iii)에 의하여 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우의 수는 $48+48-24=72$

3rd 여사건을 이용하여 경우의 수를 구하자.

따라서 구하는 경우의 수는 $120-72=48$

다른 풀이: 2와 6이 적힌 두 의자가 마주보게 되는 경우의 수와 2와 6이 적힌 두 의자 사이에 하나의 의자가 오는 경우의 수의 합 구하기

서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되려면 2×6 또는 3×4가 되어야 하기 때문에 2와 6, 3과 4가 적힌 의자가 서로 이웃하지 않는 경우의 수를 구해야 해.

(i) 2와 6이 적힌 두 의자가 마주보게 되는 경우

2와 6이 위치하는 경우가 1가지이고, 이 값이 고정되면서 나머지 수를 위치시키는 데 중복을 고려하지 않아도 괜찮아.

양쪽으로 2개씩의 의자가 있는데 그 각각의 2개 중에 하나씩의 의자에 수가 3, 4가 적힌 의자가 와야 이웃한 수의 곱이 12가 되지 않을 수 있어.

또한, 1, 5가 적힌 의자는 어느 자리에 와도 문제의 조건을 만족시키므로 경우의 수는 $4\times2\times2!=16$

4: 3의 위치를 정하는 경우의 수야.
2: 4의 위치를 정하는 경우의 수야.
$2!$: 1, 5의 위치를 정하는 경우의 수야.

주의 2와 6의 위치를 기준으로 3과 4의 위치가 시계 방향 2칸과 반시계 방향 2칸의 4칸 중에서 고려할 수 있기 때문에 처음 수의 위치를 선택하는 경우의 수는 4이고, 처음 수를 선택한 곳이 아닌 다른 곳의 자리가 2자리 남았으므로 2를 곱해야 해.

(ii) 2와 6이 적힌 두 의자 사이에 하나의 의자가 오는 경우

2와 6이 적힌 두 의자 사이에 3개의 의자가 있는 방향에서 이웃하게 3, 4의 수가 적힌 의자가 오게 되면 문제의 조건을 만족시키지 않으므로 구하는 경우의 수는

$2\times(4!-2\times2\times2!)=32$

2와 6 사이에 하나의 의자가 오는 경우 2□6□□□과 6□2□□□은 다른 경우이므로 2가지야.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $16+32=48$

1등급 대비 특강

＊바로 원순열의 개념을 쓸 수 없으면 경우를 나누어 생각하기

조건을 만족시키는 원순열을 계산할 때는 조건에 따라 원순열의 개념을 바로 적용할 수 없을 때가 많아. 조건이 가능한 경우를 나누어서 생각한 뒤 원순열의 개념을 적용하여 경우의 수를 구할 수 있기 때문에 경우를 잘 나누어서 생각할 수 있어야 해.

A 114 정답 8

1등급 대비 [정답률 8%]

＊원순열을 이용하여 주어진 색깔이 위치하는 경우의 수 구하기 [유형 02]

합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다.

빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.

단서1 9개의 영역을 9가지의 색을 모두 사용하여 색칠해야 해.
중복순열, 같은 것이 있는 순열, 중복조합은 아님은 알 수 있겠네?

(가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.

(나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.

(다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다. 단서2 회전하여 일치하는 것에 관한 언급이 있으니 원순열 내용을 이용한 문제임을 사전에 파악하고 접근할 수 있어야겠지?

색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k\times7!$이다. k의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (4점)

오개 1등급? 9가지 색깔을 이용하여 색칠판을 칠하는 경우의 수를 구해야 한다. 조건 (다)에 의하여 빨간색과 파란색을 칠한 정사각형이 꼭짓점을 공유하지 않도록 빨간색을 칠한 정사각형의 위치를 기준으로 경우를 나누어 푸는 과정이 복잡하다.

단서+발상

단서1 먼저, 9가지의 서로 다른 색을 9개의 영역에 모두 사용하여 색칠하므로 9가지 서로 다른 색을 9개의 정사각형을 칠하도록 하는 조건을 확인한다. 발상
이제, 빨간색과 파란색의 위치에 대한 조건이 있으므로 빨간색과 파란색을 기준으로 경우를 나누어 볼 수 있다.
일단 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않으므로 빨간색과 파란색은 모든 사각형과 꼭짓점을 공유하는 가운데 정사각형에 들어갈 수 없다. 빨간색과 파란색이 위치할 수 있는 정사각형의 조건은 같고, 빨간색이 A에 위치하는 경우를 E를 중심으로 시계 방향으로 90°, 180°, 270°만큼 회전하면 빨간색이 각각 C, I, G에 위치하는 경우와 같으므로 빨간색이 A, C, G, I에 위치하는 경우와 B, D, F, H 중 하나에 위치하는 경우로 나누어 볼 수 있다. 적용

A	B	C
D	E	F
G	H	I

단서2 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보므로 구하고자 하는 값이 원순열과 관련된 문제임을 알 수 있다. 따라서 기준이 되는 색깔을 정하고 이 색깔이 어느 곳에 배치되었을 때, 회전하여 일치하는 경우의 수를 구하여 나누어 주면 된다. 해결

주의 회전하여 일치하는 경우를 고려하여 빨간색의 위치를 두 경우로 나누어 볼 수 있다.

핵심 정답 공식: 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

[문제 풀이 순서]

1st 빨간색과 파란색이 들어갈 수 없는 장소를 먼저 생각해봐.
그림과 같이 색칠판에 이름을 새기자.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

주의 새롭게 출제되는 원순열 문제는 단순히 원형 모양의 탁자에 사람을 앉히는 단순한 문제가 아니라 조건을 추가하여 제시하는 까다로운 문제들이 많아. 그래서 조건을 신경 써야 하는 대상을 먼저 배치시키거나 배치시키지 말아야 할 위치를 파악한 뒤에 상황을 단순화하는게 제일 처음 할 일이야. 이 문제에서는 배치시키지 말아야 할 위치를 파악하는 것이 처음 해야 할 일이야.

이때, 조건 (다)에 의해 빨간색과 파란색을 가운데인 E에 칠하게 되면 꼭짓점을 공유하게 되므로 칠할 수 없다.

가운데 사각형은 모든 사각형과 꼭짓점을 공유하기 때문이라는 거 알겠니?
그럼 바깥 테두리에 있는 8개의 사각형에만 생각하면 되겠네.

2nd 원순열에서 회전하여 일치하지 않는 경우로 경우 나누기를 해야 함을 생각하고 접근해봐.

회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보기에 빨간색을 먼저 칠하는 것으로 기준을 잡고 생각했을 때 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

큰 사각형도 정사각형이니 90°간격으로 회전할 때마다 정사각형의 큰 틀이 유지되니, 총 4번의 같은 경우가 나와서 8개의 사각형을 빨간색으로 칠함에 있어 2가지 경우로 나누어 생각할 수 있어.

(i) 빨간색을 A, C, G, I 중 하나에 칠하는 경우

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A	B	C
D	E	F
G	H	I

빨간색을 A, C, G, I 중 하나에 칠하여 회전하면 같은 경우이므로 빨간색을 A에 칠하는 경우를 생각해 보자.

이 경우 파란색은 B, D, E에는 칠할 수 없으므로 파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 5이고, 나머지 7개의 색을 나머지 부분에 칠하는 경우의 수는 7!이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $5\times7!$이다.

(ii) 빨간색을 B, D, F, H 중 하나에 칠하는 경우

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A	B	C
D	E	F
G	H	I

빨간색을 B, D, F, H 중 하나에 칠하여 회전하면 같은 경우이므로 빨간색을 B에 칠하는 경우를 생각해 보자.

