FIRST CLASS [해설편]

Ⅰ 도형의 방정식

Ⅱ 집합과 명제

Ⅲ 함수와 그래프

일등급 수학 • 빠른 정답

I 도형의 방정식

01 평면좌표

*핵심 유형 연습 ▸ p.10~11

01 ④	02 ⑤	03 ①	04 ①	05 3
06 ③	07 ⑤	08 ①	09 18	10 ②
11 50	12 7			

*실전 유형 훈련 ▸ p.12~17

13 ⑤	14 20	15 672	16 97	17 4
18 ④	19 ⑤	20 ②	21 37	22 ④
23 ④	24 45	25 10	26 ①	27 13
28 ③	29 5	30 ④	31 125	32 3
33 ③	34 3	35 ③	36 ②	37 27
38 21	39 5			

*고난도 도전 문제 ▸ p.18~19

40 2	41 101	42 ③	43 3	44 ④
45 58	46 ②	47 ③		

02 직선의 방정식

*핵심 유형 연습 ▸ p.22~24

01 ②	02 50	03 7	04 ①	05 ②
06 2	07 ④	08 5	09 ⑤	10 ③
11 1	12 8	13 9	14 ③	15 199
16 ②	17 ②	18 ③		

*실전 유형 훈련 ▸ p.25~31

19 ②	20 ②	21 250	22 75	23 ②
24 ②	25 ③	26 106	27 ⑤	28 ④
29 4	30 88	31 ⑤	32 5	33 ②
34 ①	35 ⑤	36 ②	37 ⑤	38 2
39 ②	40 ①	41 ②	42 ③	43 ④
44 ⑤	45 20	46 12	47 ④	48 ⑤
49 11	50 2	51 9		

*고난도 도전 문제 ▸ p.32~33

52 ①	53 5	54 234	55 17	56 8
57 8	58 12	59 ②		

03 원의 방정식

*핵심 유형 연습 ▸ p.36~38

01 ⑤	02 ②	03 ①	04 ②	05 ③
06 ③	07 16	08 ④	09 100	10 31
11 4	12 ①	13 ④	14 8	15 ①
16 98	17 ④	18 ③		

*실전 유형 훈련 ▸ p.39~45

19 ⑤	20 5	21 ③	22 4	23 ③
24 ③	25 96	26 ①	27 ①	28 40
29 16	30 8	31 7	32 ②	33 ⑤
34 ④	35 ②	36 42	37 6	38 7
39 21	40 5	41 12	42 8	43 8
44 ②	45 7	46 ⑤	47 ①	48 540
49 17	50 16	51 4	52 1	

*고난도 도전 문제 ▸ p.46~47

53 5	54 80	55 ①	56 ④	57 18
58 ③	59 49	60 20		

04 도형의 이동

*핵심 유형 연습 ▸ p.50~51

01 45	02 3	03 16	04 ㄱ, ㄷ	05 17
06 2	07 ②	08 5	09 ④	10 21
11 75	12 1			

*실전 유형 훈련 ▸ p.52~59

13 8	14 5	15 ⑤	16 6	17 ②
18 23	19 10	20 ⑤	21 4	22 ⑤
23 45	24 ③	25 ③	26 ②	27 ②
28 ⑤	29 ⑤	30 ④	31 ①	32 ③
33 ②	34 16	35 6	36 ③	37 ②
38 ③	39 6	40 10	41 ①	42 ②
43 ②	44 180	45 2	46 65	

*고난도 도전 문제 ▸ p.60~61

47 48	48 12	49 ②	50 4	51 10
52 241	53 12	54 4		

Ⅱ 집합과 명제

05 집합

*핵심 유형 연습 ▸ p.66~68

01 6	02 5	03 ③	04 ⑤	05 ③
06 ③	07 81	08 82	09 ⑤	10 ④
11 ③	12 ⑤	13 24	14 4	15 40
16 ④	17 28			

*실전 유형 훈련 ▸ p.69~74

18 3	19 8	20 ①	21 ⑤	22 15
23 ②	24 ②	25 ③	26 ③	27 ③
28 20	29 72	30 ③	31 64	32 32
33 ④	34 115	35 9	36 ③	37 ⑤
38 27	39 10	40 13	41 ③	42 37
43 16	44 24	45 21	46 7	47 31
48 15	49 12			

*고난도 도전 문제 ▸ p.75~76

50 ⑤	51 ②	52 ④	53 70	54 46
55 7	56 189	57 14		

06 명제

*핵심 유형 연습 ▸ p.80~82

01 ④	02 ②	03 ⑤	04 ③	05 ⑤
06 ②	07 ⑤	08 2	09 ②	10 45
11 ③	12 ②	13 ③	14 ②	15 ③
16 ①	17 20	18 ④		

*실전 유형 훈련 ▸ p.83~88

19 ①	20 ②	21 ①	22 ④	23 ③
24 ④	25 ④	26 ⑤	27 ⑤	28 ④
29 ②	30 ③	31 ⑤	32 ④	33 ③
34 5	35 6	36 ②	37 ④	38 ③
39 ③	40 ②	41 ④	42 ⑤	43 33
44 ②	45 ②	46 48	47 A	48 ④
49 700원	50 16	51 165	52 1	

*고난도 도전 문제 ▸ p.89~90

53 34	54 10	55 18	56 ②	57 3
58 ②	59 7	60 18		

07 명제의 증명과 절대부등식

*핵심 유형 연습 ▸ p.94~96

01 ②	02 풀이 참조		03 ④	
04 풀이 참조		05 ③	06 풀이 참조	
07 ⑤	08 18	09 3	10 ①	11 25
12 ③	13 ③	14 20	15 12	

*실전 유형 훈련 ▸ p.97~105

16 36	17 22	18 ③	19 ④	20 ④
21 ⑤	22 ③	23 ③	24 12	25 7
26 ㄱ, ㄷ	27 4	28 6	29 8	30 ④
31 ⑤	32 ②	33 ②	34 ①	35 80
36 ③	37 ⑤	38 ⑤	39 6	40 ②
41 51	42 5	43 6	44 4	

*고난도 도전 문제 ▸ p.106~107

45 10	46 6	47 55	48 ②	49 16
50 ③	51 2	52 ⑤		

Ⅲ 함수와 그래프

08 함수

*핵심 유형 연습 ▸ p.112~114

01 ⑤	02 ②	03 48	04 ③	05 ②
06 ㄱ, ㄴ	07 2	08 45	09 ③	10 ⑤
11 ①	12 8	13 ③	14 ②	15 6
16 ④	17 72	18 80		

*실전 유형 훈련 ▸ p.115~122

19 12	20 16	21 ③	22 9	23 ②
24 ①	25 ①	26 1	27 ①	28 2
29 ④	30 ⑤	31 1	32 1	33 ①
34 6	35 22	36 ②	37 3	38 ②
39 16	40 ③	41 8	42 2	43 5
44 50	45 ①	46 ④	47 12	48 ④
49 123	50 4	51 ③	52 ③	53 36
54 2	55 ②	56 ④	57 12	58 8
59 1	60 42			

*고난도 도전 문제 ▸ p.123~124

61 ⑤	62 54	63 ⑤	64 15	65 10
66 ⑤	67 288	68 ⑤		

09 유리식과 유리함수

*핵심 유형 연습 ▸ p.128~129

01 ②	02 1	03 6	04 2	05 21
06 ⑤	07 ④	08 10	09 ④	10 5
11 5	12 10			

*실전 유형 훈련 ▸ p.130~135

13 ④	14 10	15 ②	16 ⑤	17 ③
18 3	19 ④	20 ⑤	21 6	22 ⑤
23 7	24 ①	25 4	26 12	27 4
28 ⑤	29 ②	30 ③	31 3	32 9
33 ④	34 16	35 ②	36 20	37 12
38 ⑤	39 4	40 1	41 11	42 12

*고난도 도전 문제 ▸ p.136~137

43 ⑤	44 25	45 15	46 1	47 ⑤
48 1	49 5	50 16		

10 무리식과 무리함수

*핵심 유형 연습 ▸ p.140~141

01 ④	02 ③	03 15	04 6	05 ③
06 ②	07 ②	08 3	09 4	10 40
11 6				

*실전 유형 훈련 ▸ p.142~147

12 ②	13 ⑤	14 ①	15 5	16 16
17 ②	18 ③	19 9	20 2	21 ④
22 ②	23 ①	24 ①	25 ④	26 ④
27 ③	28 ③	29 75	30 15	31 2
32 ④	33 755	34 ⑤	35 ①	36 40
37 ①	38 6	39 40	40 27	

*고난도 도전 문제 ▸ p.148~149

41 ⑤	42 ④	43 2	44 120	45 8
46 85	47 3	48 4		

I 도형의 방정식

01 평면좌표

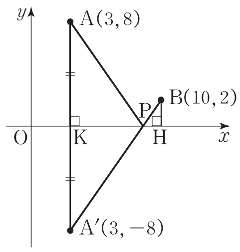
핵심 유형 연습

문제편 p.10~11

01 답 ④

Tip

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}$는 점 P의 좌표를 구하지 않고도 알 수 있어.



두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 K, H라 하고, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 A′이라 하면 A′$(3,\ -8)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}$

따라서 그림과 같이 점 P가 $\overline{\mathrm{A'B}}$와 x축의 교점에 위치할 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 된다.

이때, $\triangle\mathrm{A'PK}\backsim\triangle\mathrm{BPH}$이므로

$\overline{\mathrm{A'P}}:\overline{\mathrm{BP}}=\underbrace{\overline{\mathrm{A'K}}:\overline{\mathrm{BH}}=8:2}_{y\text{좌표의 절댓값의 비}}=4:1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=4:1$

02 답 ⑤

(i) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 경우 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$에서

$(4-2)^2+(8-2)^2=(a-2)^2+(0-2)^2$

$(a-2)^2=6^2\qquad\therefore\ a=8$ 또는 $a=-4$

(ii) $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 경우 $\overline{\mathrm{BA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$에서

$(4-2)^2+(8-2)^2=(a-4)^2+(0-8)^2$

이때, $(a-4)^2=-24$가 되어 정수 a가 존재하지 않는다.

(iii) $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}$인 경우 $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{CB}}^2$에서

$(a-2)^2+(0-2)^2=(a-4)^2+(0-8)^2$

$4a=72\qquad\therefore\ a=18$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$8+(-4)+18=22$

03 답 ①

점 P가 삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$, 즉 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이다.

(i) $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서 $(a-4)^2+(b+2)^2=a^2+(b-6)^2$

$-8a+4b+20=-12b+36$

$8a-16b=-16\qquad\therefore\ a-2b=-2\ \cdots$ ㉠

(ii) $\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$에서 $a^2+(b-6)^2=(a+4)^2+(b-4)^2$

$-12b+36=8a-8b+32$

$8a+4b=4\qquad\therefore\ 2a+b=1\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=1$

$\therefore\ a+b=0+1=1$

04 답 ①

Tip

제1사분면에 존재하는 점의 좌표의 성질을 이용해.

선분 AB를 $k:1$로 내분하는 점을 P라 하면

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4k+1}{k+1},\ \dfrac{-3k+8}{k+1}\right)$

점 P가 제1사분면에 존재하려면

$\dfrac{4k+1}{k+1}>0,\ \dfrac{-3k+8}{k+1}>0$이어야 한다.

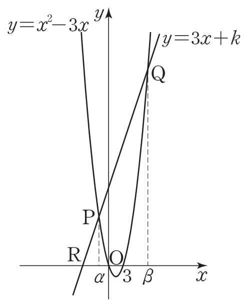
이때, k는 자연수이므로 $k+1>0$이다.

즉, $4k+1>0\ \cdots$ ㉠, $-3k+8>0\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $-\dfrac{1}{4}<k<\dfrac{8}{3}$

따라서 자연수 k는 1, 2이므로 그 합은 $1+2=3$이다.

05 답 3



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$\mathrm{P}(\alpha,\ 3\alpha+k)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ 3\beta+k)$이고

$x^2-3x=3x+k$에서 $x^2-6x-k=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이고

선분 PQ를 $1:4$로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로

내분점의 x좌표 $\dfrac{4\alpha+\beta}{5}=0$이다. $\qquad\therefore\ 4\alpha+\beta=0$

두 식 $\alpha+\beta=6$, $4\alpha+\beta=0$을 연립하면

$\alpha=-2,\ \beta=8$이고

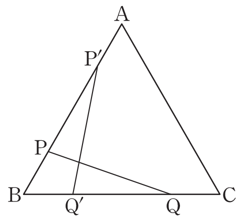
이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $\alpha\beta=-16=-k$

$\therefore\ k=16,\ \mathrm{P}(-2,\ 10),\ \mathrm{Q}(8,\ 40)$

따라서 한 직선 위에 있는 세 점 R, P, Q의 y좌표가 각각 0, 10, 40이므로 점 P는 선분 RQ를 $\underbrace{1:3}_{(10-0):(40-10)=1:3}$으로 내분한다.

$\therefore\ n=3$

06 답 ③



$\overline{AB}=3$이고

$\overline{AP}:\overline{BP}=k:(1-k)$, $\overline{BQ}:\overline{CQ}=k:(1-k)$이므로

$\overline{AP}=\overline{BQ}=3k$, $\overline{BP}=3-3k$이다.

$\overline{AP}=3\times\dfrac{k}{k+(1-k)}=3k$, $\overline{BP}=3\times\dfrac{1-k}{k+(1-k)}=3-3k$

같은 방법으로

$\overline{AP'}:\overline{BP'}=k:(1+k)$, $\overline{BQ'}:\overline{CQ'}=k:(1+k)$이므로

$\overline{BP'}=\dfrac{3+3k}{2k+1}$, $\overline{BQ'}=\dfrac{3k}{2k+1}$이다.

$\overline{BP'}=3\times\dfrac{1+k}{k+(1+k)}=\dfrac{3+3k}{2k+1}$, $\overline{BQ'}=3\times\dfrac{k}{k+(1+k)}=\dfrac{3k}{2k+1}$

따라서 삼각형 PBQ의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{BQ}\times\sin B$$

$$=\frac{1}{2}\times(3-3k)\times3k\times\sin60^\circ$$

삼각형 P′BQ′의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{BP'}\times\overline{BQ'}\times\sin B$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3+3k}{2k+1}\times\frac{3k}{2k+1}\times\sin60^\circ$$

이때, $S_1:S_2=4:3$이므로

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{3-3k}{\dfrac{3+3k}{(2k+1)^2}}=\frac{(1-k)(2k+1)^2}{1+k}=\frac{4}{3}$$

$3(1-k)(2k+1)^2=4(1+k)$

$3(1-k)(4k^2+4k+1)=4+4k$

$3(-4k^3+3k+1)=4+4k$

$12k^3-5k+1=0$

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 12 & 0 & -5 & 1 \\ & & 6 & 3 & -1 \\ \hline & 12 & 6 & -2 & 0 \end{array}$$

$\left(k-\dfrac{1}{2}\right)(12k^2+6k-2)=0$

$(2k-1)(6k^2+3k-1)=0$

이때, $6k^2+3k-1=0$을 만족시키는 k의 값은 무리수이므로

구하는 유리수 k의 값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

07 답 ⑤

Tip

선분의 내분점, 삼각형의 무게중심을 구하는 공식을 이용해.

두 꼭짓점 B, C를 B(a, b), C(c, d)라 하면

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{6+a+c}{3}, \dfrac{6+b+d}{3}\right)=(5, 3)$이므로

$\dfrac{6+a+c}{3}=5$, $\dfrac{6+b+d}{3}=3$ ⋯ ㉠

한편, 변 CA의 중점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{6+c}{2}, \dfrac{6+d}{2}\right)=(7, 4)$이므로

$\dfrac{6+c}{2}=7$, $\dfrac{6+d}{2}=4$

$\therefore c=8$, $d=2$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=1$, $b=1$

따라서 두 점 B$(1, 1)$, C$(8, 2)$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(8-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

08 답 ①

점 P의 좌표를 P(a, b)라 하면 직선 AB의 방정식은

$y=-x+1$이므로

$b=-a+1$ ⋯ ㉠

$\triangle OAG=\dfrac{1}{6}\triangle OAB$에서 두 삼각형 모두 x축 위의 선분 OA를 한 변으로 하므로 무게중심 G의 y좌표와 꼭짓점 B의 y좌표의 비는 $1:6$이다.

즉, 무게중심 G의 y좌표는 $\dfrac{1}{6}$이다.

또, $\triangle OAP=3\triangle OAG$이므로 점 P의 y좌표 b는

∵ 삼각형 OAP의 무게중심 G

$b=\dfrac{1}{6}\times3=\dfrac{1}{2}$

점 G의 y좌표의 3배야.

이 값을 ㉠에 대입하면 $a=\dfrac{1}{2}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\dfrac{1}{2}$이다.

09 답 18

$\overline{AP}^2=(a-1)^2+(b-5)^2$, $\overline{BP}^2=(a-5)^2+(b-3)^2$,

$\overline{CP}^2=(a-9)^2+(b-4)^2$이므로

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=3a^2-30a+3b^2-24b+157$$

$$=3(a-5)^2+3(b-4)^2+34$$

즉, $a=5$, $b=4$일 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 34이므로

P$(5, 4)$

삼각형 ABC의 무게중심 G(c, d)의 좌표를 구하면

$c=\dfrac{1+5+9}{3}=5$, $d=\dfrac{5+3+4}{3}=4$

이므로 G$(5, 4)$

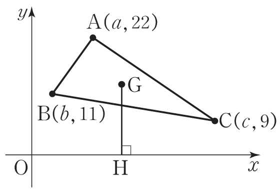
삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되는 점 P는 무게중심 G와 같아.

$\therefore a+b+c+d=5+4+5+4=18$

10 답 ②

Tip
직선 l을 좌표축으로 설정하면 점과 직선 사이의 거리가 그 점의 좌표가 돼.

그림과 같이 직선 l을 x축으로 잡으면 세 꼭짓점의 좌표를 $\mathrm{A}(a,\ 22)$, $\mathrm{B}(b,\ 11)$, $\mathrm{C}(c,\ 9)$라 할 수 있다.

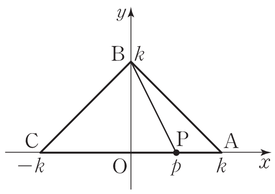


이때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 y좌표는 $\dfrac{22+11+9}{3}=\dfrac{42}{3}=14$이므로 $\overline{\mathrm{GH}}=14$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심과 직선 l 사이의 거리는 14이다.

11 답 50

그림과 같이 좌표평면 위에 $\mathrm{A}(k,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ k)$, $\mathrm{C}(-k,\ 0)$, $\mathrm{P}(p,\ 0)$이라 하자.



$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{CP}}=(k-p)(k+p)$
$=k^2-p^2$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=k^2+p^2$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{CP}}+\overline{\mathrm{BP}}^2=2k^2=100$

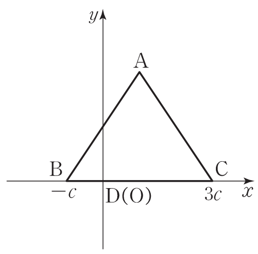
$\therefore k^2=50$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\times 2k\times k=k^2=50$

12 답 7

그림과 같이 변 BC를 x축으로, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표축을 잡고 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)$, $\mathrm{C}(3c,\ 0)$이라 하면



$3\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$

$=3\{(a+c)^2+b^2\}+(a-3c)^2+b^2$

$=4(a^2+b^2+3c^2)$ ⋯ ㉠

$p(\overline{\mathrm{AD}}^2+q\overline{\mathrm{BD}}^2)=p(a^2+b^2+qc^2)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=7$

실전 유형 훈련

문제편 p.12~17

13 답 ⑤

직선 $y=2x+1$ 위의 점 P의 x좌표를 a라 하면 $\mathrm{P}(a,\ 2a+1)$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서

$\sqrt{(a+1)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(2a)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $-2a+2=-4a+4$, $2a=2$

$\therefore a=1$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ 3)$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(1+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$

14 답 20

이차함수 $f(x)=x^2-ax$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 서로 다른 두 교점의 좌표를 $\mathrm{P}(\alpha,\ 2\alpha+1)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ 2\beta+1)$이라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-(a+2)x-1=0$의 서로 다른 두 실근이다.

즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+2$, $\alpha\beta=-1$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(2\beta+1-2\alpha-1)^2}=\sqrt{5(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}=\sqrt{5(a+2)^2+20}\geq\sqrt{20}$

따라서 $a=-2$일 때, 두 교점 사이의 거리의 최솟값이 m이므로

$m^2=20$

15 답 672

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 구하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(5-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(2-5)^2+(a-1)^2}=\sqrt{9+(a-1)^2}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(2-0)^2+(a-2)^2}=\sqrt{4+(a-2)^2}$

(i) $\overline{\mathrm{AB}}$가 빗변일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$이어야 하므로

$26=9+(a-1)^2+4+(a-2)^2$에서

$26=2a^2-6a+18$, $2a^2-6a-8=0$

$a^2-3a-4=0$, $(a-4)(a+1)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=-1$ ⋯ ㉠

(ii) $\overline{\mathrm{BC}}$가 빗변일 때, $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$이어야 하므로

$9+(a-1)^2=26+4+(a-2)^2$에서

$-2a+10=-4a+34$, $2a=24$ $\therefore a=12$ ⋯ ㉡

(iii) $\overline{\mathrm{CA}}$가 빗변일 때, $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$이어야 하므로

$4+(a-2)^2=26+9+(a-1)^2$에서

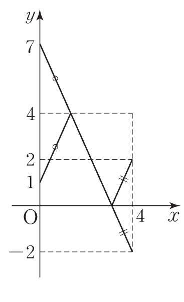
$-4a+8=-2a+36$, $-2a=28$ $\therefore a=-14$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은

$4\times(-1)\times 12\times(-14)=672$

16 답 97

빛이 이동한 거리를 대칭이동하면 그림과 같이 두 점 $(0,\ 7)$과 $(4,\ -2)$ 사이의 거리임을 알 수 있다.



따라서 빛이 이동한 거리 d는

$d=\sqrt{(4-0)^2+\{(-2)-7\}^2}$

$=\sqrt{16+81}=\sqrt{97}$

$\therefore d^2=97$

17 답 4

선분 AB의 중점을 M이라 하면 중점 M의 좌표는 M$(4, 5)$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}^2=(4-2)^2+(5-3)^2=8$

삼각형 PAB에서 중선정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{PM}}^2)=2(8+\overline{\mathrm{PM}}^2)$

이므로 $\overline{\mathrm{PM}}$의 길이가 최소일 때 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 값이 최소가 된다.

따라서 점 P가 중점 M에서 x축에 내린 수선의 발일 때 $\overline{\mathrm{PM}}$의 길이는 최소가 되므로 점 P의 좌표가 P$(4, 0)$, 즉 $a=4$일 때 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 값이 최소가 된다.

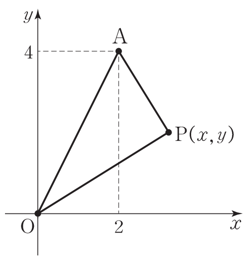
일등급 UP

＊ 중선정리의 활용

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$ 꼴의 식이 주어지면 먼저 중선정리를 생각하자.
또한, 한 점과 직선 사이의 최단거리는 그 점에서 직선에 내린 수선의 발까지의 거리임을 기억한다.

18 답 ④

O$(0, 0)$, A$(2, 4)$, P(x, y)라 하면



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x^2+y^2}$, $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$

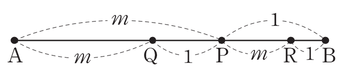
$\therefore \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{AP}}\geq\overline{\mathrm{OA}}$

등호는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 성립해.

따라서 구하는 최솟값은

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

19 답 ⑤



선분 AB의 길이를 a라 하면

점 P는 선분 AB를 $m:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+1}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{ma}{m+1}$, $\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{1}{m+1}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{a}{m+1}$

점 Q는 선분 AP를 $m:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=\dfrac{m}{m+1}\times\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+1}\times\dfrac{ma}{m+1}=\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^2a$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{m+1}\times\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{m+1}\times\dfrac{ma}{m+1}=\dfrac{m}{(m+1)^2}a$

점 R는 선분 PB를 $m:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{m}{m+1}\times\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{m}{m+1}\times\dfrac{a}{m+1}=\dfrac{m}{(m+1)^2}a$

$\overline{\mathrm{BR}}=\dfrac{1}{m+1}\times\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{1}{m+1}\times\dfrac{a}{m+1}=\left(\dfrac{1}{m+1}\right)^2a$

ㄱ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{m}{(m+1)^2}a$ (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{BR}}=\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^2a\times\left(\dfrac{1}{m+1}\right)^2a=\dfrac{m^2}{(m+1)^4}a^2$

$\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{m}{(m+1)^2}a\times\dfrac{m}{(m+1)^2}a=\dfrac{m^2}{(m+1)^4}a^2$

$\therefore \overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}$ (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{AQ}}=4\overline{\mathrm{BR}}$에서

$\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^2a=4\left(\dfrac{1}{m+1}\right)^2a$

$m^2=4 \qquad \therefore m=2$ ($\because m>0$) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20 답 ②

마름모의 성질에 의하여 직선 AE는 $\angle$BAC의 이등분선이다.

삼각형의 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{EC}}$

즉, $\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{EC}}=4:2=2:1$

$\overline{\mathrm{BE}}+\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{BC}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=2$, $\overline{\mathrm{EC}}=1$이다.

한편, 세 삼각형 ABC, DBE, FEC는 닮은 꼴이므로

$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{DBE}:\triangle\mathrm{FEC}=3^2:2^2:1^2=1:\dfrac{4}{9}:\dfrac{1}{9}$

$\triangle\mathrm{ABC}=S$에서 $\triangle\mathrm{DBE}=\dfrac{4S}{9}$, $\triangle\mathrm{FEC}=\dfrac{S}{9}$

$\therefore S'=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{DBE}-\triangle\mathrm{FEC}=S-\dfrac{4S}{9}-\dfrac{S}{9}=\dfrac{4S}{9}$

$\therefore \dfrac{S'}{S}=\dfrac{4}{9}$

21 답 37

조건에 의하여

점 P는 선분 AB를 삼등분하는 점 중 하나이고,

직선 m은 두 선분 OA, OB 중 하나를 이등분하는 점이다.

(i) 직선 l이 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 지날 때,

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는 P$(4, -3)$이다.

선분 OB의 중점을 Q라 하면 직선 m이 두 점 P$(4, -3)$과 Q$\left(0, -\dfrac{9}{2}\right)$를 지나야 하므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(4-0)^2+\left(-3+\dfrac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{16+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{73}{4}}=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$

(ii) 직선 l이 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 지날 때,

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는 P$(2, -6)$이다.

선분 OA의 중점을 R라 하면 직선 m이 두 점 P$(2, -6)$과 R$(3, 0)$을 지나야 하므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{(2-3)^2+(-6-0)^2}=\sqrt{37}$

따라서 직선 m이 삼각형 OAB와 만나는 두 점 사이의 거리의

최댓값 $\underline{M=\sqrt{37}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\frac{73}{4}<\overline{\mathrm{PR}}^2=37$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}<\overline{\mathrm{PR}}$

$\therefore M^2=37$

22 답 ④

$\overline{\mathrm{AD}}$가 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}$

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3-1)^2+(1-4)^2}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=5:4$

즉, 점 $\mathrm{D}(a, b)$는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $5:4$로 내분하는 점이다.

$$a=\frac{5\times1+4\times(-3)}{5+4}=-\frac{7}{9}$$

$$b=\frac{5\times0+4\times1}{5+4}=\frac{4}{9}$$

$$\therefore a+b=-\frac{7}{9}+\frac{4}{9}=-\frac{1}{3}$$

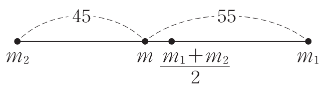
23 답 ④

두 마을 주민 전체의 평균 나이 m은

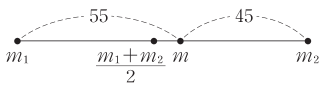
$$m=\frac{45m_1+55m_2}{45+55}=\frac{45m_1+55m_2}{100}$$

이므로 그림과 같이 수직선에서 m_2와 m_1이 각각 나타내는 두 점을 잇는 선분을 $45:55$로 내분하는 점의 좌표와 같다.

한편, $\frac{m_1+m_2}{2}$는 두 점을 이은 선분의 중점을 나타낸다.



[그림 1]



[그림 2]

ㄱ. $m_1>m_2$이면 [그림 1]과 같이

$m<\frac{m_1+m_2}{2}$

$\therefore 2m<m_1+m_2$ (참)

ㄴ. $m_1=m_2$이면 $m=\frac{m_1+m_2}{2}=m_1$

$\therefore m=m_1=m_2$ (참)

ㄷ. $m_1<m_2$이면 [그림 2]와 같이

$m>\frac{m_1+m_2}{2}$이므로

$2m>m_1+m_2$

$\therefore m-m_1>m_2-m$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24 답 45

실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{BD}}=t$라 하면

점 D는 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

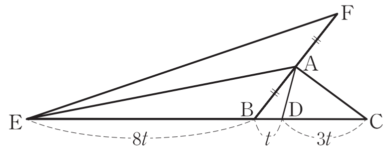
$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=1:3$에서 $\overline{\mathrm{DC}}=3t$

조건 (가)에서 점 B는 선분 CE를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{EB}}=2\overline{\mathrm{BC}}=8t$

조건 (나)에서 점 A는 선분 BF의 중점이므로

$\overline{\mathrm{BF}}=2\overline{\mathrm{AB}}$이다.



이때, 삼각형 ABD의 넓이를 S라 하면

$\underline{\triangle\mathrm{ABD}=\triangle\mathrm{ADF}=S}$

두 삼각형의 밑변의 길이와 높이가 각각 같다.

$\underline{\triangle\mathrm{AEB}=\triangle\mathrm{AEF}=8\times\triangle\mathrm{ABD}=8S}$

(높이가 같은 삼각형의 넓이의 비)=(삼각형의 밑변의 길이의 비)

이므로 $\underline{\triangle\mathrm{DEF}}=18S$이고,

$S+S+8S+8S$

$\triangle\mathrm{ADC}=3\times\triangle\mathrm{ABD}=3S$이므로 $\triangle\mathrm{ABC}=4S$이다.

$$\therefore \frac{\triangle\mathrm{DEF}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\frac{18S}{4S}=\frac{9}{2}$$

따라서 $k=\frac{9}{2}$이므로 $10k=45$

25 답 10

삼각형 ABC의 무게중심을 $\mathrm{G}(a, b)$라 하면

삼각형 ABC와 세 변의 중점을 연결한 삼각형 LMN의 무게중심은 일치하므로 무게중심 $\mathrm{G}(a, b)$에 대하여

$$\because \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_1+x_3}{2}}{3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$a=\frac{1+5+3}{3}=3,\ b=\frac{-2+3+2}{3}=1$$

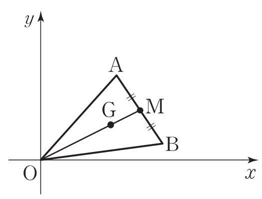
$\therefore a^2+b^2=3^2+1^2=10$

26 답 ①

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 $\mathrm{M}(a, b)$, 삼각형 OAB의 무게중심을 G라 하면

점 G는 $\overline{\mathrm{OM}}$을 $2:1$로 내분하므로

$$\mathrm{G}\left(\frac{2a+0}{2+1}, \frac{2b+0}{2+1}\right)=(4, 2)$$



$\frac{2a}{3}=4$, $\frac{2b}{3}=2$에서

$a=6$, $b=3$이므로 $\mathrm{M}(6, 3)$

따라서 삼각형 OAB의 한 변 AB는 $\mathrm{M}(6, 3)$을 반드시 지난다.

27 답 13

두 점 A, B의 좌표를 $A\left(a, \frac{1}{2}a\right)$, $B(b, 3b)$라 하면

삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{a+b}{3}, \frac{\frac{1}{2}a+3b}{3}\right)=(3, 4)$$

$a+b=9$, $a+6b=24$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=3$

$\therefore$ $A(6, 3)$, $B(3, 9)$

이때, 두 점 A, B는 직선 $y=mx+n$ 위의 점이므로

$3=6m+n$, $9=3m+n$

두 식을 연립하여 풀면 $m=-2$, $n=15$

$\therefore$ $m+n=-2+15=13$

28 답 ③

$P(x, 0)$, $Q(0, y)$라 하면

$\underbrace{\frac{0+x+0}{3}=-1,\ \frac{0+0+y}{3}=1}_{\text{삼각형 OPQ의 무게중심 G의 좌표}}$에서

$x=-3$, $y=3$ $\quad\therefore$ $P(-3, 0)$, $Q(0, 3)$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서 $(a+3)^2+4^2=(1+3)^2+b^2$이므로

$(a+3)^2=b^2$ ⋯ ㉠

$\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$에서 $a^2+(4-3)^2=1^2+(b-3)^2$이므로

$a^2=(b-3)^2$ ⋯ ㉡

㉠－㉡을 하면 $(a+3)^2-a^2=b^2-(b-3)^2$

$6a+9=6b-9$, $6a-6b=-18$ $\quad\therefore$ $a-b=-3$

29 답 5

삼각형 PAB의 무게중심 G_1의 좌표는

$$\left(\frac{0+6+a}{3}, \frac{0+0+b}{3}\right)=\left(\frac{6+a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

삼각형 PBC의 무게중심 G_2의 좌표는

$$\left(\frac{6+3+a}{3}, \frac{0+6+b}{3}\right)=\left(\frac{9+a}{3}, \frac{6+b}{3}\right)$$

삼각형 PCA의 무게중심 G_3의 좌표는

$$\left(\frac{3+0+a}{3}, \frac{6+0+b}{3}\right)=\left(\frac{3+a}{3}, \frac{6+b}{3}\right)$$

이므로 삼각형 $G_1G_2G_3$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{6+a}{3}+\frac{9+a}{3}+\frac{3+a}{3}}{3}, \frac{\frac{b}{3}+\frac{6+b}{3}+\frac{6+b}{3}}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{6+a}{3}, \frac{4+b}{3}\right) \cdots ㉠$$

한편, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{0+6+3}{3}, \frac{0+0+6}{3}\right)=(3, 2) \cdots ㉡$$

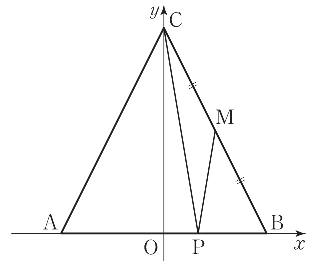
㉠과 ㉡이 서로 같으므로 $\frac{6+a}{3}=3$, $\frac{4+b}{3}=2$에서

$a=3$, $b=2$ $\quad\therefore$ $a+b=5$

30 답 ④

그림과 같이 변 AB를 포함하는 직선을 x축, 이 변의 수직이등분선을 y축으로 잡고 변 BC의 중점을 M이라 하면 삼각형 PBC에서 중선정리에 의하여

$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{PM}^2)=2(2^2+\overline{PM}^2)$



이때, $\overline{PM}^2$의 값은 점 M에서 $\overline{AB}$ 위의 점 P까지의 거리가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

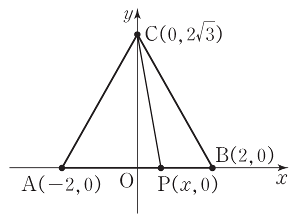
즉, 점 M에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발이 P일 때, $\overline{PM}$의 길이는 최솟값 $\underbrace{\sqrt{3}}_{\frac{1}{2}\overline{OC}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\right)=\sqrt{3}}$을 가지므로

$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=2(2^2+\overline{PM}^2)\geq 2\times\{4+(\sqrt{3})^2\}=14$

다른 풀이 : 점 P의 좌표 이용하기

그림과 같이 변 AB를 포함하는 직선을 x축, 이 변의 수직이등분선을 y축으로 잡으면 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2\sqrt{3})$이고,

점 P의 좌표를 $(x, 0)$이라 하면 $-2\leq x\leq 2$이고



$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=(x-2)^2+\{x^2+(2\sqrt{3})^2\}$

$=2x^2-4x+16=2(x-1)^2+14$

따라서 $x=1$일 때, $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 14이다.

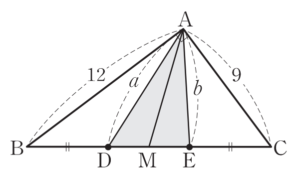
31 답 125

삼각형 ABC는 변 BC가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=12^2+9^2=15^2$ $\quad\therefore$ $\overline{BC}=15$

이때, 빗변 BC의 중점을 M이라 하면 점 M은 삼각형 ABC의 외심이므로 $\overline{BM}=\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{15}{2}$이고,

$\overline{DM}=\overline{EM}=\frac{1}{3}\overline{BM}=\frac{5}{2}$



따라서 삼각형 ADE에서 중선정리에 의하여

$$a^2+b^2=2(\overline{AM}^2+\overline{DM}^2)=2\left\{\left(\frac{15}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}$$

$$=2\times\frac{250}{4}=125$$

다른 풀이 : 두 삼각형 ABE, ADC에서 중선정리 이용하기

$\overline{BC}=15$이므로 $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=5$

삼각형 ABE에서 점 D는 변 BE의 중점이므로

$12^2+b^2=2(a^2+5^2)$ ⋯ ㉠

또, 삼각형 ADC에서 점 E는 변 DC의 중점이므로

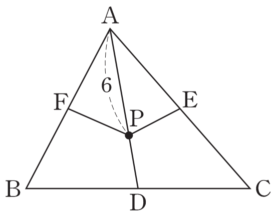
$a^2+9^2=2(b^2+5^2)$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$a^2+b^2+12^2+9^2=2a^2+2b^2+4\times5^2$

$\therefore a^2+b^2=12^2+9^2-4\times5^2=144+81-100=125$

32 답 3



세 점 D, E, F가 각각 세 변 BC, CA, AB의 중점이므로

세 삼각형 PAB, PBC, PCA에서 중선정리에 의하여 다음이 성립한다.

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PF}^2+\overline{AF}^2)$

$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{PD}^2+\overline{BD}^2)$

$\overline{PC}^2+\overline{PA}^2=2(\overline{PE}^2+\overline{CE}^2)$

세 식을 변끼리 모두 더한 다음 2로 나누면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{AF}^2+\overline{BD}^2+\overline{CE}^2$

$\therefore \overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$

$=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2-(\overline{AF}^2+\overline{BD}^2+\overline{CE}^2)$

이때,

$$\overline{AF}^2+\overline{BD}^2+\overline{CE}^2=\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2+\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2+\left(\frac{\overline{CA}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2}{4}$$

이므로 그 값이 일정하다.

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소일 때 $\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$의 값도 최소이므로 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이야.

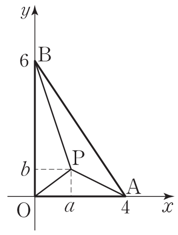
삼각형의 무게중심의 성질에 의하여

$\overline{PA}:\overline{PD}=2:1$

세 점 A, P, D는 한 직선 위에 있어.

$\therefore \overline{PD}=\frac{1}{2}\overline{PA}=3$

33 답 ③



그림과 같이 꼭짓점 O를 원점, 변 OA를 x축의 양의 방향으로 하는 좌표축을 잡고 점 P의 좌표를 P$(a,\ b)$라 하면

$\triangle POA:\triangle POB=1:3$에서

$\left(\frac{1}{2}\times4\times b\right):\left(\frac{1}{2}\times6\times a\right)=1:3$

$\therefore a=2b$ ⋯ ㉠

$\triangle PAB=\triangle OAB-\triangle POA-\triangle POB$

$=12-(3a+2b)$

이므로 $\triangle POB:\triangle PAB=3:2$에서

$\left(\frac{1}{2}\times6\times a\right):\{12-(3a+2b)\}=3:2$

$3a\times2=(12-3a-2b)\times3$

양변을 3으로 나누면 $2a=12-3a-2b$

$\therefore 5a+2b=12$ ⋯ ㉡

이때, ㉠을 ㉡에 대입하면

$12b=12\qquad\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=2$

따라서 점 P의 좌표는 P$(2,\ 1)$이므로 $\overline{OP}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

다른 풀이 : 두 삼각형 POA, POB의 넓이를 직접 구하기

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times4\times6=12$이고

$\triangle POA:\triangle PAB:\triangle POB=1:2:3$이므로

$\triangle POA=12\times\frac{1}{1+2+3}=2$,

$\triangle PAB=12\times\frac{2}{1+2+3}=4$,

$\triangle POB=12\times\frac{3}{1+2+3}=6$

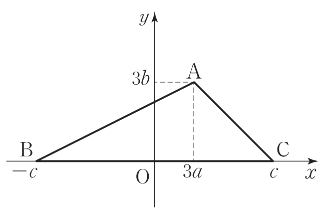
꼭짓점 O를 원점, 변 OA를 x축의 양의 방향으로 하는 좌표축을 잡고 점 P의 좌표를 P$(a,\ b)$라 하면

$\triangle POA=\frac{1}{2}\times4\times b=2b=2$에서 $b=1$

$\triangle POB=\frac{1}{2}\times6\times a=3a=6$에서 $a=2$

따라서 P$(2,\ 1)$이므로 $\overline{OP}=\sqrt{5}$

34 답 3



그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하고 변 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표축을 잡고

A$(3a,\ 3b)$, B$(-c,\ 0)$, C$(c,\ 0)$이라 하면 무게중심의 좌표는 G$(a,\ b)$가 된다.

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

$=(3a+c)^2+9b^2+4c^2+(3a-c)^2+9b^2$

$=18a^2+18b^2+6c^2$

$=3(6a^2+6b^2+2c^2)$ ⋯ ㉠

$\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2$

$=(3a-a)^2+(3b-b)^2+(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2$

$=6a^2+6b^2+2c^2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)$

$\therefore k=3$

35 답 ③

처음에 A와 B의 위치를 각각 $A(-5, 0)$, $B(0, -4)$라 하면 t시간 후의 A와 B의 위치는 각각 $A(4t-5, 0)$, $B(0, 2t-4)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(4t-5)^2+(2t-4)^2}$

$=\sqrt{20t^2-56t+41}$

$=\sqrt{20\left(t^2-\frac{14}{5}t+\frac{49}{25}-\frac{49}{25}\right)+41}$

$=\sqrt{20\left(t-\frac{7}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}$

따라서 $\frac{7}{5}$시간 후에 A와 B 사이의 거리는 최소가 된다.

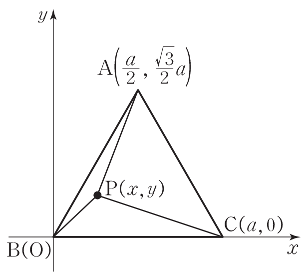
36 답 ②

정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하자.

좌표평면에서 꼭짓점 B를 원점 O의 위치에 놓고

변 BC가 x축의 양의 방향이 되도록 하면

두 점 C, A의 좌표는 각각 $(a, 0)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$이다.



점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}=2\sqrt{3}$, $\overline{PB}=2$, $\overline{PC}=4$이므로

$\overline{PA}^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=12$ ⋯ ㉠

$\overline{PB}^2=x^2+y^2=4$ ⋯ ㉡

$\overline{PC}^2=(x-a)^2+y^2=16$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 x, y를 a로 나타내면

$x=\frac{a}{2}-\frac{6}{a}$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)$

㉢−㉡에서 $-2ax+a^2=12$ $\quad\therefore x=\frac{a^2-12}{2a}=\frac{a}{2}-\frac{6}{a}$

㉠−㉡에서 $-ax+\frac{a^2}{4}-\sqrt{3}ay+\frac{3}{4}a^2=8$

위 식에 $x=\frac{a}{2}-\frac{6}{a}$을 대입하고 y에 대하여 정리하면

$\sqrt{3}ay=-a\left(\frac{a}{2}-\frac{6}{a}\right)+\frac{a^2}{4}+\frac{3}{4}a^2-8=\frac{a^2}{2}-2$

$\therefore y=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)$

이것을 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{a}{2}-\frac{6}{a}\right)^2+\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\right\}^2=4$

$\frac{a^2}{4}-6+\frac{36}{a^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{4}-2+\frac{4}{a^2}\right)=4$

양변에 $12a^2$을 곱하면

$3a^4-72a^2+432+a^4-8a^2+16=48a^2$

$4a^4-128a^2+448=0$

$a^4-32a^2+112=0$

$(a^2-4)(a^2-28)=0$

$\therefore a^2=4$ 또는 $a^2=28$

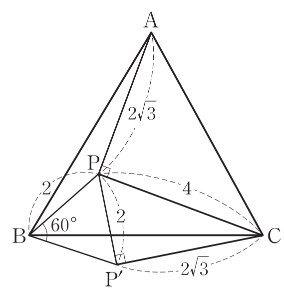
그런데 a는 4보다 커야 하므로

$a^2=28$

$\therefore a=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

다른 풀이 : 특수각의 삼각비 이용하기

그림과 같이 삼각형 PAB를 점 B를 중심으로 시계방향으로 60°만큼 회전한 삼각형을 △P′CB라 하자.



이때, 삼각형 PBP′은 정삼각형이므로

한 각의 크기가 60°인 이등변삼각형은 정삼각형이야.

$\overline{PP'}=2$, $\overline{P'C}=\overline{PA}=2\sqrt{3}$, $\overline{PC}=4$

삼각형 PP′C는 $\angle PP'C=90°$, $\angle CPP'=60°$인 직각삼각형이다.

세 변의 길이의 비가 $1 : \sqrt{3} : 2$이므로 특수각을 가지는 직각삼각형이야.

이때, $\angle APB=\angle CP'B=90°+60°=150°$이고

$\angle BPC=60°+60°=120°$이므로

$\angle APC=360°-150°-120°=90°$

즉, 삼각형 APC는 변 AC가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{AC}^2=\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=(2\sqrt{3})^2+4^2=12+16=28$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{7}$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $2\sqrt{7}$이다.

37 답 27

직선 $y=2x+m$ $(m\geq0)$이 곡선 $y=x^2$과 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면 a, b는 이차방정식 $x^2-2x-m=0$의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=2$, $ab=-m$ ⋯ ㉠

이때, $A(a,\ 2a+m)$, $B(b,\ 2b+m)$이고 두 점 A, B 사이에 있는 곡선 위의 점 C의 좌표를 $C(p,\ q)$라 하면

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(1,\ 3)$이므로

$\dfrac{a+b+p}{3}=1$ ⋯ ㉡, $\dfrac{2a+m+2b+m+q}{3}=3$ ⋯ ㉢

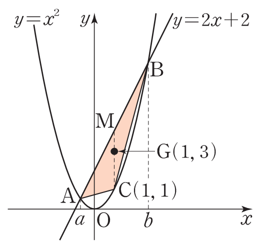
㉠, ㉡에서

$\dfrac{a+b+p}{3}=\dfrac{2+p}{3}=1$ $\quad\therefore p=1$

점 C는 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로 $q=p^2=1$ ---------- ⓐ

㉠, ㉢에서 $\dfrac{2a+m+2b+m+q}{3}=\dfrac{4+2m+1}{3}=3$

$\therefore m=2$ ---------- ⓑ



선분 AB의 중점을 M이라 하면

세 점 C, G, M이 한 직선 위에 있고 $\overline{CG}=2$이므로

직선 $x=1$

$\overline{CM}=3$

이때, $\overline{CG}$는 y축에 평행하므로

삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{CM}\times|b-a|$ ⋯ ㉣

이때,

$|b-a|=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{4+8}$ ($\because$ ㉠) $=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

이므로 ㉣에서 $S=\dfrac{1}{2}\times3\times2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

$\therefore S^2=(3\sqrt{3})^2=27$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 점 C의 좌표를 구한다. ---------- [40%]

ⓑ m의 값을 구한다. ---------- [20%]

ⓒ S^2의 값을 구한다. ---------- [40%]

38 답 21

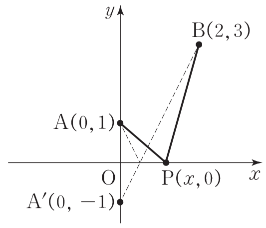
$A(0,\ 1)$, $B(2,\ 3)$, $P(x,\ 0)$이라 하면

점 P는 x축 위의 점이야.

$\overline{AP}=\sqrt{x^2+1}$, $\overline{BP}=\sqrt{(x-2)^2+9}$

$\therefore f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+9}=\overline{AP}+\overline{BP}$

즉, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값이 $f(x)$의 최솟값이다. ---------- ⓐ



점 $A(0,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(0,\ -1)$이라 하면 $f(x)$의 최솟값은

$\overline{A'B}=\sqrt{2^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore a=2\sqrt{5}$

이때, 직선 A′B의 방정식은

$y+1=\dfrac{3-(-1)}{2-0}x$ $\quad\therefore y=2x-1$

따라서 $y=2x-1=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$이므로 $b=\dfrac{1}{2}$ ---------- ⓑ

x절편을 구하기 위해 $y=0$을 대입했어.

$\therefore a^2+2b=20+1=21$ ---------- ⓒ

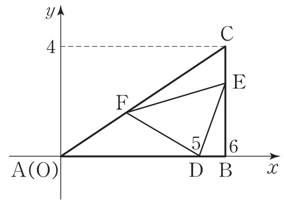
| 채점기준 |

ⓐ $f(x)$를 좌표평면 위의 두 선분의 길이의 합으로 나타낸다. ---------- [40%]

ⓑ a, b의 값을 각각 구한다. ---------- [40%]

ⓒ a^2+2b의 값을 구한다. ---------- [20%]

39 답 5



점 A를 원점으로 하는 좌표축을 도입하여 $A(0,\ 0)$, $B(6,\ 0)$, $C(6,\ 4)$라 하자.

이때, 점 D는 변 AB를 $5:1$로 내분하는 점이므로 $D(5,\ 0)$이다.

여기서 $E(6,\ b)$라 하고, 점 F의 x좌표를 a라 하면

직선 AC의 방정식이 $y=\dfrac{2}{3}x$이므로 $F\left(a,\ \dfrac{2}{3}a\right)$ ---------- ⓐ

삼각형 DEF의 무게중심 G′의 좌표는

$\left(\dfrac{5+6+a}{3},\ \dfrac{0+b+\frac{2}{3}a}{3}\right)=\left(\dfrac{a+11}{3},\ \dfrac{2a+3b}{9}\right)$

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{0+6+6}{3},\ \dfrac{0+0+4}{3}\right)=\left(4,\ \dfrac{4}{3}\right)$

삼각형 DEF의 무게중심과 삼각형 ABC의 무게중심이 서로 같으므로 $\dfrac{a+11}{3}=4$, $\dfrac{2a+3b}{9}=\dfrac{4}{3}$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=\dfrac{10}{3}$이므로

$E\left(6,\ \dfrac{10}{3}\right)$ ---------- ⓑ

$\therefore \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\dfrac{\frac{10}{3}}{4-\frac{10}{3}}=\dfrac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}}=5$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 삼각형 ABC와 삼각형 DEF를 좌표평면 위에 나타낸다. ---------- [40%]

ⓑ 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심이 서로 같음을 이용하여 점 E의 좌표를 구한다. ---------- [40%]

ⓒ $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$의 값을 구한다. ---------- [20%]

고난도 도전 문제

문제편 p.18~19

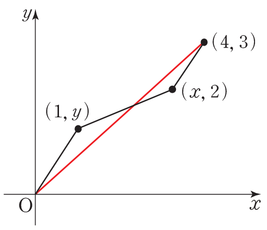
40 답 2

주어진 식을 정리하면

$$\sqrt{1+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}+\sqrt{x^2-8x+17}$$
$$=\sqrt{1^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+1^2}$$
$$=\sqrt{(1-0)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(2-y)^2}$$
$$+\sqrt{(4-x)^2+(3-2)^2}$$

이다.