이 경우 파란색은 A, C, D, E, F에는 칠할 수 없으므로 파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 3이고, 나머지 7개의 색을 나머지 부분에 칠하는 경우의 수는 7!이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times7!$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$5\times7!+3\times7!=(5+3)\times7!=8\times7!=k\times7!$이므로 $k=8$이다.

1등급 대비 특강

* 회전하면 일치하는 것은 같은 것으로 보고 원순열로 생각하여 풀기

회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다는 조건은 원순열을 이용하는 문제에서 무조건 제시되어야 해. 원순열을 이용하는 문제에 원이 제시되지 않더라도 일정한 각도만큼 회전하여 일치하는 경우의 수를 구할 수 있어.

이 문제에서는 빨간색을 칠한 정사각형의 위치를 기준으로 시계 방향으로 90°, 180°, 270°만큼 회전하였을 때 각각 일치하므로 빨간색이 A, C, G, I 중 하나에 위치하는 경우와 B, D, F, H 중 하나에 위치하는 경우의 2가지로 나누어 볼 수 있어.



My Top Secret 서울대 선배의 1 등급 대비 전략

회전하여 일치하는 경우의 수는 기준이 되는 색깔을 정해 해당 색깔의 위치를 고정해놓고 나머지 색깔을 배치하는 경우의 수를 구해도 돼.

이때, 기준은 문제에서 특별하게 또 다른 조건이 주어진 색깔을 삼고, 원순열의 수를 이용하여 편하게 계산할 수 있어.

이 문제의 경우, 빨간색을 왼쪽 위 모서리에 고정해 놓고 나머지 색깔의 위치를 정하는 경우의 수와 빨간색을 위쪽 중간에 고정해놓고 나머지 색깔의 위치를 정하는 경우의 수를 구하여 더하면 돼.

A 115 정답 188 ★1등급 대비 [정답률 4%]

*같은 것이 있는 문자의 나열 [유형 04+05]

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 각각 5개 이하씩 모두 7개를 택해 다음 조건을 만족시키는 7자리의 문자열을 만들려고 한다.

단서1 문자열에는 3개 연속하는 a가 꼭 하나만 있어야 해.

(가) 한 문자가 연달아 3개 이어지고 그 문자는 a뿐이다.

(나) 어느 한 문자도 연달아 4개 이상 이어지지 않는다.

예를 들어, $baaacca$, $ccbbaaa$는 조건을 만족시키는 문자열이고 $aabbcca$, $aaabccc$, $ccbaaaa$는 조건을 만족시키지 않는 문자열이다. 만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구하시오. (4점)

단서2 제외시키는 이유를 꼭 확인해봐야 해. $aabbcca$는 3개 연속하는 a가 없으므로 제외시켜. $aaabccc$는 c가 3개 연속할 수 없으므로 제외시켜. $ccbaaaa$는 어떤 문자도 4개 연속할 수 없으므로 제외시켜.

오! 1등급? 조건 (가), (나)에 맞춰 여러 경우를 나눠서 가능한 문자열의 개수를 세야 하기 때문에 까다로운 문제이다.

단서+발상

단서1 문자열에서 a는 세 개가 연속해서 존재해야만 한다. 이때, 각 문자는 5개 이하씩 선택해야 하므로 문자열에서 a는 최대 5개 존재해야 하고, 이 중 세 개는 반드시 연속해서 존재해야 한다. 발상

또한, 조건 (가), (나)를 종합해 보면 b, c는 최대 두 개까지 연속할 수 있다. 발상

따라서 a에 대한 정보가 가장 많으므로 a의 위치에 따라 경우를 나누어 가능한 문자열의 개수를 세는 것이 가장 효율적이다. 해결

단서2 문제에서 직접 예시를 준 경우에는 해당 예시가 왜 성립하는지 혹은 왜 성립하지 않는지를 확인해 보는 것이 좋다. $aabbcca$와 $aaabccc$는 조건 (가)를 만족시키지 않고, $ccbaaaa$는 조건 (가)와 조건 (나)를 모두 만족시키지 않는다. 발상

주의 a의 위치에 따라 경우를 나누어 문제를 풀 때, b나 c가 세 개 이상 연속된 경우를 빠짐없이 제외해야 하는 것을 잊지 말아야 한다.

핵심 정답 공식: 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r=n^r$

[문제 풀이 순서]

1st a를 3개로 붙였을 때 만들어지는 7자리 문자열을 표로 나타내 보자.

문자열 aaa와 이웃한 자리를 ▲,

문자열 aaa와 이웃하지 않는 자리를 △로 나타내면

	첫 번째	두 번째	세 번째	네 번째	다섯 번째	여섯 번째	일곱 번째
(i)	a	a	a	▲	△	△	△
(ii)	▲	a	a	a	▲	△	△
(iii)	△	▲	a	a	a	▲	△
(iv)	△	△	▲	a	a	a	▲
(v)	△	△	△	▲	a	a	a

2nd 1st에서 분류한 문자열의 개수를 구해봐.

조건 (가)를 만족시키는 문자열의 형태는

aaa▲△△△, ▲aaa▲△△, △▲aaa▲△,

△△▲aaa▲, △△△▲aaa의 5가지이고

조건 (나)에 의하여 ▲에 나열될 수 있는 문자는 a가 될 수 없으므로 b 또는 c이다.

(i) aaa▲△△△일 때

(a) ▲에 b가 나열된 경우

3개의 △에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_3=27$

이때, 조건을 만족시키지 않는 문자열은

함정 중복순열 문제에서 주로 출제되는 유형은 조건을 잘 이해하여 경우 나누기를 통해 해결하는 문제 유형이야. 여기에 이 문제가 더 까다롭게 느껴지는 건 다 해결됐다고 생각했는데 제외시켜야 하는 문자열까지 한 번 더 생각해 줘야 한다는 거지. 꼼꼼하게 체크해야 할 조건이 있는지 확인하고 마지막까지 긴장을 놓지 마.

$aaabbbb$, $aaabbba$, $aaabbbc$, $aaabaaa$, $aaabccc$의 5가지이다.

문자는 5개 이하로 선택해야 해.

그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는 $27-5=22$

(b) ▲에 c가 나열된 경우

(a)와 같은 방법으로 구하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 22

(a), (b)에 의하여 만들 수 있는 문자열의 개수는

$22+22=44$

(ii) ▲aaa▲△△일 때

2개의 ▲에 a가 아닌 두 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2=4$

2개의 △에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2=9$

그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는 $4\times9=36$

이때, 조건을 만족시키지 않는 문자열은

$baaabbb$, $baaaccc$, $caaabbb$, $caaaccc$의 4가지이다.

a가 아닌 다른 문자는 3개 연속할 수 없어.

그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는

$36-4=32$

(iii) △▲aaa▲△일 때

2개의 ▲에 a가 아닌 두 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2=4$

2개의 △에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2=9$

그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는 $4\times9=36$

조건을 모두 만족시키는 문자열이야.

(iv) △△▲aaa▲일 때 ((ii)와 경우의 수가 같다.)

만들 수 있는 문자열의 개수는 32

(v) △△△▲aaa일 때 ((i)과 경우의 수가 같다.)

만들 수 있는 문자열의 개수는 44

(i)~(v)에 의하여 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는

$44+32+36+32+44=188$



My Top Secret 서울대 선배의 ❶ 등급 킬러 전략

이 문제처럼 대칭성을 이용하여 같은 계산을 줄일 수 있는 경우가 많아. 이 문제에서도 경우를 다섯 개로 나눠야 할 것처럼 보이지만, aaa가 맨 처음에 오는 경우와 맨 마지막에 오는 경우는 대칭적인 경우이므로 실제로 계산을 해야 하는 경우는 3가지뿐이야.