즉, 그림과 같이 네 점 $(0, 0)$, $(1, y)$, $(x, 2)$, $(4, 3)$을 차례로 이은 세 선분의 길이의 합과 같다.



세 선분의 길이의 합은 네 점이 한 직선 위에 있을 때 최소가 된다.

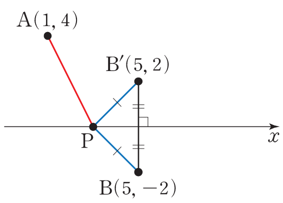
따라서 두 점 $(1, y)$, $(x, 2)$가 두 점 $(0, 0)$, $(4, 3)$을 이은 직선 $y=\frac{3}{4}x$ 위에 있을 때 최소이므로

$x=\frac{8}{3}$, $y=\frac{3}{4}$

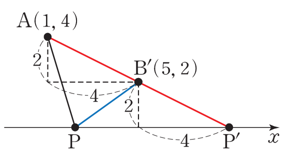
$\therefore xy=2$

41 답 101

그림과 같이 점 B를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 B′이라 하면 x축 위의 모든 점 P에 대하여 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이다.



즉, $\overline{AP}-\overline{BP}=\overline{AP}-\overline{B'P}$이므로 $\overline{AP}-\overline{B'P}$가 최대일 조건을 구해보자.



삼각형에서 두 변의 길이의 합은 항상 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$\overline{AP}\le\overline{B'P}+\overline{AB'}$, 즉 $\overline{AP}-\overline{B'P}\le\overline{AB'}$이고,

등호는 세 점 A, B′, P가 한 직선 위에 있을 때, 즉 세 점 A, B′, P로 삼각형을 만들 수 없을 때 성립해.

$\overline{AB'}=\sqrt{(5-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}-\overline{BP}=\overline{AP}-\overline{B'P}$의 최댓값 $M=2\sqrt{5}$이고

최대일 때 점 P를 점 P′이라 하면 점 P′은 직선 AB 위의 점이므로 직선 AB와 x축의 교점이다.

그림에서 점 P′의 x좌표는 점 B′의 x좌표에 4를 더한 값이므로

$a=5+4=9$

$\therefore M^2+a^2=(2\sqrt{5})^2+9^2=20+81=101$

42 답 ③

세 점 P_2, P_3, P_4의 좌표를 각각

(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)라 하면

네 점 P_1, P_2, P_3, P_4는 각각

$\overline{A_4P_4}$, $\overline{A_1P_1}$, $\overline{A_2P_2}$, $\overline{A_3P_3}$의 중점이므로

$x_1=\frac{x_4}{2}$, $y_1=\frac{y_4+2}{2}$

$\therefore x_4=2x_1$, $y_4=2y_1-2$ ⋯ ㉠

$x_2=\frac{x_1}{2}$, $y_2=\frac{y_1}{2}$

$\therefore x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$ ⋯ ㉡

$x_3=\frac{x_2+2}{2}$, $y_3=\frac{y_2}{2}$

$\therefore x_2=2x_3-2$, $y_2=2y_3$ ⋯ ㉢

$x_4=\frac{x_3+2}{2}$, $y_4=\frac{y_3+2}{2}$

$\therefore x_3=2x_4-2$, $y_3=2y_4-2$ ⋯ ㉣

㉠~㉣을 연립하여 풀면

$$x_1=2x_2=2(2x_3-2)$$
$$=4x_3-4=4(2x_4-2)-4$$
$$=8x_4-12=8\times2x_1-12$$
$$=16x_1-12$$

$15x_1=12$ $\quad\therefore x_1=\frac{4}{5}$

같은 방법으로 계산하면

$y_1=2y_2=4y_3=8y_4-8=16y_1-24$

$y_1=16y_1-24$

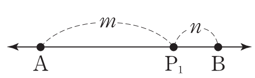
$15y_1=24$ $\quad\therefore y_1=\frac{8}{5}$

$\therefore x_1+y_1=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}=\frac{12}{5}$

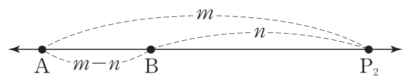
43 답 3

$\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$ $(m>n>0)$이 되는 직선 AB 위의 점 P는 그림과 같이 2가지가 있다.

(i) 점 P가 선분 AB를 $m:n$으로 내분할 때 점 P를 P_1이라 하고,



(ii) 점 B가 선분 AP를 $(m-n):n$으로 내분할 때 점 P를 P_2라
점 P가 선분 AB를 $m:n$으로 외분할 때
하자.



선분 AB의 길이를 l이라 하고

$\overline{P_1A}=ma$, $\overline{P_1B}=na$라 하면

$ma+na=l$에서 $a=\dfrac{l}{m+n}$

$\therefore \overline{P_1B}=na=\dfrac{nl}{m+n}$

$\overline{P_2A}=mb$, $\overline{P_2B}=nb$라 하면

$mb-nb=l$에서 $b=\dfrac{l}{m-n}$

$\therefore \overline{P_2B}=nb=\dfrac{nl}{m-n}$

이때, $\overline{P_1P_2}=\overline{P_1B}+\overline{P_2B}=\sqrt{3}\times\overline{AB}$에서

$\dfrac{nl}{m+n}+\dfrac{nl}{m-n}=\sqrt{3}l$

$\dfrac{2mn}{m^2-n^2}=\sqrt{3}$

$\sqrt{3}m^2-2mn-\sqrt{3}n^2=0$

양변을 n^2으로 나누면

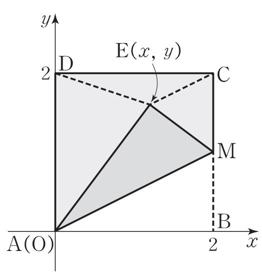
$\sqrt{3}\left(\dfrac{m}{n}\right)^2-2\left(\dfrac{m}{n}\right)-\sqrt{3}=0$

$\left(\sqrt{3}\dfrac{m}{n}+1\right)\left(\dfrac{m}{n}-\sqrt{3}\right)=0$

이때, $m>n>0$이므로 $\dfrac{m}{n}>1$이다.

따라서 $\dfrac{m}{n}=\sqrt{3}$이고 $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2=3$이다.

44 답 ④



그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$를 각각 x축, y축의 양의 방향이 되도록 좌표축을 잡고, E(x, y)라 하자.

$\overline{AE}=\sqrt{x^2+y^2}=2$
정사각형의 한 변의 길이

$\therefore x^2+y^2=4$ ⋯ ㉠

한편, 사각형 ABCD의 넓이가 4이고

$\triangle ABM=\triangle AEM=1$이므로
$\frac{1}{2}\times2\times1=1$

$\triangle AED+\triangle ECD+\triangle EMC=4-2=2$

$\dfrac{1}{2}\times2\times x+\dfrac{1}{2}\times2\times(2-y)+\dfrac{1}{2}\times1\times(2-x)=2$

양변에 2를 곱하여 정리하면

$2x+4-2y+2-x=4$

$\therefore x-2y+2=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{6}{5}$, $y=\dfrac{8}{5}$ ($\because x>0, y>0$)
$x=2y-2$를 ㉠에 대입하면 $(2y-2)^2+y^2=4$, $5y^2-8y=0$
$0<y<2$이므로 $y=\frac{8}{5}$, $x=2y-2=\frac{6}{5}$

따라서 $E\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$이므로

$\overline{CE}=\sqrt{\left(2-\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(2-\dfrac{8}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

45 답 58

조건 (나)를 해석해보자.

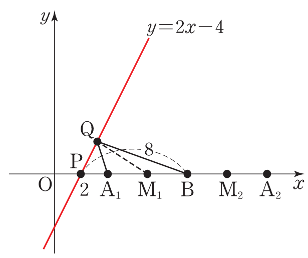
삼각형에서 두 변의 길이의 합은 항상 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$\overline{AP}\le\overline{BP}+\overline{AB}$
등호는 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있을 때, 즉 세 점 A, B, P로 삼각형을 만들 수 없을 때 성립해.

즉, $\overline{AP}-\overline{BP}\le\overline{AB}=6$ ($\because$ 조건(가))이므로

그림과 같이 세 점 A, B, P가 한 직선(x축) 위에 있을 때

$\overline{PB}=8$이다.



직선 $y=2x-4$ 위의 점 P의 좌표가 $(2, 0)$이므로 조건 (나)에 의하여 점 B의 좌표는 $B(10, 0)$이다.

이때, $\overline{AB}=6$이므로 점 A의 좌표는 $A(4, 0)$ 또는 $A(16, 0)$이다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABQ에서 중선정리에 의해

$\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2=2(\overline{QM}^2+\overline{AM}^2)$ ⋯ ㉠

이고, $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=3$으로 일정하므로 $\overline{QM}$의 길이가 최소일 때

$\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2$의 값이 최소이다.

즉, $A(4, 0)$이고 $M(7, 0)$이다.

이때, $\overline{QM}$의 최솟값은 점 M과 직선 $2x-y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\overline{QM}\ge\dfrac{|2\times7-0-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2\ge2\{(2\sqrt{5})^2+3^2\}$ ($\because$ ㉠)

$=2\times29=58$

따라서 구하는 최솟값은 58이다.

46 답 ②

여객선의 진행로를 y축, 화물선의 진행로를 x축이라 하고, 화물선의 속도를 시속 v km라 하자.

여객선이 화물선을 처음 발견하였을 때의 여객선의 위치를 $P(0, -a)$ $(a>0)$이라 하고, 이때의 화물선의 위치를 원점 O라 하자.

또한, 여객선의 속도는 시속 12 km, 화물선의 속도는 시속 v km 이므로 15분 동안 여객선은 3 km, 화물선은 $\frac{v}{4}$ km 진행한다.

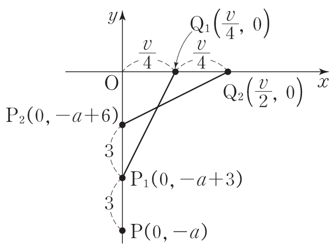
(거리)=(속력)×(시간)이므로

여객선 : $12\times\frac{15}{60}=3$ (km), 화물선 : $v\times\frac{15}{60}=\frac{v}{4}$ (km)

첫 15분 후 여객선과 화물선의 위치를 각각 P_1, Q_1이라 하면

$P_1(0,\ -a+3)$,

$Q_1\left(\frac{1}{4}v,\ 0\right)$이고



$\overline{P_1Q_1}=10$이므로

$\overline{P_1Q_1}^2=\left(\frac{1}{4}v\right)^2+(a-3)^2$

$=10^2$ ⋯ ㉠

다음 15분 후 여객선과 화물선의 위치를 각각 P_2, Q_2라 하면

$P_2(0,\ -a+6)$, $Q_2\left(\frac{1}{2}v,\ 0\right)$이고 $\overline{P_2Q_2}=13$이므로

$\overline{P_2Q_2}^2=\left(\frac{1}{2}v\right)^2+(a-6)^2=13^2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=11(\because a>0)$, $v=24$

㉠에서 $v^2=16\{100-(a-3)^2\}$을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{4}\times16\{100-(a-3)^2\}+(a-6)^2=169$

$400-4(a-3)^2+(a-6)^2=169$

$231=4(a-3)^2-(a-6)^2=3a^2-12a$

$3a^2-12a-231=0$, $a^2-4a-77=0$

$(a-11)(a+7)=0$

따라서 좌표평면에서 여객선의 처음 위치 P는 $P(0,\ -11)$이고, 여객선이 처음 위치 P에서 원점 O까지 이동한 시간은

$\frac{11}{12}$시간이므로 같은 시간 동안 화물선이 이동한 거리는

(시간)=(거리)÷(속력)=$\frac{11}{12}$(시간)

$24\times\frac{11}{12}=22$ (km)이다.

즉, 여객선이 원점에 위치할 때 화물선은 $(22,\ 0)$에 위치하므로 여객선의 정동쪽에 화물선이 있을 때 두 배 사이의 거리는 22 km이다.

47 답 ③

이차함수 $y=2(x-k)^2-1$의 그래프와 직선 $y=1$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만나므로

$2(x-k)^2-1=1$, $(x-k)^2=1$

$x=k-1$ 또는 $x=k+1$

$\therefore A(k-1,\ 1)$, $B(k+1,\ 1)$

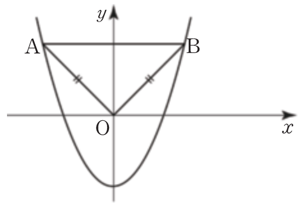
$\overline{AB}=(k+1)-(k-1)=2$

삼각형 AOB가 이등변삼각형이 되는 경우는 다음과 같이 3가지가 있다.

(i) $\overline{OA}=\overline{OB}$인 경우

$\sqrt{(k-1)^2+1^2}=\sqrt{(k+1)^2+1^2}$

$(k-1)^2=(k+1)^2$ $\quad\therefore k=0$

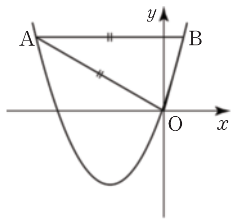


(ii) $\overline{OA}=\overline{AB}$인 경우

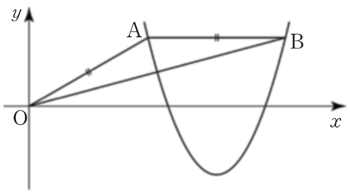
$\sqrt{(k-1)^2+1^2}=2$, $k^2-2k-2=0$

$\therefore k=1-\sqrt{3}$ 또는 $k=1+\sqrt{3}$

① $k=1-\sqrt{3}$인 경우



② $k=1+\sqrt{3}$인 경우

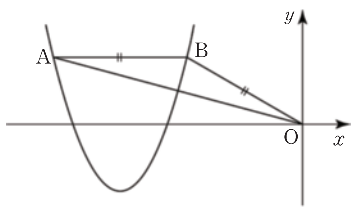


(iii) $\overline{OB}=\overline{AB}$인 경우

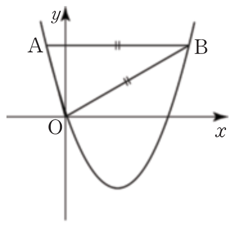
$\sqrt{(k+1)^2+1^2}=2$, $k^2+2k-2=0$

$\therefore k=-1-\sqrt{3}$ 또는 $k=-1+\sqrt{3}$

① $k=-1-\sqrt{3}$인 경우



② $k=-1+\sqrt{3}$인 경우



(i), (ii), (iii)에 의하여 k의 최댓값 $M=1+\sqrt{3}$

$\therefore (M-1)^2=3$

02 직선의 방정식

핵심 유형 연습 문제편 p.22~24

01 답 ②

> Tip
> 평행사변형의 성질을 이용하여 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구해.

$\overline{OB}$의 중점을 D라 하면 $D\left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right)=(2, 3)$

그런데 평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치하므로 $\overline{AC}$의 중점도 D이다. 두 점 A, C를 지나는 직선과 두 점 A, D를 지나는 직선은 같으므로 두 점 $A(3, 2)$, $D(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{3-2}{2-3}(x-3)$, $y-2=-(x-3)$ $\quad\therefore y=-x+5$

따라서 $a=-1$, $b=5$이므로 $a+b=4$

02 답 50

점 B의 좌표를 $B(a, b)$라 하면

조건 (나)에서 선분 BA의 중점의 x좌표는 0이므로

$\frac{a+2}{2}=0$ $\quad\therefore a=-2$

직선 PB는 y축에 평행하다.
$x=-2$

조건 (가)에 의하여 $\overline{PA}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이고,

조건 (나)에서 $b<0$이므로 $\overline{PB}=3-b=5$ $\quad\therefore b=-2$

따라서 점 B의 좌표는 $B(-2, -2)$이므로

직선 l의 기울기 $m=\frac{0-(-2)}{2-(-2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

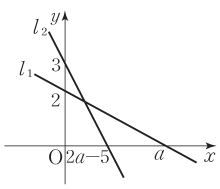
$\therefore 100m=100\times\frac{1}{2}=50$

03 답 7

두 직선을

$l_1: \frac{x}{a}+\frac{y}{2}=1$,

$l_2: \frac{x}{2a-5}+\frac{y}{3}=1$이라 하자.



직선 l_1의 y절편은 2,

직선 l_2의 y절편은 3이므로

두 직선이 제1사분면에서 만나려면 그림과 같이

원점과 직선 l_1의 x절편 사이에 직선 l_2의 x절편이 있어야 한다.

직선 l_1의 x절편은 a, 직선 l_2의 x절편은 $2a-5$이므로

$0<2a-5<a$

$0<2a-5$에서 $\frac{5}{2}<a$이고, $2a-5<a$에서 $a<5$

따라서 $\frac{5}{2}<a<5$이므로 자연수 a는 3, 4이고 그 합은 7이다.

04 답 ①

> Tip
> 두 점 A, B의 좌표를 $A(3a, 0)$, $B(0, 3b)$ 등으로 설정하면 삼등분하는 점의 좌표를 나타내기 좋아.

직선 l 위의 두 점 A, B의 좌표를 각각

$A(3a, 0)$, $B(0, 3b)$ $(a>0, b>0)$라 하면

직선 l의 기울기는 $-\frac{3b}{3a}=-\frac{b}{a}$이다.

점 C는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이고,

점 D는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

점 C의 좌표는 $(2a, b)$이고 점 D의 좌표는 $(a, 2b)$이다.

따라서 직선 OC의 기울기는 $\frac{b}{2a}$, 직선 OD의 기울기는 $\frac{2b}{a}$이므로

$\frac{b}{2a}\times\frac{2b}{a}=4$에서 $\frac{b^2}{a^2}=4$

$\therefore \frac{b}{a}=2$ ($\because a>0, b>0$)

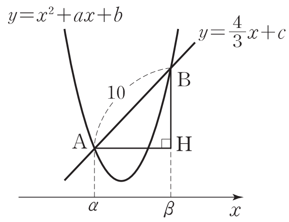
따라서 직선 l의 기울기 $-\frac{b}{a}=-2$

05 답 ②

그림과 같이 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와

직선 $y=\frac{4}{3}x+c$가 만나는 두 점을 A, B라 하고,

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하자.



그림에서 방정식 $x^2+ax+b=\frac{4}{3}x+c$의 두 근은 α, β이므로

$\beta-\alpha=\overline{AH}$

이때, 직선 $y=\frac{4}{3}x+c$의 기울기가 $\frac{4}{3}$이므로

삼각형 AHB에서 $\overline{AH}:\overline{BH}:\overline{AB}=3:4:5$

따라서 $\overline{AH}:10=3:5$이므로 $\overline{AH}=6$

$\therefore \beta-\alpha=\overline{AH}=6$

06 답 2

직선 $y=\frac{3}{2}x$의 기울기에서 $\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}=\frac{3}{2}$

직선 $y=\frac{1}{3}x$의 기울기에서 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{\overline{AP}\times\overline{BP}}{\overline{CP}\times\overline{DP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}\times\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\frac{2}{3}\times3=2$

07 답 ④

> **Tip**
> 일반형으로 표현된 두 직선의 위치 관계를 이용해.

세 직선 $ax+by=1$ … ㉠, $(b+3)x+(a+3)y=1$ … ㉡,
$(b-1)x+(a-1)y=1$ … ㉢에 대하여

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행하므로 $\dfrac{b+3}{a}=\dfrac{a+3}{b}\neq 1$

$a^2+3a-b^2-3b=0$

$(a+b)(a-b)+3(a-b)=0$

$(a-b)(a+b+3)=0$ $\quad\therefore a=b$ 또는 $a+b=-3$

이때, $a=b$이면 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행하므로 수직이라는 사실에 모순이다. $\dfrac{b-1}{a}=\dfrac{a-1}{b}\neq 1$

$\therefore a+b=-3$ … ㉣

한편, 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 수직이므로

$a(b-1)+b(a-1)=0$
두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면 $aa'+bb'=0$

$2ab=a+b$ $\quad\therefore ab=-\dfrac{3}{2}$ ($\because$ ㉣)

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9+3=12$

08 답 5

선분 OA가 지름이므로 $\angle\text{OPA}=90^\circ$

즉, 직선 PO와 직선 PA의 기울기의 곱은 -1이다.

이때, 직선 PO의 기울기가 2이므로 직선 PA의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 직선 PA의 방정식은 $y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$
점 P$(1, 2)$를 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$인 직선의 방정식

$x-1=-2y+4$, 즉 $x+2y=5$이므로

직선 PA의 x절편은 5이다.

$\therefore \overline{\text{OA}}=5$

09 답 ⑤

ㄱ. $t=1$일 때, 점 P$(2, 0)$에서 직선 AP의 기울기는
$\dfrac{0-2}{2-0}=-1$이므로 직선 l의 기울기는 1이다. (참)

ㄴ. 직선 AP의 기울기는 $\dfrac{0-2}{2t-0}=-\dfrac{1}{t}$이므로
직선 l의 기울기는 t이고
선분 AP의 중점의 좌표는 $(t, 1)$이므로 직선 l의 방정식은
$y-1=t(x-t)$
즉, $l: y=tx-t^2+1$ … ㉠이고
이 직선이 점 $(3, 3)$을 지나므로 $t^2-3t+2=0$에서
$(t-1)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=2$
따라서 직선 l의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 주어진 부등식에 ㉠을 대입하면 $tx-t^2+1\le x^2+k$
즉, $x^2-tx+t^2+k-1\ge 0$ … ㉡
㉡이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
x에 대한 이차방정식 $x^2-tx+t^2+k-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=t^2-4(t^2+k-1)\le 0$에서 $3t^2+4(k-1)\ge 0$
즉, $t^2>0$이므로 $4(k-1)\ge 0$ $\quad\therefore k\ge 1$
따라서 실수 k의 최솟값은 1이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 ③

> **Tip**
> $(2x-y+1)+m(x+y+2)=0$으로 나타내어지는 직선이 항상 지나는 점과 불가능한 기울기를 생각해.

ㄱ. 직선 $l: (2x-y+1)+m(x+y+2)=0$은 두 직선
$2x-y+1=0$과 $x+y+2=0$의 교점을 지나는 직선이므로
두 직선 $2x-y+1=0$, $x+y+2=0$을 연립하여 풀면
$x=-1$, $y=-1$
따라서 직선 l은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, -1)$을 지난다. (참)

ㄴ. 【반례】 $m=0$이면 직선 l은 직선 $2x-y+1=0$이 되어
직선 $2x-y=0$과 평행하다.
따라서 만나지 않는 경우도 존재한다. (거짓)

ㄷ. 직선 l을 x, y에 대하여 정리하면
$(m+2)x+(m-1)y+(2m+1)=0$ … ㉠
직선 l과 직선 $x+y=0$ … ㉡은
일치하거나 평행하거나 한 점에서 만난다.
두 직선이 일치 또는 평행하다고 가정하면 ㉠, ㉡에서
$\dfrac{m+2}{1}=\dfrac{m-1}{1}$
즉, $2=-1$이 되어 이를 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.
따라서 직선 l은 m의 값에 관계없이 항상 직선 $x+y=0$과 한 점에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

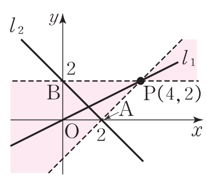
11 답 1

직선 l_1이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 P라 하자.

직선의 방정식 $l_1: mx-y-4m+2=0$을 m에 대하여 정리하면 $m(x-4)-(y-2)=0$이므로 직선 l_1은 m의 값에 관계없이 항상 점 P$(4, 2)$를 지난다.

직선 $l_2: x+y-2=0$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

A$(2, 0)$, B$(0, 2)$이다.



두 직선 l_1, l_2가 제1사분면에서 만나려면 그림과 같이 직선 l_1이 선분 AB와 만나야 하므로 직선 l_1의 기울기가 직선 PB의 기울기보다 크고 직선 PA의 기울기보다 작아야 한다.

직선 PA는 직선 l_1이 점 A$(2,\ 0)$을 지날 때이므로

$2m-4m+2=0 \qquad \therefore m=1 \cdots$ ㉠

직선 PB는 직선 l_1이 점 B$(0,\ 2)$를 지날 때이므로

$-2-4m+2=0 \qquad \therefore m=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0<m<1$

따라서 $a=0$, $b=1$이므로 $b-a=1$

12 답 8

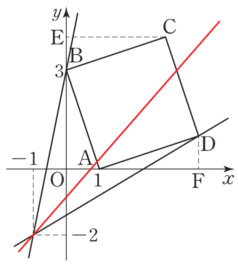
점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 E,

점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 F라 할 때,

세 삼각형 OAB, EBC, FDA는 모두 합동이다.

직각을 낀 두 변의 길이가 1, 3이야.

따라서 점 D의 좌표는 $(4,\ 1)$, 점 C의 좌표는 $(3,\ 4)$이다.



한편, 직선 $mx-2y+m-4=0$의 기울기는 $\frac{m}{2}$이고,

식을 m에 대하여 정리하면 $m(x+1)-2(y+2)=0$이므로

m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -2)$를 지난다.

점 $(-1,\ -2)$와 점 D$(4,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3}{5}$이고,

점 $(-1,\ -2)$와 점 B$(0,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는 5이므로

직선 $mx-2y+m-4=0$이 정사각형 ABCD와 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{3}{5}<\frac{m}{2}<5$이어야 한다.

$\therefore \frac{6}{5}<m<10$

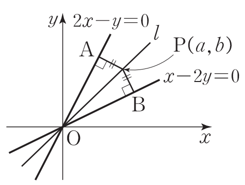
따라서 자연수 m의 개수는 $2,\ 3,\ \cdots,\ 9$의 8이다.

13 답 9

Tip

점 P와 두 직선 사이의 거리가 같음을 이용해.

점 P$(a,\ b)$가 직선 $x+y=6$ 위의 점이므로 $a+b=6 \cdots$ ㉠



그림과 같이 점 P에서 두 직선 $2x-y=0$, $x-2y=0$에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면

$\overline{PA}=\frac{|2a-b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2a-b|}{\sqrt{5}}$

$\overline{PB}=\frac{|a-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$

이때, $\overline{PA}=\overline{PB}$에서

$\frac{|2a-b|}{\sqrt{5}}=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$, 즉 $|2a-b|=|a-2b|$

$2a-b=a-2b$ 또는 $2a-b=-(a-2b)$

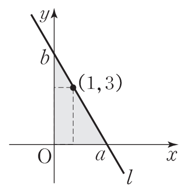
$\therefore b=-a$ 또는 $b=a$

(i) $b=-a$이면 ㉠에서 $0=6$이 되어 성립하지 않는다.

(ii) $b=a$이면 ㉠에서 $2a=6 \qquad \therefore a=3,\ b=3$

(i), (ii)에 의하여 $ab=9$

14 답 ③



직선 l의 x절편을 a, y절편을 b라 하면

직선 l의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1 \qquad \therefore b+3a=ab \cdots$ ㉠

직선 l과 x축, y축의 양의 방향으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}ab=6 \qquad \therefore ab=12 \cdots$ ㉡

$b=\frac{12}{a}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{12}{a}+3a=12$이므로 $3a^2-12a+12=0$

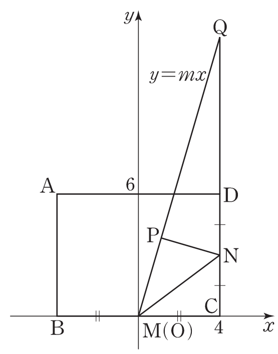
$3(a-2)^2=0 \qquad \therefore a=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=6$

따라서 직선 l의 방정식은 $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$, 즉 $3x+y-6=0$이므로

원점과 직선 l 사이의 거리는 $\frac{|-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

15 답 199



점 M을 원점, 변 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표축을 설정하면 $\mathrm{C}(4,\ 0)$, $\mathrm{N}(4,\ 3)$, $\mathrm{D}(4,\ 6)$이다.
직선 MP의 기울기를 $m\ (m>0)$이라 하면
직선 MP의 방정식은 $y=mx$
이때, 직선 MN은 직선 $y=mx$와 x축이 이루는 예각의 이등분선이므로
점 $\mathrm{N}(4,\ 3)$과 직선 $y=mx$ 사이의 거리는
점 $\mathrm{N}(4,\ 3)$과 x축 사이의 거리 3과 같다.
즉, 직선 $mx-y=0$과 점 $\mathrm{N}(4,\ 3)$ 사이의 거리
$\dfrac{|4m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=3$, $|4m-3|=3\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면
$16m^2-24m+9=9m^2+9$
$7m^2-24m=0$, $m(7m-24)=0$
$m>0$이므로 $m=\dfrac{24}{7}$
따라서 직선 MP의 방정식은 $y=\dfrac{24}{7}x$이므로
점 Q의 좌표는 $\left(4,\ \dfrac{96}{7}\right)$
$\triangle\mathrm{MCQ}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\overline{\mathrm{CQ}}=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{96}{7}=\dfrac{192}{7}$
따라서 $a=192$, $b=7$이므로 $a+b=199$

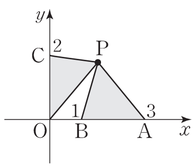
16 답 ②

Tip
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 a, b를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있어.

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 직선 $x+2y=1$ 위에 있으므로 $a+2b=1$ ⋯ ㉠
점 $\mathrm{P}(a+b,\ a-b)$를 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면
$a+b=x$, $a-b=y$
두 식을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{x+y}{2}$, $b=\dfrac{x-y}{2}$ ⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$\dfrac{x+y}{2}+(x-y)=1$에서 $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}y=1$
따라서 $p=\dfrac{3}{2}$, $q=-\dfrac{1}{2}$이므로
$p-q=\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2$

17 답 ②

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x,\ y)\ (x>0,\ y>0)$라 하면
$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\times2\times y=y$



$\triangle\mathrm{PCO}=\dfrac{1}{2}\times2\times x=x$
이때, $\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PCO}=3$이므로
$y+x=3$
$\therefore\ y=-x+3\ (0<x<3)\ (\because\ x>0,\ y>0)$
이때, $\overline{\mathrm{OP}}$의 최솟값은 원점과 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\dfrac{|-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$일 때 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이야.

18 답 ③

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면
두 직선 $2x-y+2=0$, $x+2y+4=0$에 대하여
$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{|2a-b+2|}{\sqrt{5}}$, $\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{|a+2b+4|}{\sqrt{5}}$
$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PR}}$이므로
$\dfrac{|2a-b+2|}{\sqrt{5}}=2\times\dfrac{|a+2b+4|}{\sqrt{5}}$
$|2a-b+2|=2|a+2b+4|$
$|A|=|B|$일 때 $A=B$ 또는 $A=-B$야.
$2a-b+2=2a+4b+8$ 또는 $2a-b+2=-2a-4b-8$이므로
$b=-\dfrac{6}{5}$ 또는 $4a+3b+10=0$
따라서 점 P가 나타내는 자취의 방정식은
$y=-\dfrac{6}{5}$ 또는 $4x+3y+10=0$이고 이 중 x축에 평행하지 않은 직선 l의 방정식은 $4x+3y+10=0$이다.
따라서 원점과 직선 l 사이의 거리는
$\dfrac{|10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{10}{5}=2$이다.

실전 유형 훈련

문제편 p.25~31

19 답 ②

$ax+by+c=0$에서 직선 l_1 : $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$,
$ax+cy+b=0$에서 직선 l_2 : $y=-\dfrac{a}{c}x-\dfrac{b}{c}$,
$bx+ay+c=0$에서 직선 l_3 : $y=-\dfrac{b}{a}x-\dfrac{c}{a}$
이라 하고 세 직선 l_1, l_2, l_3의 기울기와 y절편의 부호를 조사하자.

직선	기울기	y절편
l_1	$-\dfrac{a}{b}$, 즉 $-ab$	$-\dfrac{c}{b}$, 즉 $-bc$
l_2	$-\dfrac{a}{c}$, 즉 $-ac$	$-\dfrac{b}{c}$, 즉 $-bc$
l_3	$-\dfrac{b}{a}$, 즉 $-ab$	$-\dfrac{c}{a}$, 즉 $-ac$

주어진 세 직선 중 $\underbrace{\text{두 직선의 기울기는 양수}}_{l_1\text{과 }l_3}$이고,

$\underbrace{\text{두 직선의 } y\text{절편은 양수}}_{l_1\text{과 }l_2}$이므로 $-ab>0$, $-bc>0$이다.

$\therefore ab<0$, $ac>0$, $bc<0$

한편, 직선 $bx+cy+a=0$, 즉 $y=-\dfrac{b}{c}x-\dfrac{a}{c}$에서

기울기는 $-\dfrac{b}{c}>0$, y절편은 $-\dfrac{a}{c}<0$이므로

직선 $bx+cy+a=0$으로 가장 알맞은 것은 ②이다.

20 답 ②

두 점 A$(3,\ 17)$, B$(48,\ 281)$을 잇는 선분 AB의 방정식은

$$y-17=\underbrace{\frac{281-17}{48-3}}_{\frac{264}{45}=\frac{88}{15}}(x-3)$$

$\therefore y=\dfrac{88}{15}(x-3)+17\ (3\le x\le 48)$

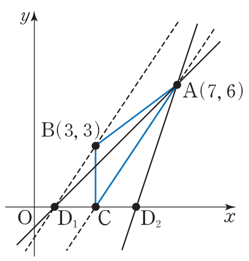
이때, y가 정수이려면 $x-3$이 0 또는 15의 배수이어야 한다.

즉, $3\le x\le 48$에서 이를 만족시키는 x의 값은 $x=3,\ 18,\ 33,\ 48$로 모두 4개이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 점의 좌표는

$(3,\ 17)$, $(18,\ 105)$, $(33,\ 193)$, $(48,\ 281)$로 모두 4개이다.

21 답 250



조건 (가)에서 직선 AD의 x절편이 a이므로 D$(a,\ 0)$

삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ADC의 넓이가 같게 하는 x축 위의 점 D는 그림과 같이 점 C의 왼쪽과 오른쪽에 각각 하나씩 존재한다.

그 점을 차례로 D_1, D_2라 하자.

(i) $a<3$일 때,

조건 (나)에 의하여 직선 BD_1은 직선 AC와 평행하므로

직선 BD_1의 기울기는 직선 AC의 기울기와 같다.

$\dfrac{3-0}{3-a}=\dfrac{6-0}{7-3}$에서 $\dfrac{3}{3-a}=\dfrac{6}{4}$

$3-a=2\qquad \therefore a=1$

$\therefore D_1(1,\ 0)$

이때, 직선 AD_1의 방정식은

$y=\dfrac{6-0}{7-1}(x-1)=x-1$, 즉 $x-y=1$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로 $a^2+b^2=2$

(ii) $a>3$일 때,

조건 (나)에 의하여 점 C$(3,\ 0)$이 선분 D_1D_2의 중점이면 성립하므로 $D_2(5,\ 0)$

이때, 직선 AD_2의 방정식은

$y=\dfrac{6-0}{7-5}(x-5)=3x-15$, 즉 $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{15}=1$

따라서 $a=5$, $b=-15$이므로 $a^2+b^2=250$

(i), (ii)에서 a^2+b^2의 최댓값은 250이다.

22 답 75

두 직선의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$l_1: y=\dfrac{2}{a}x+\dfrac{2}{a}$, $l_2: y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{b}{2}$ ⋯ ㉠

이므로 두 직선 l_1, l_2가 y축과 만나는 두 점 A, B의 좌표는

A$\left(0,\ \dfrac{2}{a}\right)$, B$\left(0,\ -\dfrac{b}{2}\right)$이다.

조건 (가)에서 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

$\dfrac{2}{a}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1\qquad \therefore a=1$

$\therefore$ A$(0,\ 2)$, B$\left(0,\ -\dfrac{b}{2}\right)$

이때, $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면 M$\left(0,\ 1-\dfrac{b}{4}\right)$이고

㉠에 $a=1$을 대입한 후 연립하여

두 직선의 교점 C의 좌표를 구하면

$2x+2=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{b}{2}$에서 $\dfrac{5}{2}x=-\dfrac{1}{2}(b+4)$

$x=-\dfrac{1}{5}(b+4)$, $y=-\dfrac{2}{5}(b-1)$

$\therefore$ C$\left(-\dfrac{1}{5}(b+4),\ -\dfrac{2}{5}(b-1)\right)$

$\underbrace{\text{직선 } l\text{의 기울기는 } \overline{CM}\text{의 기울기와 같으므로}}_{\text{삼각형 ABC의 무게중심은 한 중선인 } \overline{CM} \text{ 위에 있어.}}$

직선 l의 기울기 m은

$$m=\frac{\left(1-\frac{b}{4}\right)+\frac{2}{5}(b-1)}{\frac{1}{5}(b+4)}=\frac{\frac{4-b}{4}+\frac{2b-2}{5}}{\frac{b+4}{5}}$$

$$=\frac{5(4-b)+4(2b-2)}{4(b+4)}=\frac{3b+12}{4(b+4)}=\frac{3(b+4)}{4(b+4)}=\frac{3}{4}$$

$\therefore 100am=100\times1\times\dfrac{3}{4}=75$

23 답 ②

$l_1: y=\dfrac{4}{3}x$, $l_2: y=\dfrac{1}{2}x$이므로

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{1}{\overline{AB}}}{\frac{1}{\overline{CD}}}=\frac{\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}}{\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}}=\frac{(l_1\text{의 기울기})}{(l_2\text{의 기울기})}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}$$

24 답 ②

양수 a, c에 대하여 $\mathrm{A}(a,\ 3a)$, $\mathrm{C}\left(c,\ \frac{2}{3}c\right)$라 하면

$\mathrm{B}\left(a,\ \frac{2}{3}c\right)$, $\mathrm{D}(c,\ 3a)$

∵ 직사각형 ABCD의 네 변은 모두 좌표축에 평행해.

세 점 O, B, D는 일직선 위에 있으므로

$\dfrac{\frac{2}{3}c}{a}=\dfrac{3a}{c}$에서 $\dfrac{c^2}{a^2}=3\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$

$(\overline{\mathrm{OB}}$의 기울기$)=(\overline{\mathrm{OD}}$의 기울기$)$

$\therefore \dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ \left(\because \dfrac{a}{c}>0\right)$

따라서 직선 BD의 기울기는 $\dfrac{3a}{c}=3\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

$=(\overline{\mathrm{OD}}$의 기울기$)$

25 답 ③

두 점 A, B의 좌표를 $\mathrm{A}(k,\ 0)$, $\mathrm{B}(2k,\ 0)$이라 하면

∵ 점 A가 선분 OB의 중점

직선 AD의 기울기가 -4이므로 $\mathrm{D}(0,\ 4k)$

한편, 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\triangle\mathrm{OAD}=\triangle\mathrm{OBC}$ (∵ □OAPC는 공통)

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OC}}$

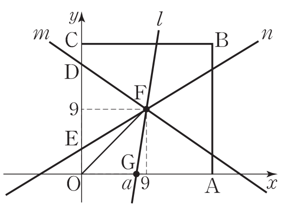
$\dfrac{1}{2}\times k\times 4k=\dfrac{1}{2}\times 2k\times\overline{\mathrm{OC}}$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{OC}}=2k$

따라서 $\mathrm{C}(0,\ 2k)$이므로 직선 BC의 기울기는

$\dfrac{2k-0}{0-2k}=-1$

26 답 106

두 직선 m, n이 y축과 만나는 점을 각각 D, E라 하고 점 $(9,\ 9)$를 F라 하자.



정사각형 OABC의 넓이가 $18^2=324$이므로

삼각형 DEF의 넓이는 $\dfrac{1}{6}\times 324=54$

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times 9=54$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{DE}}=12$

직선 l이 x축과 만나는 점을 G라 하면 사각형 OGFE의 넓이 54는 삼각형 OEF와 삼각형 OGF의 넓이의 합과 같으므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OE}}\times 9+\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OG}}\times 9=54$, $\overline{\mathrm{OE}}+\overline{\mathrm{OG}}=12$이다.

$\overline{\mathrm{OG}}=a$이므로

$\overline{\mathrm{OE}}=12-\overline{\mathrm{OG}}=12-a$, $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OE}}+12=24-a$

$\therefore \mathrm{D}(0,\ 24-a)$, $\mathrm{E}(0,\ 12-a)$

직선 m은 두 점 D, F를 지나므로 직선 m의 기울기는 $\dfrac{a-15}{9}$

직선 n은 두 점 E, F를 지나므로 직선 n의 기울기는 $\dfrac{a-3}{9}$

두 직선 m과 n의 기울기의 곱은

$\dfrac{a-15}{9}\times\dfrac{a-3}{9}=\dfrac{a^2-18a+45}{81}=\dfrac{(a-9)^2-36}{81}$

이때, $6\le a\le 10$이므로 $a=6$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{3}$,

$a=9$와 가장 떨어져 있을 때, 최댓값을 가지므로

최댓값은 $\dfrac{(6-9)^2-36}{81}=\dfrac{-27}{81}=-\dfrac{1}{3}$

$a=9$일 때 최솟값 $-\dfrac{4}{9}$를 갖는다.

$\therefore \alpha=-\dfrac{1}{3}$, $\beta=-\dfrac{4}{9}$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=\dfrac{1}{9}+\dfrac{16}{81}=\dfrac{25}{81}$이므로

$p+q=81+25=106$

27 답 ⑤

두 직선 $(a-1)x+ay=1$, $4x+(a+3)y=2$에 대하여

ㄱ. $a=3$이면 $\dfrac{a-1}{4}=\dfrac{a}{a+3}=\dfrac{1}{2}$이므로 두 직선은 일치한다.

$\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{6}$ (참)

ㄴ. $a=-1$이면 $\dfrac{a-1}{4}=\dfrac{a}{a+3}\ne\dfrac{1}{2}$이므로 두 직선은 평행하다.

$\dfrac{-2}{4}=\dfrac{-1}{2}$

따라서 두 직선은 만나지 않는다. (참)

ㄷ. $a=6$이면 $\dfrac{a-1}{4}\ne\dfrac{a}{a+3}$이므로 두 직선은 한 점에서 만난다.

$\dfrac{5}{4}\ne\dfrac{6}{9}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

28 답 ④

두 직선 $ax+y+1=0$, $x+by+c=0$이 모두 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$a+3+1=0$ $\quad\therefore a=-4$ … ㉠

$1+3b+c=0$ $\quad\therefore c=-3b-1$ … ㉡

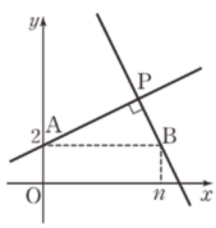
또, 두 직선이 서로 수직이므로

$a\times 1+1\times b=0$ $\quad\therefore b=4$ (∵ ㉠)

㉡에서 $c=-3\times 4-1=-13$

$\therefore a+b+c=(-4)+4+(-13)=-13$

29 답 4



직선 AP의 기울기는 $\frac{m-2}{4}$,

직선 BP의 기울기는 $\frac{m-2}{4-n}$이고

두 직선 AP와 BP가 서로 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.

즉, $\frac{m-2}{4} \times \frac{m-2}{4-n} = -1$ ⋯ ㉠

세 점 $A(0, 2)$, $B(n, 2)$, $P(4, m)$을 꼭짓점으로 하는

삼각형 ABP의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+n+4}{3}, \frac{2+2+m}{3}\right) = \left(\frac{n+4}{3}, \frac{m+4}{3}\right) = (3, k)$이므로

$\frac{n+4}{3} = 3 \qquad \therefore n=5$

$\frac{m+4}{3} = k$ ⋯ ㉡

㉠에 $n=5$를 대입하면 $(m-2)^2=4=2^2$

$m-2=\pm 2$

$\therefore m=4$ 또는 $m=0$

㉡에서 $m=4$이면 $k=\frac{8}{3}$, $m=0$이면 $k=\frac{4}{3}$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=4$이다.

30 답 88

두 직선 $4x+3y-12=0$, $ax-3y+b=0$이 평행하므로

$\frac{4}{a} = \frac{3}{-3} \qquad \therefore a=-4$

직선 $4x+3y-12=0$, 즉 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$의 x절편과 y절편이 각각

3, 4이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$이다.

같은 방법으로 직선 $-4x-3y+b=0$, 즉

$\frac{4x}{b}+\frac{3y}{b}=1$의 x절편과 y절편이 각각 $\frac{b}{4}$, $\frac{b}{3}$이므로

이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{b}{4} \times \frac{b}{3} = \frac{b^2}{24}$이다.

문제 조건에 의해 $\frac{b^2}{24}=3 \qquad \therefore b^2=72$

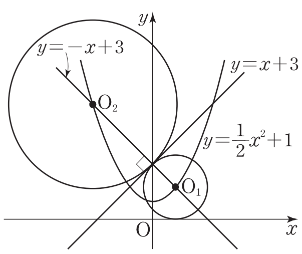
$\therefore a^2+b^2=16+72=88$

31 답 ⑤

점 $(0, 3)$을 지나고 직선 $y=x+3$에 수직인 직선의 방정식은 $y=-x+3$

이 직선이 두 원 C_1, C_2의 중심을 지나므로

직선 $y=-x+3$과 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+1$의 교점이 O_1, O_2이다.



$\frac{1}{2}x^2+1=-x+3$에서 $x^2+2x-4=0$

방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근을 x_1, x_2라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=-2$, $x_1x_2=-4$이고,

두 원의 중심의 좌표는 각각

$O_1(x_1, -x_1+3)$, $O_2(x_2, -x_2+3)$이다.

이때, $\overline{O_1O_2}=r_1+r_2$이므로

$$\begin{aligned}\overline{O_1O_2}^2 &= (x_2-x_1)^2+(-x_2+x_1)^2 \\ &= 2(x_2-x_1)^2 \\ &= 2\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\} \\ &= 2(4+16)=40\end{aligned}$$

$\therefore r_1+r_2=\overline{O_1O_2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

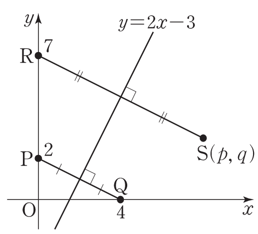
32 답 5

종이가 접힌 자국은 선분 PQ의 수직이등분선이다.

$\overline{PQ}$의 중점의 좌표는 $(2, 1)$이고 $\overline{PQ}$의 기울기는 $\frac{2-0}{0-4}=-\frac{1}{2}$

접힌 선은 점 $(2, 1)$을 지나고 $\underbrace{\text{기울기가 2}}_{\because \overline{PQ}\text{에 수직}}$인 직선이므로

$y-1=2(x-2) \qquad \therefore y=2x-3$



이때, 두 점 $R(0, 7)$과 $S(p, q)$를 지나는 직선의 기울기도

$-\frac{1}{2}$이므로 직선 RS의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+7$이다.

이제 두 직선 $y=2x-3$과 $y=-\frac{1}{2}x+7$의 방정식을 연립하여

교점의 좌표를 구하면 $(4, 5)$

즉, $\overline{RS}$의 중점의 좌표는 $(4, 5)$이다.

따라서 $\frac{p+0}{2}=4$, $\frac{q+7}{2}=5$이므로 $p=8$, $q=3$

$\therefore p-q=5$

33 답 ②

$(a-2)y=(3a-1)x-1$ ⋯ ㉠을 a에 대하여 정리하면

$(y-3x)a+x-2y+1=0$

따라서 이 직선은 a의 값에 관계없이 두 직선

$y-3x=0$, $x-2y+1=0$의 교점 $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$을 지난다.

(i) $a=2$일 때, ㉠은 $x=\frac{1}{5}$로 제2사분면을 지나지 않는다.

(ii) $a \neq 2$일 때, 점 $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$을 지나는 직선 ㉠이 제 2 사분면을

지나지 않을 조건은 (y절편)$=-\frac{1}{a-2} \leq 0$

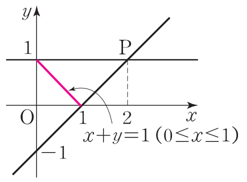
$\therefore a > 2$

(i), (ii)에 의하여 구하는 상수 a의 값의 범위는 $a \geq 2$이다.

따라서 제2사분면을 지나지 않도록 하는 정수 a의 최솟값은 2이다.

34 답 ①

좌표평면에 선분 $x+y=1\ (0 \leq x \leq 1)$을 그리면 그림과 같다.



$mx-y-2m+1=0$에서 $y=m(x-2)+1$ ⋯ ㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 점 $\mathrm{P}(2, 1)$을 지난다.

(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 1)$을 지날 때, $m=0$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(1, 0)$을 지날 때, $m=1$

따라서 한 점에서 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위는

$0 \leq m \leq 1$이므로 $a=0$, $b=1$

$\therefore a+b=1$

35 답 ⑤

ㄱ. 직선 l은 실수 k의 값에 관계없이 두 직선 $3x-y-3=0$, $x-2y+4=0$의 교점인 $(2, 3)$을 지난다. (참)

ㄴ. 두 점 $\mathrm{A}(-2, 2)$, $\mathrm{B}(4, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{5-2}{4-(-2)}(x+2)$

$y-2=\frac{1}{2}(x+2)$, 즉 $x-2y+6=0$ ⋯ ㉠

직선 l을 x, y에 대하여 정리하면

$(3+k)x-(1+2k)y+(4k-3)=0$ ⋯ ㉡

직선 AB와 직선 l이 일치하거나 평행하려면

㉠, ㉡에서 $\frac{3+k}{1}=\frac{1+2k}{2}$

이때, $3=\frac{1}{2}$이 되어 이를 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

따라서 직선 l은 k의 값에 관계없이 항상 직선 AB와 한 점에서 만난다. (참)

ㄷ. 두 직선 ㉠, ㉡이 수직일 조건

$(3+k)+2(1+2k)=0$에서 $5k+5=0$ $\quad \therefore k=-1$

이 값을 ㉡에 대입하면 $2x+y-7=0$ ⋯ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=\frac{8}{5}$, $y=\frac{19}{5}$

즉, 직선 AB와 직선 l은 점 $\left(\frac{8}{5}, \frac{19}{5}\right)$에서 수직으로 만난다.

따라서 $a=\frac{8}{5}$, $b=\frac{19}{5}$이므로 $a+b=\frac{27}{5}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

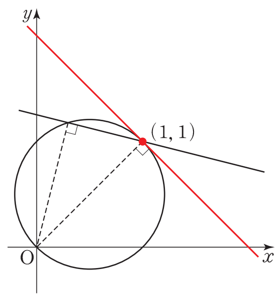
36 답 ②

두 직선 $x+y-2=0$, $x-y=0$의 교점을 구하면 $(1, 1)$이므로

직선 $x+y-2+k(x-y)=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.

원점에서 이 직선에 내린 수선의 발은 원주각의 성질에 의하여

원점과 점 $(1, 1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원 위의 점이다.



따라서 원점과 이 직선 사이의 거리 $f(k)$의 최댓값은 원의 지름의 길이이므로 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이다.

37 답 ⑤

ㄱ. $a=0$일 때, $l : y=2$, $m : x=-2$이므로

두 직선 l과 m은 서로 수직이다. (참)

ㄴ. $a=0$일 때, ㄱ에서 두 직선은 서로 수직이다.