A 116 정답 708 ★1등급 대비 [정답률 8%]

＊같은 것이 있는 순열로 나열하는 경우의 수 구하기 [유형 06]

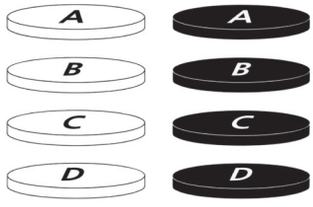
흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.) (4점)

단서1 같은 문자가 적힌 원판은 최대 XXYY처럼 두 세트까지 나올 수 있어.

(가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다.

(나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.

단서2 같은 문자가 적힌 원판을 선택할 경우 놓는 순서는 한 가지로 고정되기 때문에 같은 것이 있는 순열로 생각해서 원판을 나열시킬 수 있어.



오개 1등급? 같은 것이 있는 순열로 나열하는 경우의 수를 구하는 문제이다. 놓는 순서가 한 가지로 고정되는 경우 같은 것이 있는 순열을 사용하여 나열하는 것이 이 문제의 키포인트이다.

단서+발상

단서1 먼저, 조건 (가)와 (나)에서 같은 문자가 적힌 원판의 유무에 따라 경우의 수가 달라지므로 4개의 원판에 적힌 문자의 꼴에 따라 경우를 나눈다. 발상

단서2 이제, 같은 문자가 적힌 원판이 있는 경우 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓여야 하므로 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. 적용

4개의 원판에 적힌 모든 문자가 다를 때, 각각의 원판의 색을 정하고 D가 적힌 원판을 제외한 원판의 순서를 결정하여 경우의 수를 구할 수 있고, 전체 경우의 수도 구할 수 있다. 해결

주의 놓는 순서가 한 가지로 고정되는 경우 같은 것이 있는 순열로 생각하여야 한다.

핵심 정답 공식: 4개의 원판에 적힌 문자의 꼴이 XXYY 또는 XXYZ 또는 모든 문자가 다 다른 경우로 나눈다.

[문제 풀이 순서]

1st 어떠한 조건을 기준으로 경우를 나눌지 정하자.

문제 조건을 만족시키도록 원판을 쌓는 경우의 수는 원판에 적힌 문자를 나열하는 경우의 수와 같다.

색깔과 상관없이 원판에 적힌 문자만 고려하면 조건 (가), (나)에 의하여 순서는 저절로 정해지거나 나중에 고려하면 돼.

조건 (가)를 만족시키는 경우는 4개의 원판에 적힌 문자의 꼴이 XXYY

동일한 문자 2개씩 2쌍을 선택하는 경우야.

또는 XXYZ 또는 모든 문자가 다 다를 때이므로 각 경우를 나누어 보자.

2개의 문자만 동일하고 남은 2개는 서로 다른 경우야.

2nd 각 경우마다 그 경우의 수를 구하자.

(i) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYY 꼴인 경우

4개의 문자 중 X, Y에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 이렇게 선택한 4개의 문자를 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times 6=36$

(ii) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYZ 꼴인 경우

4개의 문자 중 X를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

이 문자를 제외한 나머지 2개의 문자를 정하여 Y, Z를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$,

Y, Z가 적힌 원판의 색을 선택하는 경우의 수는

서로 동일하지 않은 두 문자에 대해서는 실제 원판의 색을 정해야 하므로 흰색과 검은색 중에서 중복순열을 이용하여 원판의 색을 정할 수 있어.

${}_2\Pi_2=2^2=4$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 이렇게 선택한 4개의 문자를 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times 3\times 4\times 12=576$

(iii) 4개의 원판에 적힌 모든 문자가 다 다를 때

각각의 원판의 색을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 조건 (나)에 의하여 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓고, 나머지 3개의 원판의 순서를 정하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3P_3=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $16\times 6=96$

3rd 구하는 경우의 수를 구하자.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$36+576+96=708$



My Top Secret 서울대 선배의 ❶ 등급 대비 전략

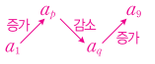
나열하려는 물건이 색, 문자와 같이 2가지 이상으로 구분된 것들은 어떠한 조건을 기준으로 경우를 나눌지 정하는 것이 제일 중요해.
이 문제는 다음과 같이 3가지를 기준으로, 순차적으로 생각해 줘야 해.
(i) 문자 꼴을 선택하는 경우
(ii) 선택한 문자 중에서 색을 선택하는 경우
(iii) 문자와 색 모두 선택한 4개의 판으로 원기둥을 쌓는 경우

A 117 정답 243 ★1등급 대비 [정답률 5%]

*$a_1=2$, $ap=8$이 의미하는 바를 파악하여 중복순열로 경우의 수 구하기 [유형 04]

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i번째($i=1, 2, \cdots, 9$) 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i라 하자. $1<p<q<9$인 두 자연수 p, q에 대하여 a_i가 다음 조건을 만족시킨다. 단서1 $a_i<a_{i+1}$, $a_i>a_{i+1}$, $a_i<a_{i+1}$은 a_i들의 순서에 대한 정보지? 경우의 수 입장에서 순서가 정해져 있다면 수를 뽑는 경우만 생각해 주면 되겠지?

(가) $1\le i<p$이면 $a_i<a_{i+1}$이다. ⇐ 증가
(나) $p\le i<q$이면 $a_i>a_{i+1}$이다. ⇐ 감소
(다) $q\le i<9$이면 $a_i<a_{i+1}$이다. ⇐ 증가



단서2 남은 공 3, 4, 5, 6, 7을 나누는 경우를 생각해야 해.

$a_1=2$, $a_p=8$인 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) (4점)

왜 1등급? 중복순열을 이용하여 공을 세 묶음으로 나누는 방법의 수를 구해야 한다.
조건 (가), (나), (다)와 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낸다는 점을 바탕으로 $a_1=2$와 $a_p=8$이 의미하는 바를 따져보는 과정이 복잡하다.

단서+발상

단서1 먼저, 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼내므로 a_n의 최솟값이 1, 최댓값이 9임을 알 수 있다. 발상
a_n에서 $1\le n\le p$일 때 a_1이 가장 작고, $q\le n\le 9$일 때 a_q가 가장 작으므로 a_n의 최솟값은 a_1이거나 a_q임을 알 수 있다.
같은 방법으로 a_n의 최댓값은 a_p이거나 a_9임을 알 수 있다. 적용

단서2 a_n의 최솟값은 a_1이거나 a_q인데, a_n의 최솟값이 1이고 $a_1=2$이므로 $a_q=1$이고 같은 방법으로 $a_9=9$임을 알 수 있다. 적용
$2=a_1<a_2<\cdots<a_p=8$, $8=a_p>a_{p+1}>\cdots>a_q=1$,
$1=a_q<a_{q+1}<\cdots<a_9=9$이고 나열하는 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수와 남은 다섯 개의 숫자 3, 4, 5, 6, 7이 적힌 공을 서로 다른 세 주머니에 나누어 넣는 경우와 같다. 해결

주의 $p=2$이거나 $q=p+1$일 수 있으며 $q=8$일 수도 있다. 즉, 다섯 개의 숫자가 적힌 공을 서로 다른 세 주머니에 나누어 넣지만 공이 하나도 들어 있지 않은 주머니가 있을 수 있다.

핵심 정답 공식: $a_q=1$, $a_9=9$이므로 나머지 5개의 공을 세 구간 중 한 구간에 배열한다.

[문제 풀이 순서]

1st $a_n=1$과 $a_m=9$가 되는 n과 m의 값을 각각 구해.
a_1부터 a_p까지는 커지고 ⇐ (가)에 의하여 $a_i<a_p$
a_p부터 a_q까지는 작아지고 ⇐ (나)에 의하여 $a_i>a_q$
a_q부터 a_9까지는 커지므로 ⇐ (다)에 의하여 $a_i<a_9$
$a_n=1$인 경우는 $a_n<a_1$이므로 $a_n=a_q$뿐이다.
$\therefore a_n=a_q=1$
$a_m=9$인 경우는 a_q에서 a_9 중 가장 큰 수이므로 $a_m=a_9=9$
따라서 $a_1=2$이므로 $a_q=1$이고, (2보다 작은 자연수이지? 즉, 1이야)
주의 a_q가 $p\le i<9$에서 최솟값이 되어야해.
$a_p=8$이므로 $a_9=9$이다. (8보다 큰 자연수이지? 즉, 9야)
주의 $1\le i<q$에서 $a_p=8$이 최댓값이기 때문에 이 범위의 a_i에는 9가 없어.

2nd 남은 공이 들어갈 수 있는 경우의 수를 구해.

a_1부터 $a_p=8$까지를 A묶음, $a_p=8$부터 $a_q=1$까지를 B묶음,

$a_q=1$부터 $a_9=9$까지를 C묶음이라 하면

A, B, C의 묶음 안에 있는 수는 순서가 정해져 있으므로

(A는 커지는 순서, B는 작아지는 순서, C는 커지는 순서이니까 세 묶음에 배정하는 경우만 생각하면 되네.

A, B, C의 묶음에 수를 배정하면 더 이상의 경우의 수가 생기지 않는다.

따라서 남은 공 3, 4, 5, 6, 7의 5개가 각각 A, B, C의 묶음을 선택하는

[중복순열의 수] 서로 다른 n개를 중복을 허락하여 r개 선택하는 순열의 수, 즉 ${}_n\Pi_r=n^r$

경우의 수만 따지면 되므로 $3^5=243$

실수 주의 A, B, C 묶음에 몇 개의 수가 들어가는지는 정해져있지 않기 때문에 중복순열을 사용해야 해.

톡톡 풀이: a_1, a_p, a_q, a_9가 적힌 4개의 공을 제외한 5개의 공을 나누는 경우의 수 구하기

구하는 경우의 수는 $a_1=2$, $a_p=8$, $a_q=1$, $a_9=9$가 적힌 4개의 공을 제외한 5개의 공을 첫 번째와 p번째 사이, p번째와 q번째 사이, q번째와 9번째 사이로 나누는 경우의 수와 같아.

$$
\begin{aligned}
&{}_5C_0\times({}_5C_0\times{}_5C_5+{}_5C_1\times{}_4C_4+{}_5C_2\times{}_3C_3+{}_5C_3\times{}_2C_2+{}_5C_4\times{}_1C_1+{}_5C_5\times1)\\
&+{}_5C_1\times({}_4C_0\times{}_4C_4+{}_4C_1\times{}_3C_3+{}_4C_2\times{}_2C_2+{}_4C_3\times{}_1C_1+{}_4C_4\times1)\\
&+{}_5C_2\times({}_3C_0\times{}_3C_3+{}_3C_1\times{}_2C_2+{}_3C_2\times{}_1C_1+{}_3C_3\times1)\\
&+{}_5C_3\times({}_2C_0\times{}_2C_2+{}_2C_1\times{}_1C_1+{}_2C_2\times1)\\
&+{}_5C_4\times({}_1C_0\times{}_1C_1+{}_1C_1\times1)\\
&+{}_5C_5\times(1\times1)=243
\end{aligned}
$$

1등급 대비 특강

＊특정한 숫자를 제시한 조건에 주목하기

마지막에 주어진 $a_1=2$, $a_p=8$이라는 조건이 단순히 계산을 위한 숫자가 아님을 눈치채야 해. 이것은 특정한 상황에서만 성립하는 조건으로, 이런 조건이 주어진다는 것은 특정한 상황을 주어진 조건들로부터 알아낸 후 문제를 간단하게 만들어낼 수 있는지를 묻고자 한 것이야.
조건이 단순하게 생겼어도 그 의미를 깊게 고민해 보아야 해.



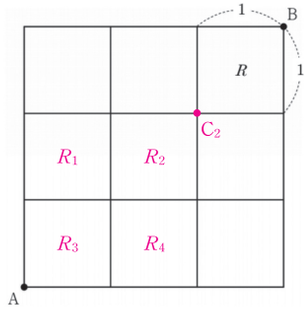
My Top Secret 서울대 선배의 1 등급 대비 전략

이런 문제는 확실히 이해하는 게 중요해. 문제를 읽고 자신만의 방법으로 정리해서 한눈에 들어오게 하는 게 중요하지.
이 문제는 $i=1$에서 $i=p$까지 증가, $i=p$에서 $i=q$까지 감소, $i=q$에서 $i=9$까지 증가이므로 1과 9가 들어갈 곳이 자동으로 정해지지? 이렇게 단순히 정리만 했을 뿐인데 풀이과정이 쉽게 보이는 경우가 많아.

A 118 정답 40 ✪2등급 대비 [정답률 15%]

＊특정한 정사각형의 네 변을 지나는 최단 경로 구하기 [유형 09]

그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다.



이 도로망을 따라 최단거리로 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 다시 A 지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (4점) 단서1 최단거리로 나아갈 때, A → B, B → A에서 각각 어느 방향으로 갈 수 있을까?

(가) 정사각형 R의 네 변을 모두 지나야 한다.
(나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R뿐이다.

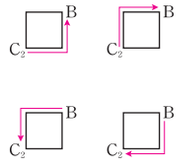
단서2 R의 네 변을 모두 지날 수 있는 방법은 2가지야. A → B로 갈 때, 사각형 R의 아랫 부분을 택하면 B → A로 돌아올 때는 반드시 윗 부분을 택해야 하고, A → B로 갈 때, 윗 부분을 택하면 돌아올 때는 아랫 부분을 택해야 하기 때문이지.

왜 2등급? 정사각형의 네 변을 지나는 최단 경로를 구해야 한다.
나머지 정사각형의 네 변에 대하여 지나갔던 길을 또 지나갈 수 있는, 중복하여 지나는 경우를 따져보는 과정이 복잡하다.

단서+발상

단서1 최단거리로 A 지점에서 B 지점까지 갈 때, 오른쪽과 위쪽 방향으로만 갈 수 있고, B 지점에서 A 지점까지 갈 때, 왼쪽과 아래쪽 방향으로만 갈 수 있다. 발상
A 지점에서 B 지점으로 갈 때 정사각형 R의 변 중 지날 수 있는 변의 개수는 최대 2이다. 따라서 정사각형 R의 네 변을 모두 지나기 위해서는 A 지점에서 B 지점으로 갈 때 2개의 변, B 지점에서 A 지점으로 갈 때 2개의 변을 지나야 한다. 적용

단서2 마지막으로, 단서1에서 A 지점에서 B 지점까지 갈 때 오른쪽과 위쪽 방향으로만 갈 수 있다고 했으므로 2개의 변을 지나는 방법은 2가지이다. 정사각형 왼쪽 아래 꼭짓점에서 출발하여 위쪽으로 한 번 오른쪽으로 한 번 움직이는 경우와, 오른쪽으로 한 번 위쪽으로 한 번 움직이는 경우이다. 발상



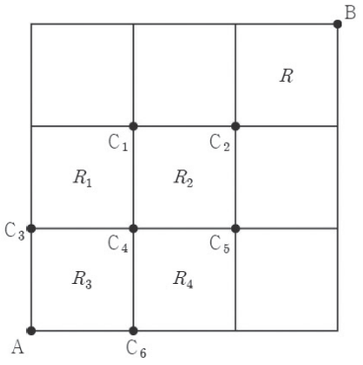
B 지점에서 A 지점으로 갈 때는 A 지점에서 B 지점으로 갈 때 지나온 정사각형 R의 두 변을 거치면 네 변을 다 지날 수 없으므로 지나지 않은 두 변을 지나면 된다. 적용

주의 A → C_2 → B → C_2 → A의 경로에 대하여 R_1, R_2, R_3, R_4의 네 변을 지나는 경우 중 동시에 두 정사각형의 네 변을 지나는 경우가 있으므로 주의해야 한다.