$a \neq 0$일 때, 두 직선 l, m이 평행이 되기 위한 조건은

$\frac{a}{4}=\frac{-1}{a} \neq \frac{a+2}{3a+8}$

이때, $\frac{a}{4}=\frac{-1}{a}$, 즉 $a^2=-4$를 만족시키는 실수 a의 값은

존재하지 않는다. 따라서 평행이 되기 위한 실수 a의 값은

존재하지 않는다. (참)

ㄷ. 두 직선 l, m의 방정식을 a에 관하여 정리하면

$l : a(x+1)-(y-2)=0$,

$m : a(y+3)+4(x+2)=0$

이므로 a의 값에 관계없이 직선 l은 항상 점 $(-1, 2)$를

지나고, 직선 m은 항상 점 $(-2, -3)$을 지난다.

한편, 직선 $5x-y+7=0$은 두 점 $(-1, 2)$, $(-2, -3)$을

모두 지나므로 a의 값에 관계없이 항상 두 직선 l, m과 만난다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

38 답 2

x축 위의 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이라 하면 점 P와 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x-y+4=0$ 사이의 거리가 같으므로

$\dfrac{|a-2\times0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2\times a-0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$에서

$\dfrac{|a+2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2a+4|}{\sqrt{5}}$

즉, $|a+2|=|2a+4|$이므로

$a+2=2a+4$ 또는 $a+2=-(2a+4)$

(i) $a+2=2a+4$일 때, $a=-2$

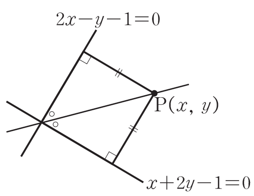
(ii) $a+2=-2a-4$일 때, $a=-2$

$\therefore a=-2$

따라서 $\mathrm{P}(-2,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=2$

39 답 ②

그림과 같이 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 이 점과 두 직선 사이의 거리는 같으므로



$\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$에서

$|2x-y-1|=|x+2y-1|$

즉, $2x-y-1=\pm(x+2y-1)$이므로

$x-3y=0$ 또는 $3x+y-2=0$

이때, 두 직선의 y절편은 각각 0, 2이므로 y절편의 합은 2이다.

40 답 ①

기울기가 -2이면서 이차함수 $y=x^2-2ax+2$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=-2x+k$ (단, k는 실수)라 하면

방정식 $x^2-2ax+2=-2x+k$

즉, $x^2-2(a-1)x+2-k=0$은 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-(2-k)=a^2-2a-1+k=0$

$k=\boxed{-a^2+2a+1}$ (가)

이때, $f(a)$는 두 직선 $y=-2x+k$와 $y=-2x-4a$ 사이의 거리이므로

직선 $y=-2x+k$ 위의 점 $(0,\ k)$와 직선 $2x+y+4a=0$ 사이의 거리는

$f(a)=\dfrac{|k+4a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|-a^2+6a+1|}{\boxed{\sqrt{5}}}$ (나)

$=\dfrac{|-(a-3)^2+10|}{\sqrt{5}}$

따라서 $0<a<6$인 실수 a에 대하여 $f(a)$의 최댓값은 $a=3$일 때

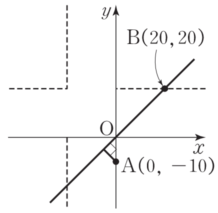
$\dfrac{10}{\sqrt{5}}=\boxed{2\sqrt{5}}$ 이다. (다)

따라서 $g(a)=-a^2+2a+1$, $m=\sqrt{5}$, $n=2\sqrt{5}$이므로

$g\left(\dfrac{n}{m}\right)=g(2)=1$이다.

41 답 ②

그림과 같이 건물의 모서리를 원점 O로 하는 좌표축을 설정하면 $\mathrm{A}(0,\ -10)$, $\mathrm{B}(20,\ 20)$이다.

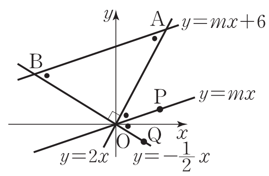


이때, 직선 OB의 방정식은 $y=x$이므로 점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 길이가 움직여야 할 거리의 최솟값이다.

따라서 점 $\mathrm{A}(0,\ -10)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|0+10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=5\sqrt{2}\ (\mathrm{m})$

42 답 ③



두 직선 $y=2x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$의 기울기의 곱이 -1이므로 두 직선은 서로 수직이다.

즉, 삼각형 OAB는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 직각이등변삼각형이다.

그림과 같이 원점을 지나고 직선 $y=mx+6\,(m>0)$에 평행한 직선 $y=mx$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(1,\ m)$과 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x$ 위의 점 Q에 대하여 $\angle\mathrm{POA}=\angle\mathrm{OAB}$ (엇각), $\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{ABO}$ (동위각)

이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 서로 같으므로

$\angle\mathrm{POA}=\angle\mathrm{POQ}$

즉, 직선 $y=mx$는 두 직선 $y=2x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$이 이루는 각을 이등분하는 직선이다.

이때, 각의 이등분선의 성질에 의하여 점 $\mathrm{P}(1,\ m)$과 두 직선 $y=2x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$, 즉 $2x-y=0$, $x+2y=0$ 사이의 거리가

같으므로 $\dfrac{|2-m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|1+2m|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$\therefore |2-m|=|1+2m|$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+8m-3=0$

$(3m-1)(m+3)=0$ $\qquad\therefore m=\dfrac{1}{3}$ 또는 $m=-3$

따라서 $m>0$이므로 $m=\dfrac{1}{3}$

다른 풀이 : 삼각형의 합동 이용하기

두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면 두 삼각형 OAA′, BOB′이 합동이므로 점 A의 x좌표와 점 B의 y좌표가 같다.

RHA 합동

점 A의 x좌표는 두 직선의 방정식 $y=2x$, $y=mx+6$ $(m>0)$을 연립한 $2x=mx+6$에서 $x=\dfrac{6}{2-m}$이고,

점 B의 y좌표는 두 직선의 방정식

$y=-\dfrac{1}{2}x$, $y=mx+6$ $(m>0)$을 연립한

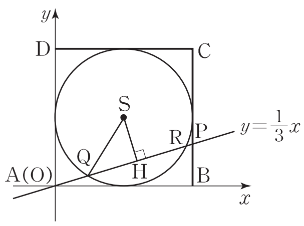
$y=m\times(-2y)+6$에서 $y=\dfrac{6}{2m+1}$이므로

$\dfrac{6}{2-m}=\dfrac{6}{2m+1}$, $2m+1=2-m$ $\quad\therefore m=\dfrac{1}{3}$

43 답 ④

그림과 같이 두 직선 AB, AD를 각각 x축, y축의 양의 방향으로 하는 좌표평면을 잡자.

$\overline{AB}:\overline{BP}=3:1$에서 직선 AP는 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이고 원점을 지나므로 직선 AP의 방정식은 $y=\dfrac{1}{3}x$이다.



정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 10이므로

S$(5, 5)$이고, $\overline{SQ}=5$

점 S$(5, 5)$에서 직선 $x-3y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{SH}=\dfrac{|5-15|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$\therefore \overline{QH}=\sqrt{\overline{SQ}^2-\overline{SH}^2}=\sqrt{5^2-10}=\sqrt{15}$

따라서 $\overline{QR}=2\overline{QH}$이므로 $\overline{QR}=2\sqrt{15}$

$\therefore \triangle SQR=\dfrac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{SH}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{15}\times\sqrt{10}=5\sqrt{6}$

44 답 ⑤

점 (a, b)가 직선 $3x+2y=1$ 위의 점이므로

$3a+2b=1$ ⋯ ㉠

이때, 점 $(b+2, a-b)$를 (x, y)라 하면

$b+2=x$에서 $b=x-2$ ⋯ ㉡, $a-b=y$ ⋯ ㉢

㉡+㉢을 하면 $a=x+y-2$ ⋯ ㉣

㉡, ㉣을 ㉠에 대입하면

$3(x+y-2)+2(x-2)=1$

$\therefore 5x+3y=11$

두 직선의 방정식 $5x+3y=11$, $3x+2y=1$을 연립하면

$x=19$, $y=-28$이므로 교점의 좌표는 P$(19, -28)$이다.

$\therefore \alpha+\beta=19+(-28)=-9$

45 답 20

두 점 P, Q의 좌표를 P(a, b), Q(x, y)라 하면

$x=\dfrac{a+2}{2}$, $y=\dfrac{b+1}{2}$

$\therefore a=2x-2$, $b=2y-1$ ⋯ ㉠

그런데 점 P(a, b)가 직선 $2x-y-5=0$ 위의 점이므로

$2a-b-5=0$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(2x-2)-(2y-1)-5=0$

$\therefore y=2x-4$

따라서 $m=2$, $n=-4$이므로

$m^2+n^2=2^2+(-4)^2=20$

46 답 12

점 P(x, y)가 움직이는 직선을 $ax+by+c=0$ ⋯ ㉠

이라 하면 점 Q(X, Y)도 이 식을 만족시키므로

$a(x+y+4)+b(3x-y+1)+c=0$

$(a+3b)x+(a-b)y+4a+b+c=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=0$이면 $b=c=0$이 되어 모순이므로 $a\neq0$

$b=0$이면 $a=c=0$이 되어 모순이므로 $b\neq0$

$c=0$이면 $c=4a+b+c$에서 $b=-4a$이고

㉠에서 $x-4y=0$, ㉡에서 $-11x+5y=0$이 되어

모순이므로 $c\neq0$

즉, ㉠과 ㉡이 일치하기 위해서는

$\dfrac{a+3b}{a}=\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{4a+b+c}{c}$ ⋯ ㉢

$\dfrac{a+3b}{a}=\dfrac{a-b}{b}$에서 $ab+3b^2=a^2-ab$

$a^2-2ab-3b^2=0$, $(a-3b)(a+b)=0$

$\therefore a=3b$ 또는 $a=-b$

(i) $a=3b$이면 ㉢에서 $2=\dfrac{13b+c}{c}$, $c=13b$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$3x+y+13=0$

(ii) $a=-b$이면 ㉢에서 $-2=\dfrac{-3b+c}{c}$, $c=b$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x-y-1=0$

(i)~(ii)에 의하여 구하는 직선의 방정식은

$3x+y+13=0$ 또는 $x-y-1=0$이므로

두 식을 연립하여 풀면

$x=-3$, $y=-4$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(-3, -4)$이므로

$\alpha\beta=(-3)\times(-4)=12$

47 답 ④

직선 $x+2y-1=0$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하고,

선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점을 $Q(x, y)$라 하면

$x=\frac{2a+2}{2+1}$, $y=\frac{2b+3}{2+1}$

$\therefore a=\frac{3}{2}x-1$, $b=\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}$ ⋯ ㉠

한편, 점 $P(a, b)$는 직선 $x+2y-1=0$ 위의 점이므로

$a+2b-1=0$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{3}{2}x-1+2\left(\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}\right)-1=0$

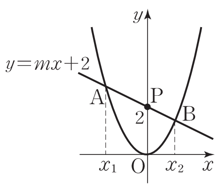
$\therefore 3x+6y-10=0$

따라서 $m=3$, $n=6$이므로 $m+n=9$

48 답 ⑤

임의의 실수 m에 대하여 점 $P(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx+2$ ⋯ ㉠



직선 ㉠이 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 만나는 두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 선분 AB의 중점 M의 좌표를 $M(X, Y)$라 하면 x_1, x_2는 이차방정식 $x^2-mx-2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=m$, $x_1x_2=-2$

(가)

$X=\frac{x_1+x_2}{2}=\boxed{\frac{m}{2}}$ ⋯ ㉡

$Y=\underbrace{\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}_{\because y_1=x_1^2,\, y_2=x_2^2}$

$=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2}$

$=\frac{m^2+4}{2}$

(나)

$=\boxed{\frac{m^2}{2}}+2$ ⋯ ㉢

(다)

㉡, ㉢에 의하여 $Y=\frac{(2X)^2}{2}+2=\boxed{2}X^2+2$

따라서 구하는 도형의 방정식은

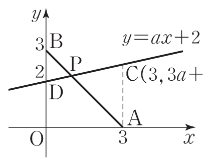
$y=\boxed{2}x^2+2$이다.

따라서 $f(m)=\frac{m}{2}$, $g(m)=\frac{m^2}{2}$, $k=2$이므로

$f(k)+g(k)=f(2)+g(2)=1+2=3$

49 답 11

그림과 같이 두 점 A, B를 각각 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=ax+2$와 만나는 점을 각각 C, D라 하면



$C(3, 3a+2)$, $D(0, 2)$ ········· ⓐ

이때, $\triangle PAC \backsim \triangle PBD$에서

$\overline{AP} : \overline{BP}=\overline{AC} : \overline{BD}$이고

$\overline{AC}=3a+2$, $\overline{BD}=1$이므로

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\frac{3a+2}{1}=3a+2$ ········· ⓑ

따라서 $f(a)=3a+2$이므로

$f(3)=11$ ········· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 점 C, D를 잡아 닮은 두 삼각형을 찾는다. ········· [40%]

ⓑ 두 삼각형의 닮음비를 이용하여 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$를 구한다. ········· [50%]

ⓒ $f(3)$의 값을 구한다. ········· [10%]

50 답 2

주어진 식을 y에 대하여 정리하면

$y^2+2axy+x^2+2(a^2-1)x-1=0$

근의 공식으로 y의 값을 구하면

$y=-ax\pm\sqrt{a^2x^2-\{x^2+2(a^2-1)x-1\}}$

$=-ax\pm\sqrt{(a^2-1)x^2-2(a^2-1)x+1}$ ········· ⓐ

이 식이 두 직선을 나타내려면 근호 안의 식 $(a^2-1)x^2-2(a^2-1)x+1$이 x에 대한 완전제곱식 또는 실수가 되어야 한다.

(i) $a^2-1=0$이면

근호 안의 식이 1이 되므로 $y=-ax\pm1$이 되어 두 직선을 나타낸다.

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

(ii) $a^2-1\neq0$이면

근호 안의 식이 완전제곱식이 되어야 하므로 x에 대한 이차방정식 $(a^2-1)x^2-2(a^2-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a^2-1)^2-(a^2-1)=0$

$(a^2-1)(a^2-2)=0$이므로 $a^2-2=0$ ($\because a^2-1\neq0$)

$\therefore a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 가능한 a의 값은 -1, 1, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$이다. ········· ⓑ

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 2이다. ········· ⓒ

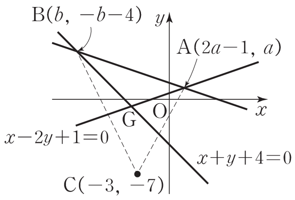
| 채점기준 |

ⓐ 근의 공식을 이용하여 두 직선을 나타낸다. ········· [40%]

ⓑ 근호 안의 식이 완전제곱식 또는 실수가 되는 a의 값을 구한다. ········· [50%]

ⓒ 모든 상수 a의 값의 곱을 구한다. ········· [10%]

51 답 9



직선 GA와 직선 GB의 교점이 점 G이므로 $x-2y+1=0$과 $x+y+4=0$을 연립하여 풀면

$x=-3$, $y=-1$

$\therefore$ G$(-3, -1)$ ⋯⋯ ⓐ

두 점 A, B는 각각 직선 $x-2y+1=0$, $x+y+4=0$ 위의 점이므로 A$(2a-1, a)$, B$(b, -b-4)$라 하면

삼각형 ABC의 무게중심이 G$(-3, -1)$이므로

$\dfrac{(2a-1)+b+(-3)}{3}=-3$, $\dfrac{a+(-b-4)+(-7)}{3}=-1$

$\therefore 2a+b=-5$, $a-b=8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-7$

$\therefore$ A$(1, 1)$, B$(-7, 3)$ ⋯⋯ ⓑ

즉, 직선 AB의 방정식은 $y-1=\dfrac{3-1}{-7-1}(x-1)$

$-4(y-1)=x-1$

$\therefore x+4y-5=0$

따라서 $p=4$, $q=5$이므로 $p+q=9$ ⋯⋯ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 무게중심 G의 좌표를 구한다. ⋯⋯ [30%]

ⓑ 두 점 A, B의 좌표를 각각 구한다. ⋯⋯ [40%]

ⓒ 직선 AB의 방정식을 구하여 $p+q$의 값을 구한다. ⋯⋯ [30%]

고난도 도전 문제

문제편 p.32~33

52 답 ①

세 직선이 y축과 만나는 점을 D$(0, k)$라 하자.

직사각형 OABC의 넓이가 $6\times12=72$이므로

$\triangle$DCR$=\triangle$DPQ$=72\div4=18$

점 R의 좌표를 R$(a, 12)$라 하면

$\triangle\text{DCR}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{CD}}\times\overline{\text{CR}}=18$에서

$\dfrac{1}{2}\times(12-k)\times a=18 \qquad \therefore a=\dfrac{36}{12-k}$ ⋯ ㉠

$\overline{\text{BR}}=6-a=6-\dfrac{36}{12-k}$

$\triangle\text{DPQ}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{PQ}}\times\overline{\text{OA}}=18$에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{PQ}}\times6=18 \qquad \therefore \overline{\text{PQ}}=6$

이때, 삼각형 PQR의 넓이가 $\dfrac{9}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{PQ}}\times\overline{\text{BR}}=\dfrac{1}{2}\times6\times\left(6-\dfrac{36}{12-k}\right)=\dfrac{9}{2}$

$6-\dfrac{36}{12-k}=\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{36}{12-k}=6-\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2} \qquad \therefore k=4$

즉, D$(0, 4)$

㉠에서 $a=\dfrac{36}{12-k}=\dfrac{9}{2}$이므로 R$\left(\dfrac{9}{2}, 12\right)$

한편, 직선 l_2는 직사각형 OABC의 넓이를 이등분하므로 두 대각선의 교점인 $(3, 6)$을 지난다.

그러므로 직선 l_2의 방정식은 $y=\dfrac{2}{3}x+4$이고

두 점 $(0, 4)$, $(3, 6)$을 지나는 직선의 방정식

직선 l_2 위의 x좌표가 6인 점 Q의 좌표는 $(6, 8)$이다.

$\overline{\text{PQ}}=6$이므로 P$(6, 2)$

두 점 D$(0, 4)$, P$(6, 2)$를 지나는 직선 l_1의 기울기는

$\dfrac{2-4}{6-0}=\dfrac{-2}{6}=-\dfrac{1}{3}$,

직선 l_2의 기울기는 $\dfrac{2}{3}$,

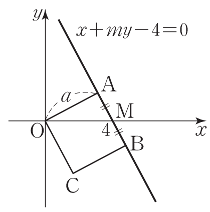
두 점 D$(0, 4)$, R$\left(\dfrac{9}{2}, 12\right)$를 지나는 직선 l_3의 기울기는

$\dfrac{12-4}{\frac{9}{2}-0}=\dfrac{8}{\frac{9}{2}}=\dfrac{16}{9}$

따라서 세 직선 l_1, l_2, l_3의 기울기의 합은

$-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{16}{9}=\dfrac{19}{9}$

53 답 5



직선 $x+my-4=0$에서

$(x-4)+my=0$

즉, 이 직선이 m의 값에 관계없이 지나는 점을 M$(4, 0)$이라 하자.

정사각형 OABC의 한 변의 길이를 a라 하면 삼각형 OAM에서

$\overline{\text{OA}}=a$, $\overline{\text{AM}}=\dfrac{a}{2}$, $\overline{\text{OM}}=4$이고, $\angle\text{OAM}=90^\circ$이므로

피타고라스 정리에 의해

$a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=4^2$, $\dfrac{5}{4}a^2=16 \qquad \therefore a=\dfrac{8}{\sqrt{5}}\ (\because a>0)$

따라서 원점 O와 직선 $x+my-4=0$ 사이의 거리가 $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$이므로

$\dfrac{|-4|}{\sqrt{1^2+m^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{1^2+m^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $m^2=\dfrac{1}{4} \qquad \therefore m=\dfrac{1}{2}\ (\because m>0)$

$\therefore 10m=5$

다른 풀이 : 삼각비 이용하기

본풀이에서 삼각형 OAM에 대하여 피타고라스 정리를 이용하는 대신 다음과 같이 풀 수도 있다.

직선 OA와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

직각삼각형 OAM에서 $\tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\dfrac{\frac{a}{2}}{a}=\dfrac{1}{2}$이므로

직선 OA의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$, 직선 AB의 기울기는 -2이다.

따라서 $-\dfrac{1}{m}=-2$이므로 $m=\dfrac{1}{2}$

직선 $x+my-4=0$의 기울기는 $-\dfrac{1}{m}$이야.

$\therefore 10m=5$

54 답 234

직선 l의 x절편을 a, y절편을 b라 할 때, l : $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$이고

B$(a, 0)$, C$(0, b)$이다.

직선 l이 점 A$(12, 18)$을 지나므로

$\dfrac{12}{a}+\dfrac{18}{b}=1$ ⋯ ㉠

삼각형 OAB의 넓이 $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times|a|\times18=9|a|$

삼각형 OAC의 넓이 $\triangle\mathrm{OAC}=\dfrac{1}{2}\times|b|\times12=6|b|$

(Ⅰ) 삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 $\dfrac{3}{2}$배일 때,

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{3}{2}\times\triangle\mathrm{OAC}$이므로

$9|a|=\dfrac{3}{2}\times6|b|$, $9|a|=9|b|$

$\therefore b=\pm a$

㉠에 대입하면

$a=30$, $b=30$ 또는 $a=-6$, $b=6$

$\therefore l_1$: $\dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{30}=1$ 또는 l_1 : $\dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{6}=1$

(Ⅱ) 삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 $\dfrac{2}{3}$배일 때,

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{2}{3}\times\triangle\mathrm{OAC}$이므로

$9|a|=\dfrac{2}{3}\times6|b|$, $9|a|=4|b|$

$\therefore b=\pm\dfrac{9}{4}a$

㉠에 대입하면

$a=20$, $b=45$ 또는 $a=4$, $b=-9$

$\therefore l_2$: $\dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{45}=1$ 또는 l_2 : $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-9}=1$

(Ⅰ), (Ⅱ)에서

(i) l_1 : $\dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{30}=1$, l_2 : $\dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{45}=1$일 때,

두 직선의 x절편이 각각 30, 20이고, 교점은 $(12, 18)$이므로

두 직선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(30-20)\times18=90$

(ii) l_1 : $\dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{30}=1$, l_2 : $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-9}=1$일 때,

두 직선의 x절편이 각각 30, 4이고, 교점은 $(12, 18)$이므로

두 직선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(30-4)\times18=234$

(iii) l_1 : $\dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{6}=1$, l_2 : $\dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{45}=1$일 때,

두 직선의 x절편이 각각 -6, 20이고, 교점은 $(12, 18)$이므로

두 직선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\{20-(-6)\}\times18=234$

(iv) l_1 : $\dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{6}=1$, l_2 : $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-9}=1$일 때,

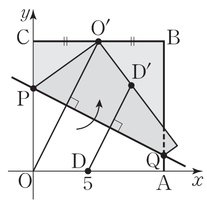
두 직선의 x절편이 각각 -6, 4이고, 교점은 $(12, 18)$이므로

두 직선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\{4-(-6)\}\times18=90$

(i)~(iv)에서 구하는 넓이의 최댓값은 234이다.

55 답 17



좌표평면 위의 점 O, A, B, C, D의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(12, 0)$, $(12, 12)$, $(0, 12)$, $(5, 0)$이다.

점 O′은 선분 BC의 중점이므로 O′$(6, 12)$

이때, 직선 OO′과 직선 DD′은 모두 직선 PQ와 수직이므로 직선 OO′과 직선 DD′은 서로 평행하다.

따라서 두 직선의 기울기가 같으므로

$\dfrac{12-0}{6-0}=\dfrac{b-0}{a-5}$ $\quad\therefore b=2a-10$ ⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{O'D'}}=\overline{\mathrm{OD}}=5$이므로

$\sqrt{(a-6)^2+(b-12)^2}=5$

양변을 제곱하면 $(a-6)^2+(b-12)^2=25$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $(a-6)^2+(2a-22)^2-25=0$

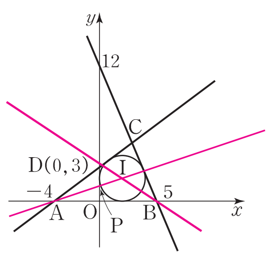
$5(a^2-20a+99)=5(a-9)(a-11)=0$

$\therefore a=9$, $b=8$ 또는 $a=11$, $b=12$

이때, $0<a<12$, $0<b<12$이므로 $a=9$, $b=8$

$\therefore a+b=9+8=17$

56 답 8



그림과 같이 세 직선의 교점을 A, B, C라 하고 직선 AC와 y축의 교점을 D라 하자.

$\angle$CAB의 이등분선이 y축과 만나는 점을 P라 하면 삼각형의 각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{AO} : \underbrace{\overline{AD}}_{=\sqrt{4^2+3^2}=5}=\overline{OP} : \overline{PD}=4 : 5$이므로

$\overline{OP}=\frac{4}{9}\overline{OD}=\frac{4}{9}\times 3=\frac{4}{3}$　　$\therefore$ $P\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$

즉, 직선 AI의 방정식은 $\frac{x}{-4}+\frac{y}{\frac{4}{3}}=1$

$x-3y=-4$ ⋯ ㉠

마찬가지로 $\angle CBA$의 이등분선의 y절편은

$12\times\frac{5}{5+13}=\frac{10}{3}$이므로

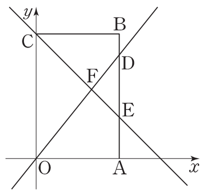
직선 BI의 방정식은 $\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{10}{3}}=1$

$2x+3y=10$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 교점이 내심 I이므로 연립하여 풀면 $x=2$, $y=2$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $a^2+b^2=8$

57 답 8



$\underbrace{\triangle OAD-\triangle BCE=\square OAEF-\square BCFD}_{\because\ \triangle DEF\text{가 공통}}$이므로

주어진 조건에 의하여

$\triangle OAD-\triangle BCE=2$ ⋯ ㉠

이때, $\overline{OA}=\overline{CB}=4$이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times\overline{AD}-\frac{1}{2}\times 4\times\overline{BE}=2$

$2\overline{AD}-2\overline{BE}=2$

$\therefore$ $\overline{AD}=\overline{BE}+1$

이때, $\overline{BE}=k$ $(0<k<6)$라 하면 $\overline{AD}=k+1$

(직선 OD의 기울기)$=\frac{\overline{AD}}{\overline{OA}}=\frac{k+1}{4}$ ⋯ ㉡

(직선 CE의 기울기)$=-\frac{\overline{BE}}{\overline{CB}}=-\frac{k}{4}$ ⋯ ㉢

직선 OD와 직선 CE의 기울기의 곱은 $-\frac{5}{4}$이므로

$\frac{k+1}{4}\times\left(-\frac{k}{4}\right)=-\frac{5}{4}$

$k^2+k=20$, $k^2+k-20=0$

$(k-4)(k+5)=0$

$\therefore$ $k=4$ ($\because$ $0<k<6$)

㉡에서 직선 OD의 방정식은

$y=\frac{k+1}{4}x=\frac{5}{4}x$

㉢에서 직선 CE의 방정식은

$y=-\frac{k}{4}x+6=-x+6$

두 식을 연립하면 $x=\frac{8}{3}$, $y=\frac{10}{3}$이므로

두 직선이 만나는 점 F의 좌표는 $F\left(\frac{8}{3},\ \frac{10}{3}\right)$

이때, 구하는 사각형 OAEF의 넓이는

$\square OAEF$

$=\square OAEC-\triangle OCF$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{OC}+\overline{AE})\times\overline{OA}-\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times|(\text{점 F의 } x\text{좌표})|$

$=\frac{1}{2}\times(6+2)\times 4-\frac{1}{2}\times 6\times\frac{8}{3}$

$=16-8=8$

58 답 12

$\underbrace{\overline{BP} : \overline{PA}=1 : 2}_{x\text{좌표의 차 또는 } y\text{좌표의 차}}$이므로 $\triangle BOP : \triangle POA=1 : 2$

$\triangle PQA=\frac{1}{2}\triangle OAB$이려면

$\underbrace{\text{점 Q는 선분 OA를 1 : 3으로 내분하는 점이어야 하므로}}_{\triangle PQA=\triangle POA\times\frac{3}{1+3}=\triangle OAB\times\frac{2}{1+2}\times\frac{3}{1+3}=\triangle OAB\times\frac{1}{2}}$

$Q\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이어야 한다.

따라서 직선 PQ의 기울기는 $\frac{4-\frac{1}{2}}{4-\frac{3}{2}}=\frac{7}{5}$이므로

$m+n=5+7=12$

다른 풀이 : 사선공식 이용하기

직선 OA의 방정식이 $y=\frac{1}{3}x$이므로 점 Q의 좌표를

$Q(3a,\ a)$ $(0\le a\le 2)$라 하면 사선공식에 의해

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix}6 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}\times|6\times 5-3\times 2|=12$

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix}6 & 4 & 3a & 6\\ 2 & 4 & a & 2\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}\times|6\times 4+4\times a+3a\times 2-4\times 2-3a\times 4-6\times a|$

$=\frac{1}{2}\times|24+4a+6a-8-12a-6a|$

$=\frac{1}{2}\times|16-8a|$

이때, $\triangle OAB=2\triangle APQ$이므로

$12=2\times\frac{1}{2}\times|16-8a|$

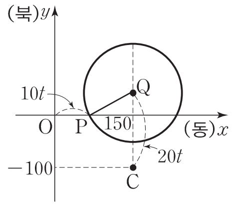
$|16-8a|=12$　　$\therefore$ $a=\frac{1}{2}$ ($\because$ $0\le a\le 2$)

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

(이하 동일)

59 답 ②

배의 현재 위치를 원점, 동쪽을 x축의 양의 방향, 북쪽을 y축의 양의 방향으로 잡으면 태풍의 중심의 현재 위치를 C라 할 때, C$(150,\ -100)$이다.



t시간 후의 배의 위치를 P,
태풍의 중심의 위치를 Q라 하면
P$(10t,\ 0)$, Q$(150,\ 20t-100)$
배가 폭풍우권 내에 있을 조건은
$\overline{PQ}\le 100$이므로

$\sqrt{(150-10t)^2+(20t-100)^2}\le 100$

양변을 제곱하면

$(150-10t)^2+(20t-100)^2\le(100)^2$

양변을 100으로 나누면

$(15-t)^2+(2t-10)^2\le 100$

$5t^2-70t+225\le 0,\ t^2-14t+45\le 0$

$(t-5)(t-9)\le 0 \qquad \therefore 5\le t\le 9$

즉, 배는 최초로 5시간 후에 폭풍우권 내에 들어가서 9시간 후에 폭풍우권 내에서 벗어난다.

따라서 배가 폭풍우권 내에서 항해하는 시간은 4시간이다.

03 원의 방정식

핵심 유형 연습

문제편 p.36~38

01 답 ⑤

Tip

원의 중심의 좌표와 원에 접하는 직선의 방정식을 이용하여 원의 반지름의 길이를 나타내.

원의 중심을 $(a,\ b)$라 하면

조건 (나)에서 원이 직선 $x=-1$에 접하므로

원의 반지름의 길이는 $|a+1|$이다.

원의 중심 (a, b)와 직선 $x=-1$ 사이의 거리는 $|a-(-1)|=|a+1|$

즉, 구하는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=(a+1)^2$이고,

조건 (가)에서 원이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$(1-a)^2+b^2=(a+1)^2 \qquad \therefore b^2=4a \cdots$ ㉠

원의 중심 $(a,\ b)$가 직선 $2x-3y+4=0$ 위에 있으므로

$2a-3b+4=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$

2×㉡을 한 후 ㉠을 대입하면
$b^2-6b+8=0,\ (b-2)(b-4)=0$
$b=2$ 또는 $b=4$
이 값을 ㉡에 대입하면 $a=1,\ b=2$ 또는 $a=4,\ b=4$

따라서 두 원 C_1, C_2의 중심 $(1,\ 2)$, $(4,\ 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

02 답 ②

원에서 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지난다.

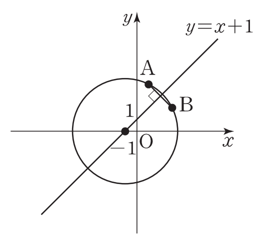
따라서 원의 중심은 직선 $y=mx+m$과 현 AB의 수직이등분선의 교점이다.

두 점 A$(1,\ 4)$, B$(3,\ 2)$를 잇는 선분의 수직이등분선의 방정식은

$y-\dfrac{4+2}{2}=-\dfrac{1-3}{4-2}\left(x-\dfrac{1+3}{2}\right)$

직선 AB에 수직인 직선의 기울기와 두 점 A, B의 중점의 좌표를 이용했어.

$y-3=x-2 \qquad \therefore y=x+1$



한편, 직선 $y=mx+m=m(x+1)$은 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.

이때, 점 $(-1,\ 0)$은 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

두 직선의 교점은 $(-1,\ 0)$이다.

따라서 구하는 원은 중심은 $(-1,\ 0)$이고

반지름의 길이 $r=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(4-0)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

$\therefore a^2+b^2+r^2=(-1)^2+0^2+(2\sqrt{5})^2=21$

03 답 ①

$\overline{OP}=a$, $\overline{OQ}=b$라 하면

$\overline{PQ}=\overline{OP}+\overline{OQ}=a+b$

원과 비례에서

$\overline{OP}\times\overline{OQ}=\overline{OA}\times\overline{OB}$, 즉 $ab=6$

두 양수 a, b에 대하여 $a+b=k$ $(k>0)$라 하면

a, b는 이차방정식 $x^2-kx+6=0$의 두 실근이다.

∵ 이차방정식의 근과 계수의 관계

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-24\geq 0$

이때, k는 양수이므로 $k\geq\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{6}$이다.

다른 풀이 : 산술평균과 기하평균의 관계 이용하기

본풀이에서 $\overline{PQ}=a+b$이고, $ab=6$이다.

이때, $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에서

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

$\therefore a+b\geq 2\sqrt{6}$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{6}$이다.

04 답 ②

Tip

먼저, m의 값에 관계없이 직선이 지나는 점을 찾아.

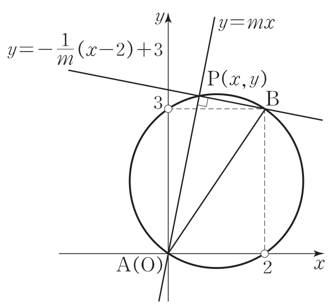
점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 다음 두 식을 모두 만족시킨다.

$$\begin{cases} y=mx & \cdots ㉠ \\ y=-\dfrac{1}{m}(x-2)+3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠은 점 A$(0, 0)$을 지나며 기울기가 m인 직선이고

㉡은 점 B$(2, 3)$을 지나며 기울기가 $-\dfrac{1}{m}$인 직선이다.

두 직선 AP와 BP의 기울기의 곱이 $m\times\left(-\dfrac{1}{m}\right)=-1$이므로 두 직선은 수직이다.



따라서 두 직선의 교점 P에 대하여 삼각형 APB는 직각삼각형이므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

이때, ㉠, ㉡은 x축에 수직이거나 평행한 직선을 나타내지 못하므로 두 점 $(0, 3)$, $(2, 0)$을 제외한 도형이다.

그런데 두 점의 포함 유무는 도형의 길이에 영향을 미치지 않으므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $\sqrt{13}\pi$이다.

지름의 길이가 $\overline{AB}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$인 원의 원주의 길이는 $\sqrt{13}\pi$야.

05 답 ③

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

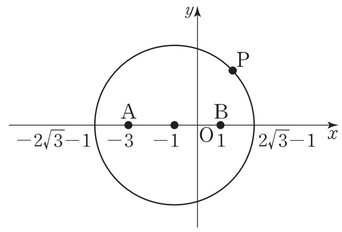
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=32$이므로

$(x+3)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=32$

$2x^2+2y^2+4x-22=0$, $x^2+y^2+2x-11=0$

$\therefore (x+1)^2+y^2=12$

즉, 구하는 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-1, 0)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이다.



즉, 점 P가 점 A를 지나는 원의 지름의 양 끝점일 때, 선분 PA의 길이가 각각 최대, 최소가 되므로

최댓값은 $2\sqrt{3}+2$, 최솟값은 $2\sqrt{3}-2$이다.

$(2\sqrt{3}-1)-(-3)=2\sqrt{3}+2$ $\quad$ $-3-(-2\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-2$

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$(2\sqrt{3}+2)(2\sqrt{3}-2)=12-4=8$

다른 풀이 : 삼각형의 중선정리 이용하기

두 점 A$(-3, 0)$, B$(1, 0)$의 중점을 M$(-1, 0)$이라 하면

삼각형의 중선정리에 의하여

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)$이고

$\overline{AM}=2$, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=32$이므로

$2\times(\overline{PM}^2+2^2)=32$, $\overline{PM}^2=12$

$\therefore \overline{PM}=2\sqrt{3}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 M$(-1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이다.

(이하 동일)

06 답 ③

두 점 A$(a, 0)$, B$(0, b)$ $(a>0, b>0)$라 하면

$\overline{AB}=6$에서 $a^2+b^2=36$ $\cdots$ ㉠

이때, 선분 AB의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

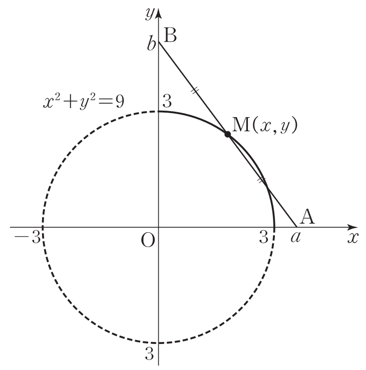
$x=\dfrac{a}{2}$, $y=\dfrac{b}{2}$

$\therefore a=2x$, $b=2y$ $\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(2x)^2+(2y)^2=36$이므로

$x^2+y^2=9\ (x>0,\ y>0)$

원을 그린 후 제1사분면에 존재하는 부분만 남겨두고 나머지는 지우자.



따라서 선분 AB의 중점 M이 나타내는 도형은 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 사분원이므로 그 길이는

$\frac{1}{4}\times(2\pi\times3)=\frac{3}{2}\pi$

07 답 16

> Tip
> 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나는 k의 값의 범위를 찾아.

원 $(x-1)^2+(y-1)^2=5$와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가

서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(1,\ 1)$과

직선 $x-2y+2k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$보다

작아야 하므로

$\frac{|1-2+2k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}<\sqrt{5}$에서

$|2k-1|<5,\ -5<2k-1<5$

$\therefore\ -2<k<3$ 양수 a에 대하여, $|x|<a$이면 $-a<x<a$

따라서 정수 k의 최댓값 $M=2$이다.

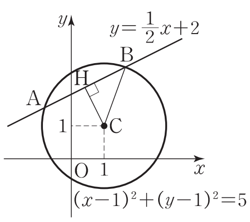
또, 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=5$와

직선 $y=\frac{1}{2}x+2$가 만나는 두 점을

A, B라 하고, 원의 중심 C$(1,\ 1)$에서

직선에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 H는 $\overline{\text{AB}}$의 중점이고



$\overline{\text{CH}}=\frac{|1-2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$이므로

직각삼각형 CBH에서

$\overline{\text{BH}}=\sqrt{\overline{\text{CB}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}$

∵ 피타고라스 정리

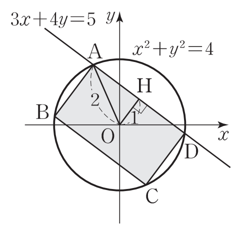
$=\sqrt{5-\frac{9}{5}}=\sqrt{\frac{16}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$d=\overline{\text{AB}}=2\overline{\text{BH}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ \sqrt{5}Md=\sqrt{5}\times2\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=16$

08 답 ④

원의 중심 O에서 직선 $3x+4y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 원점과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리는



$\overline{\text{OH}}=\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

삼각형 OHA는 직각삼각형이므로

$\overline{\text{HA}}=\sqrt{\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{OH}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\triangle\text{OHA}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \square\text{ABCD}=8\triangle\text{OHA}=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

09 답 100

두 점 P, Q는 원 위의 점이므로

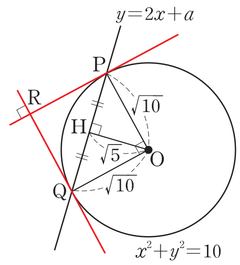
$\overline{\text{OP}}=\overline{\text{OQ}}=\sqrt{10}$이다.

두 접선의 교점을 R라 하면 두 접선이

서로 수직이므로

사각형 OPRQ는 정사각형이다.

이웃한 변의 길이가 같은 직사각형은 정사각형이야.



따라서 삼각형 OPQ는 ∠POQ가

직각인 직각이등변삼각형이다.

원의 중심 O에서 현 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{HP}}=\overline{\text{HQ}}$이고

$\overline{\text{OH}}=\frac{\overline{\text{OP}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$

또한, 원점 O와 직선 $y=2x+a$ 사이의 거리는

$2x-y+a=0$

$\overline{\text{OH}}=\frac{|a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$이므로

$|a|=5\qquad\therefore\ a=5\ (\because\ a>0)$

직선 $2x-y+5=0$의 x절편, y절편은 각각 $-\frac{5}{2}$, 5이므로

이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분이 삼각형을 이룰 때, 그 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|(x\text{절편})|\times|(y\text{절편})|$이야.

$S=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times5=\frac{25}{4}$

$\therefore\ 16S=100$

10 답 31

> Tip
> 점 P를 두 원의 교점으로 생각하면 좌표를 구하기 쉬워.

$\overline{\text{OP}}=5$이므로 점 P는 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이다.

즉, 점 P는 두 원 $x^2+y^2=25,\ x^2+y^2-\frac{25}{3}x=0$의 교점 중

제1사분면 위의 점이다.

두 식을 연립하면

$x^2+(25-x^2)-\frac{25}{3}x=0,\ \frac{25}{3}x=25$

$\therefore\ x=3$

이 값을 $x^2+y^2=25$에 대입하면 $y=4$

즉, 점 P의 좌표는 $(3,\ 4)$이므로

원 C 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

원 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 원의 방정식에

$x^2 \longrightarrow x_1x,\ y^2 \longrightarrow y_1y,\ x \longrightarrow \frac{x_1+x}{2},\ y \longrightarrow \frac{y_1+y}{2}$ 를 대입하여 구할 수 있어.

$3x+4y-\frac{25}{3}\times\frac{3+x}{2}=0$

$18x+24y-25(3+x)=0,\ 24y=7x+75$

$\therefore\ y=\frac{7}{24}x+\frac{25}{8}$

따라서 원 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$이므로

$p=24,\ q=7 \qquad \therefore\ p+q=31$

다른 풀이 : 원의 성질을 이용하여 접선의 기울기 구하기

본풀이에서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(3,\ 4)$이고

원 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $\overline{\mathrm{CP}}$의 기울기와 곱하여 -1이다.

원 C의 중심

$\overline{\mathrm{CP}}$의 기울기는 $\frac{4-0}{3-\frac{25}{6}}=\frac{4}{-\frac{7}{6}}=-\frac{24}{7}$

이므로 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$이다.

$\therefore\ p+q=24+7=31$

11 답 4

그림과 같이 원 $x^2+y^2+6x-2y+5=0$

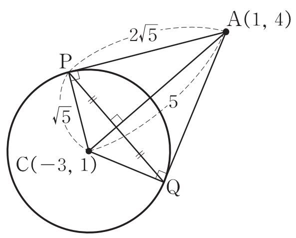
즉, 원 $(x+3)^2+(y-1)^2=5$의 중심 $\mathrm{C}(-3,\ 1)$과

점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-3-1)^2+(1-4)^2}=5$

점 A에서 원에 그은 접선의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CP}}^2}=\sqrt{25-5}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$



한편, $\triangle\mathrm{APC}\equiv\triangle\mathrm{AQC}$ (RHS 합동)이고,

$\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 $\square\mathrm{APCQ}=2\triangle\mathrm{APC}$에서

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CP}}\times\overline{\mathrm{AP}}\right)$

$\frac{1}{2}\times5\times\overline{\mathrm{PQ}}=2\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}\right)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=4$

12 답 ①

점 $(-1,\ 3)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y-3=m(x+1)$

이때, 원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $mx-y+m+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같아야 하므로

$\frac{|m-(-2)+m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

$|2m+5|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2+20m+25=10m^2+10$

$\therefore\ 6m^2-20m-15=0$

이 이차방정식의 두 근이 두 접선의 기울기 $m_1,\ m_2$이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $m_1m_2=\frac{-15}{6}=-\frac{5}{2}$

다른 풀이 : 다항식의 덧셈과 뺄셈

점 $(-1,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면

접선의 방정식은 $y-3=m(x+1)$

$(x-1)^2+(y+2)^2=10$에 $y=m(x+1)+3$을 대입하면

$(x-1)^2+(mx+m+5)^2=10$

$x^2-2x+1+m^2x^2+2m(m+5)x+(m+5)^2-10=0$

$\therefore\ (m^2+1)x^2+2(m^2+5m-1)x+(m^2+10m+16)=0$

원과 직선이 접하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m^2+5m-1)^2-(m^2+1)(m^2+10m+16)=0$

$(m^4+10m^3+23m^2-10m+1)$

$-(m^4+10m^3+17m^2+10m+16)=0$

$\therefore\ 6m^2-20m-15=0$

이 이차방정식의 두 근이 두 접선의 기울기 $m_1,\ m_2$이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $m_1m_2=-\frac{5}{2}$

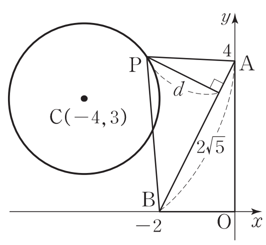
13 답 ④

Tip
삼각형의 높이의 차를 이용하여 넓이의 차를 구하면 편해.

[그림 1]에서 삼각형 APB의 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}}$라 하면 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리 d가 높이가 된다.

$\therefore\ \triangle\mathrm{APB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times d$

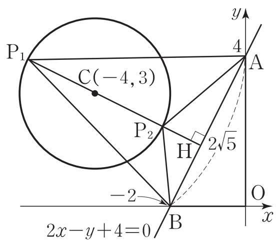
$=\sqrt{5}d\ \cdots$ ㉠



[그림 1]

이때, d가 최대일 때 삼각형 APB의 넓이는 최대이고, d가 최소일 때 삼각형 APB의 넓이는 최소이다.

[그림 2]와 같이 원의 중심 C$(-4,\ 3)$에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



[그림 2]

d의 최댓값은 $\overline{P_1H}$의 길이,

d의 최솟값은 $\overline{P_2H}$의 길이이므로

d의 최댓값과 최솟값의 차는

$\overline{P_1H}-\overline{P_2H}=\overline{P_1P_2}$

$=$(지름의 길이)$=4$

$\therefore M-m=\sqrt{5}\,\overline{P_1H}-\sqrt{5}\,\overline{P_2H}$ ($\because$ ㉠)

$=\sqrt{5}\,(\overline{P_1H}-\overline{P_2H})$

$=\sqrt{5}\times 4=4\sqrt{5}$

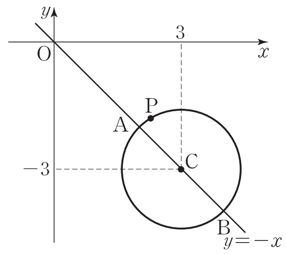
14 답 8

원점 O와

원 $(x-3)^2+(y+3)^2=2$

위의 점 P$(x,\ y)$에 대하여

$x^2+y^2=\overline{OP}^2$이다.



그림과 같이

원 $(x-3)^2+(y+3)^2=2$의

중심을 C$(3,\ -3)$, 이 원과 직선

OC의 교점을 A, B라 하자.

$\overline{OP}^2$의 값은 점 P가 A일 때 최소, B일 때 최대가 된다. 즉, 최소와 최대일 때의 각각의 x좌표 a, b는 원 $(x-3)^2+(y+3)^2=2$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표이므로 두 식을 연립하면

$(x-3)^2+(-x+3)^2=2$, 즉 $x^2-6x+8=0$의 두 근이다.

$2(x-3)^2=2,\ (x-3)^2-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$ab=8$

15 답 ①

점 P$(x,\ y)$에 대하여 $\dfrac{y}{x+3}=k$(k는 상수)라 하면

$kx-y+3k=0$이고

점 P$(x,\ y)$는 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 위의 점이므로

직선 $kx-y+3k=0$은 원 $(x+1)^2+y^2=1$과 만나야 한다.

즉, 원의 중심 $(-1,\ 0)$과 직선 $kx-y+3k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1보다 작거나 같아야 하므로

$\dfrac{|k\times(-1)-0+3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}\le 1,\ \dfrac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}\le 1$

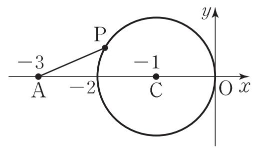
양변을 제곱하여 부등식을 풀면 $4k^2\le k^2+1,\ k^2\le\dfrac{1}{3}$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le k\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

다른 풀이 : $\dfrac{y}{x+3}$를 선분의 기울기로 생각하기

[그림 1]과 같이 두 점 A$(-3,\ 0)$, P$(x,\ y)$라 하면



[그림 1]

$\dfrac{y}{x+3}=\dfrac{y-0}{x-(-3)}$은

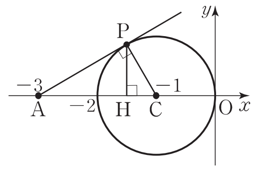
[그림 2]와 같이 직선 AP의 기울기이다.

이때, 기울기가 양수이고

원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접할 때

기울기가 최대이다.

이때, 원의 중심을 C$(-1,\ 0)$이라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 PAC에서



[그림 2]

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{3}$이고

$\triangle PAC\backsim\triangle HAP$ (AA 닮음)이므로

직선 AP의 기울기는 $\dfrac{\overline{PH}}{\overline{AH}}=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{AP}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

참고 삼각비를 이용하여 기울기 구하기

직선 AP의 기울기는 직선 AP와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때 $\tan\theta$이다.

따라서 직각삼각형 APC에서

$\tan\theta=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{AP}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$임을 알 수 있다.

16 답 98

Tip

두 원의 교점을 지나는 도형의 방정식에서 실수 m의 값을 찾아.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$(x^2+y^2-4x-6y+10)$

$+m(x^2+y^2-8x-2y+8)=0\ (m\ne -1)$ ⋯ ㉠

이라 하자. ㉠에 x축의 방정식 $y=0$을 대입하면

$x^2-4x+10+m(x^2-8x+8)=0$

$(m+1)x^2-4(2m+1)x+2(4m+5)=0$

원이 x축에 접하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4(2m+1)^2-2(m+1)(4m+5)=0$

$4(4m^2+4m+1)-2(4m^2+9m+5)=0$

$8m^2-2m-6=0,\ 4m^2-m-3=0$

$(4m+3)(m-1)=0$

$\therefore m=-\dfrac{3}{4}$ 또는 $m=1$

이 값을 ㉠에 각각 대입하여 정리하면

$x^2+y^2+8x-18y+16=0$ 또는 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 $(-4,\ 9)$, $(3,\ 2)$이므로

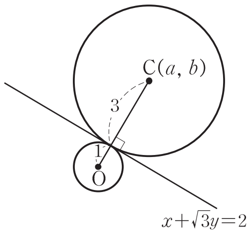
$d^2=(-4-3)^2+(9-2)^2=49+49=98$

17 답 ④

두 원의 중심을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$라 하자.