핵심 정답 공식: A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 직사각형의 좌측 아래에 A, 우측 위에 B가 위치하고, 직사각형 내에 가로 m칸, 세로 n칸인 경로일 때 가로, 세로를 각각 같은 것으로 보면, 같은 것이 각각 m개, n개 있는 것을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다. 즉, $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

[문제 풀이 순서]

1st 공식을 적용하기 위해 중간 지점을 설정하자.



그림과 같이 6개의 점을 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6,
4개의 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4라 하자.
조건에서 정사각형 R의 네 변을 모두 지나야 하기 때문에 점 B와 대각선에 위치한 점 C_2에 대하여 점 A에서 점 C_2를 지나는 경로에 대하여 살펴보자.

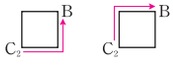
2nd 구하는 전체 경로를 세부 경로로 나누어 경우를 생각하자.
문제에서 구하는 경로는 $A \to C_2 \to B \to C_2 \to A$로 가는 최단 경로 중 조건을 만족시키는 경로이다.

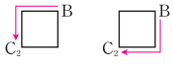
(i) 조건 (가)를 만족시키는 $C_2 \to B \to C_2$의 경로

$C_2 \to B$의 경우의 수는 $\frac{2!}{1!1!}=2$이고,

$B \to C_2$의 경우의 수는 조건 (가)에 의하여 1이므로

$C_2 \to B \to C_2$의 경우의 수는 $2\times1=2$이다.

1번째 경우 : 

2번째 경우 : 

(ii) 조건 (나)를 만족시키는 $A \to C_2$와 $C_2 \to A$의 경로

전체 경우의 수는 (전체 경우에서 제외되는 경우의 수를 구하여 답을 구하자.)

$A \to C_2$, $C_2 \to A$의 경로의 수이므로 $\frac{4!}{2!2!}\times\frac{4!}{2!2!}=36$이다.

(전체의 경우를 따질 때에는 왔던 길을 다시 가도 상관이 없지?
따라서 $A \to C_2$를 가는 경우와 $C_2 \to A$를 가는 경우를 각각 구하여 곱해주는 거야.)

조건 (나)를 만족시키지 않는 경우를 살펴보자.

(a) 정사각형 R_1의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_3 \to C_1 \to C_2$, $C_2 \to C_1 \to C_3 \to A$의 순서로 이동하는 경우의 수는 $(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$

(b) 정사각형 R_2의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_4 \to C_2$, $C_2 \to C_4 \to A$의 순서로 이동하는 경우의 수는 $(2\times2)\times(1\times2)=8$

(c) 정사각형 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_4 \to C_2$, $C_2 \to C_4 \to A$의 순서로 이동하는 경우의 수는 $(2\times2)\times(2\times1)=8$

(d) 정사각형 R_4의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_6 \to C_5 \to C_2$, $C_2 \to C_5 \to C_6 \to A$의 순서로 이동하는 경우의 수는 $(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$

(e) 두 정사각형 R_2, R_3의 네 변을 모두 지나는 경우

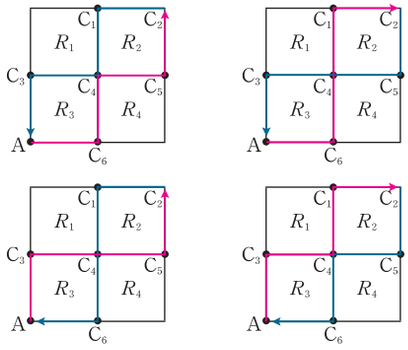
$A \to C_4 \to C_2$, $C_2 \to C_4 \to A$의 순서로 이동하는 경우의 수는

$(2\times2)\times(1\times1)=4$

실수 주의 : 경로의 지점을 이용해 경우를 나눌 때, 그 나눈 경우들 사이에 중복되거나 빠지는 경우가 없도록 경우를 나누도록 해야 해.

(전체 경우에서 제외되는 경우를 찾는 거지?
(a)~(d)까지는 각 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4에 대하여 네 변을 모두 지나는 경우에 대하여 각각 알아봤어. (e)의 경우는 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 다시 A 지점까지 돌아오는 방향성 때문에 두 정사각형 R_2, R_3의 네 변을 모두 지나는 경우도 생기기 때문에 제외시키기 위해 구해야 하는 거야. 이 부분을 놓치면 안돼.)

즉, $A \to C_4 \to C_2$로 이동하는 경로를 빨간색으로, $C_2 \to C_4 \to A$로 이동하는 경로를 파란색으로 표현하면 다음의 4가지 경우가 있다.



(a)~(e)에 의하여 $A \to C_2$, $C_2 \to A$의 순서로 이동할 때,
정사각형 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없는 경우의 수는
$36-\{(2+8+8+2)-4\}=20$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2\times20=40$

1등급 대비 특강

*** 정사각형 R의 네 변을 지나기 위해 항상 지나는 점의 위치를 우선 찾기**

정사각형 R의 네 변을 지나기 위해 항상 지나가야 하는 점의 위치를 찾은 뒤 나머지 작은 정사각형 8개 중 네 변을 모두 지나게 될 수 있는 정사각형을 골라내면, R_1, R_2, R_3, R_4가 나와.
이들 정사각형의 네 변을 지나는 경로를 구하여 R의 네 변을 지나는 경우의 수에서 제외하면 R의 네 변만 지나는 경우의 수를 구할 수 있어.

같은 것이 있는 순열 개념·공식

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, 이들 n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는

$\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점+4점+5점]

A 119 정답 ③ *원순열 ····· [정답률 58%]

(정답 공식: 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 방법의 수는 $(n-1)!$)

단서 1 원순열이므로 한 자리를 고정해야 해.
원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다.
A, B, C를 포함한 7명의 학생이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A, B, C 세 명 중 어느 두 명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) (3점)
단서 3 원순열을 의미해.
단서 2 7명 중 A, B, C를 제외한 4명을 앉히고 그 사이에 A, B, C를 앉힐 수 있어. 이때, 사람은 각각 서로 다르므로 순서를 고려해야 해.

① 120 ② 132 ③ 144 ④ 156 ⑤ 168

1st A, B, C가 아닌 나머지 네 명을 원탁에 먼저 배치하자.

주의 여사건을 이용하여 풀려면 A, B, C가 서로 이웃하지 않은 경우는 3명이 연달아 앉거나, 2명이 연달아 앉고 나머지 1명이 떨어져 앉는 경우를 각각 구해야 해.

A, B, C가 아닌 나머지 네 명을 앉히는 원순열의 수는
$(4-1)!=3!=3\times2\times1=6$이다.
원순열이므로 회전하여 일치하지 않도록 하는 방법은 4명 중 한 명을 고정하고 나머지 3명을 일렬로 나열하는 것과 같아.

2nd 네 명 사이 사이에 A, B, C를 배치해.

원탁에 배치된 네 명 사이의 자리 4군데 중 3군데를 선택해서 A, B, C를 배치하면 되므로
서로 다른 n개에서 중복없이 r개를 선택하는 방법은 조합의 수이므로 ${}_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!r!}$ (단, $n\geq r$)
이미 네 명을 앉혔으므로 회전하여 같은 경우가 생길 수 없으므로 A, B, C를 앉히는 건 일렬로 세우는 경우와 같아.

${}_4C_3\times3!={}_4C_1\times3!$
$=4\times3\times2\times1=24$
위에서 선택한 3군데에 서로 다른 세 사람 A, B, C를 앉히니까 3!을 곱해야 해.

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$

다른 풀이 ❶: A, B, C를 제외한 4명을 원순열로 배치하고, 4명 사이 칸에 A, B, C를 배치하는 경우의 수 구하기

먼저 A, B, C를 제외한 4명을 원순열로 배치하고 그 각각에 대하여 4명 사이 칸 중 3곳을 선택하여 A, B, C가 앉을 자리를 정하면 되므로
$\frac{4!}{4}\times{}_4P_3=6\times4\times3\times2=144$
서로 다른 n개에서 중복없이 r개를 선택해서 일렬로 나열하는 순열의 수이므로 ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $n\geq r$)

다른 풀이 ❷: 전체 경우의 수에서 A, B, C 모두 이웃하는 경우의 수와 A, B, C 중 2명을 이웃하는 경우의 수를 제외하기

여사건을 이용하면 7명을 원탁에 배열하는 방법은 한 명을 고정한 나머지 6명을 일렬로 세우는 것과 같으므로 6!
A, B, C 세 명이 모두 이웃한 경우 $3!4!$
A, B, C를 1명으로 보면 5명이 원형 탁자에 앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!$
A, B, C가 자리 바꾸는 경우의 수

A, B, C 중 2명이 이웃하는 경우 ${}_3C_2\times2!\times{}_3C_1\times3!\times4$이므로
$6!-(3!4!+{}_3C_2\times2!\times{}_3C_1\times3!\times4)$
$=6!-(3!4!+3!4!\times3)$
$=6!-3!4!\times4$
$=4!(30-24)=144$
A, B를 이웃하여 앉히고, 그 양 옆 2자리를 포함해서 4자리를 1자리로 보면 전체 4명이 원형 탁자에 앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$
A, B가 이웃하면 그 양 옆 2자리를 제외한 3자리 중 1자리를 택하여 C를 앉혀.
A, B, C 중 이웃하는 2명을 선택하면 ${}_3C_2$
이들이 자리 바꾸는 경우 2!을 곱해야 해.

주의 남은 사람을 1, 2, 3, 4라 하면 1234의 배열에


이와같이 4가지 경우가 있으므로 4를 곱해줘.

A 120 정답 ③ *같은 것이 있는 문자의 나열 ····· [정답률 78%]

(정답 공식: n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, 이 n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$))

단서 $(x-y+1)^{n+2}$과 x^ny^2의 지수의 크기를 비교하면 같은 걸 알 수 있지? 즉, x를 n개, $(-y)$를 2개 선택하는 경우를 찾으면 돼.
$(x-y+1)^{n+2}$의 전개식에서 x^ny^2의 계수를 $f(n)$이라 할 때,
$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(2020)}=\frac{a}{b}$
이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) (4점)

① 2019 ② 2020 ③ 2021
④ 2022 ⑤ 2023

1st 이항정리를 이용해서 $f(n)$을 구해.
x^ny^2의 지수가 $n+2$이므로
$(x-y+1)^{n+2}$의 전개식에서 x^ny^2의 항은 x를 n개, $(-y)$를 2개 선택하면 되므로 x^ny^2의 계수는 $\frac{(n+2)!}{n!2!}$
같은 것이 있는 순열을 이용해.

$\therefore f(n)$
$=\frac{(n+2)!}{n!2!}$
$=\frac{(n+2)\times(n+1)\times n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1}{\{n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1\}\times(2\times1)}$
$=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

2nd 부분분수를 이용해서 $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(2020)}$의 값을 구해.

$f(n)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$이므로
$\frac{1}{f(n)}=\frac{2}{(n+2)(n+1)}=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ [부분분수]

$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(2020)}$ $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)
$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}\right)\right\}$
$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2022}\right)=2\times\frac{1011-1}{2022}$
$=\frac{1010}{1011}$
$-\frac{1}{3}$과 $+\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$과 $+\frac{1}{4}$ 등과 같이 이웃한 항들이 모두 소거된다는 사실을 이용해 복잡한 식을 간단하게 나타낼 수 있어.

$\therefore a+b=1010+1011$
$=2021$

분할의 방법의 수 개념·공식

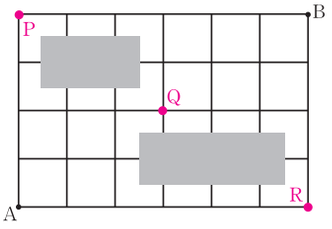
서로 다른 n개의 물건을 p개, q개, r개 $(p+q+r=n)$의 세 묶음으로 분할하는 방법의 수는
(1) p, q, r가 모두 다른 수
${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r$
(2) p, q, r 중 어느 두 수가 같은 수
${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{2!}$
(3) p, q, r가 모두 같은 수
${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{3!}$

A 121 정답 62 *도로망에서 최단 경로 ····· [정답률 66%]

정답 공식: 불가능한 경로를 지우고, 반드시 지나야 하는 지점을 기준으로 경로를 구분한다.

어느 부대가 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 장애물(어두운 부분)을 피해 A 지점에서 B 지점으로 도로를 따라 이동하려고 한다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오. (3점)

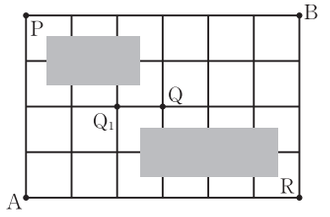
단서 장애물을 지나지 않을 때, 꼭 지나야 하는 곳을 그림에 표시하면 세 점 P, Q, R야.



1st 장애물을 피해 A 지점에서 B 지점으로 도로를 따라 최단거리로 이동하려면 반드시 지나야 하는 점을 생각해 보자.

장애물을 피해 A 지점에서 B 지점으로 이동할 때, 그림과 같이 3개의 점 P, Q, R를 지나는 경우 각각의 경로가 겹치지 않는다.

그림과 같이 3개의 점 P, Q, R에 대하여 최단거리로 이동하는 모든 경로는 서로 겹치지 않고 반드시 세 점 중에서 하나의 점을 지나게 돼.



(i) 점 P를 지나는 경우

A → P의 경로는 1가지, P → B의 경로는 1가지이므로

A → P → B의 경로는 $1\times1=1$(가지)

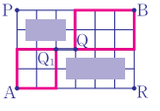
(ii) 점 Q를 지나는 경우 (이 경우 반드시 점 Q_1을 지난다.)

점 Q를 지나면서 A 지점에서 B 지점으로 이동하려면 반드시 Q_1을 지날 수 밖에 없어.

A → Q_1의 경로는 $\frac{4!}{2!2!}=6$(가지)

가로 방향의 칸의 수가 a, 세로 방향의 칸의 수가 b인 바둑판 모양의 도로망에서 두 지점 사이를 잇는 최단 경로의 수는 전체 $(a+b)$개 중에서 서로 같은 것이 각각 a, b개 포함되어 있을 때 일렬로 나열하는 순열의 수와 같지.