공통접선 $x+\sqrt{3}y=2$의 기울기는

$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이고



외접하는 두 원의 공통접선은

$\overline{\mathrm{OC}}$에 수직이므로 $\overline{\mathrm{OC}}$의 기울기는

$\sqrt{3}$이다.

$\dfrac{b-0}{a-0}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore b=\sqrt{3}a \cdots$ ㉠

또, 두 원이 외접하면 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같으므로 $\sqrt{a^2+b^2}=1+3$

$\therefore a^2+b^2=16 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=2\sqrt{3}\ (\because a>0,\ b>0)$

$\therefore ab=4\sqrt{3}$

다른 풀이 : 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 이용하기

외접하는 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-a)^2+(y-b)^2=9$의 공통접선의 방정식은 $(x^2+y^2-1)-\{(x-a)^2+(y-b)^2-9\}=0$

$\therefore 2ax+2by=a^2+b^2-8$

위의 직선이 $x+\sqrt{3}y=2$와 일치하므로

$\dfrac{2a}{1}=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}=\dfrac{a^2+b^2-8}{2}$

연립하여 풀면

$a=2,\ b=2\sqrt{3}\ (\because a>0,\ b>0)$

$\therefore ab=4\sqrt{3}$

18 답 ③

원 $C : x^2+y^2-5+k(x^2+y^2-4x+3)=0\ (k\neq-1)$은

실수 k의 값에 관계없이

두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-4x+3=0$의 교점을 지나는 원이다.

ㄱ. 두 원의 교점을 지나는 직선은

$k=-1$일 때 $4x-8=0$, 즉 $x=2$이므로

두 점 A, B는 원 $x^2+y^2-5=0$과 직선 $x=2$의 교점과 같다.

연립하여 풀면 두 점의 좌표는 $(2,\ 1)$, $(2,\ -1)$

따라서 선분 AB의 길이는 2이다. (참)

y좌표의 차

ㄴ. 원 $C : x^2+y^2-5+k(x^2+y^2-4x+3)=0\ (k\neq-1)$을

정리하여 표준형으로 바꾸면

$(k+1)x^2-4kx+(k+1)y^2+3k-5=0$

$x^2-\dfrac{4k}{k+1}x+y^2+\dfrac{3k-5}{k+1}=0\ (\because k\neq-1)$

$$\left(x-\frac{2k}{k+1}\right)^2+y^2=\frac{4k^2}{(k+1)^2}-\frac{3k-5}{k+1}$$
$$=\frac{4k^2-(3k^2-2k-5)}{(k+1)^2}=\frac{k^2+2k+5}{(k+1)^2}$$
$$=1+\frac{4}{(k+1)^2} \cdots ㉠$$

따라서 원 C의 넓이가 최소일 때는 $1+\dfrac{4}{(k+1)^2}$의 값이

반지름의 길이가 최소일 때

최소일 때이다.

즉, $(k+1)^2$이 최대일 때이고, $(k+1)^2$은 최댓값을 갖지 않으므로 원 C의 넓이는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 원 C가 y축에 접할 때, 접점은 원점이므로

$\because$ 원 C의 중심은 x축 위에 있어.

$x^2+y^2-5+k(x^2+y^2-4x+3)=0$에 $x=0$, $y=0$을

대입하면 $3k-5=0$ $\quad\therefore k=\dfrac{5}{3}$

㉠에서 $\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{5}{4}\right)^2$

따라서 원 C가 y축에 접할 때의 반지름의 길이는 $\dfrac{5}{4}$이므로

원 C의 둘레의 길이는 $2\pi\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{5\pi}{2}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

참고 ㄴ에서 원 C의 넓이가 최소가 되는 때는 두 점 A, B가 지름의 양 끝점일 때이다.

선분 AB를 지름으로 하는 원은 $(x-2)^2+y^2=1$, 즉 $x^2+y^2-4x+3=0$이고

원 $C : x^2+y^2-5+k(x^2+y^2-4x+3)=0$은 k가 어떤 값을 갖더라도 원 $x^2+y^2-4x+3=0$을 나타낼 수 없다.

실전 유형 훈련

문제편 p.39~45

19 답 ⑤

구하는 원이 x축 및 y축에 동시에 접하므로 원의 중심의 좌표가 $(a,\ a)$일 때와 $(a,\ -a)$일 때로 나누어 생각한다.

(i) 원의 중심이 $(a,\ a)$, 반지름의 길이가 $|a|$일 때,

중심이 $y=(x-1)^2+1$의 그래프 위에 있으므로

$a=(a-1)^2+1$, $a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $a=2$

(ii) 원의 중심이 $(a,\ -a)$, 반지름의 길이가 $|a|$일 때,

중심이 $y=(x-1)^2+1$의 그래프 위에 있으므로

$-a=(a-1)^2+1$, $a^2-a+2=0$

이것을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

$\because$ (판별식)<0

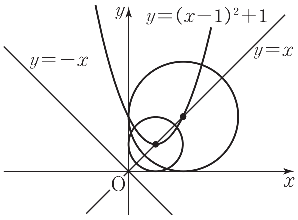
(i), (ii)에 의하여 구하는 원의 반지름의 길이는 1 또는 2이므로

두 원의 넓이의 합은 $\pi+4\pi=5\pi$

일등급 UP

＊축에 접하는 원의 특징

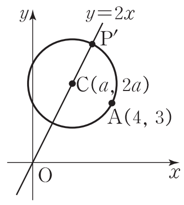
원이 x축 및 y축에 동시에 접할 때, 그 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.
따라서 이차함수 $y=(x-1)^2+1$의 그래프와 두 직선 $y=\pm x$의 교점에서 원의 중심을 생각해야 한다.



한편, 그림과 같이 주어진 이차함수의 그래프와 직선 $y=-x$의 교점이 존재하지 않음을 알 수 있다.

20 답 5

구하는 원은 중심이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ 2a)$라 하자.
그림과 같이 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이가 최대가 되게 하는 점은 직선 OC와 원의 교점 중 O에서 멀리 떨어진 점이다.



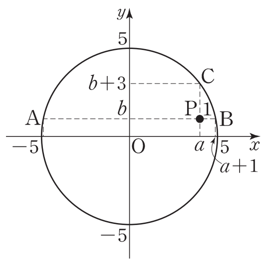
이 점을 $\mathrm{P}'(b,\ 2b)$라 하면
$\overline{\mathrm{OP}'}=\sqrt{5}b=3\sqrt{5}$이므로 $b=3$
$\therefore \mathrm{P}'(3,\ 6)$
원 위에 두 점 $\mathrm{P}'(3,\ 6)$과 $\mathrm{A}(4,\ 3)$이 있으므로
$\overline{\mathrm{CP}'}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$
$(a-3)^2+(2a-6)^2=(a-4)^2+(2a-3)^2$
$5a^2-30a+45=5a^2-20a+25$
$10a=20$에서 $a=2$
$\therefore \mathrm{C}(2,\ 4)$
따라서 원의 반지름의 길이는
$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(4-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$이므로
$r^2=5$

21 답 ③

원 $x^2+y^2+ax-4y+b=0$이 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로
$x=-1,\ y=5$를 대입하여 정리하면
$a-b=6$ ⋯ ㉠
한편, 원이 y축과 만나는 두 점의 y좌표를 $y_1,\ y_2$라 하면
$y_1,\ y_2$는 $x^2+y^2+ax-4y+b=0$에 $x=0$을 대입한 이차방정식
$y^2-4y+b=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$y_1+y_2=4,\ y_1y_2=b$
$|y_1-y_2|=4\sqrt{3}$에서
$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=(4\sqrt{3})^2$
$16-4b=48$ $\quad\therefore b=-8$ ⋯ ㉡
㉠에 ㉡을 대입하면 $a=-2$
즉, 원의 방정식은 $x^2+y^2-2x-4y-8=0$ ⋯ ㉢이므로
이 원이 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 $x_1,\ x_2$라 하면
$x_1,\ x_2$는 ㉢에 $y=0$을 대입한 $x^2-2x-8=0$의 두 근이다.
$(x-4)(x+2)=0$에서
$x_1=4,\ x_2=-2$ 또는 $x_1=-2,\ x_2=4$이므로
$|x_1-x_2|=|4-(-2)|=6$
따라서 원이 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 6이다.

22 답 4

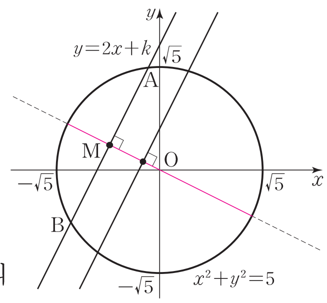
그림과 같이 원의 중심을 원점으로 하고, 현 AB가 x축과 평행하게 좌표축을 잡는다.



원의 방정식은 $x^2+y^2=25$이고
점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면
$\mathrm{B}(a+1,\ b),\ \mathrm{C}(a,\ b+3)$
$\because \overline{\mathrm{PB}}=1,\ \overline{\mathrm{PC}}=3$
두 점 B, C는 원 위의 점이므로
$(a+1)^2+b^2=25$ ⋯ ㉠
$a^2+(b+3)^2=25$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
㉠−㉡에서 $2a-6b-8=0,\ a=3b+4$
이를 ㉡에 대입하면 $(3b+4)^2+(b+3)^2=25$
$10b^2+30b=0$ $\quad\therefore b=0$ 또는 $b=-3$
$a=4,\ b=0$ 또는 $a=-5,\ b=-3$
이때, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 원의 내부의 점이므로 $\mathrm{P}(4,\ 0)$
$\overline{\mathrm{OP}}<5$
$\therefore \overline{\mathrm{OP}}=4$

23 답 ③

원과 직선의 두 교점을 연결한 선분 AB는 원의 현이다.
선분 AB의 중점 M에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{OM}}$이므로 점 M은 원점 O를 지나며 직선 $y=2x+k$에 수직인 직선 위에 있다.
따라서 그림과 같이 선분 AB의 중점 M이 나타내는 도형은 원의 지름이고 그 길이는 $2\sqrt{5}$이다.



다른 풀이 : 이차방정식의 근과 계수의 관계 이용하기

원과 직선이 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$보다 작아야 하므로 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}<\sqrt{5}$
$|k|<5$ $\quad\therefore -5<k<5$

두 점 A, B는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$A(a,\ 2a+k)$, $B(b,\ 2b+k)$ $(-5<k<5)$라 하고

선분 AB의 중점을 $M(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=a+b+k$ $(-5<k<5)$ ⋯ ㉠

한편, 두 점 A, B는 원과 직선의 교점이므로

a, b는 $y=2x+k$를 $x^2+y^2=5$에 대입한 $x^2+(2x+k)^2=5$, 즉 $5x^2+4kx+(k^2-5)=0$의 두 근이다.

x에 대한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=-\dfrac{4k}{5}$ $(-5<k<5)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\dfrac{2k}{5}$, $y=\dfrac{k}{5}$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x$

이때, $-5<k<5$에서 $-2<-\dfrac{2}{5}k<2$이므로 $-2<x<2$

따라서 구하는 도형의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}x$ $(-2<x<2)$이므로

선분 AB의 중점 M이 나타내는 도형의 길이는 두 점 $(-2,\ 1)$, $(2,\ -1)$을 잇는 선분의 길이와 같으므로

$\sqrt{(2+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$이다.

24 답 ③

(i) $m\neq0$일 때,

l_1 : $mx+y-2m-1=0$에서 $m(x-2)+y-1=0$이므로

l_1은 점 $(2,\ 1)$을 지나면서 기울기가 $-m$인 직선이고,

l_2 : $x-my+5m-6=0$에서 $x-6-m(y-5)=0$이므로

l_2는 점 $(6,\ 5)$를 지나면서 기울기가 $\dfrac{1}{m}$인 직선이다.

이때, 두 직선의 기울기의 곱은 $-m\times\dfrac{1}{m}=-1$이므로 두 직선은 수직이다.

따라서 두 직선의 교점은 $(2,\ 1)$과 $(6,\ 5)$를 지름의 양 끝으로 하는 원 위의 점이다.

즉, 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가

$\left(\dfrac{2+6}{2},\ \dfrac{1+5}{2}\right)=(4,\ 3)$이고

지름의 길이가 $\sqrt{(6-2)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이므로

$(x-4)^2+(y-3)^2=8$ ⋯ ㉠

(ii) $m=0$일 때,

직선 l_1은 $y=1$이고, 직선 l_2는 $x=6$이므로

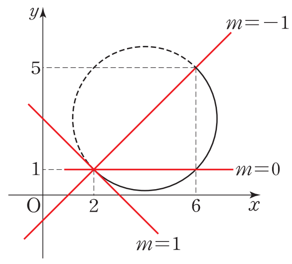
두 직선의 교점 P는 $P(6,\ 1)$이다.

이때, $P(6,\ 1)$은 ㉠을 만족시키므로 원 위의 점이다.

한편, $-1\le m\le1$이므로

(i), (ii)에서 $m=\pm1$, 0일 때의 직선 l_1의 방정식과

$-1\le m\le1$일 때 점 P가 나타내는 $\underbrace{\text{도형}}_{\text{반원}}$은 다음과 같다.



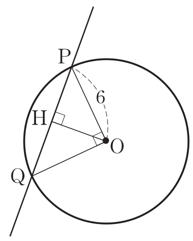
따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$\dfrac{1}{2}\times(2\pi\times2\sqrt{2})=2\sqrt{2}\pi$

25 답 96

직선 $y=a(x+2)+4$는 a의 값에 관계없이 점 $A(-2,\ 4)$를 지나는 직선이다. 이 직선이 원 $x^2+y^2=36$의 중심 $O(0,\ 0)$을 지날 때, 즉 $a=-2$일 때 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 원의 지름의 길이와 같다.

$\therefore M=12$



한편, 그림과 같이 직선 $y=a(x+2)+4$가 원점을 지나지 않을 때 원의 중심 O에서 이 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\underbrace{\overline{PQ}=2\overline{PH}=2\sqrt{6^2-\overline{OH}^2}}_{\because\ \text{피타고라스 정리}}$

즉, $\overline{OH}$의 길이가 최대일 때, $\overline{PQ}$의 길이는 최소이다.

그런데 직선 $y=a(x+2)+4$는 a의 값에 관계없이

점 $A(-2,\ 4)$를 지나는 직선이므로 점 H가 점 A일 때 $\overline{OH}$의 길이가 $\underbrace{2\sqrt{5}}_{\sqrt{(-2)^2+4^2}}$로 최대이고, 이때 $\overline{PQ}=2\sqrt{6^2-(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{16}=8$로 최소이다.

$\therefore m=8$

$\therefore Mm=12\times8=96$

26 답 ①

기울기가 $\dfrac{1}{m}$이고 x축 위의 점 $A(-1,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=\dfrac{1}{m}(x+1)$이라 하면 중심이 $(1,\ 0)$인 반원과 서로 다른 두 점에서 만날 때 직선이 태극문양과 서로 다른 5개의 점에서 만나게 된다.

즉, $m>0$이고 점 $(1,\ 0)$과 직선 $x-my+1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 1보다 작다.

즉, $\dfrac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+(-m)^2}}<1$이므로

$2<\sqrt{1+m^2}$, $3<m^2$

$\therefore m>\sqrt{3}$ ($\because m>0$)

이때, 이를 만족시키는 최소의 자연수 m은 2이고 그때의 직선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로 두 점 P, H의 좌표는 P(1, 1), H(1, 0)이다.

따라서 삼각형 AHP의 넓이는

두 식 $y=\frac{1}{2}(x+1)$, $(x-1)^2+y^2=1\,(y\geq 0)$을 연립해서 구해도 돼.

$\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$

27 답 ①

직선 $my=\dfrac{x-1}{m-1}$이 원의 둘레를 이등분하기 위해서는 직선이 원의 중심 (3, 2)를 지나야 하므로

$2m=\dfrac{3-1}{m-1}$

$m(m-1)=1$, $m^2-m-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 m의 값의 합은 1이다.

28 답 40

점 A$(-2, 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식을 $y=m(x+2)$라 하면 원 $x^2+y^2=1$과의 교점인 두 점 P, Q의 x좌표는 $\begin{cases} y=m(x+2) & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$의 해이다.

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$x^2+\{m(x+2)\}^2=1$

$(\underbrace{1+m^2}_{(가)})x^2+4m^2x+(\underbrace{4m^2-1}_{(나)})=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 두 점 P, Q의 좌표는 P$(\alpha, m(\alpha+2))$, Q$(\beta, m(\beta+2))$이고

$\overline{\text{AP}}=(\alpha+2)\sqrt{1+m^2}$ ($\because \alpha>-2$)

$\overline{\text{AQ}}=(\beta+2)\sqrt{1+m^2}$ ($\because \beta>-2$)

한편, 이차방정식의 최고차항의 계수가 $1+m^2$이고 두 근이 α, β이므로

$(1+m^2)x^2+4m^2x+(4m^2-1)$

$=(1+m^2)(x-\alpha)(x-\beta)$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 $x=\underbrace{-2}_{(다)}$를 대입하면

$4(1+m^2)-8m^2+(4m^2-1)$

$=(1+m^2)(-2-\alpha)(-2-\beta)$

$=(1+m^2)(\alpha+2)(\beta+2)=\underbrace{3}_{(라)}$

$\therefore \overline{\text{AP}}\times\overline{\text{AQ}}=(1+m^2)(\alpha+2)(\beta+2)=3$ (일정)

따라서 $f(m)=1+m^2$, $g(m)=4m^2-1$, $t=-2$, $s=3$이므로

$\therefore f(t)+g(s)=f(-2)+g(3)$

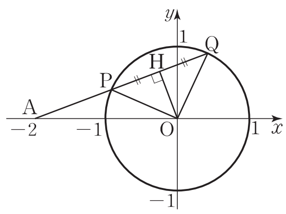
$=\{1+(-2)^2\}+(4\times 3^2-1)$

$=5+35=40$

일등급 UP

＊ 원과 비례의 관계의 활용

위 과정은 중학교에서 배운 원과 비례를 좌표를 이용하여 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 도형을 이용하여도 같은 결과를 얻는다.



$\overline{\text{AP}}\times\overline{\text{AQ}}$

$=(\overline{\text{AH}}-\overline{\text{PH}})\times(\overline{\text{AH}}+\overline{\text{HQ}})$

$=\overline{\text{AH}}^2-\overline{\text{PH}}^2$ ($\because \overline{\text{PH}}=\overline{\text{HQ}}$)

$=\overline{\text{AH}}^2-(\overline{\text{OP}}^2-\overline{\text{OH}}^2)$

$=\overline{\text{AH}}^2+\overline{\text{OH}}^2-1$

$=\overline{\text{AO}}^2-1$

$=2^2-1=3$

29 답 16

$f(x)=ax+b$라 하자.

직선 $f(x)=ax+b$와 원 $x^2+y^2=16$이 접하므로 이차방정식 $x^2+(ax+b)^2=16$은 중근을 갖는다.

즉, 이차방정식 $(a^2+1)x^2+2abx+b^2-16=0$의 판별식을 D라 하면

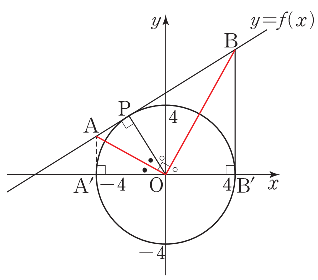
$\dfrac{D}{4}=a^2b^2-(a^2+1)(b^2-16)$

$=16a^2-b^2+16=0 \cdots ㉠$

$\therefore f(-4)f(4)=(-4a+b)(4a+b)$

$=b^2-16a^2=16$ ($\because$ ㉠)

다른 풀이 ①: 원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이 이용하기



두 점 $(-4, 0)$, $(4, 0)$을 각각 A′, B′이라 하고 두 직선 $x=-4$, $x=4$와 직선 $y=f(x)$의 교점을 각각 A, B라 하면

$f(-4)=\overline{\text{AA}'}$, $f(4)=\overline{\text{BB}'}$이고

두 직선 AA′, BB′은 원의 접선이므로

$\overline{\text{AA}'}=\overline{\text{AP}}$, $\overline{\text{BB}'}=\overline{\text{BP}}$이고

원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 접점까지의 길이가 서로 같아.

$\angle\text{AOA}'=\angle\text{AOP}$, $\angle\text{BOB}'=\angle\text{BOP}$이므로

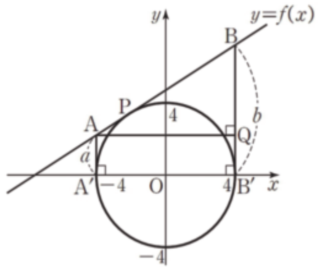
삼각형 AOB는 $\angle\text{AOB}=90°$인 직각삼각형이다.

직각삼각형의 변 사이의 관계에서

$\overline{\text{AP}}\times\overline{\text{BP}}=\overline{\text{OP}}^2=16$

$\therefore f(-4)f(4)=\overline{\text{AA}'}\times\overline{\text{BB}'}=\overline{\text{AP}}\times\overline{\text{BP}}=16$

다른 풀이 ②: 피타고라스 정리 이용하기



두 점 $(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$을 각각 A′, B′이라 하고 두 직선 $x=-4$, $x=4$와 직선 $y=f(x)$의 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(-4,\ f(-4))$, $B(4,\ f(4))$이고

$\overline{AA'}=f(-4)=a$, $\overline{BB'}=f(4)=b$라 하고 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 BB′과 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{AB}=a+b$, $\overline{BQ}=b-a$

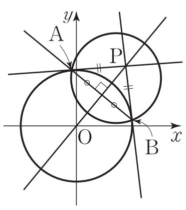
이때, $\overline{AQ}=8$이므로 직각삼각형 AQB에서

$(a+b)^2=(b-a)^2+8^2$

$4ab=64 \qquad \therefore ab=16$

$\therefore f(-4)f(4)=ab=16$

30 답 8



$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 점 $P(a,\ b)$는 공통현인 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위에 있다.

공통현의 수직이등분선은 두 원의 중심 $(0,\ 0)$, $(3,\ 4)$를 연결하는 직선이므로

$y=\dfrac{4}{3}x$에서 $b=\dfrac{4}{3}a$

따라서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$이므로 $\dfrac{6b}{a}=6\times\dfrac{4}{3}=8$

31 답 7

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(k,\ 1)$을 지나므로

구하는 접선의 방정식은 $y-1=m(x-k)$

$\therefore mx-y-mk+1=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\dfrac{|-mk+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2k^2-2mk+1=4(m^2+1)$

$(k^2-4)m^2-2km-3=0$

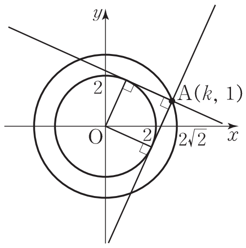
이차방정식의 두 근을 m_1, m_2라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$m_1m_2=\dfrac{-3}{k^2-4}=-1 \qquad \therefore k^2=7$

다른 풀이: $\overline{OA}$가 정사각형의 대각선의 길이임을 이용하기

일반적으로 원 밖의 점에서 원에 그은 두 접선이 수직일 때, 이 점이 나타내는 도형은 원이다.



그림과 같이 점 $A(k,\ 1)$은 원점 O가 중심이고

반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 위에 있다.

한 변의 길이가 2인 정사각형의 대각선의 길이

즉, $\overline{OA}=\sqrt{k^2+1^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore k^2=7$

32 답 ②

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=4$이다.

이 직선이 원 $(x-6)^2+y^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나려면

원의 중심 $(6,\ 0)$과 직선 $ax+by=4$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1보다 작아야 하므로

$\dfrac{|6a-4|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ ⋯ ㉠

또, 점 $P(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $\dfrac{|6a-4|}{\sqrt{4}}<1$

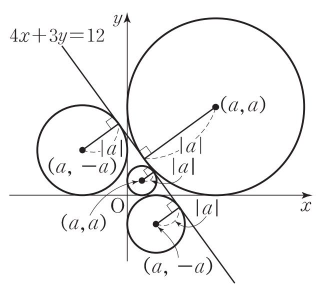
$|6a-4|<2$

$-2<6a-4<2$

$2<6a<6 \qquad \therefore \dfrac{1}{3}<a<1$

33 답 ⑤

그림과 같이 조건을 만족시키는 원을 원의 중심의 x좌표와 y좌표가 같은 부호일 때와 다른 부호일 때로 경우를 나누어서 구해 보자.



(i) 원의 중심의 x좌표와 y좌표의 부호가 같을 때,

원의 중심이 $(a,\ a)$이고 원의 반지름의 길이가 $|a|$라 하자.

점 $(a,\ a)$와 직선 $4x+3y=12$ 사이의 거리가 $|a|$이므로

$\dfrac{|4a+3a-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|a|$에서

$|7a-12|=|5a|$

$7a-12=\pm 5a$

$\therefore a=1$ 또는 $a=6$

(ii) 원의 중심의 x좌표와 y좌표의 부호가 다를 때,

원의 중심이 $(a,\ -a)$이고 원의 반지름의 길이가 $|a|$라 하자.

점 $(a,\ -a)$와 직선 $4x+3y=12$ 사이의 거리가 $|a|$이므로

$\dfrac{|4a-3a-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|a|$에서

$|a-12|=|5a|$

$a-12=\pm 5a$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

(i), (ii)에 의하여 구하는 원의 반지름의 길이는 $|a|$이므로 반지름의 길이가 가장 클 때는 $a=6$, 원의 중심이 $(6,\ 6)$일 때이고, 반지름의 길이가 가장 작을 때는 $a=1$, 원의 중심이 $(1,\ 1)$일 때이다.

따라서 두 원의 중심 $(6,\ 6)$과 $(1,\ 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(6-1)^2+(6-1)^2}=5\sqrt{2}$

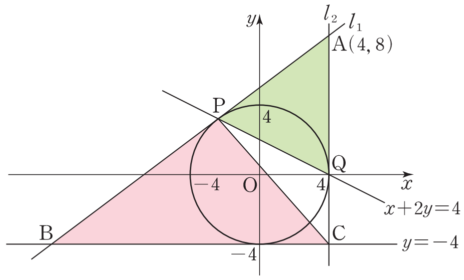
34 답 ④

원 밖의 점 $A(4,\ 8)$의 극선의 방정식은 $4x+8y=16$

극선: 이차곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선
원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 점 $P(x_1,\ y_1)$의 극선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$

즉, $x+2y=4$이므로

두 접점 P, Q는 원 $x^2+y^2=16$과 직선 $x+2y=4$의 교점이다.



두 식을 연립하면

$(4-2y)^2+y^2=16$

$5y^2-16y=0,\ y(5y-16)=0$

$\therefore y=\dfrac{16}{5}$ 또는 $y=0$

$\therefore y=\dfrac{16}{5},\ x=-\dfrac{12}{5}$ 또는 $y=0,\ x=4$ ($\because x=4-2y$)

이때, 점 P의 x좌표가 점 Q의 x좌표보다 작으므로

$P\left(-\dfrac{12}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$, $Q(4,\ 0)$이다.

따라서 점 P에서의 접선 l_1은 $-\dfrac{12}{5}x+\dfrac{16}{5}y=16$

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$

식을 정리하면 $\dfrac{16}{5}y=\dfrac{12}{5}x+16$

$\therefore l_1 : y=\dfrac{3}{4}x+5$

또한, 점 Q에서의 접선 $l_2 : x=4$이다.

이제 직선 $y=-4$가 두 직선 l_1, l_2와 만나는 두 점 B, C의 좌표를 구하자.

점 B는 직선 l_1 위의 y좌표가 -4인 점이므로

$-4=\dfrac{3}{4}x+5$

$\dfrac{3}{4}x=-9 \qquad \therefore x=-12$

즉, $B(-12,\ -4)$이고

점 C는 직선 l_2 위의 y좌표가 -4인 점이므로 $C(4,\ -4)$이다.

$\overline{AQ}=8$이고

삼각형 APQ에서 밑변을 $\overline{AQ}$로 할 때의 높이를 h_1이라 하면

$h_1=$(점 A의 x좌표)$-$(점 P의 x좌표)

$=4-\left(-\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{32}{5}$

$\therefore S_1=\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{32}{5}=\dfrac{4\times 32}{5}$

$\overline{BC}=4-(-12)=16$이고

삼각형 PBC에서 밑변을 $\overline{BC}$로 할 때의 높이를 h_2라 하면

$h_2=$(점 P의 y좌표)$-$(점 C의 y좌표)

$=\dfrac{16}{5}-(-4)=\dfrac{36}{5}$

$\therefore S_2=\dfrac{1}{2}\times 16\times\dfrac{36}{5}=\dfrac{8\times 36}{5}$

$\therefore \dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\frac{8\times 36}{5}}{\frac{4\times 32}{5}}=\dfrac{9}{4}$

다른 풀이 : 점과 직선 사이의 거리 이용하기

점 A를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y=m(x-4)+8,\ mx-y-4m+8=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$에서 접선까지의 거리는 4이므로

$\dfrac{|-4m+8|}{\sqrt{m^2+1}}=4$

$4|m-2|=4\sqrt{m^2+1},\ |m-2|=\sqrt{m^2+1}$

$m^2-4m+4=m^2+1,\ 4m=3$

$\therefore m=\dfrac{3}{4}$

따라서 접선의 방정식은

$y=\dfrac{3}{4}(x-4)+8=\dfrac{3}{4}x+5$이다.

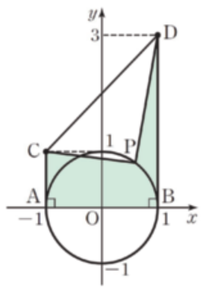
이때, 원 밖의 점에서 원에 그은 접선은 두 개이므로

나머지 하나의 접선은 기울기를 갖지 않는 직선, 즉 $x=4$이다.

따라서 두 접선 l_1, l_2는 $y=\dfrac{3}{4}x+5$, $x=4$이다.

(이하 동일)

35 답 ②



네 점 $A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C(-1,\ 1)$, $D(1,\ 3)$이라 하면

$\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=1$이다. 이 원 위의 점을 $P(x,\ y)\ (y>0)$라 하자.

(다각형 ABDPC의 넓이)

=(사다리꼴 ABDC의 넓이)−(삼각형 DPC의 넓이)

이므로 다각형 ABDPC의 넓이는 삼각형 DPC의 넓이가 최소일 때 최대가 된다.

$$(\text{사다리꼴 ABDC의 넓이})=\frac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{AB}$$

$$=\frac{1}{2}\times(1+3)\times 2=4\ \cdots\ ㉠$$

직선 CD의 방정식은 $y=\frac{2}{2}(x-1)+3=x+2$, 즉 $x-y+2=0$

점 P와 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리의 최솟값은

(원의 중심 O와 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리)

$\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

−(원의 반지름의 길이)$=\sqrt{2}-1$

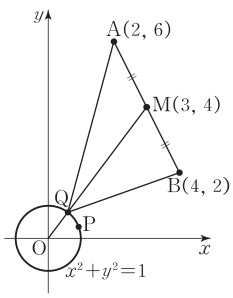
이므로 삼각형 DPC의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times(\sqrt{2}-1)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 다각형 ABDPC의 넓이의 최댓값은

$4-(2-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$

36 답 42



그림과 같이 두 점 $A(2,\ 6)$, $B(4,\ 2)$의 중점을 $M(3,\ 4)$라 하고, 원 $x^2+y^2=1$과 $\overline{OM}$의 교점을 Q라 하면

중선정리에 의하여

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)$$

$$=2(\overline{PM}^2+5)$$

$$\ge 2(\overline{QM}^2+5)$$

$\overline{QM}=\overline{OM}-\overline{OQ}=5-1=4$이므로

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 $2\times(4^2+5)=2\times21=42$

37 답 6

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로 두 직선 l, m에 대하여

직선 l : $y=\sqrt{3}x$,

직선 m : $y=-\sqrt{3}x$이다.

원 위의 제1사분면에 있는 점을 $P(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$라 하면

$a^2+b^2=r^2\ \cdots\ ㉠$

점 P에서 x축과 두 직선 l, m에 내린 수선의 발이 각각 A, B, C이므로

$\overline{PA}=b$

$$\overline{PB}=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{\sqrt{3+1}}=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{2}$$

$$\overline{PC}=\frac{|\sqrt{3}a+b|}{\sqrt{3+1}}=\frac{|\sqrt{3}a+b|}{2}$$

∵ 점과 직선 사이의 거리

$$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=b^2+\left(\frac{\sqrt{3}a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a+b}{2}\right)^2$$

$$=b^2+\frac{2(3a^2+b^2)}{4}=\frac{3a^2+3b^2}{2}$$

$$=\frac{3}{2}(a^2+b^2)=\frac{3}{2}r^2\ (\because\ ㉠)=54$$

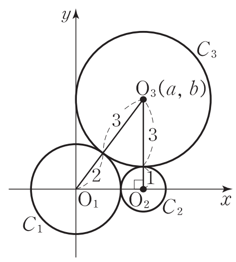
$r^2=36\qquad\therefore\ r=6$

38 답 7

세 원 C_1, C_2, C_3의 중심을 각각 $O_1(0,\ 0)$, $O_2(3,\ 0)$, $O_3(a,\ b)$라 하면 세 원은 모두 외접하므로 원의 중심 사이의 거리는 각각

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이의 합이 $\overline{O_1O_2}$와 같으므로 두 원 C_1, C_2도 외접해.

반지름의 길이의 합과 같다.



$\overline{O_1O_2}=2+1=3$, $\overline{O_2O_3}=1+3=4$,

$\overline{O_3O_1}=3+2=5$

즉, 삼각형 $O_1O_2O_3$은 $\overline{O_3O_1}$이 빗변인 직각삼각형이다.

또한, 원 C_3의 중심 $O_3(a,\ b)$에 대하여 $ab>0$이므로 세 원은 그림과 같다.

점 O_3은 제1사분면 또는 제3사분면 위의 점이야.

따라서 $a=3$, $b=4$이므로 $a+b=7$

39 답 21

원 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$의 중심을 A라 하면

$A(1,\ -1)$이고,

원 $(x-6)^2+(y-4)^2=9$의 중심을 B라 하면

$B(6,\ 4)$이다.

점 $P(a,\ b)$에서 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$에 이르는 접선의 길이는 피타고라스 정리에 의해

$$\sqrt{\overline{PA}^2-1^2}=\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2-1}$$

점 $P(a,\ b)$에서 원 $(x-6)^2+(y-4)^2=9$에 이르는 접선의 길이는 피타고라스 정리에 의해

$$\sqrt{\overline{PB}^2-3^2}=\sqrt{(a-6)^2+(b-4)^2-9}$$

두 접선의 길이가 같으므로

$$\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2-1}=\sqrt{(a-6)^2+(b-4)^2-9}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(a-1)^2+(b+1)^2-1=(a-6)^2+(b-4)^2-9$$

$10a+10b=42$

$\therefore\ 5a+5b=21$

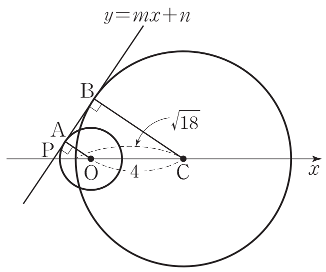
참고 이때, 점 P는 직선

$$(x-1)^2+(y+1)^2-1-\{(x-6)^2+(y-4)^2-9\}=0$$

즉, $5x+5y-21=0$ 위의 점이다.

40 답 5

두 원 $x^2+y^2=2$, $(x-4)^2+y^2=18$의 중심을 각각 $O(0, 0)$, $C(4, 0)$, 공통접선의 접점을 각각 A, B라 하고 구하는 직선이 두 원의 중심을 지나는 직선인 x축과 만나는 점을 P라 하자.



$\triangle PAO \backsim \triangle PBC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{PO} : \overline{PC} = \underbrace{\overline{AO} : \overline{BC}}_{\sqrt{2} : 3\sqrt{2}} = 1 : 3$

즉, $\overline{PO} : \overline{OC} = 1 : 2$이고 $\overline{OC}=4$이므로 $\overline{PO}=2$

따라서 점 P의 좌표는 $(-2, 0)$이고, 구하는 직선의 기울기가 m이므로 직선의 방정식은 $y=m(x+2)$라 할 수 있다.

원 $x^2+y^2=2$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+2m=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로

$\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$에서 $4m^2=2m^2+2$ $\quad \therefore m^2=1$

이때, $n=2m$이므로 $n^2=4m^2=4$

$\therefore m^2+n^2=5$

다른 풀이 : 원의 중심과 접선 사이의 거리 이용하기

직선 $y=mx+n$이 원 $x^2+y^2=2$에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+n=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같다.

즉, $\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$

$\therefore n^2-2m^2=2$ ⋯ ㉠

또, 직선 $y=mx+n$이 원 $(x-4)^2+y^2=18$에 접하므로 원의 중심 $(4, 0)$과 직선 $mx-y+n=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $3\sqrt{2}$와 같다.

즉, $\dfrac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=3\sqrt{2}$

$(4m+n)^2=18m^2+18$

$16m^2+8mn+n^2=18m^2+18$

$\therefore n^2-2m^2=-8mn+18$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $mn=2$

$n=\dfrac{2}{m}$를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{4}{m^2}-2m^2=2$에서 $4-2m^4-2m^2=0$

$m^4+m^2-2=0$, $(m^2-1)(m^2+2)=0$

$\therefore m^2=1$ ($\because m$은 실수)

이것을 ㉠에 대입하면 $n^2=4$

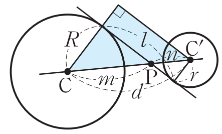
$\therefore m^2+n^2=5$

일등급 UP

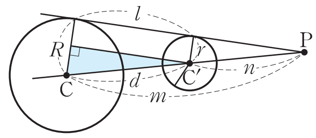
*** 두 원의 공통접선**

두 원의 중심 C, C′에 대하여 직선 CC′과 공통접선의 교점을 P라 하자.

(i) 점 P는 선분 CC′을 $\underline{m : n}$으로 내분하는 점이다. 반지름의 길이의 비



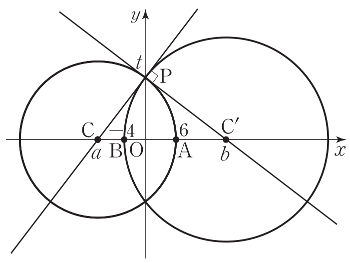
(ii) 점 P는 선분 CC′을 $\underline{m : n}$으로 외분하는 반지름의 길이의 비 점이다.



41 답 12

그림과 같이 중심이 x축 위에 있고 두 점 $A(6, 0)$, $P(0, t)$를 지나는 원의 중심을 $C(a, 0)$, 중심이 x축 위에 있고 두 점 $B(-4, 0)$, $P(0, t)$를 지나는 원의 중심을 $C'(b, 0)$이라 하면 직교하는 두 원의 접선은 각각 다른 원의 중심을 지나므로 삼각형 PCC′은 직각삼각형이다.

또한, $t>4$이므로 $a<0$, $b>0$이다.



$\overline{CA}^2=\overline{CP}^2$에서 $(a-6)^2=a^2+t^2$

$\therefore t^2=-12a+36$ ⋯ ㉠

$\overline{C'B}^2=\overline{C'P}^2$에서 $(b+4)^2=b^2+t^2$

$\therefore t^2=8b+16$ ⋯ ㉡

$\overline{CC'}^2=\overline{CP}^2+\overline{C'P}^2$에서 $(a-b)^2=a^2+t^2+b^2+t^2$

$\therefore t^2=-ab$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡에서 $-12a+36=8b+16$

$12a=20-8b$ $\quad \therefore a=\dfrac{5-2b}{3}$ ⋯ ㉣

㉡, ㉢에서 $8b+16=-ab$이므로 ㉣을 대입하면

$8b+16=-\dfrac{b(5-2b)}{3}$

$-24b-48=5b-2b^2$, $2b^2-29b-48=0$

$(2b+3)(b-16)=0$

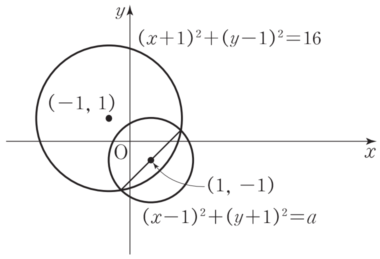
$\therefore b=16$ ($\because b>0$)

㉣에서 $a=\dfrac{5-2\times16}{3}=\dfrac{-27}{3}=-9$이므로

㉢에서 $t^2=144$

$\therefore t=12$ ($\because t>4$)

42 답 8



원 $(x+1)^2+(y-1)^2=16$이 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=a$의 둘레의 길이를 이등분하기 위해서는 두 원의 공통현이 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=a$의 지름이 되어야 한다.

즉, 원의 중심 $(1, -1)$이 공통현 위에 있어야 한다.

두 원 $x^2+y^2+2x-2y-14=0$,

$x^2+y^2-2x+2y+2-a=0$의 공통현의 방정식은

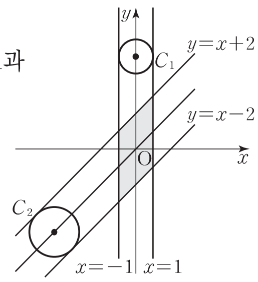
$(x^2+y^2+2x-2y-14)-(x^2+y^2-2x+2y+2-a)=0$

$4x-4y-16+a=0$

이 직선이 점 $(1, -1)$을 지나므로

$4+4-16+a=0 \qquad \therefore a=8$

43 답 8



원 C_1은 y축과 평행하고 원점으로부터 1만큼 떨어진 두 직선 $x=1$ 및 $x=-1$과 접하면서 그 사이를 움직인다.

원 C_2는 기울기가 1이고 원점으로부터 $\sqrt{2}$만큼 떨어진 두 직선 $y=x+2$ 및
점과 직선 사이의 거리 공식을 이용해서 구해도 돼.
$y=x-2$와 접하면서 그 사이를 움직인다.

따라서 두 원이 움직이는 영역의 공통부분은 네 직선 $x=1$, $x=-1$, $y=x+2$, $y=x-2$로 둘러싸인 영역이므로

구하는 넓이는 $4\times2=8$
평행사변형의 넓이

44 답 ②

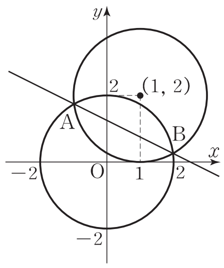
ㄱ. 방정식 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$은 m의 값에 관계없이 $x-y+1=0$과 $x^2+y^2-1=0$을 만족시키는 해를 갖는다. 즉, m의 값에 관계없이 두 도형 $x-y+1=0$과 $x^2+y^2-1=0$의 교점인 $(0, 1)$과 $(-1, 0)$을 지난다. (참)

ㄴ. 도형 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$은
$m=0$인 경우에는 직선 $x-y+1=0$을 나타내고,
$m\neq0$인 경우에는 원을 나타낸다.
이때, 실수 x, y의 값에 관계없이
$(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=t(x^2+y^2-1)$을 만족시키는 실수 t가 존재하지 않기 때문에 원 $x^2+y^2-1=0$을 나타낼 수 없다.
따라서 도형 C와 원 $x^2+y^2=1$의 교점은 $(0, 1)$, $(-1, 0)$뿐이다. (참)

ㄷ. 【반례】 $m=0$이면 도형 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$은 $x-y+1=0$이 되어 직선 $x-y+1=0$과 일치한다. 이때, 교점은 무수히 많다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

45 답 7



점 $(1, 0)$에서 x축에 접하는 호 AB를 원의 일부로 갖는 원의 방정식을 구하자.

이 호는 반지름의 길이가 2인 원의 일부이므로 구하는 원의 반지름의 길이도 2이다.

또, 이 원은 점 $(1, 0)$에서 x축에 접하므로 이 원의 중심은 $(1, 2)$이다.

따라서 이 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

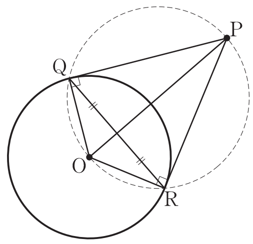
이때, 접힌 선분 AB는 원 $x^2+y^2=4$ ⋯ ㉠와 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ ⋯ ㉡의 공통현이므로

직선 AB의 방정식은 $2x+4y-5=0$ ($\because$ ㉠$-$㉡)

따라서 직선 AB의 x절편은 $\frac{5}{2}$이므로

$p=2$, $q=5 \qquad \therefore p+q=7$

46 답 ⑤



ㄱ. $\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$, $\overline{OR}\perp\overline{PR}$에서
$\angle OQP+\angle ORP=180^\circ$이므로
네 점 O, P, Q, R는 $\overline{OP}$가 지름인 원 $x(x-a)+y(y-b)=0$ 위에 있다. (참)
두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

ㄴ. ㄱ에서 네 점 O, P, Q, R를 지나는 원의 방정식은 $x^2+y^2-ax-by=0$이므로 두 점 Q, R는 두 원

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2-ax-by=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

의 교점이다. (참)

ㄷ. 두 점 Q, R를 지나는 직선의 방정식은 두 원 ㉠, ㉡의 공통현을 포함하는 직선이므로

$x^2+y^2-r^2-(x^2+y^2-ax-by)=0$

$ax+by-r^2=0$

$\therefore ax+by=r^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

일등급 UP

＊ 원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선(극선)의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 한 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$, $\mathrm{R}(x_2, y_2)$라 하면 두 접선 PQ, PR의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2,\ x_2x+y_2y=r^2$$

이다. 이때, 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 두 접선 위의 점이므로

$$ax_1+by_1=r^2,\ ax_2+by_2=r^2$$

그런데 이 식은 직선 $ax+by=r^2$이 두 점 $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$, $\mathrm{R}(x_2, y_2)$를 지남을 의미한다. 두 점을 지나는 직선은 유일하므로 직선 QR의 방정식은 $ax+by=r^2$이다.

47 답 ①

원 밖의 점 Q에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QO}}$이고 $\angle\mathrm{BPO}=90^\circ$이므로
$\because \angle\mathrm{OPA}=90^\circ$

점 Q는 삼각형 PBO의 외심이다.

즉, $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QO}}=\overline{\mathrm{QB}}$이다.

$\therefore \triangle\mathrm{PQB} : \triangle\mathrm{PBO}=1:2 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이고

원의 접선과 할선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{BO}}^2=\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{BA}}$에서 $3^2=\overline{\mathrm{BP}}\times5$

$\therefore \overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{9}{5}$

이때, $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{BP}}=5-\dfrac{9}{5}=\dfrac{16}{5}$이므로

$\overline{\mathrm{BP}} : \overline{\mathrm{PA}}=9:16$

$\therefore \triangle\mathrm{PBO} : \triangle\mathrm{PAO}=9:16 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\triangle\mathrm{PQB} : \triangle\mathrm{PBO} : \triangle\mathrm{PAO}=9:18:32$

㉠에서 $\triangle\mathrm{PQB} : \triangle\mathrm{PBO}=1:2=9:18$
㉡에서 $\triangle\mathrm{PBO} : \triangle\mathrm{PAO}=9:16=18:32$

$\therefore \triangle\mathrm{PQB} : \triangle\mathrm{PAO}=9:32$

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\triangle\mathrm{PQB}}{\triangle\mathrm{PAO}}=\dfrac{9}{32}$

다른 풀이 : 직선 OP의 기울기 이용하기

본풀이에서 점 Q는 삼각형 PBO의 외심이므로

$\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{2}$ $(\because \overline{\mathrm{OB}}=3)$

두 삼각형 AOP, ABO가 AA 닮음이므로 $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{ABO}$

$\tan(\angle\mathrm{AOP})=\tan(\angle\mathrm{ABO})=\dfrac{\overline{\mathrm{AO}}}{\overline{\mathrm{BO}}}=\dfrac{4}{3}$

따라서 직선 OP의 방정식은 $y=\dfrac{4}{3}x$

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 $b=\dfrac{4}{3}a$

즉, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4} \cdots$ ㉢

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BQ}}\times a=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times a=\dfrac{3}{4}a$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times b=\dfrac{1}{2}\times4\times b=2b$

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{3}{4}a}{2b}=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{4}$ $(\because$ ㉢$)$

$=\dfrac{9}{32}$

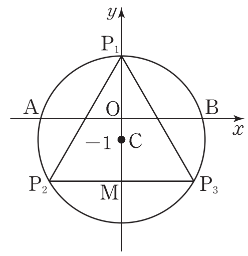
48 답 540

원 $x^2+(y+1)^2=r^2$을 C라 하자.

원 C의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(0, -1)$이다.

삼각형 ABP에서 선분 AB를 밑변으로 할 때 밑변 AB는 x축 위에 있으므로 삼각형 ABP의 넓이가 S가 되도록 하는 원 위의 점 P는 x축으로부터 같은 거리에 있는 점이다.

점 P가 3개 존재하려면 원의 대칭성에 의해 한 점은 y축 위에 있어야 한다.



그림과 같이 y축 위에 있는 점을 P_1, 나머지 두 점을 P_2, P_3이라 하자.

변 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{OP}_1}=\overline{\mathrm{OM}} \cdots$ ㉠

한편, 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$이 정삼각형이므로 원의 중심 C는 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$의 무게중심이다.
정삼각형은 외심과 무게중심이 같아.