따라서 $\frac{(a+b)!}{a!b!}$로 계산할 수 있어.



Q_1 → Q의 경로는 1가지,

Q → B 경로는 $\frac{5!}{3!2!}=10$(가지)

실수 주의 장애물로 인해 안쪽 경로를 일부 못 쓰게 된 것 뿐이니까 가장 바깥쪽은 론 여전히 이동이 가능해!

따라서 A → Q → B의 경로는 $6\times1\times10=60$(가지)

(iii) 점 R를 지나는 경우

A → R의 경로는 1가지, R → B의 경로는 1가지이므로

A → R → B의 경로는 $1\times1=1$(가지)

(i)~(iii)에 의하여 구하는 전체 경우의 수는

$1+60+1=62$

수능 핵강

*** 최단거리 문제를 푸는 핵심은 반드시 지나는 점 알기**

장애물이 존재하는 최단거리 문제는 장애물을 피해서 갈 수 있는 경로들 중에서 서로 겹치지 않는 점을 찾아 경우를 나눠 계산하면 되지.
이때, 최단거리로 가는 모든 경우는 이 점들 중 하나를 반드시 지나야 해.

A 122 정답 20 *분할 및 분배의 수 ····· [정답률 78%]

정답 공식: 1부터 9까지의 숫자 중 3개의 수의 합이 나머지의 6개의 수의 합보다 크려면 3개의 수의 합은 23이거나 24이다.

1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공을 같은 종류의 세 상자에 3개씩 나누어 넣으려고 한다. 세 상자 중 어떤 한 상자에 들어 있는 3개의 공에 적힌 수의 합이 나머지 두 상자에 들어 있는 6개의 공에 적힌 수의 합보다 크도록 9개의 공을 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 공을 넣는 순서는 고려하지 않는다.) (3점)

단서 3개의 공에 적힌 수의 합이 나머지 6개의 공에 적힌 수의 합보다 크려면 제일 큰 3개의 수의 합부터 구해보자.
(7, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6) // (6, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 7)을 하나하나 차분히 예상해보자.

1st 9개의 공을 3개씩 나누는 방법을 생각해.

1부터 9까지의 자연수의 합은 45이다.

가장 큰 3개의 수의 합과 나머지 6개의 수의 합을 차례로 비교해 보면

$7+8+9=24$이므로 나머지 6개 수의 합은 $45-24=21$ (○)

$6+8+9=23$이므로 나머지 6개 수의 합은 $45-23=22$ (○)

세 수의 합이 나머지 6개 수의 합보다 커.

$5+8+9=22$이므로 나머지 6개 수의 합은 $45-22=23$ (×)

$6+7+8=21$이므로 나머지 6개 수의 합은 $45-21=24$ (×)

⋮

2nd 공을 상자에 넣는 방법을 생각해.

한 상자에 들어 있는 3개의 수의 합이 나머지 두 상자에 들어 있는 6개의 수의 합보다 큰 경우는 2가지 경우 뿐이다.

(i) 한 상자에 7, 8, 9가 들어 있는 경우

남은 1, 2, 3, 4, 5, 6을 두 개의 상자에 나누어 담아야 하고, 상자는 구분하지 않으므로

$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=10$$

남은 6개의 공을 두 상자에 3개씩 넣는 경우니까 ${}_6C_3\times{}_3C_3$이야.

이때, 같은 종류의 상자니까 $\frac{1}{2!}$을 다시 곱해야 해.

(ii) 한 상자에 6, 8, 9가 들어 있는 경우

남은 1, 2, 3, 4, 5, 7을 두 개의 상자에 나누어 담아야 하고, 상자는 구분하지 않으므로

$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=10$$

남은 6개의 공을 두 상자에 3개씩 넣는 경우니까 ${}_6C_3\times{}_3C_3$이야.

이때, 같은 종류의 상자니까 $\frac{1}{2!}$을 다시 곱해야 해.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $10+10=20$

1회 확률과 통계 실전 기출 모의고사

문제편 p. 264

1회 01 정답 ④ *이항분포의 계산 [정답률 90%]

정답 공식: 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따르면 $E(X)=np$임을 이용한다.

확률변수 X가 이항분포 $B\left(12, \frac{1}{3}\right)$을 따를 때, $E(X)$의 값은?

단서 이항분포를 따르는 확률변수 X의 평균을 묻는 문제야. (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 이항분포를 따르는 확률변수 X의 평균을 구해.

이항분포 $B\left(12, \frac{1}{3}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균은

이항분포 $B(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 평균은 np야.

$E(X)=12\times\frac{1}{3}=4$

1회 02 정답 ⑤ *독립·종속 사건의 계산 [정답률 75%]

정답 공식: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이고, A, B가 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$임을 이용해 $P(B)$의 값을 계산해 $P(A\cap B)$를 구한다.

두 사건 A, B가 서로 독립이고, 단서 1 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이니까 $P(A\cap B)=\frac{1}{2}P(B)$

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ 단서 2 확률의 덧셈정리로 $P(A)$, $P(B)$로 나타내어 보자.

일 때, $P(A\cap B)$의 값은? (3점)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

1st 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $P(A\cup B)$를 $P(B)$로 나타내어 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$의 값을 구해.

두 사건 A, B가 서로 독립이니까.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ 두 사건 A, B가 서로 독립이니까

근데 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$이므로

두 개의 단서로 $P(B)$나 $P(A\cup B)$의 값을 구할 때는 덧셈정리를 이용해.

$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}P(B)$ $\therefore P(B)=\frac{3}{5}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

사건 A, B가 독립이면 곱사건 $A\cap B$의 확률을 두 사건의 확률의 곱으로 표현가능해. 즉, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

종속사건과 독립사건 개념·공식

① 종속사건
$P(A)\neq P(A|B)$ 또는 $P(B)\neq P(B|A)$

② 독립사건
$P(A)=P(A|B)=P(A|B^C)$
또는 $P(B)=P(B|A)=P(B|A^C)$
즉, $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$

1회 03 정답 ⑤ *중복순열 – 수 나열 [정답률 77%]

정답 공식: 3의 개수에 따라 경우를 나누어 각 경우의 수를 구한다.

세 숫자 1, 2, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 단서 1 중복 사용하여 숫자를 배치하고 순서를 고려해야 하니까 중복순열!
1과 2가 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는? (3점) 단서 2 3이 0개, 1개, 2개인 경우로 나누어 따져볼까?

① 58 ② 56 ③ 54
④ 52 ⑤ 50

1st 3의 개수에 따라 경우의 수를 나누어 자연수의 개수를 구하자.

(i) 3이 0개일 때, 1, 2만 4번 중복하여 배열하는 경우

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

1만 중복하거나 2만 중복하는 경우는 제외해야 해.

(ii) 3이 1개일 때, 1, 2, □, 3을 배열하는 경우

□에 1 또는 2가 들어가므로

1, 1, 2, 3 또는 1, 2, 2, 3을 배열하는 경우야.

$2\times\frac{4!}{2!}=24$

(iii) 3이 2개일 때, 1, 2, 3, 3을 배열하는 경우

$\frac{4!}{2!}=12$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $14+24+12=50$

다른 풀이: **만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수에서 1, 3 또는 2, 3으로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수를 빼고 3으로만 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수를 더해서 조건을 만족시키는 자연수의 개수 구하기**

세 숫자를 중복을 허락하여 네 자리 자연수를 만드는 전체 경우의 수는

3개 중 4개를 중복을 허락하여 선택하는 순열의 수와 같아.