$\overline{\mathrm{CP}_1} : \overline{\mathrm{CM}}=2:1$이고 $\overline{\mathrm{CP}_1}=r$이므로 $\overline{\mathrm{CM}}=\dfrac{1}{2}r$

$\overline{\mathrm{OC}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{OP}_1}=r-1$, $\overline{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}r+1$

㉠에서 $r-1=\dfrac{1}{2}r+1$

$\dfrac{1}{2}r=2 \qquad \therefore r=4$

$\overline{\mathrm{OP}_1}=r-1=3$이고

원 $x^2+(y+1)^2=16$이 x축과 만나는 두 점 $\mathrm{A}(-\sqrt{15}, 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{15}, 0)$에 대하여

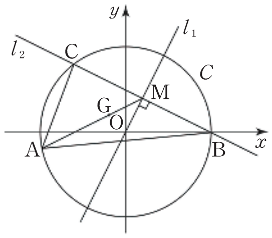
$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{15}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OP}_1}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{15}\times3=3\sqrt{15}$

$\therefore r\times S^2=4\times(3\sqrt{15})^2=4\times135=540$

49 답 17



삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 $\mathrm{M}(a,\ b)$, 무게중심을 G라 하면

$\overline{\mathrm{AG}}:\overline{\mathrm{GM}}=2:1$이므로

$$\mathrm{G}(-1,\ 1)=\left(\frac{2\times a+1\times(-5)}{2+1},\ \frac{2\times b+1\times(-1)}{2+1}\right)$$

$$=\left(\frac{2a-5}{3},\ \frac{2b-1}{3}\right)$$

따라서 $a=1$, $b=2$이고 점 M의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

조건 (나)에서 세 점 A, B, C를 지나는 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{26}$이고 $\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

삼각형 OBM에서 $\underline{\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{26-5}=\sqrt{21}}$

∵ $\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{CM}}$이면 $\mathrm{BC}\perp\mathrm{OM}$

$\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{BM}}=2\sqrt{21}$

한편, 두 점 O, M을 지나는 직선을 l_1, 두 점 B, C를 지나는 직선을 l_2라 하면

직선 l_1의 기울기가 $\dfrac{2-0}{1-0}=2$이므로

직선 l_1에 수직인 직선 l_2의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

즉, 점 $\mathrm{M}(1,\ 2)$를 지나는 직선 l_2의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)+2=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

변 BC를 밑변으로 하는 삼각형 ABC의 높이를 h라 하면

점 $\mathrm{A}(-5,\ -1)$과 직선 $l_2: x+2y-5=0$ 사이의 거리이므로

$$h=\frac{|-5-2-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{12}{\sqrt{5}}=\frac{12}{5}\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

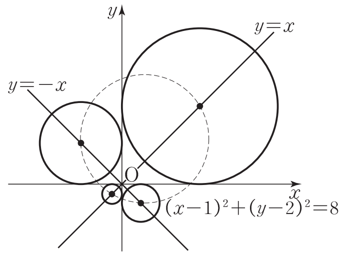
$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{21}\times\frac{12}{5}\sqrt{5}=\frac{12}{5}\sqrt{105}$$

따라서 $p=5$, $q=12$이므로 $p+q=5+12=17$

50 답 16

x축 및 y축에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$과 두 직선 $y=x$, $y=-x$의 교점이 4개이므로 x축 및 y축에 동시에 접하는 원도 4개이고 그 교점이 각 원의 중심이고 교점의 x좌표 또는 y좌표의 절댓값이 반지름의 길이이다. ······ ⓐ



(i) 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 a, b라 하면 $\underline{(x-1)^2+(x-2)^2=8}$, 즉 $2x^2-6x-3=0$의 두

연립한 방정식

근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=3$, $ab=-\dfrac{3}{2}$

두 원의 넓이의 합은 $\pi a^2+\pi b^2$이므로

$$\pi a^2+\pi b^2=\pi(a^2+b^2)=\pi\{(a+b)^2-2ab\}$$

$$=\pi\left\{3^2-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}=12\pi$$ ······ ⓑ

(ii) 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$과 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표를 c, d라 하면 $(x-1)^2+(-x-2)^2=8$, 즉 $2x^2+2x-3=0$의 두 근이 c, d이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$c+d=-1$, $cd=-\dfrac{3}{2}$

두 원의 넓이의 합은 $\pi c^2+\pi d^2$이므로

$$\pi c^2+\pi d^2=\pi(c^2+d^2)=\pi\{(c+d)^2-2cd\}$$

$$=\pi\left\{(-1)^2-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}=4\pi$$ ······ ⓒ

(i), (ii)에 의하여 구하는 네 원의 넓이의 합은 16π이므로

$S=16$ ······ ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ 원이 x축, y축에 접하는 조건을 찾는다. ······ [30%]
ⓑ 원과 직선 $y=x$가 만날 경우의 원의 넓이의 합을 구한다. ······ [30%]
ⓒ 원과 직선 $y=-x$가 만날 경우의 원의 넓이의 합을 구한다. ······ [30%]
ⓓ 구하는 모든 원의 넓이의 합을 계산하여 S의 값을 구한다. ······ [10%]

51 답 4

중심이 $(a,\ b)$인 원과 두 직선 $2x+y=0$, $x-2y=0$이 접하므로

$$\frac{|2a+b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|a-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$2a+b=\pm(a-2b)$

$\therefore b=3a$ 또는 $b=-\dfrac{1}{3}a$ ······ ⓐ

<u>이 원이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로 원의 중심은 제1사분면에 있다.</u>

원은 두 직선의 위쪽에 존재하므로 제1사분면과 제2사분면을 지나고, 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 기울기가 더 완만하므로 원의 중심은 제1사분면에 있어.

따라서 $b=3a\ (a>0)$이고, 반지름의 길이는

$$\frac{|2a+b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|2a+3a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}a$$ ······ ⓑ

구하는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-3a)^2=5a^2$이라 하면

점 $(3,\ 2)$를 지나므로 $(3-a)^2+(2-3a)^2=5a^2$

$5a^2-18a+13=0$

$(a-1)(5a-13)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=\dfrac{13}{5}$ ---------- ⓒ

따라서 작은 원의 중심은 $a=1$일 때, 점 $(1, 3)$이므로

$a+b=1+3=4$ ---------- ⓓ

| 채점기준 |

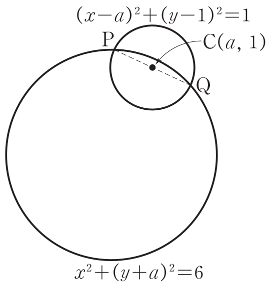
ⓐ a와 b의 관계식을 구한다. ---------- [30%]
ⓑ 반지름의 길이를 a 또는 b에 대한 식으로 나타낸다. ---------- [30%]
ⓒ 원의 방정식을 세우고, a 또는 b의 값을 구한다. ---------- [30%]
ⓓ $a+b$의 값을 구한다. ---------- [10%]

52 답 1

$\overline{\mathrm{PQ}}$는 두 원의 공통현이다.

한 원의 현의 길이는 지름의 길이보다 작거나 같으므로 공통현의 길이는 두 원의 지름의 길이보다 작거나 같다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최대일 때는 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 두 원 중 작은 원인 $(x-a)^2+(y-1)^2=1$의 지름일 때이다. ---------- ⓐ



이때, 원 $(x-a)^2+(y-1)^2=1$의 중심을 C라 하면 공통현 PQ는 C$(a, 1)$을 지난다.

공통현 PQ의 방정식은

$\{x^2+(y+a)^2-6\}-\{(x-a)^2+(y-1)^2-1\}=0$

$2ax+2(a+1)y-6=0$

$\therefore ax+(a+1)y-3=0$ ---------- ⓑ

이 방정식이 점 C$(a, 1)$을 지나므로

$a^2+a-2=0$, $(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

따라서 양수 a의 값은 1이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 선분 PQ의 길이가 최대가 되는 조건을 찾는다. ---------- [40%]
ⓑ 공통현 PQ의 방정식을 구한다. ---------- [30%]
ⓒ 양수 a의 값을 구한다. ---------- [30%]

고난도 도전 문제

문제편 p.46~47

53 답 5

P(x, y)라 하면

$\overline{\mathrm{PB}}=3\overline{\mathrm{PO}}$에서 $\overline{\mathrm{PB}}^2=9\overline{\mathrm{PO}}^2$이므로

$(x+3)^2+y^2=9(x^2+y^2)$

$8x^2-6x+8y^2=9$, $x^2-\dfrac{3}{4}x+y^2=\dfrac{9}{8}$

$\left(x-\dfrac{3}{8}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{8}+\dfrac{9}{64}=\dfrac{9(8+1)}{64}=\left(\dfrac{9}{8}\right)^2$

즉, 원의 중심이 $\left(\dfrac{3}{8}, 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{9}{8}$인 원을 C_1이라 하면 점 P는 원 C_1 위에 있다.

또한, $3\overline{\mathrm{PO}}=9\overline{\mathrm{PA}}$에서 $\overline{\mathrm{PO}}=3\overline{\mathrm{PA}}$, 즉 $\overline{\mathrm{PO}}^2=9\overline{\mathrm{PA}}^2$이므로

$x^2+y^2=9\{(x-a)^2+y^2\}$

$8x^2-18ax+8y^2+9a^2=0$, $x^2-\dfrac{9}{4}ax+y^2+\dfrac{9}{8}a^2=0$

$\left(x-\dfrac{9a}{8}\right)^2+y^2=-\dfrac{9a^2}{8}+\dfrac{81a^2}{64}=\dfrac{9a^2}{64}=\left(\dfrac{3a}{8}\right)^2$

즉, 원의 중심이 $\left(\dfrac{9a}{8}, 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{3a}{8}$인 원을 C_2라 하면 점 P는 원 C_2 위에 있다.

따라서 $\overline{\mathrm{PB}}=3\overline{\mathrm{PO}}=9\overline{\mathrm{PA}}$를 만족시키는 점 P가 존재하려면 두 원 C_1, C_2가 교점을 가져야 한다.

두 원의 중심 사이의 거리는 $\left|\dfrac{9a}{8}-\dfrac{3}{8}\right|=\dfrac{|9a-3|}{8}$ $(a>0)$

두 원이 교점을 가지려면 두 원의 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 차와 합 사이여야 하므로

$\dfrac{|9-3a|}{8}\le\dfrac{|9a-3|}{8}\le\dfrac{9+3a}{8}$

(두 원의 반지름의 길이의 차)$=\left|\dfrac{9}{8}-\dfrac{3a}{8}\right|=\dfrac{|9-3a|}{8}$

(두 원의 반지름의 길이의 합)$=\left|\dfrac{9}{8}+\dfrac{3a}{8}\right|=\dfrac{9+3a}{8}$

즉, $|3-a|\le|3a-1|\le3+a$

(i) $|3-a|\le|3a-1|$에서

$(3-a)^2\le(3a-1)^2$

$(3a-1)^2-(3-a)^2\ge0$

$(2a+2)(4a-4)\ge0$

$(a+1)(a-1)\ge0$

$\therefore a\ge1$ ($\because a>0$)

(ii) $|3a-1|\le3+a$에서

$-3-a\le3a-1\le3+a$

$-3-a\le3a-1$에서 $-2\le4a$이고

$3a-1\le3+a$에서 $2a\le4$이므로

$-\dfrac{1}{2}\le a\le2$

$\therefore 0<a\le2$ ($\because a>0$)

(i), (ii)에서 $1\le a\le2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이고 $\alpha^2+\beta^2=5$이다.

다른 풀이 : 내분점과 외분점 이용하기

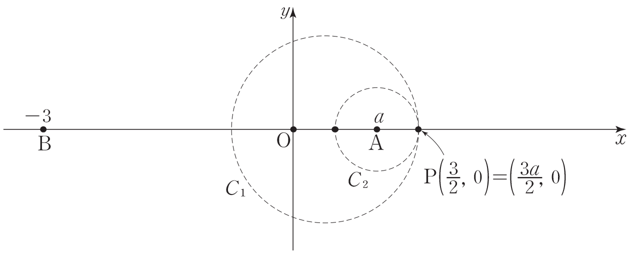
수직선을 이용하면 조금 더 직관적으로 해결할 수 있다.

위 풀이에서 정한 두 원 C_1, C_2가 교점 P를 가지는 a의 값의 범위의 양 끝값을 구하자.

(i) a의 값이 최소일 때는 그림과 같이

($\overline{\mathrm{BO}}$를 $3:1$로 외분하는 점)$=$($\overline{\mathrm{OA}}$를 $3:1$로 외분하는 점)

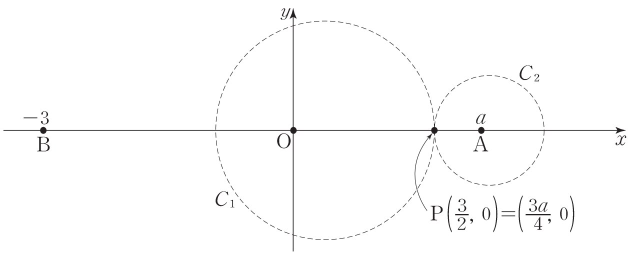
에서 $\dfrac{3}{2}=\dfrac{3a}{2}$ $\quad\therefore a=1$



(ii) a의 값이 최대일 때는 그림과 같이

($\overline{BO}$를 $3:1$로 외분하는 점)$=$($\overline{OA}$를 $3:1$로 내분하는 점)

에서 $\frac{3}{2}=\frac{3a}{4}$ $\quad \therefore a=2$



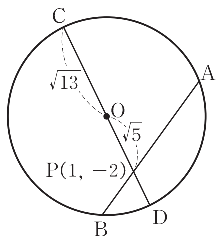
(i), (ii)에 의하여 $1\le a\le 2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$이다.

54 답 80

먼저 $\overline{AB}$의 길이를 구하자.

점 $P(1, -2)$와 원점을 지나는 직선이 원과 만나는 두 점을 C, D라 하면



$\overline{OC}=\overline{OD}=\sqrt{13}$이고

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

원의 성질에 의하여

$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로

$2\overline{PB}\times\overline{PB}=(\overline{OC}+\overline{OP})\times(\overline{OD}-\overline{OP})$ ($\because$ $\overline{PA}=2\overline{PB}$)

$2\overline{PB}^2=(\sqrt{13}+\sqrt{5})\times(\sqrt{13}-\sqrt{5})=13-5=8$

$\therefore$ $\overline{PB}=2$, $\overline{PA}=4$

$\therefore$ $\overline{AB}=\overline{PA}+\overline{PB}=6$

직선 AB의 기울기는 m이고 이 직선은 점 $P(1, -2)$를 지나므로

$y=m(x-1)-2$ ⋯ ㉠, 즉 $mx-y-m-2=0$

원점과 직선 AB 사이의 거리를 d라 하면 선분 AB의 중점 M에 대하여

$d=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{13-9}=2$이므로

$\frac{|-m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$(m+2)^2=4(m^2+1)$, $3m^2-4m=0$

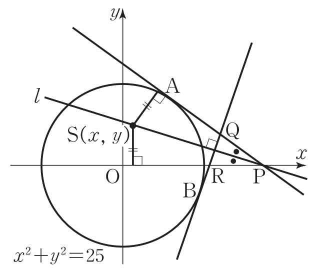
$\therefore m=\frac{4}{3}$ ($\because m\ne 0$) ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 직선 AB의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$

따라서 $m=\frac{4}{3}$, $n=\frac{10}{3}$이므로 $18mn=80$

55 답 ①

그림과 같이 접선 AP와 x축이 이루는 각을 이등분하는 직선 중에서 기울기가 음수인 직선을 l이라 할 때, 삼각형 PQR가 $\overline{PQ}=\overline{PR}$인 이등변삼각형이 되려면 접선 QR가 직선 l에 수직이어야 한다.



원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $A(3, 4)$에서의 접선 $3x+4y=25$와 x축이 이루는 각을 이등분하는 직선 l 위의 한 점을 $S(x, y)$라 하면

점 S와 두 직선 $3x+4y=25$, $y=0$ 사이의 거리가 같으므로

$\frac{|3x+4y-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=|y|$

$|3x+4y-25|=|5y|$, $3x+4y-25=\pm 5y$

따라서 직선 l의 방정식은 $3x-y=25$ 또는 $3x+9y=25$

이 중 직선 l은 기울기가 음수인 직선이므로

l : $3x+9y=25$이다. ⋯ ㉠

한편, 원 위의 점 $B(a, b)$에서 원 $x^2+y^2=25$에 그은 접선의 방정식은 $ax+by=25$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡이 서로 수직이므로 $3a+9b=0$ $\quad \therefore a=-3b$ ⋯ ㉢

또, 점 $B(a, b)$는 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

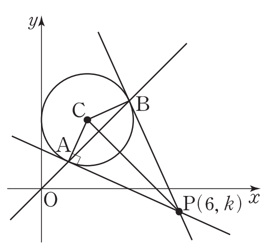
$a^2+b^2=25$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣을 연립하면 $a^2=\frac{45}{2}$, $b^2=\frac{5}{2}$

$\therefore a=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $b=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ($\because a>0, b<0$)

$\therefore ab=-\frac{15}{2}$

56 답 ④



직선 AB는 원 C : $(x-2)^2+(y-3)^2=4$에 대한 점 $P(6, k)$의 극선이므로 직선 AB의 방정식은

$(6-2)(x-2)+(k-3)(y-3)=4$ ⋯ ㉠

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에 대한 점 $P(x_1, y_1)$의 극선의 방정식은 $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

이 직선이 원점을 지나므로

$(6-2)(0-2)+(k-3)(0-3)=4$

$-8-3k+9=4$

$-3k=3 \qquad \therefore k=-1$

따라서 $\mathrm{P}(6,\ -1)$이고,

㉠에서 직선 AB의 방정식은 $x-y=0$이다.

여기서 원 C의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(2,\ 3)$이고

점 C와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|2-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(6-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$

$d:\overline{\mathrm{CP}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}:4\sqrt{2}=1:8$이므로

현 AB는 선분 CP를 $1:7$로 내분한다. … ㉡

한편, 직각삼각형 CAP에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CA}}^2}=\sqrt{32-4}=2\sqrt{7}$이므로

$\square\mathrm{CAPB}=2\times\triangle\mathrm{CAP}=\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{AP}}=4\sqrt{7}$

$\therefore \triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{7}{8}\times\square\mathrm{CAPB}$ ($\because$ ㉡)

$=\dfrac{7}{8}\times4\sqrt{7}=\dfrac{7\sqrt{7}}{2}$

다른 풀이 : 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식 이용하기

원 C의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(2,\ 3)$이다.

$\overline{\mathrm{CA}}\perp\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{CB}}\perp\overline{\mathrm{BP}}$이므로

두 점 A, B는 선분 CP를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

선분 CP를 지름으로 하는 원의 방정식은

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

$(x-2)(x-6)+(y-3)(y-k)=0$

따라서 직선 AB는 두 원

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$, $(x-2)(x-6)+(y-3)(y-k)=0$

의 교점을 지나는 직선이므로

$\{(x-2)^2+(y-3)^2-4\}$

$-\{(x-2)(x-6)+(y-3)(y-k)\}=0$

$(x-2)^2-(x-2)(x-6)+(y-3)^2-(y-3)(y-k)-4=0$

이 직선이 원점을 지나므로

$(0-2)^2-(0-2)(0-6)+(0-3)^2-(0-3)(0-k)-4=0$

$4-12+9-3k-4=0$

$\therefore k=-1$

(이하 동일)

57 답 18

세 점 $\mathrm{P}(6,\ 4)$, $\mathrm{Q}(a,\ a-2)$, $\mathrm{R}(2a,\ 2a-2)$에서

선분 PQ의 기울기는 $\dfrac{a-2-4}{a-6}=1$,

선분 QR의 기울기는 $\dfrac{2a-2-(a-2)}{2a-a}=1$

이므로 세 점 P, Q, R는 한 직선 위의 점이다.
$y=x-2$

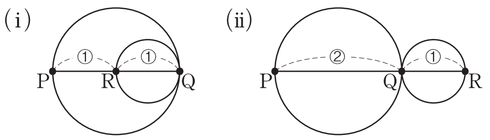
한편, 두 원 C_1과 C_2의 넓이의 비가 $4:1$이므로 두 원의 지름의 길이의 비는 $2:1$이다.
$\because$ 모든 원은 서로 닮음이므로

즉, $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=2:1$

따라서 그림과 같이

(i) 점 R가 선분 PQ의 중점이거나,

(ii) 점 Q가 선분 PR를 $2:1$로 내분한다.

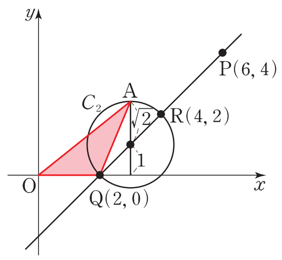


(i) 점 R가 선분 PQ의 중점일 때,

$\dfrac{6+a}{2}=2a$에서 $a=2$

즉, $\mathrm{Q}(2,\ 0)$, $\mathrm{R}(4,\ 2)$이므로

원 C_2의 중심의 좌표는 $(3,\ 1)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.



이때, 원 C_2의 중심 $(3,\ 1)$과 직선 OQ 사이의 거리는 1이므로
x축

원 C_2 위의 점 A와 직선 OQ 사이의 거리의 최댓값은 $\sqrt{2}+1$이다.

따라서 삼각형 OQA의 넓이의 최댓값은

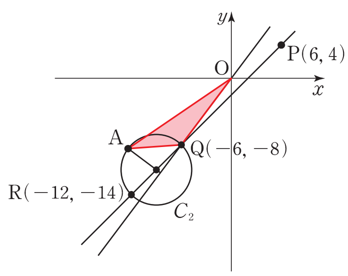
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times(\sqrt{2}+1)=\dfrac{1}{2}\times2\times(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}+1$

(ii) 점 Q가 선분 PR를 $2:1$로 내분할 때,

$\dfrac{2\times2a+1\times6}{2+1}=a$, $\dfrac{4a+6}{3}=a$에서 $a=-6$

즉, $\mathrm{Q}(-6,\ -8)$, $\mathrm{R}(-12,\ -14)$이므로

원 C_2의 중심의 좌표는 $(-9,\ -11)$, 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$이다.



이때, 직선 OQ의 방정식 $4x-3y=0$에서

원 C_2의 중심 $(-9,\ -11)$과 직선 OQ 사이의 거리는

$\dfrac{|4\times(-9)-3\times(-11)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-36+33|}{5}=\dfrac{3}{5}$이므로

원 C_2 위의 점 A와 직선 OQ 사이의 거리의 최댓값은

$\frac{3}{5}+3\sqrt{2}$이다.

따라서 삼각형 OQA의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\left(\frac{3}{5}+3\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\times10\times\left(\frac{3}{5}+3\sqrt{2}\right)$$
$$=3+15\sqrt{2}$$

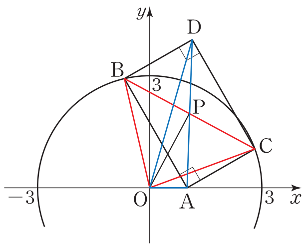
(i), (ii)에서 삼각형 OQA의 넓이의 최댓값은 $3+15\sqrt{2}$이므로

$m=3$, $n=15$

$\therefore m+n=18$

58 답 ③

직사각형 ABDC의 두 대각선의 교점을 P라 하자.



직사각형의 두 대각선은 길이가 같고 서로를 이등분하므로

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}$

삼각형 OAD에서 점 P는 변 AD의 중점이므로 삼각형의 중선정리에 의해

$\overline{OA}^2+\overline{OD}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{PA}^2)$ ⋯ ㉠

삼각형 OBC에서 점 P는 변 BC의 중점이므로

$\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{PB}^2)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$\overline{OA}^2+\overline{OD}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$ ⋯ ㉢

또한, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$는 원의 반지름이므로

$\overline{OB}^2=\overline{OC}^2=9$, $\overline{OA}^2=1$

이 값을 ㉢에 대입하면 $1+\overline{OD}^2=9+9$

$\therefore \overline{OD}^2=17$

즉, 점 D는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$인 원을 그리므로 점 D가 그리는 도형의 길이는 $2\sqrt{17}\pi$이다.

다른 풀이 : 직사각형 ABDC의 두 대각선의 교점의 좌표 이용하기

직사각형의 두 대각선은 길이가 같고 서로 다른 것을 이등분함을 이용한다.

$A(1, 0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, $D(x, y)$라 하면

$\overline{AD}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(x-1)^2+y^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ ⋯ ㉠

또한, 두 선분 AD, BC의 중점이 같으므로

$\frac{1+x}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}$에서 $(1+x)^2=(x_1+x_2)^2$ ⋯ ㉡

$\frac{0+y}{2}=\frac{y_1+y_2}{2}$에서 $y^2=(y_1+y_2)^2$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 더하고 2로 나누면

$x^2+y^2+1=({x_1}^2+{y_1}^2)+({x_2}^2+{y_2}^2)$ ⋯ ㉣

두 점 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$는 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=9$, ${x_2}^2+{y_2}^2=9$ ⋯ ㉤

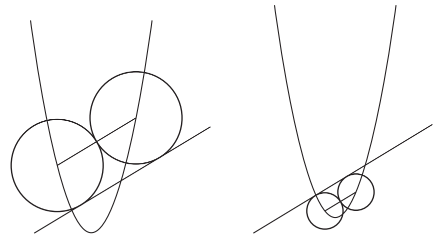
㉣, ㉤에서 $x^2+y^2+1=18$ $\quad\therefore x^2+y^2=17$

즉, 점 D는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$인 원을 그리므로 점 D가 그리는 도형의 길이는 $2\sqrt{17}\pi$이다.

59 답 49

직선 $y=x+5$가 두 원의 공통외접선인 경우와 공통내접선인 경우로 나누어 생각하자.

(i) 직선 $y=x+5$가 두 원의 공통외접선인 경우



함수 $y=x^2$의 그래프 위의 두 원의 중심의 좌표를 (a, a^2), (b, b^2) $(a<b)$이라 하자.

두 원의 중심을 이은 선분은 직선 $y=x+5$와 평행하므로 기울기가 1이다.

$\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a=1$, 즉 $b=1-a$ ⋯ ㉠

중심 (a, a^2)과 직선 $y=x+5$ 사이의 거리는 반지름의 길이 r이고, $\underbrace{\text{두 원의 중심 사이의 거리}}_{=\sqrt{2}(b-a)}$는 $2r$이므로

$$r=\frac{|a-a^2+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}(b-a)$$

$|a-a^2+5|=b-a$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $|a-a^2+5|=1-2a$

① $a-a^2+5=1-2a$일 때,

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$a=-1$ 또는 $a=4$

이때, $\underbrace{a<\frac{1}{2}}_{a<b\text{이고 } b=1-a}$이므로 $a=-1$이다.

$$\therefore r=\frac{|a-a^2+5|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

② $-(a-a^2+5)=1-2a$일 때,

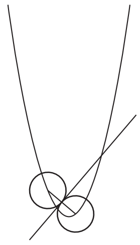
$a^2+a-6=0$, $(a+3)(a-2)=0$

$a=-3$ 또는 $a=2$

이때, $a<\frac{1}{2}$이므로 $a=-3$이다.

$$\therefore r=\frac{|a-a^2+5|}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$$

(ii) 직선 $y=x+5$가 두 원의 공통내접선인 경우



두 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a^2)$, $(b,\ b^2)$ $(a<b)$이라 하자.
두 원의 중심을 이은 선분은 직선 $y=x+5$에 수직이므로 기울기가 -1이다.

$\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=b+a=-1$, 즉 $b=-a-1$ ⋯ ㉢

중심 $(a,\ a^2)$과 직선 $y=x+5$ 사이의 거리는 반지름의 길이 r이고, 두 원의 중심 사이의 거리는 $2r$이므로

$r=\dfrac{|a-a^2+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}(b-a)$

$|a-a^2+5|=b-a$ ⋯ ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면 $|a-a^2+5|=-2a-1$

③ $a-a^2+5=-2a-1$일 때,

$a^2-3a-6=0$

근의 공식에 의해 $a=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$ 또는 $a=\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$

이때, $\underbrace{a<-\dfrac{1}{2}}_{a<b\text{이고 } b=-a-1}$이므로 $a=\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$이다.

$\therefore r=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}(b-a)=\dfrac{-2a-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{33}-4}{\sqrt{2}}$

④ $-(a-a^2+5)=-2a-1$일 때,

$a^2+a-4=0$

근의 공식에 의해 $a=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ 또는 $a=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$

이때, $a<-\dfrac{1}{2}$이므로 $a=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$이다.

$\therefore r=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}(b-a)=\dfrac{-2a-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$

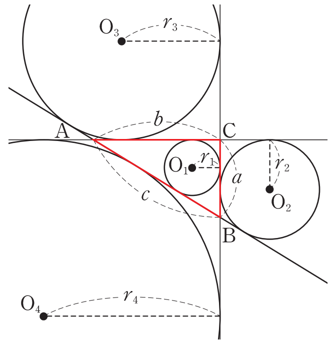
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt{33}-4}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$이고 최댓값 $M=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$이다.

$\therefore 2M^2=49$

60 답 20

그림과 같이 네 원을 크기가 작은 것부터 차례로 O_1, O_2, O_3, O_4라 하고, 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{O_3}$, $\mathrm{O_4}$, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3, r_4라 하자.

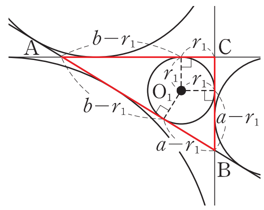


직각삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 c, a, b라 하면

$a+b+c=20$

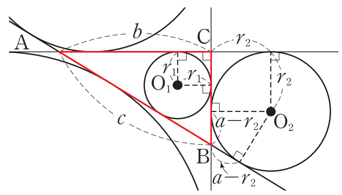
(i) 세 점 A, B, C에서 원 O_1에 그은 두 접선의 접점까지의 거리가 각각 같으므로

$c=(a-r_1)+(b-r_1)\qquad \therefore r_1=\dfrac{a+b-c}{2}$



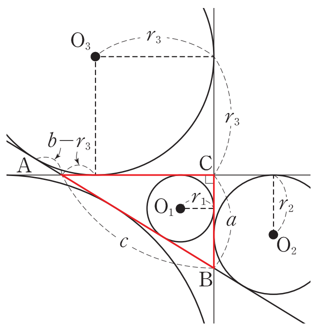
(ii) 점 A에서 원 O_2에 그은 두 접선의 접점까지의 거리가 같으므로

$b+r_2=c+(a-r_2)\qquad \therefore r_2=\dfrac{c+a-b}{2}$



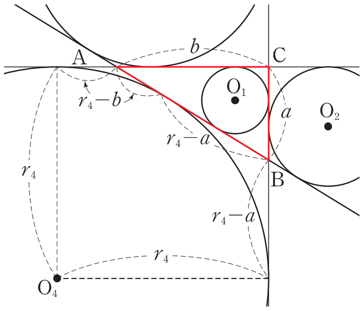
(iii) 점 B에서 원 O_3에 그은 두 접선의 접점까지의 거리가 같으므로

$a+r_3=c+(b-r_3)\qquad \therefore r_3=\dfrac{b+c-a}{2}$



(ⅳ) 두 점 A, B에서 원 O_4에 그은 두 접선의 접점까지의 거리가 각각 같으므로

$c=(r_4-a)+(r_4-b) \qquad \therefore r_4=\dfrac{a+b+c}{2}$



(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$r_1+r_2+r_3+r_4$

$=\dfrac{a+b-c}{2}+\dfrac{c+a-b}{2}+\dfrac{b+c-a}{2}+\dfrac{a+b+c}{2}$

$=a+b+c=20$

04 도형의 이동

핵심 유형 연습

문제편 p.50~51

01 답 45

Tip 조건 (가)와 (나)를 번갈아 적용하여 $a=b$가 될 때까지 진행해.

$A(3, 0) \xrightarrow{(가)} (0, 3) \xrightarrow{(나)} (4, 2) \xrightarrow{(가)} (2, 4)$

$\xrightarrow{(나)} (5, 4) \xrightarrow{(가)} (4, 5) \xrightarrow{(나)} B(6, 6)$

$\therefore l^2=\overline{AB}^2=(6-3)^2+(6-0)^2=9+36=45$

02 답 3

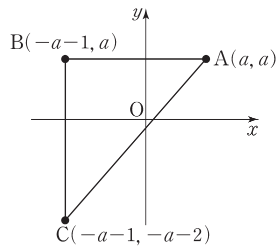
$A(a, a) \xrightarrow[\text{1만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로}} (a+1, a)$

$\xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}} B(-a-1, a)$

$\xrightarrow[\text{2만큼 평행이동}]{y\text{축의 방향으로}} (-a-1, a+2)$

$\xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}} C(-a-1, -a-2)$

세 점 A, B, C를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



$\overline{AB}=2a+1$, $\overline{BC}=2a+2$이고 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$이므로

직각삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(2a+1)\times(2a+2)=28$, $(2a+1)(a+1)=28$

$2a^2+3a-27=0$, $(2a+9)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

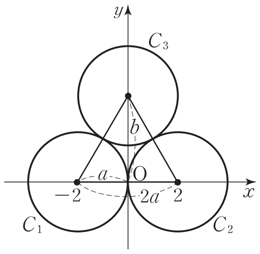
03 답 16

도형 C_1의 방정식을 정리하면

$f(x, y)=x^2+y^2+4x=0$, 즉 $(x+2)^2+y^2=4$에서 중심이 $(-2, 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

따라서 도형 C_2는 도형 C_1을 x축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 원이고, 도형 C_3은 도형 C_1을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원이다.

이 세 원 C_1, C_2, C_3이 서로 외접하므로 다음 그림에서 세 원의 중심을 연결한 삼각형이 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형임을 알 수 있다.



따라서 $a=2$, $b=2\sqrt{3}$이므로 $a^2+b^2=4+12=16$

b는 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형의 높이이므로

$b=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2a=\sqrt{3}a$

04 답 ㄱ, ㄷ

Tip

점 (y, x)와 도형 $f(y, x)=0$에서 x, y가 나타내는 것의 차이를 알아야 해.

ㄱ. 점의 좌표는 위치를 나타낸다. 즉, 점 (y, x)는 x좌표가 y이고 y좌표가 x인 것을 의미한다.
따라서 점 (y, x)를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동하면 점 $(y+p, x-q)$로 이동한다. (참)

ㄴ, ㄷ. 도형은 위치가 아닌 문자 자체가 좌표의 의미를 가진다.
즉, 문자 x가 x좌표, 문자 y가 y좌표를 의미한다.
따라서 도형 $f(y, x)=0$이나 직선 $y=f(x)$ 모두 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동하면 문자 x에 $(x-p)$를, 문자 y에 $(y+q)$를 대입한 도형 $f(y+q, x-p)=0$이나 직선 $y=f(x-p)-q$로 이동한다.
(ㄴ: 거짓, ㄷ: 참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

05 답 17

원 C : $x^2+y^2+4x-2y+4=0$을 표준형으로 바꾸면
$(x+2)^2+(y-1)^2=1$이므로 원 C의 중심의 좌표는
$(-2, 1)$이고 반지름의 길이는 1이다.
직선이 원의 넓이를 이등분하면 직선은 원의 중심을 지난다.
조건 (가)에서 원 C를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 원의 중심의 좌표는 $(-2+m, 1)$이고,
이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표는
$(2-m, 1)$이다.
점 $(2-m, 1)$이 직선 l : $x+2y-5=0$ 위의 점이어야 하므로
직선 l의 방정식에 $(2-m, 1)$을 대입하면
$(2-m)+2-5=0 \qquad \therefore m=-1$
조건 (나)에서 직선 l을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 후
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선이 원 C의 중심 $(-2, 1)$을
지나므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하기 전의 직선은 점
$(1, -2)$를 지난다.
즉, 직선 l을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선이 점
$(1, -2)$를 지나므로
$x+2(y-n)-5=0$에 $(1, -2)$를 대입하면
$1+2(-2-n)-5=0$, $1-4-2n-5=0$
$2n=-8 \qquad \therefore n=-4$
$\therefore m^2+n^2=(-1)^2+(-4)^2=17$

06 답 2

이동 f : $(x, y) \longrightarrow (2-y, x+3)$에 의하여 점 (x, y)가
옮겨진 점을 (x', y')이라 하면
$x'=2-y$, $y'=x+3$이므로 $x=y'-3$, $y=2-x'$
이를 직선 l : $mx+y-1=0$에 대입하면
$m(y'-3)+(2-x')-1=0$, 즉 $x'-my'+3m-1=0$
따라서 직선 l이 이동 f에 의하여 옮겨진 직선 l'은
$x-my+3m-1=0$이다.
이때, 원 C의 중심은 $(6, 8)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로
직선 l'이 원 C와 만나려면
$\frac{|6-8m+3m-1|}{\sqrt{1+m^2}}\le\sqrt{5}$
제곱하여 정리하면 $(5-5m)^2\le 5(1+m^2)$
$5(1-m)^2\le 1+m^2$, $5-10m+5m^2\le 1+m^2$
$4m^2-10m+4\le 0$, $2m^2-5m+2\le 0$
$(2m-1)(m-2)\le 0$
$\therefore \frac{1}{2}\le m\le 2$
따라서 m의 최댓값은 2이다.

07 답 ②

Tip

이차함수 $f(x)$의 그래프가 어떤 직선에 대하여 대칭인지를 구해.

임의의 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$이므로
이차함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고,
이차함수 $f(x)=ax^2+bx+3$의 그래프의 축이 $x=-\frac{b}{2a}$이므로
$-\frac{b}{2a}=1 \qquad \therefore 2a+b=0 \cdots ㉠$
또한, 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+3$의 최솟값이 2이므로
$a>0 \cdots ㉡$
$f(1)=a+b+3=2 \qquad \therefore a+b=-1 \cdots ㉢$
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$이고
이것은 ㉡을 만족시킨다.
$\therefore f(x)=x^2-2x+3$
$\therefore f(3)=3^2-2\times 3+3=6$

08 답 5

조건 (가)의 x에 $1-t$를 대입하면 $f(2-1+t)=2-f(1-t)$

즉, $f(1+t)+f(1-t)=2$에서 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는

점 $(1, 1)$에 대하여 대칭이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.

$\therefore f(1)=a+b=1 \cdots$ ㉠

조건 (나)에서 원 $(x-3)^2+(y-5)^2=4$의 넓이를 이등분하는

함수 $f(x)$의 그래프는 원의 중심 $(3, 5)$를 지나므로

$f(3)=3a+b=5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$ $\quad\therefore a^2+b^2=5$

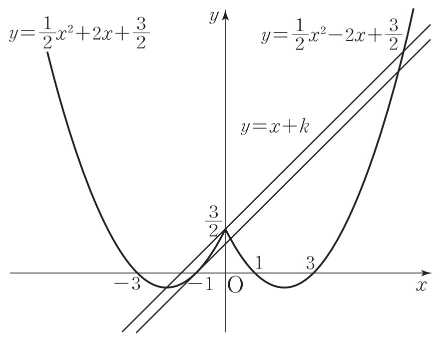
09 답 ④

함수 $y=\frac{1}{2}x^2-2|x|+\frac{3}{2}$의 그래프는

함수 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$의 그래프의 $x\geq0$인 부분과 y축에 대하여

대칭이동한 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}$의 그래프의 $x<0$인 부분으로

다음 그림과 같다.



이때, 함수 $y=\frac{1}{2}x^2-2|x|+\frac{3}{2}$의 그래프가 기울기가 1인 직선과

서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 그림과 같이 2가지가 있다.

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$을 지날 때, $k=\frac{3}{2}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}$의 그래프에

접할 때, 즉 이차방정식 $x+k=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}$이 중근을 가질

때, 이차방정식 $x^2+2x+3-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(3-2k)=2k-2=0 \qquad \therefore k=1$

(i), (ii)에 의하여 두 도형이 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의

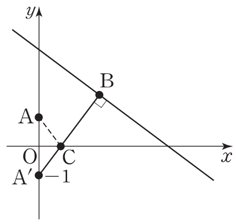
값은 1 또는 $\frac{3}{2}$이므로 $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$

10 답 21

Tip
고정점 A를 대칭이동한 점을 이용하여 문제를 해결해.

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′$(0, -1)$이다.



$\overline{\text{AC}}=\overline{\text{A'C}}$이므로

$\overline{\text{AC}}+\overline{\text{BC}}=\overline{\text{A'C}}+\overline{\text{BC}}\geq\overline{\text{A'B}}$

즉, 점 A′과 직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ 위의 점 B 사이의 거리가 최소일 때

$\overline{\text{AC}}+\overline{\text{BC}}$의 값이 최소이다.

점 A′$(0, -1)$과 직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$, 즉 $3x+4y-12=0$ 사이의

거리는 $\frac{|-4-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$

따라서 $m=5$, $n=16$이므로 $m+n=21$

11 답 75

세 점 A$(0, 5)$, B$(6, 3)$, P$(a, 0)$이라 할 때,

$\overline{\text{AP}}=\sqrt{a^2+25}$, $\overline{\text{BP}}=\sqrt{(a-6)^2+9}$이므로

$\sqrt{a^2+25}+\sqrt{(a-6)^2+9}=\overline{\text{AP}}+\overline{\text{BP}}$

그림과 같이 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점 B′에 대하여

$\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PB}}$의 최솟값은 $\overline{\text{AB'}}$의 길이와 같다.

$\therefore m=\sqrt{(0-6)^2+(5+3)^2}=10$

두 점 A, B′을 지나는 직선의 방정식은

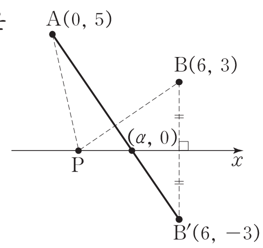
$y=\frac{5-(-3)}{0-6}x+5$

$\therefore y=-\frac{4}{3}x+5$

이 직선은 점 P$(a, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{4}{3}a+5 \qquad \therefore a=\frac{15}{4}$

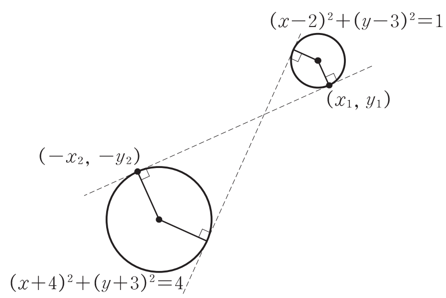
$\therefore 2ma=2\times10\times\frac{15}{4}=75$



12 답 1

$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1-(-y_2)}{x_1-(-x_2)}$이므로 구하는 식의 값은

두 점 (x_1, y_1), $(-x_2, -y_2)$를 연결한 직선의 기울기이다.



이때, 점 $(-x_2, -y_2)$는 점 (x_2, y_2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원 $(x+4)^2+(y+3)^2=4$ 위의 점이다.

한편, 그림과 같이 두 원 위의 점을 연결한 직선의 기울기의 최대, 최소는 공통내접선의 기울기이다. 두 공통내접선은 두 원의 중심 $(-4, -3)$과 $(2, 3)$을 이은 선분을 반지름의 길이의 비인 $2 : 1$로 내분하는 점 $\left(\frac{2\times2+1\times(-4)}{2+1}, \frac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}\right)$

즉, $(0, 1)$을 지나는 직선이다.

따라서 접선을 $y=ax+1$(a는 상수)이라 하면 점 $(2, 3)$과 직선 $ax-y+1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1이므로

$\frac{|2a-3+1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$에서 $(2a-2)^2=a^2+1$ $\quad\therefore 3a^2-8a+3=0$

이 이차방정식의 두 근이 M, m이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$Mm=1$

일등급 UP

*** 좌표평면 위의 원은 중심으로부터 접근하자.**

두 원의 중심 $(-4, -3)$과 $(2, 3)$을 연결한 직선의 기울기가 1이므로 두 접선의 기울기의 곱은 1이라는 것을 알면 계산 과정을 줄일 수 있다.

실전 유형 훈련

문제편 p.52~59

13 답 8

$\overline{OA} /\!/ \overline{CD}$, $\overline{OA}=\overline{CD}$이고,

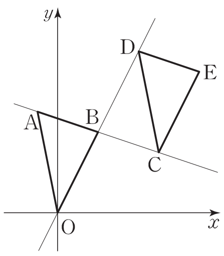
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\triangle AOB \equiv \triangle CDB$ (ASA 합동)

따라서 두 점 $A(-1, 5)$, $C(p, q)$를

원점 O를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점의 좌표

잇는 선분의 중점이 $B(2, 4)$이므로



$\frac{-1+p}{2}=2$, $\frac{5+q}{2}=4$

$p=5$, $q=3$ $\quad\therefore p+q=8$

다른 풀이 : 직선의 방정식 이용하기

삼각형 AOB를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 삼각형 DCE의 세 꼭짓점의 좌표는

$C(p, q)$, $D(-1+p, 5+q)$, $E(2+p, 4+q)$

직선 OB의 방정식이 $y=2x$이고 점 D를 지나므로

$5+q=2(-1+p)$ $\quad\therefore 2p-q=7$ ⋯ ㉠

또, 직선 AB의 방정식이 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$이고

두 점 $A(-1, 5)$, $B(2, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{4-5}{2-(-1)}(x+1)+5=-\frac{1}{3}(x+1)+5=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$

점 C를 지나므로 $q=-\frac{1}{3}p+\frac{14}{3}$ $\quad\therefore p+3q=14$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=5$, $q=3$ $\quad\therefore p+q=8$

14 답 5

두 사람이 던진 주사위에 의하여 점은 다음과 같이 움직인다.

언수		1회		2회		3회		4회		5회	
주사위의 눈		1		2		5		4		3	
말의 위치	(0, 0)		(1, 0)		(2, 0)		(0, 2)		(0, 3)		(0, 4)

은진		1회		2회		3회		4회		5회	
주사위의 눈		2		6		3		4		5	
말의 위치	(0, 0)		(1, 0)		(0, 1)		(0, 2)		(0, 3)		(3, 0)

따라서 두 사람의 말이 위치한 두 점 $(0, 4)$, $(3, 0)$ 사이의 거리는 5이다.

15 답 ⑤

ㄱ. 점 C는 점 A를 직선 $y=mx$에 대하여 대칭이동한 점이므로 직선 $y=mx$는 선분 AC의 수직이등분선이고, 점 B는 직선 $y=mx$ 위의 점이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}$이다. (참)

ㄴ. 점 $A(a, b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 B이므로 점 B의 좌표는 (b, a)이다.

이때, 점 B는 직선 $y=mx$ 위의 점이므로 $a=mb$이다.

따라서 두 점 A와 B의 좌표는 $A(mb, b)$, $B(b, mb)$이고, 두 점 B와 C는 y축에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $(-b, mb)$, 즉 $(-b, a)$이다. (참)

ㄷ. 직선 AC와 직선 $y=mx$는 서로 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.

즉, $\frac{b-mb}{mb-(-b)}\times m=-1$, $\frac{m(1-m)}{m+1}=-1$

$m-m^2=-m-1$, $m^2-2m-1=0$

$\therefore (m-1)^2=2$ (참)

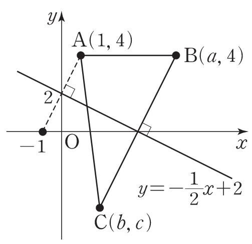
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16 답 6

점 A의 대칭점을 A′이라 하자.

종이의 접는 선은 두 점 $A(1, 4)$, $A'(-1, 0)$의 중점 $(0, 2)$를 지나고 직선 AA′에 수직인 직선이다.

직선 AA′의 기울기가 $\frac{4-0}{1-(-1)}=2$이므로 접는 선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+2$이다.



점 B$(a, 4)$가 겹쳐지는 점 C의 좌표를 C(b, c)라 두면

(i) 수직 조건 : $\frac{c-4}{b-a}=2$, $2a-2b+c=4$ ⋯ ㉠

(ii) 중점 조건 : 선분 BC의 중점 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+4}{2}\right)$가 직선

$y=-\frac{1}{2}x+2$ 위의 점이므로

$\frac{c+4}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{a+b}{2}+2$

정리하면 $2c+8=-a-b+8$

$a+b+2c=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 b, c를 a에 대한 식으로 나타내면

$b=\frac{3a-8}{5}$, $c=\frac{4-4a}{5}$ ⋯ ㉢

또한, 점 C와 선분 AB 사이의 거리가 $4-c$이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times(a-1)\times(4-c)=20$

㉢을 대입하면 $\frac{1}{2}\times(a-1)\times\left(4-\frac{4-4a}{5}\right)=20$

$(a-1)\times\frac{16+4a}{5}=40$, $(a-1)(4+a)=50$

$a^2+3a-4=50$, $a^2+3a-54=0$

$(a+9)(a-6)=0$ $\quad\therefore a=6\ (\because a>1)$

17 답 ②

ㄱ. $P(2, 3)\Rightarrow P_1(2, -3)\Rightarrow P_2(-3, 2)\Rightarrow P_3(3, 2)$
$\Rightarrow P_4(3, -2)\Rightarrow P_5(-2, 3)\Rightarrow P_6(2, 3)$
$\Rightarrow P_7(2, -3)\Rightarrow\cdots$

이므로 $P(2, 3)$과 일치하는 n의 값은 6의 배수이다.

$100=6\times16+4$에서 100 이하의 6의 배수의 개수는 16이다.

$\therefore N(2, 3)=16$ (참)

ㄴ. $P(a, a)\Rightarrow P_1(a, -a)\Rightarrow P_2(-a, a)\Rightarrow P_3(a, a)$
$\Rightarrow P_4(a, -a)\Rightarrow\cdots$

이므로 $P(a, a)$와 일치하는 n의 값은 3의 배수이다.

$100=3\times33+1$에서 100 이하의 3의 배수의 개수는 33이다.

$\therefore N(a, a)=33$ (참)

ㄷ. [반례] $a=1$, $b=0$이면

$P(1, 0)\Rightarrow P_1(1, 0)\Rightarrow P_2(0, 1)\Rightarrow P_3(0, 1)$
$\Rightarrow P_4(0, -1)\Rightarrow P_5(-1, 0)\Rightarrow P_6(1, 0)$
$\Rightarrow P_7(1, 0)\Rightarrow\cdots$

에서 $P(1, 0)$과 일치하는 n의 값은 6의 배수 또는 6으로 나눈 나머지가 1인 수이므로

$100=6\times16+4$에서 100 이하의 6의 배수의 개수는 16,

6으로 나눈 나머지가 1인 수의 개수는 17이다.

$P_{6\times0+1}$, $P_{6\times1+1}$, $P_{6\times2+1}$, ⋯ $P_{6\times16+1}$로 17개야.

$\therefore N(1, 0)=16+17=33$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

18 답 23

주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, ⋯를 구하면

$P_1(3, 2)\xrightarrow{(가)}P_2(2, 3)\xrightarrow{(나)}P_3(2, -3)\xrightarrow{(다)}P_4(-2, -3)$
$\xrightarrow{(가)}P_5(-3, -2)\xrightarrow{(나)}P_6(-3, 2)\xrightarrow{(다)}\underbrace{P_7(3, 2)}_{=P_1}$
$\longrightarrow P_8(2, 3)\longrightarrow P_9(2, -3)\longrightarrow\cdots$

자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표와 점 P_{n+6}의 좌표가 같다.

$50=6\times8+2$로 점 P_{50}의 좌표는 점 P_2의 좌표와 같으므로

점 P_{50}의 좌표는 $(2, 3)$이다. $\quad\therefore 10x_{50}+y_{50}=23$

19 답 10

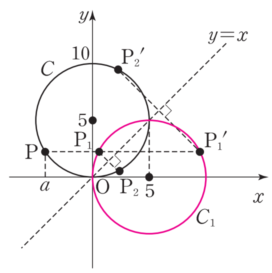
점 $P(a, b)$를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점을 P_1,

점 P_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P_2,

원 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_1이라 하면

원 C_1의 방정식은 $(x-5)^2+y^2=25$이다.

점 P_2가 원 C 위의 점이 되려면 점 P_1이 원 C_1 위의 점이어야 한다.



$0\le b<5$이므로 $a<0$ 또는 $a\ge0$의 두 가지 경우로 나누어 살펴보자.

(i) $a<0$일 때,

$P(a, b)$를 x축의 방향으로 평행이동하여 원 C_1 위의 점이 되는 경우는 그림과 같이 P_1, P_1'의 두 가지 경우가 있고, 이때 두 점 P_1, P_1'은 직선 $x=5$에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 모든 m의 값의 합 $f(a, b)=2(5-a)$

(ii) $a\ge0$일 때,

마찬가지 방법으로 $f(a, b)=2(5-a)$

(i), (ii)에 의하여 $f(a, b)=2(5-a)$

즉, $f(a, b)=16$에서

$2(5-a)=16$ $\quad\therefore a=-3$

한편 점 $P(a, b)$는 원 $C: x^2+(y-5)^2=25$ 위의 점이므로

$(-3)^2+(b-5)^2=25$ $\quad\therefore b=1\ (\because 0\le b<5)$

$\therefore a^2+b^2=(-3)^2+1^2=10$

20 답 ⑤

직선은 평행이동을 해도 기울기가 바뀌지 않으므로 $k=\frac{3}{2}$

즉, x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 원래의 직선이 되므로 직선의 기울기와 같은 비율로 평행이동한 것이다.

$\therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{2}$

다른 풀이 : 평행이동한 식을 구하여 계수 비교하기

직선 $y=\frac{3}{2}x+k$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=\frac{3}{2}(x-m)+k+n=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}m+k+n$

이 직선이 직선 $y=kx+\frac{3}{2}$과 일치하므로

$k=\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}m+k+n$

$0=-\frac{3}{2}m+n$, $\frac{3}{2}m=n$

$\therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{2}$

21 답 4

도형 $f(x, y)=0$이 점 (a, b)를 지날 때,

$f(a, b)=0 \cdots$ ㉠을 만족시킨다.

이때, 도형 $f(y-1, 2-x)=0$이 지나는 점을 ㉠을 이용하여 구하면

$y-1=a$, $2-x=b$

즉, $x=\underbrace{-b+2}_{(가)}$, $y=\underbrace{a+1}_{(나)}$

에서 도형 $f(y-1, 2-x)=0$은

점 ($-b+2$, $a+1$)을 지남을 알 수 있다.

점의 이동을 살펴보면 도형의 이동을 알 수 있다.

(a, b)

직선 $y=x$에 대하여 대칭이동

$\Rightarrow (b, a)$

y축에 대하여 대칭이동

$\Rightarrow (-b, a)$

x축의 방향으로 $\underbrace{2}_{(다)}$만큼,
y축의 방향으로 $\underbrace{1}_{(라)}$만큼 평행이동

$\Rightarrow$ ($-b+2$, $a+1$)

따라서 $g(b)=-b+2$, $h(a)=a+1$이고, $p=2$, $q=1$이므로

$g(q)+h(p)=g(1)+h(2)=1+3=4$

22 답 ⑤

ㄱ. 도형 $f(x+2, y)=0$은 도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 도형 $f(y, x+2)=0$은 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 도형 $f(-x, 2-y)=0$은 도형 $f(x, y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. 도형 $f(2-y, -x)=0$은 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 도형이 [그림 2]와 같은 방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

23 답 45

점 $\mathrm{A}(a, b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(a, -b)$, 원점에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(-a, -b)$이고, $\mathrm{D}(-a, 0)$, $\mathrm{E}(0, b)$이다.

또한, 도형 S의 넓이는 $3ab$이다.

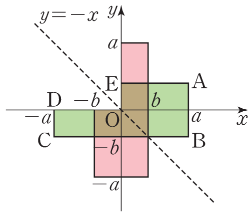
도형 S를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형을 S_1이라 하면 $\underbrace{\text{도형 } S\text{의 내부 중에서 도형 } S_1\text{과 겹치지 않는 부분의 넓이는}}_{\text{직사각형의 넓이}}$

$\overline{\mathrm{BC}}\times 2=2a\times 2=4a$이므로

조건 (나)에 의하여 두 도형의 공통부분의 넓이

$3ab-4a=25 \cdots$ ㉠

또한, 도형 S를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형을 S_2라 하면 그림과 같이 도형 S와 도형 S_2가 겹치는 부분의 넓이는 $3\times b^2$이다.



조건 (다)에 의하여 도형 S와 도형 S_2의 공통부분의 넓이

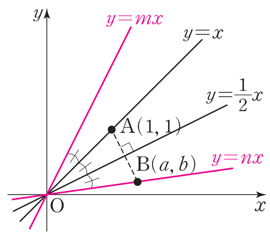
$3b^2=27 \qquad \therefore b=3\ (\because b>2)$

이 값을 ㉠에 대입하면

$9a-4a=25 \qquad \therefore a=5$

따라서 도형 S의 넓이는 $3ab=3\times 5\times 3=45$이다.

24 답 ③



조건 (가)에서 직선 $y=x$는 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 $y=mx$가 이루는 각을 이등분하므로 직선 $y=mx$는 직선 $y=\frac{1}{2}x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

$\underbrace{\text{직선 } y=x\text{에 대하여 대칭인 두 직선의 기울기의 곱은 } 1}_{\text{두 직선의 기울기는 역수 관계야. 또는 } x\text{와 } y\text{를 서로 바꾸어 구해도 돼.}}$이므로

$\frac{1}{2}\times m=1 \qquad \therefore m=2$

조건 (나)에서 직선 $y=nx$는 직선 $y=x$를 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

직선 $y=x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$을 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}(a,\ b)$라 하면

선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$은 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점이므로

$\frac{b+1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{a+1}{2}$, $2b+2=a+1$

$a-2b=1$ ⋯ ㉠

선분 AB는 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 수직이므로

$\frac{b-1}{a-1}\times\frac{1}{2}=-1$, $b-1=-2a+2$

$2a+b=3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{7}{5}$, $b=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{B}\left(\frac{7}{5},\ \frac{1}{5}\right)$

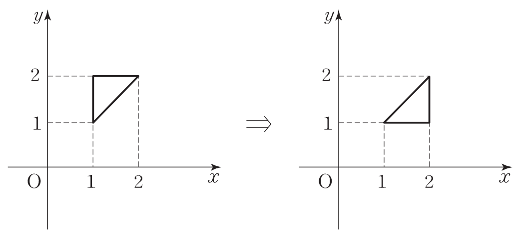
이때, 점 B는 직선 $y=nx$ 위의 점이므로 $n=\frac{1}{7}$

따라서 $m+n=2+\frac{1}{7}=\frac{15}{7}$이다.

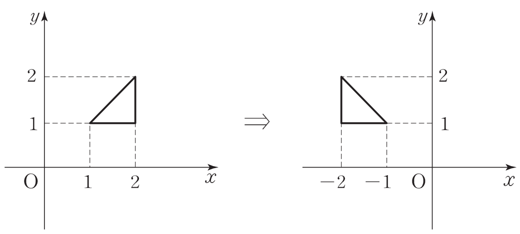
25 답 ③

방정식 $f(y-1,\ -x)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

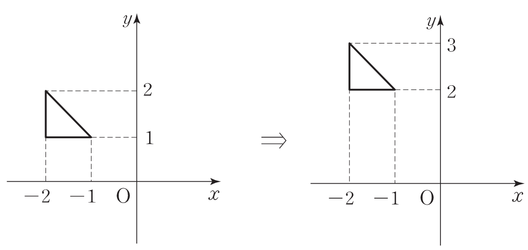
$f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $f(y,\ x)=0$



$f(y,\ x)=0$을 y축에 대하여 대칭이동하면 $f(y,\ -x)=0$



$f(y,\ -x)=0$을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(y-1,\ -x)=0$으로 이 방정식이 나타내는 도형은 ③과 같다.



26 답 ②

직선 $x-y+5=0$을 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동하면

$\underline{(2a-x)-(2b-y)+5=0}$ $\quad\therefore x-y-2a+2b-5=0$

$\because \frac{x+(2a-x)}{2}=a,\ \frac{y+(2b-y)}{2}=b$

이 직선의 방정식이 $x-y-11=0$이므로

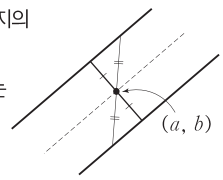
$-2a+2b-5=-11$ $\quad\therefore a-b=3$

$\therefore k=3$

일등급 UP

*** 대칭점이 나타내는 도형**

그림과 같이 평행한 두 직선은 두 직선까지의 거리가 같은 한 점에 대하여 대칭이므로 점 $(a,\ b)$는 두 직선의 가운데를 통과하는 직선 위의 점이다.



따라서 점 $(a,\ b)$를 지나고 문제에서 주어진 두 직선과 평행한 직선의 방정식은

$\frac{(x-y+5)+(x-y-11)}{2}=0$, 즉 $x-y-3=0$이 된다.

27 답 ②

$f(1-x)=f(1+x)$에서 $X=1-x$라 하면

$f(X)=f(\overset{(가)}{\boxed{2}}-X)$ ⋯ ㉠

그런데 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=1$에 대하여 대칭임을 보이려면 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(a,\ c)$를 직선 $x=1$에 대하여 대칭이동한 점을 $(b,\ c)$라 할 때, 이 점이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점임을 보이면 된다.

즉, 두 점 $(a,\ c)$와 $(b,\ c)$의 중점이 $(\underset{(나)}{\boxed{1}},\ c)$이므로

$\frac{a+b}{2}=1$ $\quad\therefore b=\boxed{2-a}$ ←(다)

㉠에 $X=b$를 대입하면

$f(b)=f(2-b)=f(2-(2-a))=f(a)=c$

에서 점 $(b,\ c)$도 곡선 $y=f(x)$ 위의 점임을 알 수 있다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

즉, $p=2$, $q=1$, $g(a)=2-a$이므로

$g(p+q)=g(3)=2-3=-1$

28 답 ⑤

방정식 $|x+k|=(|x|-1)(|x|-3)$의 해의 개수는 두 도형 $y=x+k$, $|y|=(|x|-1)(|x|-3)$의 교점의 개수이다.

$|y|=(|x|-1)(|x|-3)$를 도형 F라 하면

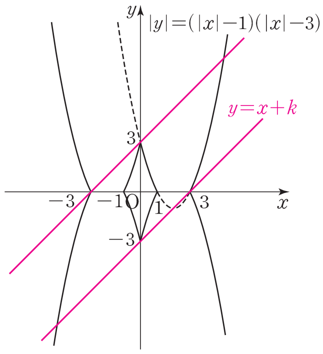
도형 F의 방정식에

(i) x 대신 $-x$를 대입하면 $|y|=(|-x|-1)(|-x|-3)$

즉, $|y|=(|x|-1)(|x|-3)$이므로

도형 F는 y축에 대하여 대칭이다.

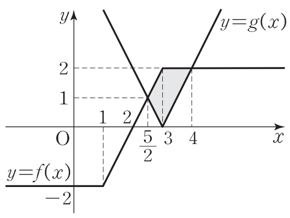
(ii) y 대신 $-y$를 대입하면 $|-y|=(|x|-1)(|x|-3)$
즉, $|y|=(|x|-1)(|x|-3)$이므로
도형 F는 x축에 대하여 대칭이다.
(iii) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$|-y|=(|-x|-1)(|-x|-3)$
즉, $|y|=(|x|-1)(|x|-3)$이므로
도형 F는 원점에 대하여 대칭이다.
(i)~(iii)에서 도형 F는 x축, y축 및 원점에 대하여 대칭인 도형이므로 제1사분면의 도형을 그린 후 나머지 사분면은 대칭을 이용하여 그리면 된다.
$x\geq 0$, $y\geq 0$일 때, $|y|=(|x|-1)(|x|-3)$는
$y=(x-1)(x-3)$이므로 도형 F는 그림과 같다.



이때, 도형 F와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나는 k의 값의 범위는 $-3<k<3$이다.
따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

29 답 ⑤

두 함수 $f(x)=|x-1|-|x-3|$과 $g(x)=2|x-3|$의 그래프를 각각 그려보면 그림과 같다.



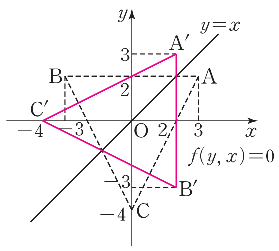
$f(a-x)=-f(a+x)$에서
함수 $f(x)$가 점 $(a, 0)$에 대하여 대칭이므로 $a=2$
함수 $f(x)$가 점 (a, b)에 대하여 대칭
$\Longleftrightarrow f(a-x)+f(a+x)=2b$
$g(b-x)=g(b+x)$에서
함수 $g(x)$가 직선 $x=b$에 대하여 대칭이므로 $b=3$
함수 $g(x)$가 직선 $x=a$에 대하여 대칭
$\Longleftrightarrow g(a-x)=g(a+x)$
또한, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 도형은 밑변의 길이가 2인 두 개의 삼각형으로 이루어져 있음을 이용하면 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}$$

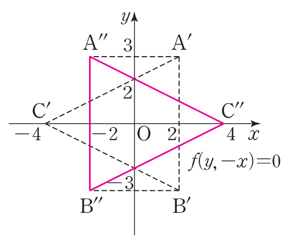
$$\therefore abS=2\times 3\times\frac{3}{2}=9$$

30 답 ④

방정식 $f(|y|, -|x|)=0$에 x 대신 $-x$를 대입하면
$f(|y|, -|-x|)=f(|y|, -|x|)=0$이므로
도형 $f(|y|, -|x|)=0$은 y축에 대하여 대칭이다.
마찬가지의 방법으로
$f(|-y|, -|x|)=f(|y|, -|x|)=0$이므로
도형 $f(|y|, -|x|)=0$은 x축에 대하여 대칭이고,
$f(|-y|, -|-x|)=f(|y|, -|x|)=0$이므로
도형 $f(|y|, -|x|)=0$은 원점에 대하여 대칭이다.
따라서 방정식 $f(|y|, -|x|)=0$이 그리는 도형은 x축, y축 및 원점에 대하여 대칭이므로, 도형 $f(|y|, -|x|)=0$의 제1사분면 부분만 그린 후 대칭을 이용하여 나머지 사분면에 그리면 된다.
이제 도형 $f(x, y)=0$을 이용하여 도형 $f(|y|, -|x|)=0$의 제1사분면 부분을 구하자.
제1사분면에서 $x>0$, $y>0$이므로
$f(|y|, -|x|)=f(y, -x)=0$
방정식 $f(y, -x)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것이야.
$f(x, y)=0$ ($\triangle$ABC)
$\Downarrow$ $y=x$에 대하여 대칭이동
$f(y, x)=0$ ([그림 1]의 $\triangle$A′B′C′)
$\Downarrow$ y축에 대하여 대칭이동
$f(y, -x)=0$ ([그림 2]의 $\triangle$A″B″C″)

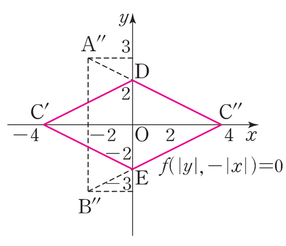


[그림 1]

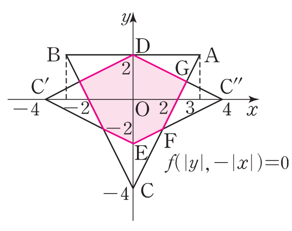


[그림 2]

따라서 방정식 $f(|y|, -|x|)=0$이 그리는 도형은 [그림 3]과 같이 제1사분면의 선분 C″D를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동하여 그린 사각형이다.
따라서 방정식 $f(|y|, -|x|)=0$이 나타내는 도형으로 둘러싸인 영역과 삼각형 ABC로 둘러싸인 영역의 공통인 영역은 [그림 4]의 육각형으로 둘러싸인 영역과 같다.



[그림 3]



[그림 4]

육각형의 영역은 y축에 대하여 대칭이므로 이 영역의 넓이를 S라 하면

$S=2\times\square\mathrm{DEFG}$

이때, 직선 C″D의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+2$,

직선 C″E의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x-2$이고

직선 AC의 방정식은 $y=2x-4$이므로

방정식을 연립하여 두 점 G, F의 좌표를 구하면

$\underline{\mathrm{G}\left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right), \mathrm{F}\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)}$

$-\frac{1}{2}x+2=2x-4$, $6=\frac{5}{2}x$에서 점 G의 x좌표는 $\frac{12}{5}$이고

$\frac{1}{2}x-2=2x-4$, $2=\frac{3}{2}x$에서 점 F의 x좌표는 $\frac{4}{3}$야.

또한, 두 직선 C″D와 AC의 기울기의 곱은 -1이므로

$\overline{\mathrm{C''D}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$

즉, 삼각형 DCG는 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \square\mathrm{DEFG}&=\triangle\mathrm{DCG}-\triangle\mathrm{ECF}\\&=\frac{1}{2}\times6\times\frac{12}{5}-\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{3}\\&=\frac{36}{5}-\frac{4}{3}=\frac{108-20}{15}=\frac{88}{15}\end{aligned}$$

$\therefore\ S=2\times\square\mathrm{DEFG}=\frac{176}{15}$

31 답 ①

점 $(5, 3)$을 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 (a, b), $(5, 3)$을 지나는 직선은 $x+y-3=0$과 수직이므로

$\frac{b-3}{a-5}=1$

$\therefore\ a-b=2$ ⋯ ㉠

두 점 (a, b), $(5, 3)$을 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$이 직선 $x+y-3=0$ 위에 있으므로

$\frac{a+5}{2}+\frac{b+3}{2}-3=0$

$\therefore\ a+b=-2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-2$

따라서 점 $(5, 3)$을 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(0, -2)$이다.

다른 풀이 : $(x, y)\longrightarrow(-y+3, -x+3)$임을 이용하기

점 $(5, 3)$을 직선 $y=-x+3$에 대하여 대칭이동하면

$\underline{(-3+3, -5+3)}$, 즉 $(0, -2)$이다.

$(x, y)\longrightarrow(-y+3, -x+3)$

일등급 UP

*** 직선에 대칭인 두 점을 잇는 직선의 기울기**

기울기가 -1인 직선에 대하여 대칭이동한 경우 대칭인 두 점을 잇는 직선의 기울기가 1임을 알고 있으면 좀 더 빠르게 문제를 해결할 수 있다.

32 답 ③

두 점을 $\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(b, b^2)$ $(a<b, ab\neq0)$라 하면

직선 AB가 직선 $y=x+7$에 수직이므로

$\frac{b^2-a^2}{b-a}=-1$ $\quad\therefore\ b+a=-1$ ⋯ ㉠

선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$이 직선 $y=x+7$ 위에 있으므로 대입하면

$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a+b}{2}+7$ $\quad\therefore\ a^2+b^2=a+b+14$ ⋯ ㉡

㉠에서 $a+b=-1$, $b=-a-1$을 ㉡에 대입하면

$a^2+(-a-1)^2=13$, $2a^2+2a-12=0$

$a^2+a-6=0$, $(a+3)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-3$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=-3$

그런데 $a<b$이므로 $a=-3$, $b=2$

즉, $\mathrm{A}(-3, 9)$, $\mathrm{B}(2, 4)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 9 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|-12-18|=15$

33 답 ②

점 $(4, 1)$을 직선 $2x-y+3=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 (a, b)와 $(4, 1)$을 연결한 직선은 $2x-y+3=0$에 수직이므로

$\frac{b-1}{a-4}=-\frac{1}{2}$, $2b-2=-a+4$ $\quad\therefore\ a+2b=6$ ⋯ ㉠

두 점 (a, b)와 $(4, 1)$을 잇는 선분의 중점이 직선 $2x-y+3=0$ 위에 있으므로

$2\times\frac{a+4}{2}-\frac{b+1}{2}+3=0$, $2a+8-b-1+6=0$

$\therefore\ 2a-b=-13$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=5$

따라서 점 $(4, 1)$을 직선 $2x-y+3=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-4, 5)$이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|20+4|=12$

다른 풀이 : 선분 AB의 기울기 이용하기

점 $(4, 1)$과 직선 $2x-y+3=0$ 사이의 거리가

$\frac{|2\times4-1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$이고

$2x-y+3=0$에 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 그림에서

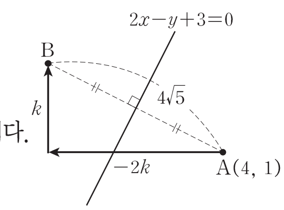
양수 k에 대하여

$k^2+(2k)^2=(4\sqrt{5})^2$ $\quad\therefore\ k=4$

따라서 점 $(4, 1)$과 대칭인 점의 좌표는 $\underline{(4-8, 1+4)}=(-4, 5)$이다.

$(4-2k, 1+k)$

(이하 동일)



34 답 16

원을 직선에 대하여 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 $x^2+y^2-4x-8y+c=0$의 반지름의 길이는 1이다.

즉, $(x-2)^2+(y-4)^2=20-c$이므로

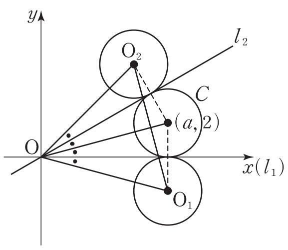
$20-c=1 \qquad \therefore c=19$

또한, 두 원의 중심 $(0, 0)$, $(2, 4)$가 직선 $x+ay+b=0$에 대하여 대칭이므로

$\underbrace{\dfrac{4-0}{2-0}=a,\ \dfrac{0+2}{2}+a\times\dfrac{0+4}{2}+b=0}_{\text{수직 조건과 중점 조건}} \qquad \therefore a=2,\ b=-5$

$\therefore a+b+c=2+(-5)+19=16$

35 답 6



원 C : $(x-a)^2+(y-2)^2=4$의 중심의 좌표는 $(a, 2)$이다.

삼각형 OO_1O_2가 정삼각형이므로 $\angle O_1OO_2=60°$이고

대칭성에 의하여 두 접선 l_1, l_2가 이루는 예각의 크기는 $30°$이다.

이때, 접선 l_1은 x축이므로 접선 l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $30°$이다.

따라서 직선 l_2의 기울기는 $\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로

직선 l_2의 방정식은 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$, 즉 $x-\sqrt{3}y=0$이다.

원 C의 중심 $(a, 2)$와 직선 l_2 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

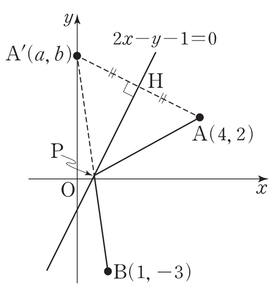
$\dfrac{|a-2\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}}=2$, $|a-2\sqrt{3}|=4$

$\therefore a=4+2\sqrt{3}$ 또는 $a=-4+2\sqrt{3}$

그런데 $a>0$이므로 $a=4+2\sqrt{3}$이다.

따라서 $m=4$, $n=2$이므로 $m+n=6$

36 답 ③



점 A의 직선 $2x-y-1=0$에 대한 대칭점을 $A'(a, b)$,

선분 AA'과 직선 $2x-y-1=0$의 교점을 H라 하면

두 삼각형 APH와 $A'PH$는 합동이므로 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이다.

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\ge\overline{A'B}$에서

점 P가 $\overline{A'B}$ 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$는 최소가 된다.

(i) 수직 조건 : $\dfrac{b-2}{a-4}=-\dfrac{1}{2}$, $-2b+4=a-4$

$\therefore a+2b=8 \cdots$ ㉠

(ii) 중점 조건 : 선분 AA'의 중점 $H\left(\dfrac{a+4}{2}, \dfrac{b+2}{2}\right)$는

직선 $2x-y-1=0$ 위의 점이므로

$2\times\dfrac{a+4}{2}-\dfrac{b+2}{2}-1=0$

$2(a+4)-(b+2)-2=0$

$\therefore 2a-b=-4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=4$

$\therefore A'(0, 4)$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은

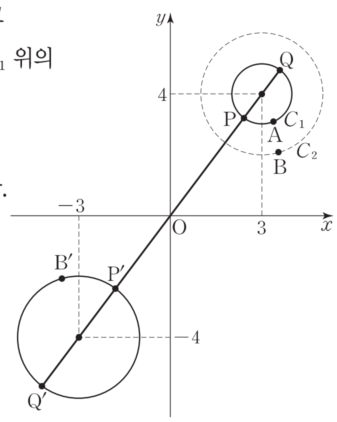
$\overline{A'B}=\sqrt{(1-0)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$

37 답 ②

ㄱ. 원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 중심이 $(3, 4)$이고 반지름의 길이가 2인 원 C_2를 원점에 대하여 대칭이동하면 중심이 $(-3, -4)$이고 반지름의 길이가 2인 원이 된다. (참)

ㄴ. 점 A는 중심이 $(3, 4)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 위의 점이고 점 B'은 중심이 $(-3, -4)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

또한, 두 원의 중심 사이의 거리가 10이므로 선분 AB'의 길이의 최솟값은 그림에서 $\overline{PP'}$의 길이이다.



$\therefore \overline{PP'}=10-1-2$

$=7$ (참)

ㄷ. 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B'(-x_2, -y_2)$에 대하여

$\overline{AB'}=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$이고 그림에서 $\overline{QQ'}$의 길이가 $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$의 최댓값이다.

$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\le\overline{QQ'}=10+1+2=13$

$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\le 13^2=169$이므로

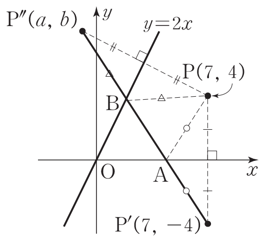
$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$의 최댓값은 169이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

38 답 ③

개울과 숲이 만나는 점을 원점 O, 개울의 경계를 x축, 숲의 경계를 $y=2x$, 캠핑 장소를 점 P라 하자.

이때, 점 P의 좌표를 P(7, 4)라 하고 점 P를 x축과 직선 $y=2x$에
일등급 UP을 확인해.
대하여 대칭이동한 점을 각각 P′, P″이라 하자.



한편, 최단거리는 두 점 P′, P″을 잇는 선분 위의 두 점 A, B를 지날 때이고, 이 거리는 $\overline{\mathrm{P'P''}}$의 길이와 같다.

점 P′은 점 P와 x축에 대하여 대칭이므로 P′(7, −4)이고, P″(a, b)라 하자.

$\frac{b-4}{a-7}=-\frac{1}{2}$, $\frac{b+4}{2}=2\times\frac{a+7}{2}$
수직 조건과 중점 조건

$\therefore a=-1,\ b=8$

$\therefore \mathrm{P''}(-1, 8)$

따라서 $\overline{\mathrm{P'P''}}=\sqrt{\{7-(-1)\}^2+(-4-8)^2}=4\sqrt{13}$이므로

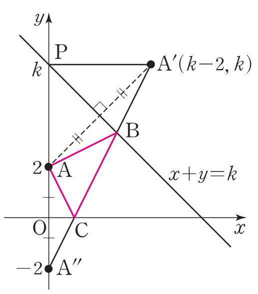
움직이는 최단거리는 $10\overline{\mathrm{P'P''}}=40\sqrt{13}$ (m)

일등급 UP

＊ 도형을 좌표평면에 간단히 나타내기

실제 거리 70 m, 40 m를 점 P의 x좌표, y좌표로 나타내도 좋지만 계산을 간편하게 하는 것이 실수를 줄이는 방법이므로 점 P의 좌표를 실제 거리의 $\frac{1}{10}$의 값으로 나타내었다. 이와 같이 수를 단순화시키는 것이 실수를 줄이고 풀이 시간을 단축할 수 있는 방법이다.

39 답 6



직선 $x+y=k$와 y축의 교점을 P라 하면 P(0, k)이다.

점 A의 직선 $x+y=k$에 대하여 대칭인 점을 A′, x축에 대하여 대칭인 점을 A″이라 하면 A″(0, −2)이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B}}$, $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CA''}}$이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA''}}\geq\overline{\mathrm{A'A''}}$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 선분 A′A″의 길이와 같다.

이때, 삼각형 APA′은 직각이등변삼각형이므로
$\because \angle\mathrm{PAA'}=\angle\mathrm{PA'A}=45^\circ$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PA'}}=k-2$이고 점 A′의 y좌표는 k이다.

즉, A′($k-2$, k)이고 A″(0, −2)이므로

$\overline{\mathrm{A'A''}}=\sqrt{(k-2)^2+(k+2)^2}$

$=\sqrt{2k^2+8}=4\sqrt{5}$

$2k^2+8=80$에서 $k^2=36$

$\therefore k=6$ ($\because k>2$)

40 답 10

선분 CD의 길이는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ ⋯ ㉠로 일정하므로

$\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{DQ}}$의 길이가 최소일 때를 구하면 된다.

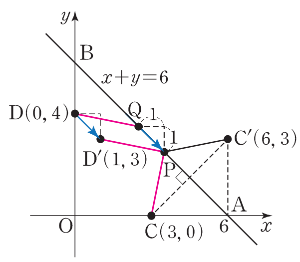
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$이므로 그림과 같이 선분 DQ를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 선분을 D′P라 하면

D′(1, 3)이고 $\overline{\mathrm{DQ}}=\overline{\mathrm{D'P}}$

한편, 점 C를 직선 $x+y=6$에 대하여 대칭이동한 점을 C′이라 하면

삼각형 CAC′은 직각이등변삼각형이므로

C′(6, 3)이고 $\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PC'}}$



이때, $\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{DQ}}=\overline{\mathrm{PC'}}+\overline{\mathrm{D'P}}\geq\overline{\mathrm{C'D'}}$이므로

$\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{DQ}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{C'D'}}$의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{C'D'}}=\sqrt{(6-1)^2+(3-3)^2}=5$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 세 선분의 길이의 합 $\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DQ}}$의 최솟값은 5+5=10

41 답 ①

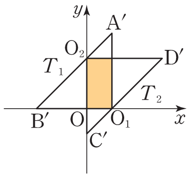
세 점 O(0, 0), A(0, 1), B(−1, 0)을 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 $\mathrm{O_1}$, A′, B′이라 하면

$\mathrm{O_1}(t, 0)$, A′(t, 1), B′($-1+t$, 0)

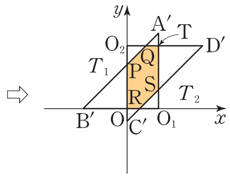
세 점 O(0, 0), C(0, −1), D(1, 0)을 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동한 점을 각각 $\mathrm{O_2}$, C′, D′이라 하면

$\mathrm{O_2}(0, 2t)$, C′(0, $-1+2t$), D′(1, $2t$)

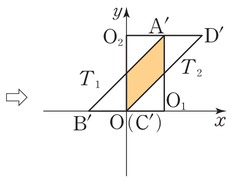
양의 실수 t의 값이 커짐에 따라 두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분의 모양을 살펴보면 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

두 삼각형이 겹치면서 만들어지는 모든 삼각형은
직각이등변삼각형이므로

$t=\frac{1}{3}$일 때, [그림 1]과 같이 삼각형 T_1의 빗변 $A'B'$과 삼각형
$\overline{OB'}=\overline{OO_2}=2t=\frac{2}{3}$
T_2의 꼭짓점 O_2가 만나고,

$t=\frac{1}{2}$일 때, [그림 3]과 같이 삼각형 T_1의 꼭짓점 A'과 삼각형
$\overline{OO_2}=\overline{O_1A'}=1$
T_2의 변 O_2D'이 만나고,

$t=\frac{2}{3}$일 때, 두 삼각형의 빗변이 겹쳐지면서 공통부분이 없다.
두 직선 $A'B'$, $C'D'$의 방정식이 $y=x+\frac{1}{3}$로 같아.

(i) $0<t\le\frac{1}{3}$일 때, 공통부분은 직사각형이고

공통부분의 넓이의 최댓값은 $t=\frac{1}{3}$일 때 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$이다.

(ii) $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$일 때, [그림 2]와 같이 공통부분은 육각형이다.

이때, 육각형의 꼭짓점의 좌표가
$T(t,\ 2t)$, $Q(3t-1,\ 2t)$, $P(0,\ 1-t)$, $O(0,\ 0)$,
$R(1-2t,\ 0)$, $S(t,\ 3t-1)$이므로
직선 $A'B'$이 $y=x+1-t$, 직선 $C'D'$이 $y=x-1+2t$, 직선 O_2D'이 $y=2t$, 직선 O_1A'이 $x=t$임을 이용하여 교점의 좌표를 구해.
두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분의 넓이

$$\begin{aligned}f(t)&=\square OO_1TO_2-\triangle O_1RS-\triangle O_2PQ\\&=t\times2t-\frac{1}{2}(3t-1)^2\times2=2t^2-(3t-1)^2\\&=-7t^2+6t-1=-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{2}{7}\end{aligned}$$

이므로 공통부분의 넓이의 최댓값은 $t=\frac{3}{7}$일 때 $\frac{2}{7}$이다.

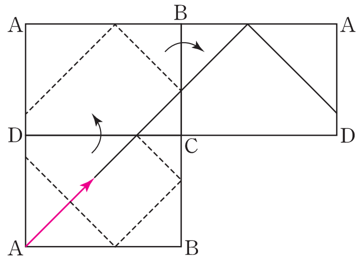
(iii) $\frac{1}{2}\le t<\frac{2}{3}$일 때, 공통부분이 평행사변형이고 t의 값이
커질수록 넓이가 작아지므로 공통부분의 넓이의 최댓값은
$t=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이다.
$\because$ (밑변의 길이)=(높이)$=\frac{1}{2}\overline{OA}=\frac{1}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $f(t)$는 $t=\frac{3}{7}$일 때 최댓값 $\frac{2}{7}$를 갖는다.

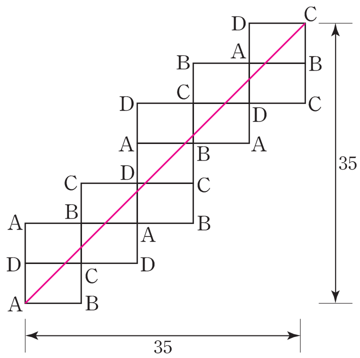
따라서 $a=\frac{3}{7}$, $M=\frac{2}{7}$이므로 $a+M=\frac{5}{7}$

42 답 ②

빛이 반사되는 벽면에 대하여 직사각형을 대칭이동하여 빛이
직진하는 경로를 찾아보자.



ㄱ. 45°의 각도로 진행하므로 빛이 어느 한 모서리에 들어갈 때까지
진행한 경로의 가로의 길이와 세로의 길이가 같다.
직사각형의 가로의 길이 7, 세로의 길이 5의 최소공배수는
35이므로 가로와 세로로 35만큼 진행한 후 모서리에 들어간다.
따라서 빛이 멈출 때까지 진행한 총 거리는
$\sqrt{35^2+35^2}=35\sqrt{2}$이다. (참)



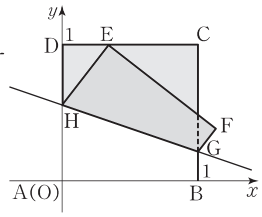
ㄴ. $5\times7=35$에서 가로 7이 5번 진행하여 모서리에 들어가므로
세로 벽면에는 4번 반사된다.
마찬가지로 세로 5가 7번 진행하므로 가로 벽면에는 6번
반사된다.
따라서 진행을 멈출 때까지 빛이 벽면에 부딪혀 반사된 횟수는
$4+6=10$이다. (참)

ㄷ. 가로인 두 변 AB, CD를 각각 a, c라 하고, 세로인 두 변
DA, BC를 각각 d, b라 하면
ㄴ에 의하여 c, a, c, a, c, a의 6개의 가로변에서 반사되어
7번째에 변 c의 모서리로 들어가고, 4개의 세로변 b, d, b,
d에서 반사되어 5번째에 변 b의 모서리로 들어간다. 따라서
빛이 진행을 멈춘 모서리는 c와 b의 교점인 C이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

43 답 ②

좌표평면에서 점 A의 위치를 원점으로 잡고 B$(1, 0)$, C$(1, 1)$, D$(0, 1)$이라 하자. 두 점 G, H의 좌표를 각각 G$(1, a)$, H$(0, b)$라 하면 사다리꼴 EHGF는 사다리꼴 AHGB와 합동이므로 이 넓이를 S라 하면



$S=\frac{1}{2}(a+b)$ ⋯ ㉠

점 E는 점 A$(0, 0)$과 직선 GH에 대하여 대칭이므로 점 E의 좌표를 E$(t, 1)$ $(0\le t\le 1)$이라 하면 직선 GH와 직선 AE는 서로 수직이다. 직선 GH는 기울기가 $-t$이고 선분 AE의 중점

∵ 수직인 직선 AE의 기울기가 $\frac{1}{t}$

$\left(\frac{t}{2}, \frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선이므로 직선의 방정식은

$y=-t\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}$

이 직선이 두 점 H$(0, b)$와 G$(1, a)$를 지나므로

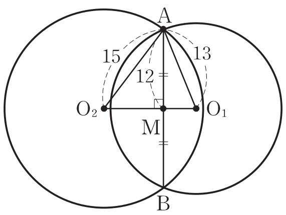
$b=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}$, $a=\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}$ 즉, $a+b=t^2-t+1$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $S=\frac{1}{2}(t^2-t+1)$ $(0\le t\le 1)$

따라서 넓이 S의 최솟값은 $t=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{3}{8}$이다.

44 답 180

원 $(x-2)^2+(y-2)^2=13^2$의 중심이 $(2, 2)$이므로 점 $(2, 2)$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $(2, 2+a)$이다.



이동한 원의 중심을 $O_1(2, 2+a)$라 하면 이 원의 반지름의 길이는 13이다. ⋯ ⓐ

그림과 같이 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=15^2$의 중심을 $O_2(-2, 2)$라 하고 두 원이 서로 다른 두 점 A, B에서 만나므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{AM}=\overline{BM}=12$에 의하여

$\overline{O_1O_2}=\overline{O_1M}+\overline{O_2M}=5+9=14$ ⋯ ⓑ

∵ 피타고라스 정리

$\overline{O_1O_2}^2=\{2-(-2)\}^2+\{(2+a)-2\}^2=4^2+a^2=14^2$

$\therefore a^2=196-16=180$ ⋯ ⓒ

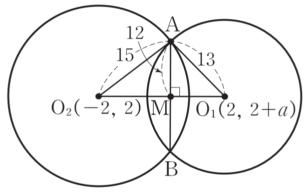
| 채점기준 |

ⓐ 중심이 $(2, 2)$인 원을 이동시킨다. ⋯ [30%]
ⓑ 이동한 원과 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=15^2$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만나는 조건을 찾는다. ⋯ [50%]
ⓒ a^2의 값을 구한다. ⋯ [20%]

일등급 UP

*** 도형의 위치 관계를 대략적으로 접근하기**

문제를 풀기 위해 일반적인 접근법의 그림을 그려서 풀어도 된다.
즉, 두 점에서 만나는 두 원의 위치 관계를 대략적으로 그려준다.



45 답 2

직선 $y=ax+b$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=ay+b$ $\quad\therefore y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ ⋯ ⓐ

이 직선이 원래의 직선 $y=ax+b$와 일치할 조건은

$\frac{1}{a}=a$, $-\frac{b}{a}=b$이므로

$a^2=1$, $(a+1)b=0$ ⋯ ⓑ

따라서 $a=1$, $b=0$ 또는 $a=-1$, b는 모든 실수이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+(-1)^2=2$ ⋯ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 직선 $y=ax+b$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한다. ⋯ [20%]
ⓑ 원래의 직선과 대칭이동한 직선이 일치할 조건을 찾는다. ⋯ [50%]
ⓒ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구한다. ⋯ [30%]

46 답 65

$\sqrt{2a^2-2a+1}+\sqrt{2a^2-14a+29}$

$=\sqrt{a^2+(a-1)^2}+\sqrt{(a-2)^2+(a-5)^2}$

에서 세 점 A$(0, 1)$, B$(2, 5)$, P(a, a)라 할 때, 주어진 식은 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값과 같다. ⋯ ⓐ

점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A$'(1, 0)$에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$의 길이와 같다.

$\therefore m=\overline{A'B}=\sqrt{(2-1)^2+(5-0)^2}=\sqrt{26}$ ⋯ ⓑ

이때, 점 P의 좌표는 두 점 A$'$, B를 지나는 직선과 직선 $y=x$가 만나는 점이므로 직선 A$'$B의 방정식을 구하면

$y=\frac{5-0}{2-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=5x-5$

이 직선과 직선 $y=x$가 만나는 점은 $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$이므로

$a=\frac{5}{4}$ $\quad\therefore 2m^2a=2\times26\times\frac{5}{4}=65$ ⋯ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 식이 의미하는 것을 파악한다. ⋯ [30%]
ⓑ 최솟값 m을 구한다. ⋯ [30%]
ⓒ a의 값을 구하여 $2m^2a$의 값을 계산한다. ⋯ [40%]

고난도 도전 문제

문제편 p.60~61

47 답 48

선분 PQ의 중점을 M이라 하면

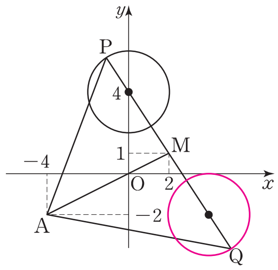
삼각형 APQ의 무게중심이 원점 O이므로

$\overline{AO} : \overline{OM} = 2 : 1$

즉, $\underbrace{\text{직선 } y=\frac{1}{2}x}_{\text{직선 OA}}$ 위의 점 M의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.

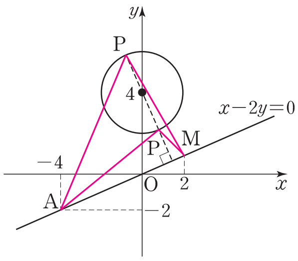
점 P를 점 M에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로

점 Q는 원 C를 점 M에 대하여 대칭이동한 원 위의 점이다.



이때, $\triangle APQ = 2\triangle APM$이므로

삼각형 APM의 넓이가 최대(또는 최소)일 때, 삼각형 APQ의 넓이도 최대(또는 최소)이다.



원 C의 중심 $(0,\ 4)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$ 사이의 거리가

$\frac{|-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$이고 원 C의 반지름의 길이는 2이므로

원 C 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은 각각

$\frac{8}{\sqrt{5}}+2,\ \frac{8}{\sqrt{5}}-2$이다.

또한, $\overline{AM} = \sqrt{(2+4)^2+(1+2)^2} = 3\sqrt{5}$이므로

삼각형 APM의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \left(\frac{8}{\sqrt{5}}+2\right) = 12+3\sqrt{5}$,

최솟값은 $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \left(\frac{8}{\sqrt{5}}-2\right) = 12-3\sqrt{5}$이고,

삼각형 APQ의 넓이의 최댓값 $M=24+6\sqrt{5}$,

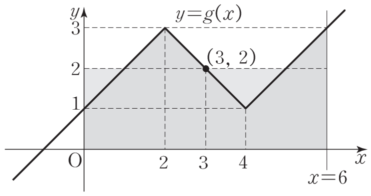
최솟값 $m=24-6\sqrt{5}$이다.

$\therefore M+m = (24+6\sqrt{5})+(24-6\sqrt{5}) = 48$

48 답 12

$g(x)=f(x-3)+2\ (x \le 3)$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)\ (x \le 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

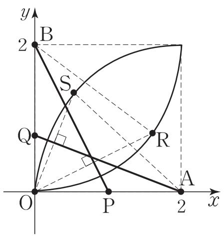
또한, $g(3-x)+g(3+x)=4$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭인 함수이므로 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 12이다.

가로, 세로의 길이가 각각 6, 2인 직사각형의 넓이와 같아.

49 답 ②



원점 O와 점 R가 선분 BP에 대하여 대칭이므로

선분 BP는 선분 OR를 수직이등분한다.

즉, 삼각형 BOR가 이등변삼각형이므로

$\overline{BR} = \overline{BO} = 2$

즉, 점 R는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

또한, 점 P가 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(2,\ 0)$까지 움직일 때, 점 R는 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(2,\ 2)$까지 움직이므로 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴의 호가 점 R가 움직이며 나타내는 도형이다.

마찬가지로 점 S가 움직이며 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2이며 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴의 호이다.

따라서 두 점 R, S가 움직이며 나타내는 도형으로 둘러싸인 부분의 둘레의 길이는 $\underbrace{2\pi \times 2 \times \frac{1}{4}}_{\text{부채꼴의 호의 길이}} \times 2 = 2\pi$이다.

50 답 4

원 C에 외접하고 반지름의 길이가 1인 원의 중심의 좌표를 $(t,\ s)$라 하자.

x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 원이 x축과 y축에 동시에 접하기 위해서는 평행이동한 원의 중심의 좌표가 $(1,\ 1)$, $(-1,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$ 중 하나가 되어야 한다.

(i) 평행이동한 원의 중심의 좌표가 $(1,\ 1)$인 경우

$\begin{cases} t+m=1 \\ s+m=1 \end{cases}$이므로 $s=t$

따라서 점 $(t,\ s)$는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

(ii) 평행이동한 원의 중심의 좌표가 $(-1,\ -1)$인 경우

$\begin{cases} t+m=-1 \\ s+m=-1 \end{cases}$이므로 $s=t$

따라서 점 $(t,\ s)$는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

(iii) 평행이동한 원의 중심의 좌표가 $(-1,\ 1)$인 경우

$\begin{cases} t+m=-1 \\ s+m=1 \end{cases}$이므로 $s=t+2$

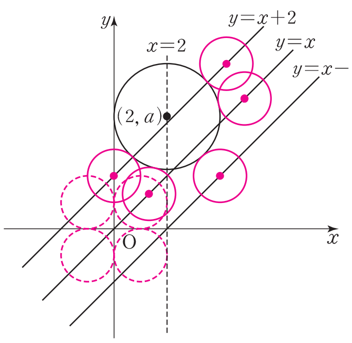
따라서 점 $(t,\ s)$는 직선 $y=x+2$ 위의 점이다.

(iv) 평행이동한 원의 중심의 좌표가 $(1,\ -1)$인 경우

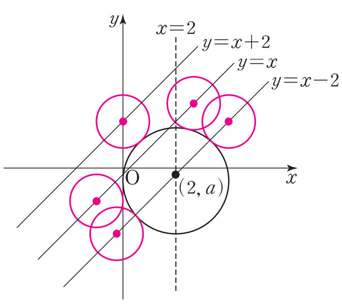
$\begin{cases} t+m=1 \\ s+m=-1 \end{cases}$이므로 $s=t-2$

따라서 점 $(t,\ s)$는 직선 $y=x-2$ 위의 점이다.

(i)~(iv)에 의하여 중심이 세 직선 $y=x+2$, $y=x$, $y=x-2$ 중 하나 위에 있으면서 원 C에 외접하는 원의 개수가 5이려면 다음 그림과 같이 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있고 원 C에 외접하는 원이 오직 하나이거나,



다음 그림과 같이 중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있고 원 C에 외접하는 원이 오직 하나이어야 한다.



Ⅰ) 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있고 원 C에 외접하는 원이 오직 하나인 경우

외접하는 원의 중심의 좌표를 $(t,\ t-2)$라 하면

접하는 두 원의 중심 사이의 거리가 $2+1=3$이므로

$(t-2)^2+(t-2-a)^2=3^2$

$2t^2-2(4+a)t+a^2+4a-1=0$

t에 대한 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(4+a)^2-2(a^2+4a-1)=-a^2+18=0$, $a^2=18$

따라서 $a=3\sqrt{2}$ 또는 $a=-3\sqrt{2}$

이때, $a=-3\sqrt{2}$이면 중심이 직선 $y=x+2$ 또는 $y=x$ 위에 있는 원과는 만나지 않으므로 성립하지 않는다.

$\therefore\ a=3\sqrt{2}$

Ⅱ) 중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있고 원 C에 외접하는 원이 오직 하나인 경우

외접하는 원의 중심의 좌표를 $(t,\ t+2)$라 하면

접하는 두 원의 중심 사이의 거리가 $2+1=3$이므로

$(t-2)^2+(t+2-a)^2=3^2$

$2t^2-2at+a^2-4a-1=0$

t에 대한 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-2(a^2-4a-1)=0$, $a^2-8a-2=0$

따라서 근의 공식에 의해 $a=4+3\sqrt{2}$ 또는 $a=4-3\sqrt{2}$

이때, $a=4+3\sqrt{2}$이면 중심이 직선 $y=x-2$ 또는 $y=x$ 위에 있는 원과는 만나지 않으므로 성립하지 않는다.

$\therefore\ a=4-3\sqrt{2}$

Ⅰ), Ⅱ)에서 $a=3\sqrt{2}$ 또는 $a=4-3\sqrt{2}$이므로 모든 a의 값의 합은

$3\sqrt{2}+(4-3\sqrt{2})=4$

51 답 10

$|x+y-1|+|x-y+1|=2$에서

$|x+(y-1)|+|x-(y-1)|=2$이므로

도형 F는 방정식 $|x+y|+|x-y|=2$가 나타내는 도형을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

F' : $|x+y|+|x-y|=2$라 하면 도형 F'의 방정식에

(i) x 대신 $-x$를 대입하면 $|-x+y|+|-x-y|=2$

즉, $|x+y|+|x-y|=2$이므로 도형 F'은 y축에 대하여 대칭이다.

(ii) y 대신 $-y$를 대입하면 $|x-y|+|x+y|=2$이므로 도형 F'은 x축에 대하여 대칭이다.

(iii) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$|-x-y|+|-x+y|=2$, 즉 $|x+y|+|x-y|=2$이므로

도형 F'은 원점에 대하여 대칭이다.

(iv) x대신 y, y대신 x를 대입하면 $|y+x|+|y-x|=2$

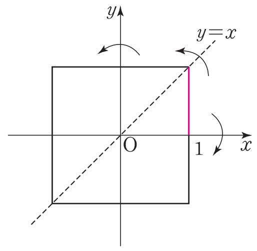
즉, $|x+y|+|x-y|=2$이므로 도형 F'은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(i)~(iv)에 의하여 도형 F'은 x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 도형이므로 제1사분면 중 $x \geq y$인 영역의 그래프를 그린 후 나머지 영역은 대칭을 이용하여 그리면 된다.

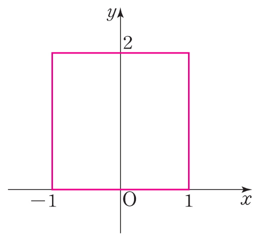
$x \geq y \geq 0$일 때, $|x+y|+|x-y|=2$는

$(x+y)+(x-y)=2$, 즉 $x=1$이므로

도형 F'은 다음 그림과 같다.

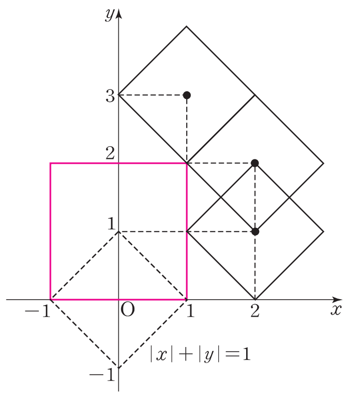


따라서 도형 F'을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형 F는 다음 그림과 같다.



한편, 도형 G : $|x-m|+|y-n|=1$은

방정식 $\underbrace{|x|+|y|=1\text{이 나타내는 도형}}_{\text{네 점 }(\pm1,\,0),\ (0,\,\pm1)\text{을 이은 사각형}}$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로 두 대각선의 교점의 좌표는 (m, n)이다.

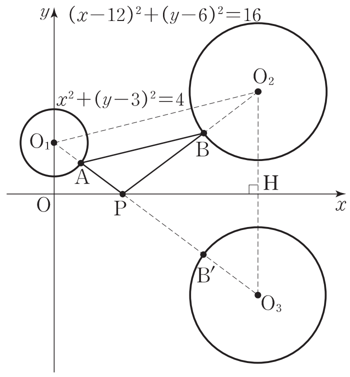


이때, 두 도형 F, G의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 그림과 같이

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$이다.

따라서 m^2+n^2의 최댓값은 $m=1$, $n=3$일 때 $1^2+3^2=10$이다.

52 답 241



두 원 $x^2+(y-3)^2=4$, $(x-12)^2+(y-6)^2=16$의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고 점 O_2와 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 O_3, B′이라 하자.

$\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때는

$\overline{AP}+\overline{B'P}$의 값이 최소일 때이고 그림과 같이 선분 O_1O_3이 두 원 및 x축과 만나는 점이 각각 A, B′, P일 때이다.