${}_3\Pi_4=3^4=81$

(i) 1, 3 또는 2, 3을 중복을 허락하여 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4\times 2=2^4\times 2=32$

2개 중 4개를 중복하는 순열의 수

1, 3인 경우, 2, 3인 경우로 2가지야.

(ii) 3으로만 이루어진 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는 1

따라서 구하는 자연수의 개수는

$81-32+1=50$이야.

(i)에서 3333이 두 번 있으므로 전체 경우의 수에서 중복해서 빠지므로 (ii)의 경우를 다시 한 번 더해 주어야 해.

1회 04 정답 ③ *중복조합의 이해 – 적어도 [정답률 92%]

정답 공식: 먼저 각 종류별로 하나씩 선택한 뒤, 나머지는 중복조합으로 계산한다.

사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스 중에서 8병을 선택하려고 한다. 사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스를 각각 적어도 1병 이상씩 선택하는 경우의 수는? (단, 각 종류의 주스는 8병 이상씩 있다.) (3점)

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25 단서 3개 주스를 각각 1병씩 미리 선택하면 되지? 즉, 3개 종류의 주스 중에서 5병을 선택하면 되네.

1st 적어도 1병 이상씩 선택하기 위해서 먼저 각각 주스를 하나씩 선택하고 나머지를 선택하는 경우를 구하자.

8병 중 각각 주스를 하나씩 선택했다고 하고 나머지 5병($=8-3$)을 선택하는 경우의 수를 구하는 것과 같다.

즉, 사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스 3종류의 주스 중 중복을 허락하여 5개를 선택하는 경우의 수를 구하는 것이므로

3개 중 5개를 중복을 허락하여 선택하는 조합이지?

$\therefore$ (구하는 방법의 수)$={}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$

1회 05 정답 ① *모평균의 추정 [정답률 70%]

정답 공식: 표본평균 $\overline{X}$를 구하고 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$가 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$를 따르면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $\left[\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$이다.

⇒ 모집단의 확률변수 X

어느 지역에서 생산되는 귤의 당도는 평균이 m이고 표준편차가 1.5인 정규분포를 따른다고 한다. 표는 이 지역에서 생산된 귤 중에서 임의로 9개를 추출하여 당도를 측정한 결과를 나타낸 것이다.

당도	10	11	12	13	합계
귤의 개수	4	2	2	1	9

이 결과를 이용하여 이 지역에서 생산되는 귤의 당도의 평균 m을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은? (단, $P(0\le Z\le 1.96)=0.475$이고 당도의 단위는 브릭스이다.) (3점)

⇒ 95 %의 신뢰계수는 1.96

① $10.02\le m\le 11.98$ ② $9.77\le m\le 12.23$
③ $9.53\le m\le 12.47$ ④ $9.35\le m\le 12.65$
⑤ $9.04\le m\le 12.96$

단서 $n=9$인 표본평균을 구할 수 있지? 모표준편차가 주어질 때, 신뢰구간을 구하면 돼.

1st 주어진 표를 이용하여 임의로 9개 추출한 표본의 평균을 구하자.

귤의 당도를 확률변수 X라 하면 확률변수는 X는 정규분포 $N(m, 1.5^2)$을 따른다. 이때, 주어진 표에 의하여 임의로 추출한 9개 귤의 당도의 표본평균 $\overline{X}$를 구하면

$\overline{X}$: 9개 임의추출한 귤에 대한 당도의 표본평균이야.

$$\overline{X}=\frac{10\times 4+11\times 2+12\times 2+13\times 1}{9}$$
$$=\frac{99}{9}=11$$

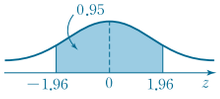
2nd 신뢰도 95 %의 모평균 m의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이니까 귤의 당도의 평균 m을 추정한 신뢰구간을 구하자.

크기 9인 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}=11$이므로

귤의 당도의 평균 m(모평균)을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은 신뢰계수 $k=1.96$ ($\because P(0\le Z\le 1.96)=0.475$)에 대하여

95 %가 해당하는 z의 값이 1.96이면 신뢰계수 k는 $k=1.96$



$$11-1.96\times\frac{1.5}{\sqrt{9}}\le m\le 11+1.96\times\frac{1.5}{\sqrt{9}}$$
$$11-1.96\times 0.5\le m\le 11+1.96\times 0.5$$
$$\therefore\ 10.02\le m\le 11.98$$

모평균의 신뢰구간 개념·공식

모집단의 분포가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때, 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$, 표본의 크기 n, 모표준편차 σ에 대하여 모평균 m의 신뢰구간은

① 95 %의 신뢰도인 경우 : $\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 99 %의 신뢰도인 경우 : $\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

1회 06 정답 ① *정규분포의 표준화 [정답률 75%]

정답 공식: 키를 확률변수 X라 하면 $P(X\ge 177)=0.242$이므로 이를 표준화하여 m의 값을 구하고, $P(X\ge 180)$을 표준정규분포표를 이용해 구한다.

어느 회사의 전체 신입 사원 1000명을 대상으로 신체검사를 한 결과, 키(확률변수 X이지?)는 평균 m, 표준편차 10인 정규분포를 따른다고 한다. 전체 신입 사원 중에서 키가 177 이상인 사원이 242명이었다. 전체 신입 사원 중에서 임의로 선택한 한 명의 키가 180 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 키의 단위는 cm이다.) (4점)

z	$P(0\le Z\le z)$
0.7	0.2580
0.8	0.2881
0.9	0.3159
1.0	0.3413

단서 $X\ge 177$인 확률로 m의 값을 구하여 정규분포를 완성하면 $P(X\ge 180)$을 구할 수 있지?

① 0.1587 ② 0.1841 ③ 0.2119
④ 0.2267 ⑤ 0.2420

1st 전체 신입 사원의 키를 확률변수 X라 두고 정규분포로 표현해 보자.

전체 신입 사원의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m, 10^2)$을 따른다. (모집단의 분포를 따져줄까?)

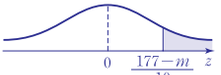
이때, 키가 177 이상인 사원이 1000명 중 242명이라 하므로

[확률의 정의] 표본공간 S에 대하여 사건 A가 일어날 확률은 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

$$P(X\ge 177)=\frac{242}{1000}=0.242\ \cdots\ ㉠$$

2nd 표준정규분포표를 이용하여 $X\ge 177$일 확률을 표준화하여 m의 값을 구해 보자.

$Z=\frac{X-m}{10}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 ㉠을 표준화하면



$$P\left(Z\ge\frac{177-m}{10}\right)=0.242\ \cdots\ ㉡$$

확률이 $P(Z\ge 0)=0.5$보다 작으므로 $177-m>0$이겠지?

이때, $0.5-0.242=0.2580$이므로 $P\left(0\le Z\le\frac{177-m}{10}\right)=0.2580$이야.

이때, 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 0.7)=0.2580$이므로

$$P(Z\ge 0.7)=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.7)$$
$$=0.5-0.2580$$
$$=0.242$$

㉡에 의하여 $\frac{177-m}{10}=0.7$

$\therefore\ m=170$

3rd 마지막으로 $P(X\ge 180)$을 표준화하여 그 값을 구하자.

따라서 확률변수 X는 정규분포 $N(170, 10^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-170}{10}$

$$P(X\ge 180)=P\left(Z\ge\frac{180-170}{10}\right)=P(Z\ge 1)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

정규분포의 표준화 개념·공식

확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때,

① 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

② 표준정규분포표를 이용하기 위한 표준화

$$P(x_1\le X\le x_2)=P\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\le Z\le\frac{x_2-m}{\sigma}\right)$$