점 O_2에서 x축에 내린 수선의 발 H에 대하여 각 선분의 길이는

$\overline{O_1O}=3$, $\overline{O_2H}=6$, $\overline{OH}=12$이고

점 P는 선분 O_1O_3을

$\overline{O_1P} : \overline{O_3P}=\overline{O_1P} : \overline{O_2P}=\underbrace{\overline{O_1O} : \overline{O_2H}}_{\text{두 점 }O_1,\,H\text{의 }y\text{좌표의 비}}=1 : 2$로 내분하는 점이므로

$\overline{OP}=\dfrac{1}{3}\overline{OH}=4$, $\overline{PH}=8$

$\therefore \overline{O_1P}=5$, $\overline{O_2P}=10$, $\underbrace{\overline{AP}=3,\ \overline{BP}=6}_{\substack{\overline{AP}=\overline{O_1P}-\overline{O_1A}=5-2=3 \\ \overline{BP}=\overline{O_2P}-\overline{O_2B}=10-4=6}}$

즉, $\overline{O_1P} : \overline{O_2P}=\overline{AP} : \overline{BP}=1 : 2$이므로

삼각형 APB와 삼각형 O_1PO_2는 SAS 닮음이고

길이의 비는 $\overline{AP} : \overline{O_1P}=3 : 5$, 넓이의 비는 $9 : 25$이다.

$$\begin{aligned}\triangle O_1PO_2 &= \square O_1OHO_2-(\triangle O_1OP+\triangle O_2PH) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{O_1O}+\overline{O_2H})\times\overline{OH} \\ &\quad -\frac{1}{2}(\overline{O_1O}\times\overline{OP}+\overline{O_2H}\times\overline{PH}) \\ &= \frac{1}{2}\times(3+6)\times12-\frac{1}{2}\times(3\times4+6\times8) \\ &= 54-30=24\end{aligned}$$

$\triangle ABP=\dfrac{9}{25}\triangle O_1PO_2=\dfrac{9}{25}\times24=\dfrac{216}{25}$

따라서 $p=25$, $q=216$이므로 $p+q=241$

53 답 12

$\dfrac{x_2-y_1}{x_1-y_2}$의 최댓값이 -1이므로

$\dfrac{x_2-y_1}{x_1-y_2}=-\dfrac{y_1-x_2}{x_1-y_2}\le -1$에서 $\dfrac{y_1-x_2}{x_1-y_2}\ge 1$

이때, $\dfrac{y_1-x_2}{x_1-y_2}$는 두 점 (x_1, y_1), (y_2, x_2)를 이은 직선의 기울기이고, 점 (y_2, x_2)는 점 (x_2, y_2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이다.

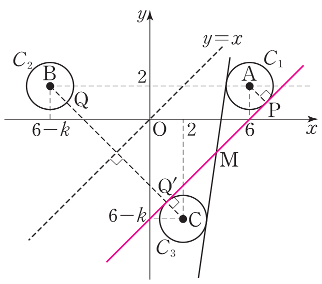
원 C_2 위를 움직이는 점 Q

원 C_2를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_3이라 하고, 세 원 C_1, C_2, C_3의 중심을 순서대로 A, B, C라 하면 $A(6, 2)$, $B(6-k, 2)$, $C(2, 6-k)$이고, 세 원의 반지름의 길이는 모두 $\sqrt{2}$이다.

원 C_2 위의 점 $Q(x_2, y_2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q′이라 하면 $Q'(y_2, x_2)$이고, 점 Q가 원 C_2 위의 점이므로 점 $Q'(y_2, x_2)$는 원 C_3 위의 점이다.

따라서 $\dfrac{y_1-x_2}{x_1-y_2}$는 원 C_1 위의 점 P와 원 C_3 위의 점 Q′을 지나는 직선의 기울기이므로 그림과 같이 직선 PQ′이 두 원 C_1, C_3에 모두 접하고, 기울기가 두 원의 중심을 지나는 직선 AC의 기울기보다 작을 때 $\dfrac{y_1-x_2}{x_1-y_2}$의 값이 최소가 된다. … ㉠

즉, 이때 직선 PQ′의 기울기가 1이다.



선분 AC의 중점을 M이라 하면

$M\left(\dfrac{6+2}{2}, \dfrac{2+(6-k)}{2}\right)$, 즉 $M\left(4, 4-\dfrac{k}{2}\right)$이고,

두 원 C_1, C_3은 서로 합동이므로 대칭성에 의하여 직선 PQ′은 점 M을 지나므로 직선 PQ′의 방정식은 $y=(x-4)+4-\dfrac{k}{2}$

기울기가 1이고 점 $M\left(4, 4-\dfrac{k}{2}\right)$를 지나는 직선의 방정식

직선 PQ′이 원 C_1에 접하므로

점 $A(6, 2)$와 직선 $x-y-\dfrac{k}{2}=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|6-2-\dfrac{k}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},\ \left|4-\frac{k}{2}\right|=2$$

$\therefore k=4$ 또는 $k=12$

이때, $k=4$이면 점 M을 지나는 접선 중 기울기가 두 원의 중심을 지나는 직선 AC의 기울기보다 큰 접선이므로

$\dfrac{y_1-x_2}{x_1-y_2}$의 값이 최대일 때이다.

㉠에 모순

따라서 구하는 양수 k의 값은 12이다.

54 답 4

포물선 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{1}{4}\times 2\times x$에서 $y=x-1$이다.

$y=m(x-2)+1$로 두고 m의 값을 구하는 방법은 다른 풀이를 참고해.

이때, 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x+k$에 대하여 대칭이동한 도형은 $f(y-k, x+k)=0$이므로

일등급 UP을 확인해.

포물선 $y=\dfrac{1}{4}x^2$을 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 곡선 C는

$x-1=\dfrac{1}{4}(y+1)^2$이다.

x 대신 $y+1$을, y 대신 $x-1$을 대입했어.

이 곡선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선 C'은

$y-1=\dfrac{1}{4}(x+1)^2$, 즉 $y=\dfrac{1}{4}(x+1)^2+1$이다.

x 대신 y를, y대신 x를 대입했어.

곡선 C' : $y=\dfrac{1}{4}(x+1)^2+1$과 포물선 $y=\dfrac{1}{4}x^2$을 연립하여 교점의 x좌표를 구하면

$\dfrac{1}{4}(x+1)^2+1=\dfrac{1}{4}x^2$, $(x+1)^2+4=x^2$

$2x+5=0 \qquad \therefore x=-\dfrac{5}{2}$

$y=\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{25}{16}$이므로 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{16}\right)$이다.

$a=-\dfrac{5}{2}$, $b=\dfrac{25}{16}$이므로 $\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{25}{4}\times\dfrac{16}{25}=4$

다른 풀이 : 수직 조건과 중점 조건을 이용하여 곡선 C 구하기

포물선 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식을

$y=m(x-2)+1$이라 하면

$\dfrac{1}{4}x^2=m(x-2)+1$에서 $x^2-4mx+8m-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4m^2-(8m-4)=4(m-1)^2=0 \qquad \therefore m=1$

따라서 접선의 방정식은 $y=x-1$이다.

이제, 포물선 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 위의 점 (x, y)를 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점을 (x', y')이라 하면

수직 조건 : $\dfrac{y-y'}{x-x'}=-1 \Rightarrow x+y=x'+y'$ … ㉠

중점 조건 : $\dfrac{y+y'}{2}=\dfrac{x+x'}{2}-1 \Rightarrow x-y=y'-x'+2$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $x=y'+1$, $y=x'-1$

이때, (x, y)는 $y=\dfrac{1}{4}x^2$을 만족하므로

(x', y')은 $x'-1=\dfrac{1}{4}(y'+1)^2$을 만족한다.

따라서 곡선 C는 $x-1=\dfrac{1}{4}(y+1)^2$이다.

(이하 동일)

일등급 UP

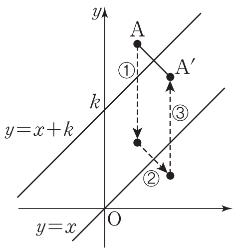
∗ 직선 $y=x+k$에 대하여 대칭이동한 도형

직선 $y=x+k$에 대하여 대칭이동한 도형은

① y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동

② 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동

③ y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여 구한다.



즉,

직선 $y=x+k$에 대하여 대칭이동

$f(x, y)=0$

↓ y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동

$f(x, y+k)=0$

↓ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동

$f(y, x+k)=0$

↓ y축의 방향으로 k만큼 평행이동

$f(y-k, x+k)=0$

Ⅱ 집합과 명제

05 집합

핵심 유형 연습

문제편 p.66~68

01 답 6

Tip

조건제시법으로 나타내어진 집합을 원소나열법으로 나타내어 각 집합의 원소를 구하는 것이 먼저야.

두 집합 B, C의 원소를 구하는 표를 만들면 각각 다음과 같다.

x \ y	1	2	3
1	0	-1	-2
2	1	0	-1
3	2	1	0

$\therefore B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

x \ y	1	2	3
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	2	1	$\frac{2}{3}$
3	3	$\frac{3}{2}$	1

$\therefore C=\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$

$\therefore C-B=\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3\right\}$

$C-B=\{x|x\in C$ 그리고 $x\notin B\}$

따라서 집합 $C-B$의 모든 원소의 합은

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+3=6$

02 답 5

집합 $A=\{x_1, x_2, x_3\}$이라 하면 조건 (가)에서 $x_1+x_2+x_3=19$이고

집합 $B=\left\{\frac{x_1+a}{2}, \frac{x_2+a}{2}, \frac{x_3+a}{2}\right\}$이므로

집합 B의 모든 원소의 합은 $\frac{(x_1+x_2+x_3)+3a}{2}=\frac{19+3a}{2}$

집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합에서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합을 뺀 것과 같으므로 $29=19+\frac{19+3a}{2}-7$ ($\because$ 조건 (다))

$\frac{19+3a}{2}=17$, $3a=34-19$

$3a=15$　　$\therefore a=5$

03 답 ③

ㄱ. $3=0^2+3\times1^2$으로 나타낼 수 있으므로 $3\in A$ (참)

ㄴ. 【반례】 ㄱ에서 $3\in A$이므로 $3+3=6\in A$인지 확인해보자.

음이 아닌 정수 m, n에 대하여

$6=m^2+3n^2$, 즉 $m^2=6-3n^2$이라 하면

(ⅰ) $n=0$일 때, $m^2=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $n=1$일 때, $m^2=6-3=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m의 값은 존재하지 않는다.

(ⅲ) $n\ge2$일 때, $m^2=6-3n^2<0$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 m의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $6=m^2+3n^2$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m, n의 값이 존재하지 않으므로 $6\notin A$이다.

따라서 $a\in A$이고 $b\in A$일 때 $a+b\in A$인 것은 아니다. (거짓)

ㄷ. $a=m^2+3n^2$, $b=p^2+3q^2$ (m, n, p, q는 음이 아닌 정수)라 하면

$ab=(m^2+3n^2)(p^2+3q^2)=m^2p^2+9n^2q^2+3(m^2q^2+n^2p^2)$

$=m^2p^2+6mnpq+9n^2q^2+3(m^2q^2-2mnpq+n^2p^2)$

$=(mp+3nq)^2+3(mq-np)^2$

이때, $|mp+3nq|$, $|mq-np|$는 음이 아닌 정수이므로

$\because m, n, p, q$는 정수

$ab\in A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04 답 ⑤

Tip

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때 $A\subset B$이고, 전체집합 U의 원소 중에서 집합 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합이 A^C이야.

벤다이어그램에서 세 집합 A, B, C의 포함 관계는

ㄱ. $C^C\subset B^C$에서 $B\subset C$ (참)

ㄴ. $C^C\subset A$에서 $A^C\subset C$ (참)

ㄷ. $A^C\subset B$에서 $B^C\subset A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 답 ③

$S=\{x, y, z\}=\{xy, yz, zx\}$이므로 집합의 원소를 모두 곱하면

$xyz=xy\times yz\times zx$에서

$xyz=(xyz)^2$, $xyz(xyz-1)=0$

$\therefore xyz=1$ ($\because xyz\neq 0$)

ㄱ. 집합의 원소를 모두 더하면

$x+y+z=xy+yz+zx$에서 $xy+yz+zx=4$

$xyz=1$이므로 $xy=\dfrac{1}{z}$, $yz=\dfrac{1}{x}$, $zx=\dfrac{1}{y}$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$ (참)

ㄴ. $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=16-8=8$ (참)

ㄷ. $x+y+z=4$, $xy+yz+xz=4$, $xyz=1$이므로

x, y, z는 t에 대한 삼차방정식 $t^3-4t^2+4t-1=0$의 세 근이다.

즉, $x^3-4x^2+4x-1=0$, $y^3-4y^2+4y-1=0$,

$z^3-4z^2+4z-1=0$

세 식을 변끼리 모두 더하면

$(x^3+y^3+z^3)-4(x^2+y^2+z^2)+4(x+y+z)-3=0$

$x^3+y^3+z^3=4(x^2+y^2+z^2)-4(x+y+z)+3$

$=4\times 8-4\times 4+3$ ($\because$ ㄴ)

$=32-16+3=19$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고 ① 같은 원소를 중복해서 나열하지 않으므로 x, y, z는 서로 다른 수이다.

② 집합 S의 원소 $x=0$이면 $xy=zx=0$이 되어 중복되므로 $x\neq 0$이고 같은 이유로 $y\neq 0$, $z\neq 0$이다.

다른 풀이 : 인수분해 공식의 변형을 이용하여 계산하기

ㄷ. $x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\}+3xyz$

$=4\times(8-4)+3=19$ (거짓)

06 답 ③

Tip

분배법칙을 이용하여 $(A^C\cup B)\cap A$를 간단히 하고 두 원소 2, 3의 위치를 찾아.

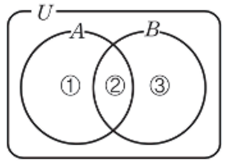
$(A^C\cup B)\cap A=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$

$=\varnothing\cup(B\cap A)=B\cap A$

이때, $B\cap A=\{3\}$이므로 집합 B는 원소 3을 원소로 가지고 원소 2는 원소로 가지지 않는 전체집합 U의 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 B의 개수는 집합 $\{0, 1, 4\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^3=8$이다.

07 답 81



$A\cup B=U$이므로 집합 U의 모든 원소는 집합 A 또는 집합 B 중 하나의 원소가 되어야 한다.

따라서 집합 U의 모든 원소는 그림의 세 영역 ①, ②, ③ 중 하나에 속해야 하므로 $U=\{1, 2, 3, 4\}$의 네 원소를 각각 세 영역에 배치하는 방법의 수와 같다.

$\therefore 3\times 3\times 3\times 3=81$

08 답 82

여사건으로 접근하자.

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3개인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_3=\dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120$

조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소 a에 대하여 $2a\notin A$이므로 a와 $2a$는 집합 A에 동시에 속할 수 없다.

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$에 대하여

$a\in U$일 때, $2a\in U$인 순서쌍 $(a, 2a)$를 모두 구하면

$(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$의 5개이므로

이 5개의 쌍 중에서 1개를 택하고, 나머지 8개의 원소 중 하나를 택하는 방법의 수는 ${}_5C_1\times{}_8C_1=5\times 8=40$

이때, 두 집합 $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 4, 8\}$이 2번 세어지므로 중복되는 경우를 제외하면

$(1, 2)$와 4를 뽑는 경우와 $(2, 4)$와 1을 뽑는 경우에는 집합 $\{1, 2, 4\}$가 만들어지고, $(2, 4)$와 8을 뽑는 경우와 $(4, 8)$과 2를 뽑는 경우에는 $\{2, 4, 8\}$이 만들어져.

$40-2=38$

따라서 조건을 만족시키는 집합 U의 부분집합 A의 개수는

$120-38=82$

09 답 ⑤

Tip

여집합과 차집합 사이의 관계를 이용하여 좌변 또는 우변의 식을 정리해.

ㄱ. $(A\cap B)-(A\cap C)$

$=(A\cap B)\cap(A\cap C)^C$

$=\underline{(A\cap B)\cap(A^C\cup C^C)}$

분배법칙 : $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=(A\cap B\cap A^C)\cup(A\cap B\cap C^C)$

$=\underline{\varnothing}\cup(A\cap B\cap C^C)$

$\because A\cap A^C=\varnothing$

$=A\cap B\cap C^C$

$=A\cap(B\cap C^C)$

$=A\cap(B-C)$ (참)

ㄴ. $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=A\cap(B\cap C)^C$

$=A-(B\cap C)$ (참)

ㄷ. $(A-B)-C=(A\cap B^C)-C$

$=(A\cap B^C)\cap C^C$

$=A\cap(B^C\cap C^C)$

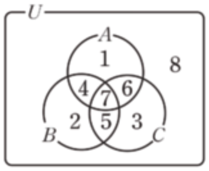
$=A\cap(B\cup C)^C$

$=A-(B\cup C)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이 : 임의의 원소 이용하기

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C를 다음과 같이 두자.



ㄱ. $A\cap B=\{4, 7\}$, $A\cap C=\{6, 7\}$, $B-C=\{2, 4\}$이므로

좌변 : $(A\cap B)-(A\cap C)=\{4\}$

우변 : $A\cap(B-C)=\{4\}$

$\therefore (A\cap B)-(A\cap C)=A\cap(B-C)$ (참)

같은 방법으로 ㄴ, ㄷ도 참임을 간단하게 확인할 수 있다.

10 답 ④

$(M_{18}\cup M_{36})\cap(M_{36}\cup M_{24})$

$=(M_{36}\cup M_{18})\cap(M_{36}\cup M_{24})$ ($\because$ 교환법칙)

$=M_{36}\cup(M_{18}\cap M_{24})$ ($\because$ 분배법칙)

$=M_{36}\cup M_{72}$ ⇦ (18과 24의 최소공배수)$=72$

$=M_{36}$ ⇦ $M_{72}\subset M_{36}$

11 답 ③

$A_1\cup A_{n+1}=A_n$에서

$n=1$일 때,

$A_1\cup A_2=A_1 \Longleftrightarrow A_2\subset A_1$

$n=2$일 때,

$A_1\cup A_3=A_2 \Longleftrightarrow A_1\subset A_2$, $A_3\subset A_2$

$\therefore A_1=A_2$이고 $A_3\subset A_1$

$n=3$일 때,

$A_1\cup A_4=A_3 \Longleftrightarrow A_1\subset A_3$, $A_4\subset A_3$

$\therefore A_1=A_2=A_3$이고 $A_4\subset A_1$

같은 방법으로 계속하면

$A_1=A_2=A_3=\cdots=A_n=\cdots$

이다.

ㄱ. $A_{100}=A_{101}$이므로 $A_{100}\cap A_{101}=A_{100}\neq\varnothing$ (거짓)

ㄴ. $A_{100}=A_{101}$이므로 $A_{100}{}^C\cap A_{101}{}^C=(A_{100}\cup A_{101})^C=A_{100}{}^C$

이때, A_{100}은 U의 진부분집합이므로 $A_{100}{}^C\neq\varnothing$ (거짓)

ㄷ. $A_{100}=A_{101}$이므로 $A_{100}-A_{101}=\varnothing$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

12 답 ⑤

Tip

벤다이어그램을 이용하여 $X\triangle Y=(X-Y)\cup(Y-X)$를 $X\cup Y$와 $X\cap Y$의 연산으로 나타내.

ㄱ. $A\triangle\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$

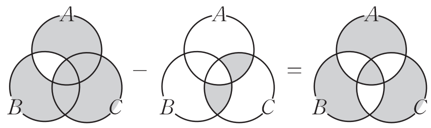
$A\triangle A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$ (참)

ㄴ. $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$

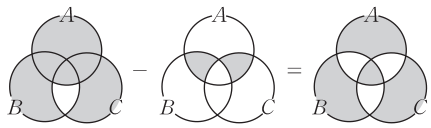
$=(A\cup B)-(A\cap B)$

이므로 벤다이어그램으로 나타내면

(i) $(A\triangle B)\triangle C$, 즉 $\{(A\triangle B)\cup C\}-\{(A\triangle B)\cap C\}$는



(ii) $A\triangle(B\triangle C)$, 즉 $\{A\cup(B\triangle C)\}-\{A\cap(B\triangle C)\}$는



$\therefore (A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$ (참)

ㄷ. $A\triangle B=C$이면

$A\triangle C=A\triangle(A\triangle B)=(A\triangle A)\triangle B$ ($\because$ ㄴ)

$=\varnothing\triangle B$ ($\because$ ㄱ)$=B$ ($\because$ ㄱ) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13 답 24

대칭차집합의 연산의 성질에 의하여

$A\triangle C=B$에서 $A\triangle B=C$이다.

$C=(A-B)\cup(B-A)$

$=\{1, 4\}\cup\{2, 8, 9\}$

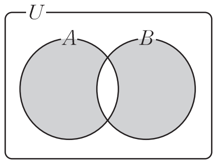
$=\{1, 2, 4, 8, 9\}$

따라서 집합 C의 모든 원소의 합은 $1+2+4+8+9=24$

14 답 4

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$이고

벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$(A-B)\cup(B-A)$의 원소가 1, 2, 7이고

$n(A)=3$, $n(B)=2$이므로 $n(A\cap B)=1$이어야 한다.

$\therefore a-1\in A\cap B$

$n(A)+n(B)$
$=n((A\cap B^C)\cup(A^C\cap B))+n(A\cap B)\times 2$
이므로 $3+2=3+n(A\cap B)\times 2$
$\therefore n(A\cap B)=1$

(i) $a-1=a+3$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a-1=a^2-3a-1$에서 $a^2-4a=0$이므로 $a(a-4)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=4$

이때, $a+3=7$을 만족시키는 a의 값은 $a=4$

(i), (ii)에서 $a=4$

15 답 40

Tip

집합의 각 영역에 속하는 원소의 개수로 계산해.

반 전체 학생 수를 x, A를 읽은 학생의 집합을 A, B를 읽은 학생의 집합을 B라 하면

$n(A)=\frac{1}{2}x$, $n(B)=\frac{3}{5}x$, $n(A\cap B)=\frac{3}{10}x$,

$n((A\cup B)^C)=8$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}x-\frac{3}{10}x=\frac{5+6-3}{10}x=\frac{4}{5}x$$

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=x-\frac{4}{5}x=\frac{1}{5}x=8$

$\therefore x=40$

따라서 반 전체 학생 수는 40명이다.

16 답 ④

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$15=50-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=35$

또, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$35=n(A)+n(B)-18$

$\therefore n(A)+n(B)=53$

17 답 28

$A\cap B=\{3, 7\}$이므로 $S(A\cap B)=3+7=10$이고,

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{5, 8\}$이므로

$S((A\cup B)^C)=5+8=13$이다.

$S(A\cup B)=S(U)-S((A\cup B)^C)=45-13=32$

$\therefore S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)=32+10=42$

이때, $S(A)=2S(B)$이므로

$S(A)+S(B)=S(A)+\frac{1}{2}S(A)=\frac{3}{2}S(A)=42$

$\therefore S(A)=28$

실전 유형 훈련

문제편 p.69~74

18 답 3

$A=\{i, -1, -i, 1\}$이고

$z\in A$이면 $\underbrace{z^2=-1 \text{ 또는 } z^2=1}_{i^2=(-i)^2=-1,\ (-1)^2=1^2=1}$이므로

$B=\{z_1^2+z_2^2 \mid z_1\in A, z_2\in A\}=\{-2, 0, 2\}$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 3이다.

19 답 8

집합 A의 원소를 c, 집합 B의 원소를 b라 하면

집합 A의 원소에서 집합 B의 원소를 뺀 값을 표로 만들면 다음과 같다.

$c-b$		b				
		1	2	3	4	a
c	5	4	3	2	1	$5-a$
	7	6	5	4	3	$7-a$
	9	8	7	6	5	$9-a$

따라서 집합 X의 원소는

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 5-a, 7-a, 9-a$

이때, $n(X)=10$이 되기 위해서는 세 수 $5-a, 7-a, 9-a$ 중 한 수만 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 중 한 수와 같아야 한다.

a가 자연수이므로 $9>9-a>7-a>5-a$

즉, $\underbrace{7-a<1, 9-a\geq 1 \text{ 또는 } 5-a\leq 8, 7-a>8}_{\text{가장 큰 수인 } 9-a\text{가 겹치는 경우 또는 가장 작은 수인 } 5-a\text{가 겹치는 경우}}$이어야 한다.

$\therefore 6<a\leq 8$ 또는 $-3\leq a<-1$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 7, 8이므로 최댓값은 8이다.

20 답 ①

$2\in S$이면 $\frac{1+2}{1-2}=-3\in S$

같은 방법으로 계산하면

$-3\in S$이면 $\frac{1+(-3)}{1-(-3)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\in S$

$-\frac{1}{2}\in S$이면 $\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\in S$

$\frac{1}{3}\in S$이면 $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=2\in S$

$2\in S$이면 $\frac{1+2}{1-2}=-3\in S$

⋮

즉, $2\in S$이면 $-3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$은 모두 집합 S의 원소이어야 한다.

따라서 집합 S 중에서 원소의 개수가 최소인 것은

$\left\{2, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$이고, 집합 S의 모든 원소의 합은

$2+(-3)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}=-\frac{7}{6}$

21 답 ⑤

$0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$라 하면 집합 P의 원소 중 가장 작은 수는 $\alpha+\beta$, 가장 큰 수는 $\gamma+\delta$이고, 집합 Q의 원소 중 가장 작은 수는 $\alpha\beta$, 가장 큰 수는 $\gamma\delta$이다.

$\therefore \alpha+\beta=8 \cdots$ ㉠, $\alpha\beta=15 \cdots$ ㉡

$\gamma+\delta=15 \cdots$ ㉢, $\gamma\delta=56 \cdots$ ㉣

㉠, ㉡에서 α, β는 t에 대한 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이므로

∵ 이차방정식의 근과 계수의 관계

$(t-3)(t-5)=0$에서 $\alpha=3$, $\beta=5$

㉢, ㉣에서 γ, δ는 t에 대한 이차방정식 $t^2-15t+56=0$의 두 근이므로

∵ 이차방정식의 근과 계수의 관계

$(t-7)(t-8)=0$에서 $\gamma=7$, $\delta=8$

$\therefore S=\{3, 5, 7, 8\}$

이때, $R=\{a-b \mid a\in S, b\in S\}$의 원소를 표를 이용하여 구하면 다음과 같다.

$a-b$		b			
		3	5	7	8
a	3	0	-2	-4	-5
	5	2	0	-2	-3
	7	4	2	0	-1
	8	5	3	1	0

$\therefore R=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 R의 원소의 개수는 11이다.

22 답 15

직선 $x+y=9$가 x축, y축과 만나는 두 점 A, B의 좌표는 각각 A$(9, 0)$, B$(0, 9)$이고

삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이므로 $\angle$OAB$=45^\circ$

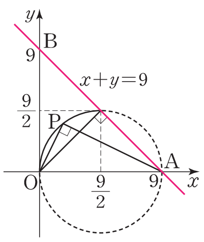
또한, $\angle$PAO$=\angle$POB이므로

$\angle$POA$+\angle$PAO$=\angle$POA$+\angle$POB$=90^\circ$

삼각형 OAP에서

$\angle$OPA$=180^\circ-(\angle$POA$+\angle$PAO$)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

따라서 점 P는 선분 OA를 지름으로 하는 원 위의 점이다.



그림에서 점 P의 x좌표는 $0\le x\le\frac{9}{2}$이고 k는 자연수이므로 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$

∵ 점 P는 삼각형 OAB 내부의 점이므로

이때, 집합 $Y=\left\{\frac{1+a}{2}, \frac{2+a}{2}, \frac{3+a}{2}, \frac{4+a}{2}\right\}$이고, 집합 Y의 임의의 두 원소의 차는 $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$뿐이므로

$\frac{1+a}{2}-\frac{1+a}{2}=0, \frac{4+a}{2}-\frac{1+a}{2}=\frac{3}{2}$

$n(X\cap Y)=2$가 되는 두 원소는 연속하는 두 자연수이다.

(i) $X\cap Y=\{1, 2\}$일 때,

$\frac{1+a}{2}=1$ 또는 $\frac{2+a}{2}=1$일 때이므로

$\frac{1+a}{2}=1$이면 $\frac{3+a}{2}=2$, $\frac{2+a}{2}=1$이면 $\frac{4+a}{2}=2$가 되어 $X\cap Y=\{1, 2\}$가 돼.

$1+a=2$ 또는 $2+a=2$

$\therefore a=1$ 또는 $a=0$

(ii) $X\cap Y=\{2, 3\}$일 때,

$\frac{1+a}{2}=2$ 또는 $\frac{2+a}{2}=2$일 때이므로

$1+a=4$ 또는 $2+a=4$

$\therefore a=3$ 또는 $a=2$

(iii) $X\cap Y=\{3, 4\}$일 때,

$\frac{1+a}{2}=3$ 또는 $\frac{2+a}{2}=3$일 때이므로

$1+a=6$ 또는 $2+a=6$

$\therefore a=5$ 또는 $a=4$

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 모든 실수 a의 값의 합은 15이다.

다른 풀이 : 집합 Y의 원소를 직접 구하여 해결하기

본풀이에서 두 집합은 $X=\{1, 2, 3, 4\}$,

$Y=\left\{\frac{1+a}{2}, \frac{2+a}{2}, \frac{3+a}{2}, \frac{4+a}{2}\right\}$이다.

(i) $\frac{1+a}{2}=1$, 즉 $a=1$일 때,

$Y=\left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right\}$에서 $n(X\cap Y)=2$

(ii) $\frac{1+a}{2}=2$, 즉 $a=3$일 때,

$Y=\left\{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}$에서 $n(X\cap Y)=2$

(iii) $\frac{1+a}{2}=3$, 즉 $a=5$일 때,

$Y=\left\{3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}\right\}$에서 $n(X\cap Y)=2$

(iv) $\frac{2+a}{2}=1$, 즉 $a=0$일 때,

$Y=\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$에서 $n(X\cap Y)=2$

(v) $\frac{2+a}{2}=2$, 즉 $a=2$일 때,

$Y=\left\{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$에서 $n(X\cap Y)=2$

(vi) $\frac{2+a}{2}=3$, 즉 $a=4$일 때,

$Y=\left\{\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$에서 $n(X\cap Y)=2$

(i)~(vi)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 모든 실수 a의 합은 15이다.

23 답 ②

$x\in A$이면 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$에서 $2<\frac{1}{x}<3$

즉, $\frac{1}{x}$의 정수 부분은 2이므로 소수 부분은

$\left\langle\frac{1}{x}\right\rangle=\frac{1}{x}-2$

$\left\langle\frac{1}{x}\right\rangle=x$에서 $\frac{1}{x}-2=x$

양변에 x를 곱하고 이항하면

$1-2x=x^2$, $x^2+2x-1=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$

이때, $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이므로 $x=-1+\sqrt{2}$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 1이다.

24 답 ②

ㄱ. 집합 N_4와 N_2를 원소나열법으로 나타내면

$N_4=\{1, 5, 9\}$, $N_2=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

이므로 $N_4\subset N_2$ (참)

ㄴ. $N_1=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}=U$이므로 임의의 자연수 k에 대하여 $N_k\subset N_1$이다. (참)

ㄷ. 【반례】 $p=2$, $q=3$이면

$N_2=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $N_3=\{1, 4, 7, 10\}$

$\therefore N_2\cap N_3=\{1, 7\}\neq\{1\}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

25 답 ③

ㄱ. $x\in C$이면 $x=4n+3$ (n은 정수)

$x=4n+3=2(2n+1)+1$

이때, $2n+1$은 정수이므로 $x\in A$

$\therefore C\subset A$ (참)

ㄴ. 【반례】 $5\in B$이지만 $5\notin C$이므로 $B\not\subset C$ (거짓)

ㄷ. $x\in A$이면 $x=2n+1$ (n은 정수)

$x=2n+1=2(n+1)-1$

이때, $n+1$은 정수이므로 $x\in B$

$\therefore \underline{A\subset B}$

$A\subset B \Longleftrightarrow B^C\subset A^C$

따라서 $B^C\subset A^C$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

26 답 ③

$P(A)$는 집합 A의 멱집합, 즉 A의 모든 부분집합을 원소로 하는 집합이다.

ㄱ. $X\in P(A)$라 하면 $X\subset A$

그런데 $A\subset B$이므로 $X\subset B$

$\therefore X\in P(B)$

따라서 $A\subset B$이면 $P(A)\subset P(B)$이다. (참)

ㄴ. $X\in(P(A)\cap P(B))$

$\Longleftrightarrow X\in P(A)$이고 $X\in P(B)$

$\Longleftrightarrow X\subset A$이고 $X\subset B$

$\Longleftrightarrow X\subset(A\cap B)$

$\Longleftrightarrow X\in P(A\cap B)$

$\therefore P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$ (참)

ㄷ. 【반례】 $A=\{1\}$, $B=\{2\}$라 하면

$P(A)=\{\varnothing, \{1\}\}$, $P(B)=\{\varnothing, \{2\}\}$이므로

$P(A)\cup P(B)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$

한편, $A\cup B=\{1, 2\}$이므로

$P(A\cup B)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$\therefore P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

27 답 ③

$\{1, 2\}\cap X\neq\varnothing$을 만족시키려면 집합 X가 1 또는 2를 원소로 가져야 한다.

1 또는 2를 원소로 가지는 부분집합의 개수는 전체 부분집합에서 1과 2를 모두 원소로 가지지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^5-2^3=32-8=24$

28 답 20

집합 A는 전체집합 U의 부분집합 중 1을 원소로 가지는 집합을 원소로 하는 집합이므로 집합 A의 원소의 개수는

$\underline{n(A)=2^{5-1}}=2^4=16$

1을 원소로 가지는 부분집합의 개수

집합 B는 전체집합 U의 부분집합 중 2와 3을 원소로 가지는 집합을 원소로 하는 집합이므로 집합 B의 원소의 개수는

$\underline{n(B)=2^{5-2}}=2^3=8$

2와 3을 모두 원소로 가지는 부분집합의 개수

한편, $A\cap B$는 1, 2, 3을 모두 원소로 가지는 집합을 원소로 하는 집합이므로 집합 $A\cap B$의 원소의 개수는

$\underline{n(A\cap B)=2^{5-3}}=2^2=4$

1, 2, 3을 모두 원소로 가지는 부분집합의 개수

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=16+8-4=20$

29 답 72

집합 X는 $A\cup B$의 부분집합 중에서

$X\subset A$이거나 $X\subset B$인 집합을 제외한 집합이다.

$A\cup B=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$이므로

$X\subset(A\cup B)$인 집합 X의 개수는 2^7

$X\subset A$인 집합 X의 개수는 2^5

$X\subset B$인 집합 X의 개수는 2^5

$A\cap B=\{3, 5, 7\}$이므로

$X\subset(A\cap B)$인 집합 X의 개수는 2^3

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$\underbrace{2^7-2^5-2^5+2^3}_{\text{또는 } 2^7-(2^5+2^5-2^3)}=128-32-32+8=72$

30 답 ③

$(B\cap X)\subset(A\cap X)$에서

$x\in(B\cap X)$이면 $x\in(A\cap X)$이므로

집합 X의 원소 x가 $x\in B$이면 $x\in A$이어야 한다.

만약, 집합 X의 원소 x가 $x\in B$이고 $x\notin A$이면

$x\in(B\cap X)$이지만 $x\notin(A\cap X)$이므로

$(B\cap X)\not\subset(A\cap X)$이다.

따라서 집합 B의 원소 중에서 집합 A의 원소가 아닌 것은 집합 X의 원소가 될 수 없으며 그 밖의 전체집합 U의 원소는 집합 X의 원소가 될 수 있다.

따라서 집합 X는 전체집합 U에서 $B-A=\{c, d\}$를 제외한 집합 $\{a, b, e\}$의 부분집합이므로 그 개수는 $2^3=8$이다.

31 답 64

$A\cup C=B\cup C$에서

$A\subset(B\cup C)$이고 $B\subset(A\cup C)$이다.

(ⅰ) $A\subset(B\cup C)$에서

$2\notin B$, $4\notin B$이고 $2\in A$, $4\in A$이므로

$2\in C$, $4\in C$

(ⅱ) $B\subset(A\cup C)$에서

$7\notin A$, $9\notin A$이고 $7\in B$, $9\in B$이므로

$7\in C$, $9\in C$

(ⅰ), (ⅱ)에서 집합 C는 2, 4, 7, 9를 반드시 원소로 갖는 전체집합 U의 부분집합이다.

따라서 집합 C의 개수는 1, 3, 5, 6, 8, 10을 원소로 갖는 집합의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^6=64$

32 답 32

집합 A를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$

짝수인 원소로만 이루어진 부분집합의 개수는 집합 $\{6, 12, 18, 24\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$

홀수인 원소로만 이루어진 부분집합의 개수는 집합 $\{3, 9, 15, 21, 27\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^5=32$

(ⅰ) 홀수인 원소가 홀수 개인 부분집합은 짝수인 원소로만 이루어진 부분집합에 홀수인 원소를 홀수 개 넣으면 된다.

집합 $\{3, 9, 15, 21, 27\}$에서 홀수 개를 뽑는 방법의 수는

${}_5C_1+{}_5C_3+{}_5C_5=5+10+1=16$

$\therefore a=2^4\times16$

(ⅱ) 짝수인 원소가 짝수 개인 부분집합은 홀수인 원소로만 이루어진 부분집합에 짝수인 원소를 짝수 개 넣으면 된다.

집합 $\{6, 12, 18, 24\}$에서 짝수 개를 뽑는 방법의 수는

${}_4C_2+{}_4C_4=6+1=7$

$\therefore b=2^5\times7$

(ⅰ)~(ⅱ)에 의하여

$a-b=2^4\times16-2^5\times7=2^5\times(8-7)=2^5=32$

33 답 ④

$\underbrace{A^C\cup C=U}_{\Longleftrightarrow (A^C\cup C)^C=U^C \Longleftrightarrow A\cap C^C=\varnothing}$에서 $A\cap C^C=\varnothing$

즉, $A-C=\varnothing$이므로 $A\subset C$

$B\cup C=B$에서 $C\subset B$이므로 $B\cap C=C$

$\therefore A\cup(B\cap C)=A\cup C=C$

34 답 115

집합 B의 원소 $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$, $\sqrt{a_4}$가 모두 자연수이므로 집합 A의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4는 모두 제곱수이다.

만약 $A\cap B=\{a_1, a_2\}$라 하면

조건 (나)에서 $a_1+a_2=13$이고, 두 제곱수의 합이 13이 되는 경우는 2^2+3^2인 경우뿐이므로

$A\cap B=\{a_1, a_2\}=\{4, 9\}$

즉, $A=\{4, 9, a_3, a_4\}$, $B=\{2, 3, \sqrt{a_3}, \sqrt{a_4}\}$

또한, $A\cap B=\{4, 9\}$에서 $\{4, 9\}\subset B$이므로

$\{\sqrt{a_3}, \sqrt{a_4}\}=\{4, 9\}$

즉, $\{a_3, a_4\}=\{16, 81\}$

$\therefore A=\{4, 9, 16, 81\}$, $B=\{2, 3, 4, 9\}$

따라서 $A\cup B=\{2, 3, 4, 9, 16, 81\}$이므로

집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 115이다.

35 답 9

$A\cap(B^C\cup C)=A\cap(B\cap C^C)^C$ ⇦ 드모르간의 법칙

$=A-(B\cap C^C)$

$=\underline{A-(B-C)}$

$B-C=\{2\}$이므로 집합 A의 원소만 구하면 돼.

이때,

$A=(A\cup C)-(C-A)$

$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}-\{4, 6\}$

$=\{1, 2, 3, 5\}$

$\therefore A\cap(B^C\cup C)=A-(B-C)$

$=\{1, 2, 3, 5\}-\{2\}$

$=\{1, 3, 5\}$

따라서 집합 $A\cap(B^C\cup C)$의 모든 원소의 합은

$1+3+5=9$

36 답 ③

ㄱ. $f_A(m)+f_B(m)=2$이면 $f_A(m)=1$, $f_B(m)=1$이므로

$f_A(m)f_B(m)=1\times1=1$ (참)

ㄴ. 【반례】 $m\in(A\cup B)^C$이면

$f_A(m)=-1$, $f_B(m)=-1$이므로

$f_A(m)f_B(m)=(-1)\times(-1)=1$이지만

$f_{A\cap B}(m)=-1$이다. (거짓)

ㄷ. $f_A(m)f_B(m)=-1$이면

$f_A(m)=1$, $f_B(m)=-1$ 또는 $f_A(m)=-1$, $f_B(m)=1$

(i) $f_A(m)=1$, $f_B(m)=-1$일 때,

$m\in A$이고 $m\notin B$이므로

$f_{A-B}(m)=1$, $f_{B-A}(m)=-1$

$\therefore f_{A-B}(m)+f_{B-A}(m)=1+(-1)=0$

(ii) $f_A(m)=-1$, $f_B(m)=1$일 때,

마찬가지 방법으로

$f_{A-B}(m)+f_{B-A}(m)=(-1)+1=0$

(i)~(ii)에 의하여 $f_{A-B}(m)+f_{B-A}(m)=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

37 답 ⑤

ㄱ. $A^C\triangle B^C=(A^C\cup B^C)\cap(A^C\cap B^C)^C$

$=(A\cap B)^C\cap(A\cup B)=A\triangle B$ (참)

ㄴ. $A\triangledown B=(A\cap B)\cup(A\cup B)^C$

$=\{(A\cap B)^C\cap(A\cup B)\}^C=(A\triangle B)^C$ (참)

ㄷ. $A^C\triangledown B^C=(A^C\cap B^C)\cup(A^C\cup B^C)^C$

$=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)=A\triangledown B$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

38 답 27

대칭차집합은 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 이용하자.

조건 (가)에서

$(A\triangle B)\triangle A=(B\triangle A)\triangle A=B\triangle\underbrace{(A\triangle A)}_{=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A=\varnothing}$

$=\underbrace{B\triangle\varnothing}_{=(B\cup\varnothing)-(B\cap\varnothing)=B-\varnothing=B}=B$

$\therefore B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

같은 방법으로 조건 (나)에서

$(A\triangle B)\triangle B=A\triangle(B\triangle B)=A\triangle\varnothing=A$

$\therefore A=\{3, 4, 5, 6\}$

즉, $A\cup B=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $A\cap B=\{3, 5\}$이므로

$A\triangle B=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}-\{3, 5\}=\{1, 4, 6, 7, 9\}$

따라서 집합 $A\triangle B$의 모든 원소의 합은 27이다.

39 답 10

$X\triangle Y=(X\cup Y)\cap(X\cap Y)^C=(X-Y)\cup(Y-X)$이므로

대칭차집합의 연산의 성질에 의하여

$(X\triangle Y)\triangle X=(Y\triangle X)\triangle X$

$=Y\triangle(X\triangle X)$

$=Y\triangle\varnothing=Y$

즉, 집합 Y를 구하면 된다.

드모르간의 법칙을 이용하면

$X^C\cap Y^C=(X\cup Y)^C=\{5, 7\}$에서

$X\cup Y=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$X^C\cup Y=(X\cap Y^C)^C=(X-Y)^C=\{1, 3, 5, 6, 7\}$에서

$X-Y=\{2, 4, 8\}$

이때, $Y=(X\cup Y)-(X-Y)$이므로

$Y=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}-\{2, 4, 8\}=\{1, 3, 6\}$

따라서 집합 Y의 모든 원소의 합은

$1+3+6=10$

40 답 13

$20=2^2\times5$이므로 집합 B의 모든 원소는

2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.

조건 (나)에서 $X\cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는

2의 배수이거나 5의 배수이어야 한다.

그런데 조건 (다)에서 $45=3^2\times5$이므로 집합 X의 모든 원소는

3의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 50 이하의 2의 배수 중에서 3의

배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이다.

50 이하의 2의 배수인 수의 개수는 25개

50 이하의 2의 배수 중에서

① 3의 배수인 수의 개수는 $\underbrace{8\text{개}}_{=(6\text{의 배수인 수의 개수})}$

② 5의 배수인 수의 개수는 5개
=(10의 배수인 수의 개수)
③ 15의 배수인 수의 개수는 1개
따라서 집합 X의 원소의 개수의 최댓값은
$25-(8+5-1)=13$

41 답 ③

$n(A)=x\ (4\le x\le 8)$라 하면
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$8=x+n(B)-4$
$\therefore\ n(B)=12-x$
따라서 집합 $A\times B$의 원소의 개수는 $x(12-x)$이다.
$x(12-x)=-x^2+12x=-(x^2-12x+36-36)$
$=-(x-6)^2+36\le 36$
따라서 집합 $A\times B$의 원소의 개수의 최댓값은 36이다.

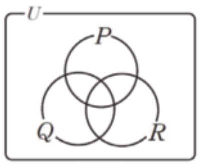
참고 집합 $A\times B=\{(a, b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}$를 순서쌍 (a, b)의 집합이라고 보면 쉽다. 예를 들어, 두 집합 A, B를 모두 실수 전체의 집합이라 하면
집합 $A\times B$는 좌표평면 위의 모든 순서쌍의 집합이 된다.

42 답 37

동아리 A, B, C에 가입한 학생들의 집합을 각각 A, B, C라 하면
조건 (가)에 의하여
$n(A\cap B)=12$, $n(B\cap C)=11$, $n(C\cap A)=15$이고
조건 (나)에 의하여
$n(A\cup B)=54$, $n(B\cup C)=51$, $n(C\cup A)=55$이다.
따라서
$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=54+12=66$
$n(B)+n(C)=n(B\cup C)+n(B\cap C)=51+11=62$ ⋯ ㉠
$n(C)+n(A)=n(C\cup A)+n(C\cap A)=55+15=70$
이고 세 식을 변변끼리 더하면 $2\{n(A)+n(B)+n(C)\}=198$
$\therefore\ n(A)+n(B)+n(C)=99$
이 식에 ㉠을 대입하여 정리하면 $n(A)+62=99$
$\therefore\ n(A)=99-62=37$

43 답 16

각 조건 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ을 만족시킨 응시자의 집합을 각각 P, Q, R라 하고, 전체 응시자의 집합을 U라 하여 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



A등급을 받은 응시자의 집합은 $P\cap Q\cap R$,
B등급을 받은 응시자의 집합은
$(P\cap Q)\cup(Q\cap R)\cup(R\cap P)-P\cap Q\cap R$,
F등급을 받은 응시자의 집합은 $(P\cup Q\cup R)^C$이고,
$n(U)=50$, $n(P)=21$, $n(Q)=15$, $n(R)=26$,
$n(P\cap Q\cap R)=4$, $n((P\cup Q\cup R)^C)=12$이다.
한편,
$n(P\cup Q\cup R)=n(U)-n((P\cup Q\cup R)^C)$
$=50-12=38$
이므로
$n(P\cup Q\cup R)=n(P)+n(Q)+n(R)$
$-n(P\cap Q)-n(Q\cap R)-n(R\cap P)$
$+n(P\cap Q\cap R)$
에서
$38=21+15+26-n(P\cap Q)-n(Q\cap R)-n(R\cap P)+4$
$\therefore\ n(P\cap Q)+n(Q\cap R)+n(R\cap P)=66-38=28$
따라서 B등급을 받은 응시자의 수는
$n(P\cap Q)+n(Q\cap R)+n(R\cap P)\underline{-3\times n(P\cap Q\cap R)}$
세 집합 $P\cap Q$, $Q\cap R$, $R\cap P$의 원소의 개수를 더하면 집합 $P\cap Q\cap R$의 원소의 개수가 3번 더해지므로 3번 빼주었어.
$=28-3\times 4=28-12=16$

44 답 24

조건 (가) $n(P\cap A)=2$에 의하여 집합 A에 속한 4개의 원소 중 오직 2개만 집합 P에 속한다.
즉, 집합 A의 원소 중 집합 P에 속하는 원소의 합의 최댓값은 $8+9=17$이고, 최솟값은 $6+7=13$이다.
따라서 조건 (다)에 의하여
집합 $P-A$의 모든 원소의 합은 5 이상 9 이하이다. ⋯ ㉠
한편, $P-A=P\cap A^C\subset A^C=\{2, 3, 4, 5\}$이고,
조건 (가), (나)에 의하여 $n(P-A)\ge 3$이다.
따라서 $n(P-A)=4$ 또는 $n(P-A)=3$
(i) $n(P-A)=4$인 경우
$P-A=\{2, 3, 4, 5\}$이고
$2+3+4+5=14$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.
(ii) $n(P-A)=3$인 경우
$P-A\subset\{2, 3, 4, 5\}$이고
세 원소의 합의 최솟값은 $2+3+4=9$, 최댓값은
$3+4+5=12$이므로
㉠을 만족시키는 경우의 집합은 $\{2, 3, 4\}$뿐이다.
(i)~(ii)와 조건 (다)에 의하여
$P=\{2, 3, 4, 6, 7\}$, $P-A=\{2, 3, 4\}$이다.
따라서 집합 $P-A$의 모든 원소의 곱은 $2\times 3\times 4=24$이다.

45 답 21

전체집합 U의 부분집합 중 48 이하의 자연수 중 5로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2, 3, 4인 자연수들의 집합을 각각

R_0, R_1, R_2, R_3, R_4라 하면　　　원소의 개수

$R_0=\{5, 10, 15, \cdots, 40, 45\}$ ←9

$R_1=\{1, 6, 11, 16, \cdots, 41, 46\}$ ←10

$R_2=\{2, 7, 12, 17, \cdots, 42, 47\}$ ←10

$R_3=\{3, 8, 13, 18, \cdots, 43, 48\}$ ←10

$R_4=\{4, 9, 14, 19, \cdots, 44\}$ ←9

이때, $5+5$, $1+4$, $2+3$ 등은 모두 5의 배수이므로

집합 A가 조건을 만족하기 위해서는 집합 A에

(i) 집합 R_0의 원소가 2개 이상 있을 수 없고,

(ii) 집합 R_1과 집합 R_4의 원소가 같이 있을 수 없고,

(iii) 집합 R_2와 집합 R_3의 원소가 같이 있을 수 없다.

즉, 집합 A는

(집합 R_1과 집합 R_4 중 하나의 집합의 원소),

(집합 R_2와 집합 R_3 중 하나의 집합의 원소),

(집합 R_0의 원소 중 1개)

를 가질 수 있다.

이때, 집합 R_0, R_1, R_2, R_3, R_4의 원소의 개수는

$n(R_0)=9$, $n(R_1)=10$, $n(R_2)=10$, $n(R_3)=10$,

$n(R_4)=9$이므로

집합 A의 원소의 개수가 최대일 때는 집합 $R_1\cup R_2$ 또는 $R_1\cup R_3$의 원소에 R_0의 원소 중 1개를 원소로 가질 때이다.

따라서 집합 A의 원소의 개수의 최댓값은

$10+10+1=21$

46 답 7

세 권의 책 A, B, C를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

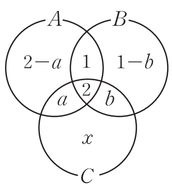
$n(A)=5$, $n(B)=4$, $n(C)=7$, $n(A\cap B\cap C)=2$

$n(A\cap B)=3=n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap C^C)$

$\therefore n(A\cap B\cap C^C)=1$

여기서 책 C만 읽은 학생의 수를 x, $n(A\cap C\cap B^C)=a$,

$n(B\cap C\cap A^C)=b$라 하고 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$n(A)=5$이므로 $0\le a\le 2$

$n(B)=4$이므로 $0\le b\le 1$

이때, $n(C)=x+2+a+b=7$이므로

$x=5-(a+b)$

(i) $a+b$의 값이 최소일 때, x의 값이 최대이므로

　$a=b=0$일 때 x의 최댓값은 5이다.

(ii) $a+b$의 값이 최대일 때, x의 값이 최소이므로

　$a=2$, $b=1$일 때 x의 최솟값은 2이다.

(i)~(ii)에서 책 C만 읽은 학생 수의 최댓값과 최솟값의 합은

$5+2=7$이다.

47 답 31

$n\in S$이면 $\dfrac{36}{n}\in S$이고, 집합 S의 원소는 자연수이므로

$\dfrac{36}{n}$은 자연수이어야 한다.

따라서 n은 36의 양의 약수이므로 가능한 n은

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36의 9개이다.

(i) $1\in S$이면 $36\in S$, $36\in S$이면 $1\in S$

(ii) $2\in S$이면 $18\in S$, $18\in S$이면 $2\in S$

(iii) $3\in S$이면 $12\in S$, $12\in S$이면 $3\in S$

(iv) $4\in S$이면 $9\in S$, $9\in S$이면 $4\in S$

(v) $6\in S$이면 $6\in S$ ---------- ⓐ

즉, (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9)는 항상 쌍으로

집합 S에 속해야 하므로 집합 S는 5개의 집합

　$\{1, 36\}$, $\{2, 18\}$, $\{3, 12\}$, $\{4, 9\}$, $\{6\}$

의 전부 또는 일부를 이용한 합집합이다. ---------- ⓑ

이때, $S\ne\varnothing$이므로 집합 S의 개수는 $2^5-1=31$이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 가능한 n의 값에 따라 집합 S에 속해야 하는 원소를 각각 구한다. ······ [40%]

ⓑ 집합 S의 조건을 구한다. ······ [40%]

ⓒ 집합 S의 개수를 구한다. ······ [20%]

48 답 15

a를 원소로 가지고 원소가 3개인 A의 부분집합은

$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$,

$\{a, d, e\}$의 6개이므로 a는 총 6번 더해진다. ---------- ⓐ

마찬가지로 다른 원소 역시 6번씩 더해지므로

원소가 3개인 A의 부분집합들의 원소의 총합은

$6(a+b+c+d+e)=90$ ---------- ⓑ

$\therefore a+b+c+d+e=15$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ a가 총 6번 더해짐을 안다. ······ [40%]

ⓑ 다른 원소 역시 6번씩 더해짐을 안다. ······ [40%]

ⓒ $a+b+c+d+e$의 값을 구한다. ······ [20%]

49 답 12

이 학교 전체 학생의 집합을 U, 두 영화 A, B를 관람한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 두 영화를 모두 관람한 학생의 집합은 $A\cap B$이고, 어느 영화도 관람하지 않은 학생의 집합은 $A^C\cap B^C$이다.

$n(U)=30$

$n(A)=n(B)$ ··· ㉠

$n(A\cap B)=n(A^C\cap B^C)-6$ ⋯ ㉡ ---- ⓐ

이때, $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$에서

$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=30-n(A\cup B)$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$n(A\cap B)=24-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)+n(A\cap B)=24$ ⋯ ㉣ ---- ⓑ

한편, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cup B)+n(A\cap B)=n(A)+n(B)$이므로

㉠, ㉣에서

$24=2\times n(A)$

$\therefore n(A)=12$ ---- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 문제의 조건을 집합의 연산을 이용하여 나타낸다. ---- [20%]

ⓑ $n(A\cup B)+n(A\cap B)$의 값을 구한다. ---- [40%]

ⓒ $n(A)$의 값을 구한다. ---- [40%]

고난도 도전 문제

문제편 p.75~76

50 답 ⑤

ㄱ. 조건 (나)에서 x가 9 이하의 홀수이면 $\frac{x+p}{2}\in A$이므로

$\frac{x+p}{2}$가 9 이하의 자연수여야 한다.

따라서 p는 9 이하의 홀수이다. (참)

ㄴ. $8\in A$이면 8은 짝수이므로 조건 (나)에서

$\frac{8}{2}=4\in A$이고, 같은 방법으로 $2\in A$, $1\in A$이므로

$n(A)\geq 4$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 $8\notin A$이다. (참)

ㄷ. $1\notin A$이므로 ㄴ에 의하여

$2\notin A$, $4\notin A$, $8\notin A$ ⋯ ㉠

$3\in A$에서 $A=\{3, a, b\}$ (a, b는 3이 아닌 9 이하의 서로 다른 자연수) ⋯ ㉡라 하면

p는 9 이하의 홀수이므로

(i) $p=1$일 때,

3은 홀수이므로 $\frac{3+1}{2}=2\in A$가 되어 ㉠에 모순이다.

(ii) $p=3$일 때,

3은 홀수이므로 $\frac{3+3}{2}=3\in A$

Ⅰ. a가 홀수일 때, $\frac{a+p}{2}=\frac{a+3}{2}=3$, $a=3$이므로 ㉡에 모순이다.

Ⅱ. a가 짝수일 때, $\frac{a}{2}=3$, $a=6\in A$

Ⅲ. b가 홀수일 때, $\frac{b+p}{2}=\frac{b+3}{2}=6$, $b=9\in A$

Ⅳ. b가 짝수일 때, $\frac{b}{2}=6$, $b=12$이므로 $A\subset U$에 모순이다.

Ⅰ~Ⅳ에서 $A=\{3, 6, 9\}$

(iii) $p=5$일 때,

3은 홀수이므로 $\frac{3+5}{2}=4\in A$가 되어 ㉠에 모순이다.

(iv) $p=7$일 때,

3은 홀수이므로 $\frac{3+7}{2}=5\in A$

5는 홀수이므로 $\frac{5+7}{2}=6\in A$,

6은 짝수이므로 $\frac{6}{2}=3\in A$

즉, $A=\{3, 5, 6\}$

(v) $p=9$일 때,

3은 홀수이므로 $\frac{3+9}{2}=6\in A$,

6은 짝수이므로 $\frac{6}{2}=3\in A$

즉, $A=\{3, 6\}$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에 의하여 $A=\{3, 6, 9\}$ 또는 $A=\{3, 5, 6\}$이므로

$1\notin A$, $3\in A$이면 $6\in A$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

51 답 ②

집합 A_1, A_2, A_3, ⋯, A_{31} 중에서

(i) 최소인 원소가 1인 집합은 1이 속하는 집합이므로 이 부분집합의 개수는 $2^4=16$

(ii) 최소인 원소가 2인 집합은 2는 속하고 1은 속하지 않는 집합이므로 이 부분집합의 개수는 $2^3=8$

(iii) 최소인 원소가 3인 집합은 3은 속하고 1, 2는 속하지 않는 집합이므로 이 부분집합의 개수는 $2^2=4$

(iv) 최소인 원소가 4인 집합은 4는 속하고 1, 2, 3은 속하지 않는 집합이므로 이 부분집합의 개수는 $2^1=2$

(v) 최소인 원소가 5인 집합은 5만 속하는 집합이므로 이 부분집합의 개수는 1

따라서 구하는 원소의 합은

$1\times16+2\times8+3\times4+4\times2+5\times1=16+16+12+8+5$

$=57$

52 답 ④

ㄱ. $x\in X$에 대하여 $x\notin(A\cup B)$이면

$x\in(A\cup X)$이지만 $x\notin B$이므로 $(A\cup X)\subset B$가 항상 성립하지는 않는다. (거짓)

ㄴ. 조건 (나)에서 $(B\cap X)\subset(A\cap X)$이고,
$(A\cap X)\subset A$이므로
$(B\cap X)\subset A$이다. (참)
ㄷ. $(A-X)\subset(A\cup X)$이고, 조건 (가)에서
$(A\cup X)\subset(B\cup X)$이므로
$(A-X)\subset(B\cup X)$
즉, $x\in(A-X)$이면 $x\in(B\cup X)$이다.
이때, $x\in(A-X)$에서 $x\notin X$이므로 $x\in B$이다.
$\therefore (A-X)\subset B$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

53 답 70

먼저 최댓값을 구해 보자.
세 카페 모두 회원으로 가입한 학생 수가 가장 많으려면 가입자 수가 가장 적은 인터넷 카페 C에 가입한 학생이 두 인터넷 카페 A, B에도 모두 가입하는 경우이므로 세 카페에 모두 회원으로 가입한 학생 수의 최댓값은 55명이다.
한편, 최솟값을 구하기 위하여 각 학생이 모두 2개의 카페에만 가입하였다고 가정하자.
그러면 100명의 학생이 2개의 카페에만 가입하였으므로 세 카페에 가입한 총 학생 수는 200명이 되어야 한다.
그런데 세 카페의 학생 수의 합은 $90+70+55=215$(명)이므로 적어도 15명은 세 카페에 모두 가입해야 된다.
따라서 세 카페에 모두 회원으로 가입한 학생 수의 최솟값은 15명이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $55+15=70$이다.

일등급 UP

＊ 교집합의 원소의 개수의 최대, 최소

(1) 두 집합의 교집합의 원소의 개수
전체집합 U의 두 부분집합을 A, B라 하면
$n(A)+n(B)-n(U)\le n(A\cap B)\le \min\{n(A), n(B)\}$
(단, $\min(x, y)$는 x, y 중 작은 수를 나타낸다.)

(2) 세 집합의 교집합의 원소의 개수
전체집합 U의 세 부분집합을 A, B, C라 하면
$n(A)+n(B)+n(C)-2\times n(U)\le n(A\cap B\cap C)$
$\le \min\{n(A), n(B), n(C)\}$
(단, $\min(x, y, z)$는 x, y, z 중 가장 작은 수를 나타낸다.)

54 답 46

$2^{14}-2^{10}$을 2의 거듭제곱의 합으로 나타내자.
$2^{14}-2^{10}=2^{10}(2^4-1)=2^{10}(2-1)(2^3+2^2+2+1)$
$=2^{13}+2^{12}+2^{11}+2^{10}$
$\therefore A(2^{14}-2^{10})=\{10, 11, 12, 13\}$
따라서 집합 $A(2^{14}-2^{10})$의 모든 원소의 합은
$10+11+12+13=46$

55 답 7

집합 N을 원소나열법으로 나타내면
$N=\{a+p, b+p, c+p, d+p, e+p\}$
집합 A에 속하는 모든 원소의 합을 $f(A)$라 하면
$f(M)=27$, $f(M\cap N)=6+7=13$, $f(M\cup N)=61$이다.
또한, $f(M\cup N)=f(M)+f(N)-f(M\cap N)$에서
$61=27+f(N)-13$
$\therefore f(N)=47$
$f(N)=27+5p=47$에서 $p=4$
또한, $M\cap N=\{6, 7\}$에서 $6\in M$, $7\in M$이므로
$6+4=10\in N$, $7+4=11\in N$이고 $6\in N$, $7\in N$이므로
$\{6, 7, 10, 11\}\subset N$이다.
이때, $f(\{6, 7, 10, 11\})=34$이고, $f(N)=47$이므로 나머지 원소는 13이다.
$\therefore N=\{6, 7, 10, 11, 13\}$
따라서 집합 N의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 차는
$13-6=7$이다.

56 답 189

$n(A)\times n((A\cup B)^C)=15$ … ㉠에서 $n(A)$는 15의 양의 약수이다.
1, 3, 5, 15

(i) $n(A)=1$일 때,
$n((A\cup B)^C)=15$이면 ㉠을 만족시켜.
$A=\{2\}$이므로 $k=2$ 또는 $k=3$
Ⅰ. $k=2$이면
$U=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2\}$에서
$(A\cup B)^C=\varnothing$, $n((A\cup B)^C)=0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.
Ⅱ. $k=3$이면
$U=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3\}$에서
$(A\cup B)^C=\varnothing$, $n((A\cup B)^C)=0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $n(A)=3$일 때,
$n((A\cup B)^C)=5$이면 ㉠을 만족시켜.
$A=\{2, 4, 6\}$이므로 $k=6$ 또는 $k=7$
Ⅰ. $k=6$이면
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$에서
$(A\cup B)^C=\{5\}$, $n((A\cup B)^C)=1$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.
Ⅱ. $k=7$이면
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$, $B=\{1, 7\}$에서
$(A\cup B)^C=\{3, 5\}$, $n((A\cup B)^C)=2$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(iii) $n(A)=5$일 때,
$n((A\cup B)^C)=3$이면 ㉠을 만족시켜.
$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로 $k=10$ 또는 $k=11$

Ⅰ. $k=10$이면
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$에서
$(A\cup B)^C=\{3, 7, 9\}$, $n((A\cup B)^C)=3$이므로 ㉠을 만족시킨다.

Ⅱ. $k=11$이면
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 11\}$, $B=\{1, 11\}$에서
$(A\cup B)^C=\{3, 5, 7, 9\}$, $n((A\cup B)^C)=4$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(iv) $n(A)=15$일 때,
$n((A\cup B)^C)=1$이면 ㉠을 만족시켜.
$A=\{2, 4, 6, \cdots, 30\}$이므로 $k=30$ 또는 $k=31$

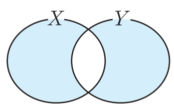
Ⅰ. $k=30$이면
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 30\}$,
$B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$에서
$(A\cup B)^C=\{7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$
$n((A\cup B)^C)=11$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

Ⅱ. $k=31$이면
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 31\}$, $B=\{1, 31\}$에서
$(A\cup B)^C=\{3, 5, 7, \cdots, 29\}$
$n((A\cup B)^C)=14$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여
두 집합 A, B가 조건을 만족시키는 k의 값은 10이고
집합 $(A\cup B)^C=\{3, 7, 9\}$의 모든 원소의 곱은 $3\times7\times9=189$

57 답 14

두 집합 X, Y에 대하여 $X\triangle Y$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$n(X\triangle Y)=n(X)+n(Y)-2\times n(X\cap Y)$이므로
이를 이용하여 주어진 조건을 간단히 하면
$n(A\triangle B)=n(A)+n(B)-2\times n(A\cap B)=27$ ⋯ ㉠
$n(B\triangle C)=n(B)+n(C)-2\times n(B\cap C)=49$ ⋯ ㉡
$n(C\triangle A)=n(C)+n(A)-2\times n(C\cap A)=46$ ⋯ ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면
$2\{n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\}=122$
$\therefore n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)=61$
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
에서 $75=61+n(A\cap B\cap C)$
$\therefore n(A\cap B\cap C)=14$

06 명제

핵심 유형 연습

문제편 p.80~82

01 답 ④

Tip
교집합, 합집합, 차집합 사이의 관계를 이용하여 항상 참인 명제를 찾아.

조건 q : $A\cap B=A\cap C$에 조건 r를 적용하면
$A-B=A-(A\cap B)=A-(A\cap C)=A-C$
$\therefore q \Longrightarrow r$
①, ②의 【반례】 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2\}$, $C=\{3\}$인 경우
$A\cup B=A\cup C=\{1, 2, 3\}$이지만
$A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\{3\}$으로 $p \not\Longrightarrow q$이고
$A-B=\{1, 3\}$, $A-C=\{1, 2\}$로 $p \not\Longrightarrow r$이다.
③, ⑤의 【반례】 $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$, $C=\{2, 4\}$인 경우
$A\cap B=A\cap C=\{2\}$이고 $A-B=A-C=\{1\}$이지만
$A\cup B=\{1, 2, 3\}$, $A\cup C=\{1, 2, 4\}$로
$q \not\Longrightarrow p$이고 $r \not\Longrightarrow p$이다.

02 답 ②

ㄱ. 【반례】 $a=0$, $b=0$, $c=1$이면 ab, bc, ca가 모두 0이지만 c는 0이 아니다. (거짓)
ㄴ. $a+b=0$, $b+c=0$, $c+a=0$ ⋯ ㉠의 세 식을 모두 더하면
$(a+b)+(b+c)+(c+a)=0$, $2(a+b+c)=0$
$\therefore a+b+c=0$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $a=b=c=0$ (참)
ㄷ. 【반례】 $a=-1$, $b=-2$이면 $ab>1$이지만 $a<1$이고 $b<1$이다. (거짓)
따라서 참인 명제는 ㄴ이다.

03 답 ⑤

ㄱ. $a<b$일 때, $x=\dfrac{a+b}{2}$라 하면 $a<x$와 $x<b$를 만족시킨다.
$a+a<a+b<b+b$, $2a<a+b<2b$, $a<\frac{a+b}{2}<b$
(참)
ㄴ. $a<x$와 $x<b$를 만족시키는 실수 x가 있으면
$x-a>0$, $b-x>0$이므로 $b-a=(b-x)+(x-a)>0$
$\therefore a<b$ (참)
ㄷ. $a\le x$와 $x\le b$를 만족시키는 실수 x가 있으면
$x-a\ge0$, $b-x\ge0$이므로 $b-a=(b-x)+(x-a)\ge0$
$\therefore a\le b$ (참)
따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 답 ③

> **Tip**
> 집합의 포함 관계의 성질 $A\subset B \Longleftrightarrow A\cap B=A \Longleftrightarrow A-B=\varnothing$을 떠올려.

ㄱ. $(P-Q)\subset(Q-P)$이면

$(P-Q)-(Q-P)=\varnothing$

$(P\cap Q^C)\cap(Q\cap P^C)^C=\varnothing$

$(P\cap Q^C)\cap(Q^C\cup P)=\varnothing$

$((P\cap Q^C)\cap Q^C)\cup((P\cap Q^C)\cap P)=\varnothing$

$(P\cap Q^C)\cup(P\cap Q^C)=\varnothing$

$(P-Q)\cup(P-Q)=\varnothing$

$\therefore P-Q=\varnothing$, 즉 $P\subset Q$

따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다. (참)

ㄴ. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 거짓이면 $P\not\subset Q^C$이므로 $Q\not\subset P^C$이다. (참)

ㄷ. $Q^C\not\subset P$이면 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 거짓이다.

거짓 명제의 역이 반드시 거짓인 것은 아니므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 거짓이라고 할 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

05 답 ⑤

$(P-Q)\cup(Q-R)=\varnothing$에서

$P-Q=\varnothing$이고 $Q-R=\varnothing$

즉, $P\subset Q$이고 $Q\subset R$이므로

$P\subset Q\subset R$

$\therefore p \Longrightarrow q \Longrightarrow r,\ \sim r \Longrightarrow \sim q \Longrightarrow \sim p$

따라서 항상 참인 명제는 ⑤ $\sim r \longrightarrow \sim p$이다.

06 답 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

조건 p에서

$(x-k)^2-4\le 0,\ (x-k)^2-2^2\le 0$

$(x-k+2)(x-k-2)\le 0$

즉, $k-2\le x\le k+2$이므로

$P=\{x\,|\,k-2\le x\le k+2\}$

조건 q에서

$x^2-4x-5\ge 0,\ (x+1)(x-5)\ge 0$

즉, $x\le -1$ 또는 $x\ge 5$이므로

$Q=\{x\,|\,x\le -1$ 또는 $x\ge 5\}$

이때, $Q^C=\{x\,|\,-1<x<5\}$이다.

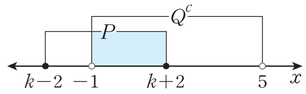
명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 모두 거짓이므로

$P\not\subset Q$이고 $P\not\subset Q^C$

즉, $P\cap Q^C\ne\varnothing$이고 $P\cap Q\ne\varnothing$ … ㉠

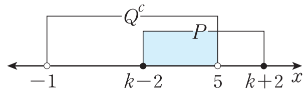
이어야 하므로 다음과 같이 두 가지 경우가 가능하다.

(i) $k-2\le -1<k+2$, 즉 $-3<k\le 1$인 경우



이 연립부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 -2, -1, 0, 1이다.

(ii) $k-2<5\le k+2$, 즉 $3\le k<7$인 경우



이 연립부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 3, 4, 5, 6이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 정수 k의 값은 -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6이고 그 합은

$(-2)+(-1)+0+1+3+4+5+6=16$

07 답 ⑤

> **Tip**
> 조건 p의 진리집합의 원소의 개수를 구하는 것보다 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소의 개수를 구하여 100에서 빼는 것이 더 간편해.

조건 p의 부정 $\sim p$에 대하여

$\sim p$: 'x는 2의 배수이고 3의 배수이다.'이므로

부정 $\sim p$가 참이 되게 하는 x의 값은 6의 배수이다.

100 이하의 자연수 중에서 6의 배수의 개수는 16이다.

$\sim(\sim p)=p$이므로 조건 p가 참이 되게 하는 100 이하의 자연수의 개수는 100 이하의 자연수에서 6의 배수를 뺀 수의 개수이다.

즉, 100 이하의 자연수의 개수에서 부정 $\sim p$가 참이 되게 하는 x의 값의 개수를 제외하면 되므로 구하는 개수는 $100-16=84$이다.

08 답 2

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$, 즉 $Q^C\subset P$이어야 한다.

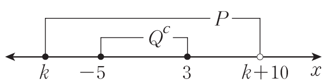
$p : k\le x<k+10$에서 $P=\{x\,|\,k\le x<k+10\}$

$q : \underline{x^2+2x-15>0}$에서

$(x+5)(x-3)>0$ $\quad\therefore x<-5$ 또는 $x>3$

$Q=\{x\,|\,x<-5$ 또는 $x>3\}$이므로

$Q^C=\{x\,|\,-5\le x\le 3\}$



즉, $Q^C\subset P$이려면 그림에서 $k\le -5$이고 $3<k+10$이어야 한다.

$\therefore -7<k\le -5$

따라서 정수 k의 값은 -6, -5의 2개이다.

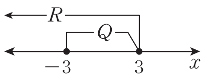
09 답 ②

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|x<-4$ 또는 $x>4\}$, $Q=\{x|-3\le x\le 3\}$,

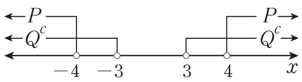
$R=\{x|x\le 3\}$

ㄱ. $Q\subset R$이므로 명제 $q\longrightarrow r$는 참이다.



ㄴ. $Q^C=\{x|x<-3$ 또는 $x>3\}$이므로 $P\subset Q^C$이다.

즉, 명제 $p\longrightarrow \sim q$는 참이다.



ㄷ. $P^C=\{x|-4\le x\le 4\}$이므로 $R\not\subset P^C$이다. 즉, 명제 $r\longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

10 답 45

Tip

'모든'을 포함한 명제는 성립하지 않는 예가 하나만 있어도 거짓인 명제이고, '어떤'을 포함한 명제는 성립하는 예가 하나만 있어도 참인 명제야.

조건 (가)에서 명제 '집합 P의 어떤 원소 x에 대하여 x는 3의 배수이다.'가 참이 되도록 하려면

집합 P는 적어도 하나의 3의 배수를 원소로 가져야 한다.

조건 (나)에서 명제 '집합 P의 어떤 원소 x에 대하여 x는 3의 배수가 아니다.'가 참이 되도록 하려면

집합 P는 적어도 하나의 3의 배수가 아닌 수를 원소로 가져야 한다.

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 모든 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 $2^6-1=63$

원소가 모두 3의 배수인 부분집합의 개수는 $2^2-1=3$

원소가 모두 3의 배수가 아닌 부분집합의 개수는 $2^4-1=15$

따라서 구하는 집합 P의 개수는 $63-(3+15)=63-18=45$

11 답 ③

ㄱ. '어떤 x에 대하여 $p(x)$이다.'가 참이므로 P에는 적어도 하나의 원소가 존재한다. 따라서 $P\ne\varnothing$이다. (참)

ㄴ. '모든 x에 대하여 $p(x)$이다.'가 참이므로 전체집합 U의 모든 x에 대하여 조건 $p(x)$가 참이다. 따라서 $P=U$이다. (참)

ㄷ. '모든 x에 대하여 $p(x)$이다.'가 거짓이므로 $P\ne U$이다. 따라서 항상 $P=\varnothing$인 것은 아니다. (거짓)

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

12 답 ②

$f(x)=x^2-6x+18-n^2$ (n은 자연수)라 하자.

$2\le x\le 6$인 어떤 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이려면

$2\le x\le 6$이고 $f(x)\ge 0$인 실수 x가 적어도 하나 존재해야 하므로

이 x의 값의 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 0 이상이어야 한다.

$f(x)=x^2-6x+18-n^2=(x-3)^2+9-n^2$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표인 3이 $2\le x\le 6$에 속하므로 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(2)=10-n^2$, $f(6)=18-n^2$ 중에서

$x=6$일 때, 최댓값 $18-n^2$을 갖는다.

이차함수 $f(x)$의 그래프가 아래로 볼록이고 주어진 x의 값의 범위 $2\le x\le 6$에 꼭짓점의 좌표 3이 포함되므로 x의 양 끝값 중 $x=3$에서 더 멀리 떨어져 있는 x좌표 6에 대한 함숫값 $f(6)$이 최댓값이다.

$\therefore f(6)=18-n^2\ge 0$

$n^2\le 18$이므로 자연수 n의 최댓값은 4이다.

13 답 ③

Tip

어떤 명제가 참임을 보이고 싶은데 직접 보이기 어려울 때는 그 대우가 참임을 보여도 돼.

ㄱ. $x>0$이고 $y>0 \rightleftarrows x+y>0$이고 $xy>0$

(⟶의 증명) (양수)+(양수)=(양수),

(양수)×(양수)=(양수)

(⟵의 증명) $xy>0$이면 x, y는 같은 부호이고,

$x+y>0$이므로 $x>0$이고 $y>0$이다.

ㄴ. $0<x<y \rightleftarrows x^3y<xy^3$

(⟶의 증명) $0<x<y$이면 $xy>0$, $x^2-y^2<0$에서

$x^3y-xy^3=xy(x^2-y^2)<0$이므로 $x^3y<xy^3$이다.

(⟵의 【반례】) $x=-1$이고 $y=-3$이면

$x^3y<xy^3$이지만 $y<x$이다.

ㄷ. $x^2+y^2\ne 0 \rightleftarrows x\ne 0$이거나 $y\ne 0$

(⟶의 증명) 대우 '$x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.'가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

(⟵의 증명) 역의 대우 '$x^2+y^2=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다.'가 참이므로 역도 참이다.

따라서 주어진 명제와 그 명제의 역이 모두 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14 답 ②

조건 (가)에서 $2\in A$

조건 (나)에서

명제 '$(a-2)^2\notin A$이면 $a\notin A$'가 참이므로 이 명제의 대우인

'$a\in A$이면 $(a-2)^2\in A$'도 참이다.

$2\in A$이므로 $(2-2)^2=0\in A$

$0\in A$이므로 $(0-2)^2=4\in A$

$4\in A$이므로 $(4-2)^2=4\in A$

따라서 $\{0, 2, 4\} \subset A$
이때, 조건 (다)에서 $n(A)=4$이므로
정수 k에 대하여
$A=\{0, 2, 4, k\}$ (단, $k\neq0$, $k\neq2$, $k\neq4$)라 하면
$(k-2)^2\in A$이므로 $(k-2)^2$의 값은 $0, 2, 4, k$ 중 하나이다.
(i) $(k-2)^2=0$인 경우
$k=2$가 되어 $k\neq2$에 모순이다.
(ii) $(k-2)^2=2$인 경우
k는 정수가 아니므로 모순이다.
(iii) $(k-2)^2=4$인 경우
$k=0$ 또는 $k=4$가 되어 $k\neq0$, $k\neq4$에 모순이다.
(iv) $(k-2)^2=k$인 경우
$k^2-5k+4=0$, $(k-1)(k-4)=0$
$k\neq4$이므로 $k=1$
(i)~(iv)에 의하여 $A=\{0, 1, 2, 4\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$0+1+2+4=7$

15 답 ③

하림이의 결론 '키가 175 cm 이상인 학생의 몸무게는 65 kg 이상이다.'가 참이면 키가 175 cm 이상인 학생의 몸무게는 반드시 65 kg 이상이어야 하므로 ㄱ. 키가 180 cm인 학생의 몸무게가 65 kg 이상인지 반드시 확인해야 한다.
또한, 하림이의 결론이 참이면 대우 '몸무게가 65 kg 미만인 학생의 키는 175 cm 미만이다.'도 참이므로 ㄹ. 몸무게가 60 kg인 학생의 키가 175 cm 미만인지 확인해야 한다.
따라서 하림이의 결론이 참인지 알아보기 위해 반드시 확인해야 하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

16 답 ①

Tip
명제와 그 대우는 참, 거짓이 일치해.

ㄱ. $x+y\geq2 \overset{\times}{\rightleftarrows} x\geq1$ 또는 $y\geq1$이므로
p는 q이기 위한 충분조건이다.
($\longrightarrow$의 증명) 대우 '$x<1$이고 $y<1$이면 $x+y<2$이다.'가 참이므로 원래 명제도 참이다.
($\longleftarrow$의 【반례】) $x=3$, $y=-2$이면 $x\geq1$ 또는 $y\geq1$이지만
$\underbrace{x+y}_{=1}<2$이다.
ㄴ. $xy>x+y>4 \overset{\times}{\rightleftarrows} x>2$이고 $y>2$이므로
p는 q이기 위한 필요조건이다.
($\longrightarrow$의 【반례】) $x=4$, $y=\frac{3}{2}$이면
$\underbrace{xy}_{=6}>\underbrace{x+y}_{=\frac{11}{2}}>4$이지만 $x>2$이고 $y<2$이다.
($\longleftarrow$의 증명) $x>2$이고 $y>2$에서
$x-1>1$이고 $y-1>1$
$(x-1)+(y-1)>2$이고 $(x-1)(y-1)>1$
$x+y>4$이고 $xy-x-y+1>1$
$x+y>4$이고 $xy>x+y$
$\therefore xy>x+y>4$
ㄷ. $xy+1>x+y>2 \overset{\circ}{\rightleftarrows} x>1$이고 $y>1$이므로
p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
(증명) $x>1$이고 $y>1$에서
$x-1>0$이고 $y-1>0$
$(x-1)+(y-1)>0$이고 $(x-1)(y-1)>0$
$x+y>2$이고 $xy-x-y+1>0$
$x+y>2$이고 $xy+1>x+y$
$\therefore xy+1>x+y>2$
따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄱ이다.

17 답 20

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$에서
$\{2\}\subset\{a^2-2, b^2+1\}$ ⋯ ㉠
r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset R$에서
$\{2\}\subset\{a+1, a+b\}$ ⋯ ㉡
㉠에서 $a^2-2=2$ 또는 $b^2+1=2$
(i) $a^2-2=2$일 때,
$a^2=4$　　$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$
$a=-2$이면 ㉡에서 $a+b=2$이므로 $b=4$
$a=2$이면 ㉡에서 $a+b=2$이므로 $b=0$
$\therefore a=-2, b=4$ 또는 $a=2, b=0$
(ii) $b^2+1=2$일 때,
$b^2=1$　　$\therefore b=-1$ 또는 $b=1$
$b=-1$이면 ㉡에서 $a+1=2$ 또는 $a-1=2$에서
$a=1$ 또는 $a=3$
$b=1$이면 집합 $R=\{a+1, a+b\}$의 두 원소가 중복되어 성립하지 않는다.
$\therefore a=1, b=-1$ 또는 $a=3, b=-1$
(i), (ii)에서 구한 a, b의 값에 따른 a^2+b^2의 값을 구하면

a	-2	2	1	3
b	4	0	-1	-1
a^2+b^2	20	4	2	10

따라서 $a=-2$, $b=4$일 때, a^2+b^2의 최댓값은 20이다.

18 답 ④

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이고, 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 각각의 대우인 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow p$도 참이다.

이때, 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow p$가 모두 참이므로
두 조건 p, $\sim q$는 서로 필요충분조건이다.
따라서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=Q^C$, 즉 $Q=P^C$이다.
한편, 두 양수 a, b에 대하여
p : $3x-a=0$에서 $P=\left\{\frac{a}{3}\right\}$이고 $Q=P^C$에서
$Q=\left\{x \middle| x\neq\frac{a}{3}\text{인 실수}\right\}$이다.
즉, 부등식 $x^2-bx+16>0$의 해가 $x\neq\frac{a}{3}$인 모든 실수이므로
이차함수 $y=x^2-bx+16$의 그래프는 $x=\frac{a}{3}$에서 x축에 접해야 한다.
따라서 이차방정식 $x^2-bx+16=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=(-b)^2-4\times1\times16=0$이다.
즉, $b^2=64$이므로 양수 b의 값은 8이다.
조건 q : $x^2-8x+16=(x-4)^2>0$에서
$Q=\{x|x\neq4\text{인 실수}\}$이고 $\frac{a}{3}=4 \quad \therefore a=12$
$\therefore a+b=12+8=20$

실전 유형 훈련
문제편 p.83~88

19 답 ①

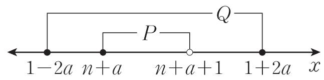
ㄱ. $|a|+|b|>|a+b|$의 양변을 제곱하면
$(|a|+|b|)^2>|a+b|^2$
$|a|^2+2|ab|+|b|^2>a^2+2ab+b^2$
$\therefore \underline{|ab|>ab}$
$\because |a|^2=a^2, |b|^2=b^2$
이때, $ab=0$이면 $|ab|=ab=0$이 되어 성립하지 않는다.
$\therefore ab\neq0$ (참)
ㄴ. 【반례】 $a=1+\sqrt{2}$, $b=1-\sqrt{2}$이면 $a+b=2$, $ab=-1$로 모두 정수이지만 a, b는 정수가 아니다. (거짓)
ㄷ. 【반례】 $a=4$, $b=\frac{1}{2}$이면 $a+b>2$, $ab>1$이지만 $b<1$이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

다른 풀이 : 대우로 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 대우 '$ab=0$이면 $|a|+|b|\leq|a+b|$'가 참임을 보이자.
$ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이므로
(i) $a=0$일 때
$|a|+|b|=|b|$, $|a+b|=|b|$
$\therefore |a|+|b|\leq|a+b|$
(ii) $b=0$일 때도 (i)과 마찬가지로 하면
$|a|+|b|\leq|a+b|$
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. (참)

20 답 ②

p : $[x-a]=n$에서 $n\leq x-a<n+1$
$\therefore n+a\leq x<n+a+1$
q : $|x-1|\leq2a$에서 $-2a\leq x-1\leq2a$
$\therefore 1-2a\leq x\leq1+2a$



두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$여야 하므로 그림에서 $1-2a\leq n+a$, $n+a+1\leq1+2a$이어야 한다.
$1-2a\leq n+a$에서 $1-3a\leq n$,
$n+a+1\leq1+2a$에서 $n\leq a$
즉, $1-3a\leq n\leq a$ ⋯ ㉠이므로
$1-3a\leq a$에서 $a\geq\frac{1}{4}$ ⋯ ㉡
한편, ㉠에서 $a\geq\frac{1}{4}$일 때 정수 n이 존재할 조건은
$1-3a\leq0$에서 $a\geq\frac{1}{3}$ ⋯ ㉢
㉡, ㉢에 의하여 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

21 답 ①

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 문제의 조건에서
$(P^C\cup Q^C)\subset \underline{R\subset P}$
$\sim p \Longrightarrow \sim r$이므로 대우인 $r \Longrightarrow p$가 성립해. 따라서 $R\subset P$야.
이때, U를 전체집합이라 하면 $P^C\subset P$에서
$P=U$이므로 조건 p는 항상 참이다.
한편, 두 집합 Q, R는 전체집합이 아닐 수 있으므로 조건 q, r는 항상 참이라 할 수 없다.
따라서 항상 참인 조건은 p 뿐이다.

22 답 ④

조건 $p(x)$의 진리집합이 $\{1, 3, 5\}$이므로
$p(1)$, $p(3)$, $p(5)$는 참이고
$p(2)$, $p(4)$, $p(6)$은 거짓이다.
ㄱ. $p(3)$이 참이므로 $\sim p(3)$은 거짓이다.
ㄴ. $p(4)$가 거짓이므로 $\sim p(4)$는 참이다.
ㄷ. $p(5)$는 참이다.
따라서 참인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

23 답 ③

$P\cap Q=Q$에서 $Q\subset P$
$Q^C\subset R^C$에서 $R\subset Q$
따라서 $R\subset Q\subset P$이므로
$r \Longrightarrow q \Longrightarrow p$, $\sim p \Longrightarrow \sim q \Longrightarrow \sim r$
따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

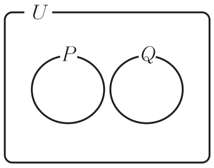
24 답 ④

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 성립하지 않는 예는 $\sim p$이면서 q가 아닌 경우, 즉 집합 $\underbrace{P^C\cap Q^C}_{=(P\cup Q)^C}$에 속하는 원소이다.

한편, 주어진 벤다이어그램에서 $d\in(P^C\cap Q^C)$이므로 d는 명제 $\sim p \longrightarrow q$의 반례이다.

25 답 ④

$P\cap Q=\varnothing$이고 $P\cup Q\neq U$이므로 두 집합 P, Q 사이의 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



즉, $Q\subset P^C$, $P\subset Q^C$이므로

$q \Longrightarrow \sim p$, $p \Longrightarrow \sim q$이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

26 답 ⑤

$p \Longrightarrow \sim q$, $\sim p \Longrightarrow r$, $q \Longrightarrow p$에서 각 명제의 대우 역시 참이므로

$q \Longrightarrow \sim p$, $\sim r \Longrightarrow p$, $\sim p \Longrightarrow \sim q$이다.

$q \Longrightarrow \sim p$, $\sim p \Longrightarrow r$에서 $Q\subset P^C\subset R$

$q \Longrightarrow p$, $q \Longrightarrow \sim p$에서 $Q\subset P$이고 $Q\subset P^C$이므로 $Q=\varnothing$

ㄱ. $\underbrace{Q=\varnothing}_{\Longleftrightarrow Q^C=U}$이므로

$P\cap Q=\varnothing$ (참)

ㄴ. $R-P=R\cap P^C$이고 $P^C\subset R$이므로

$R-P=\underbrace{R\cap P^C=P^C}_{\because P^C\subset R}$ (참)

ㄷ. $Q^C=U$이므로

$Q^C\cap R=U\cap R=R$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

27 답 ⑤

$P-Q=Q^C$에서 $P\cap Q^C=Q^C$이므로 $Q^C\subset P$이다.

또, $P\cap R=\varnothing$에서 $P\subset R^C$, $R\subset P^C$이다.

ㄱ. $Q^C\subset P$에서 $P^C\subset Q$이므로 $\sim p \Longrightarrow q$ (참)

ㄴ. $Q^C\subset P$, $P\subset R^C$에서 $Q^C\subset R^C$이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim r$ (참)

ㄷ. $R\subset P^C$에서 $r \Longrightarrow \sim p$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

28 답 ④

주어진 조건 '집합 A의 원소 중 적어도 3개는 3보다 크다.'는 '집합 A의 원소 중 3보다 큰 원소의 개수가 3 이상이다.'로 나타낼 수 있다.

따라서 조건 p의 부정 $\sim p$는 '집합 A의 원소 중 3보다 큰 원소가 2개 이하이다.'이다.

29 답 ②

어떤 명제를 부정할 때는 그 명제의 전제(전체집합)는 부정하지 않는다. 즉, 주어진 명제의 전제(전체집합)는 그대로 두고 결론을 부정한다.

'$\underbrace{x\geq 2\text{인 실수 }x}_{\text{전제(전체집합)}}$에 대하여 $\underbrace{\text{모두 }x-1>0}_{\text{결론}}$이다.'

부정: '$\underbrace{x\geq 2\text{인 실수 }x}_{\text{전제(전체집합)}}$에 대하여 $\underbrace{\text{어떤 것은 }x-1\leq 0}_{\text{결론의 부정}}$이다.'

즉, '$x\geq 2$인 어떤 실수 x에 대하여 $x-1\leq 0$이다.'가 주어진 명제의 부정이다.

일등급 UP

*** 명제의 부정**

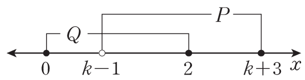
다음과 같이 그 명제의 전체집합까지 부정을 하는 경우가 많다.
부정 : '$x<2$인 어떤 실수 x에 대하여 $x-1\leq 0$이다.'
이 경우 $x=1$이면 성립하므로 명제의 부정이 참이 된다.
주어진 명제가 참이고, 참인 명제를 부정하면 거짓이어야 하는데 참인 명제의 부정 역시 참이 되는 것은 부정을 잘못한 것이다.

30 답 ③

명제 '$k-1<x\leq k+3$인 어떤 실수 x에 대하여 $0\leq x\leq 2$이다.'에서 조건 $k-1<x\leq k+3$의 진리집합을 $P=\{x\mid k-1<x\leq k+3\}$, 조건 $0\leq x\leq 2$의 진리집합을 $Q=\{x\mid 0\leq x\leq 2\}$라 하자.

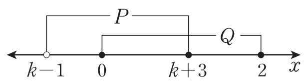
주어진 명제가 참이 되려면 진리집합 P에 속하는 원소 중 진리집합 Q에 속하는 원소가 존재하므로 $P\cap Q\neq\varnothing$이어야 한다.

(i) $k-1\geq 0$일 때, $k-1<2$



$\therefore 1\leq k<3$

(ii) $k-1<0$일 때, $0\leq k+3$



$\therefore -3\leq k<1$

(i), (ii)에 의하여 $-3\leq k<3$

따라서 주어진 명제가 참이 되게 하는 정수 k의 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2의 6개이다.

31 답 ⑤

조건 (가)에서 집합 B에 속하지 않는 원소 중 집합 A에 속하면서 집합 C에 속하지 않는 원소가 적어도 하나 존재하므로 집합 A에만 속하는 원소가 최소한 1개 존재한다.

즉, $B^C\cap A\cap C^C\neq\varnothing$에서 $(B\cup C)^C\cap A\neq\varnothing$

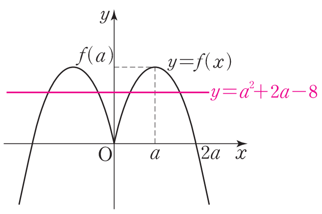
$\therefore A-(B\cup C)\neq\varnothing$

또한, 조건 (나)에서 집합 C에 속하면서 집합 A에 속하지 않는 모든 원소는 집합 B에 속하므로 $(C\cap A^{C})\subset B$에서 $(C-A)\subset B$
따라서 두 명제 (가), (나)를 모두 참이 되도록 하는 벤다이어그램은 ⑤이다.

32 답 ④

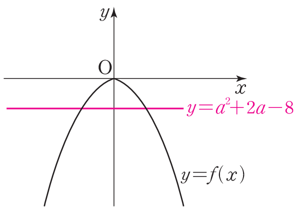
조건 (가)에서 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $-x^2+2a|x|\ge a^2+2a-8$이다.'가 참이므로
$f(x)=-x^2+2a|x|$라 하면
주어진 명제가 참이 되기 위해서는
(함수 $f(x)$의 최댓값)$\ge a^2+2a-8$을 만족시켜야 한다.
이때, 함수 $f(x)=-x^2+2ax$의 그래프의 대칭축은 $x=a$이므로 $a>0$ 또는 $a\le0$의 2가지 경우로 나누어 살펴보자.

(i) $a>0$인 경우



$f(x)$의 최댓값은 $f(a)=a^2$이므로
$a^2\ge a^2+2a-8,\ 2a\le8$
$\therefore\ a\le4$
이때, $a>0$이므로 $0<a\le4$

(ii) $a\le0$인 경우



$f(x)$의 최댓값은 $f(0)=0$이므로
$0\ge a^2+2a-8,\ (a+4)(a-2)\le0$
$\therefore\ -4\le a\le2$
이때, $a\le0$이므로 $-4\le a\le0$

(i), (ii)에 의하여 조건 (가)를 만족시키는 a의 값의 범위는
$-4\le a\le4$ ⋯ ㉠
또한, 조건 (나)에서 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+2a+15\le0$이다.'가 거짓이므로
$x^2-2ax+2a+15>0$이 항상 성립해야 한다.
따라서 이차방정식 $x^2-2ax+2a+15=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-(2a+15)<0,\ a^2-2a-15<0$
$(a+3)(a-5)<0\qquad\therefore\ -3<a<5$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 조건을 모두 만족시키는 a의 값의 범위는
$-3<a\le4$이므로
정수 a의 개수는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 7이다.

33 답 ③

ㄱ. $p: a^2+b^2=0 \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q: a^2=b^2$
(→의 증명) $a^2+b^2=0$이면 $a^2=0,\ b^2=0$이므로
$a^2=b^2$
(←의 【반례】) $a^2=b^2=1$이면 $a^2+b^2\ne0$이다.

ㄴ. $p: ab<0 \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q: a<0$ 또는 $b<0$
(→의 증명) $ab<0$이면 $a>0,\ b<0$ 또는 $a<0,\ b>0$이므로
$a<0$ 또는 $b<0$이다.
(←의 【반례】) $a<0,\ b<0$이면 $ab>0$이다.

ㄷ. $p: a=b \underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q: a^3=b^3$
(→의 증명) $a=b$이면 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$에서
$a^3=b^3$이다.
(←의 증명) $a^3=b^3$이면
$a^3-b^3=(a-b)\underline{(a^2+ab+b^2)}=0$이므로 $a=b$이다.
실수 $a,\ b$에 대하여 $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\ge0$
(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

따라서 명제 $p\longrightarrow q$는 참이지만 그 역은 거짓인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

34 답 5

ㄱ. $a,\ b$가 실수일 때, $a>b \underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} a^2>b^2$
(→의 【반례】) $a=-1,\ b=-2$
(←의 【반례】) $a=-2,\ b=1$

ㄴ. 삼각형 ABC가 이등변삼각형이다. $\underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$
(→의 【반례】) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}},\ \overline{\mathrm{AB}}\ne\overline{\mathrm{AC}}$

ㄷ. 정수 n에 대하여 n^2이 짝수이다. $\underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}$ n이 짝수이다.
(→의 증명) 대우 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'가 참이므로 원래 명제도 참이다.
(←의 증명) $n=2k$(k는 정수)라 하면
$n^2=4k^2=2\times(2k^2)$이므로 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.

ㄹ. $x,\ y$가 실수일 때, $x+y>0 \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} x>-1$ 또는 $y>1$
(→의 증명) 대우 '$x\le-1$이고 $y\le1$이면 $x+y\le0$이다.'가 참이므로 원래 명제도 참이다.
(←의 【반례】) $x=-5,\ y=2$

ㅁ. $xy\ne6 \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} x\ne2$ 또는 $y\ne3$
(→의 증명) 대우 '$x=2$이고 $y=3$이면 $xy=6$이다.'가 참이므로 원래 명제도 참이다.
(←의 【반례】) $x=1,\ y=6$

ㅂ. $x+y$가 유리수이다. $\underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ $x,\ y$ 중 적어도 하나는 유리수이다.
(→의 【반례】) $x=1+\sqrt{2},\ y=1-\sqrt{2}$
(←의 【반례】) $x=1+\sqrt{2},\ y=2$

따라서 참인 명제는 ㄷ, ㄹ, ㅁ의 3개이므로 $p=3$이고
역이 참인 명제는 ㄴ, ㄷ의 2개이므로 $q=2$
$\therefore\ p+q=3+2=5$

35 답 6

명제의 역 'x, y가 실수일 때, $xy>3$이면 $x^2+y^2>k$이다.'가 참이 될 조건을 찾아보자.

x, y가 실수이므로 $(x-y)^2\ge0$에서 $x^2+y^2\ge2xy$

이때, $xy>3$이면 $x^2+y^2\ge2xy$에서 $x^2+y^2>6$

즉, $x^2+y^2>6\ge k$이면 명제의 역이 참이 된다.

따라서 $k\le6$에서 k의 최댓값은 6이다.

36 답 ②

ㄱ. $x+y=xy \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ $\quad\therefore$ 필요조건

($\longrightarrow$의【반례】) $x=0$, $y=0$일 때, $x+y=xy$이지만

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$은 성립하지 않는다.

($\longleftarrow$의 증명) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$의 양변에 xy를 곱하면

$x+y=xy$

ㄴ. $(A\cup B)\cap(\underbrace{A^C\cap B^C}_{=(A\cup B)^C})=\varnothing \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} A=B$

$\therefore$ 필요조건

($\longrightarrow$의【반례】) $A=\{1\}$, $B=\varnothing$ 일 때

$(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)=\varnothing$ 이지만 $A\ne B$이다.

($\longleftarrow$의 증명) $A=B$일 때,

$(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)=(A\cup A)\cap(A\cup A)^C$

$=A\cap A^C=\varnothing$

ㄷ. $A\subset B$ 또는 $A\subset C \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} A\subset(B\cup C)$

$\therefore$ 충분조건

($\longrightarrow$의 증명) $a\in A$이면 $a\in B$ 또는 $a\in C$이므로

$a\in(B\cup C)$

따라서 $A\subset B$ 또는 $A\subset C$이면 $A\subset(B\cup C)$이다.

($\longleftarrow$의【반례】) $A=\{2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{1, 3\}$일 때,

$A\subset(B\cup C)$이지만 $A\not\subset B$이고 $A\not\subset C$이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이 : 드모르간의 법칙으로 참, 거짓 판별하기

ㄴ. $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로 임의의 두 집합 A, B에 대하여 $(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)^C=\varnothing$ 이 항상 성립한다.

즉, $(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)=\varnothing$ 이면 항상 $A=B$인 것은 아니다.

37 답 ④

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid |x-1|\le3\}$

$=\{x\mid -3\le x-1\le3\}$

$=\{x\mid -2\le x\le4\}$ ⋯ ㉠

또, a가 자연수이므로

$Q=\{\mid x\mid \le a\}$

$=\{x\mid -a\le x\le a\}$ ⋯ ㉡

한편, p가 q이기 위한 충분조건, 즉 $p\Longrightarrow q$이므로

$P\subset Q$이어야 한다.

㉠, ㉡에 의하여 $-a\le-2$이고 $a\ge4$이므로

$a\ge2$이고 $a\ge4$

따라서 $a\ge4$이므로 자연수 a의 최솟값은 4이다.

38 답 ③

ㄱ. 두 조건

p : m, n은 모두 자연수이다.

q : $m+n$, $m-n$은 모두 자연수이다.

에 대하여 $p \underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} q$

($\longrightarrow$의【반례】) $m=1$, $n=2$이면 $m-n$은 자연수가 아니다.

($\longleftarrow$의【반례】) $m=2$, $n=-1$이면 $m+n$, $m-n$은 모두 자연수이지만 n은 자연수가 아니다.

ㄴ. 두 조건

p : m, n은 모두 정수이다.

q : $m+n$, $m-n$은 모두 정수이다.

에 대하여 $p \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q$

($\longrightarrow$의 증명) 정수끼리 더하거나 뺀 값은 정수이다.

($\longleftarrow$의【반례】) $m=\dfrac{3}{2}$, $n=\dfrac{1}{2}$이면 $m+n$, $m-n$은 모두 정수이지만 m과 n은 정수가 아니다.

ㄷ. 두 조건

p : m, n은 모두 유리수이다.

q : $m+n$, $m-n$은 모두 유리수이다.

에 대하여 $p \underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q$

($\longrightarrow$의 증명) 유리수끼리 더하거나 뺀 값은 유리수이다.

($\longleftarrow$의 증명) 유리수 k, l에 대하여 $m+n=k$, $m-n=l$이라 하면 $m=\dfrac{k+l}{2}$, $n=\dfrac{k-l}{2}$

이때, k, l이 유리수이고 유리수끼리 더하거나 뺀 값을 2로 나눈 값도 유리수이므로 m, n도 유리수이다.

따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄷ이다.

39 답 ③

조건 p는 조건 r이기 위한 필요조건이고, 조건 q는 조건 r이기 위한 충분조건이므로 $r\Longrightarrow p$, $q\Longrightarrow r$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

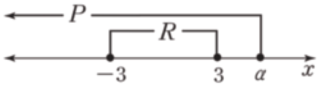
$R\subset P$, $Q\subset R$이므로 $Q\subset R\subset P$이어야 한다.

r : $x^2-3|x|\le0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

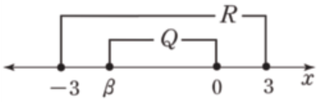
$|x|^2-3|x|\le0$, $\underbrace{|x|(|x|-3)\le0}_{|x|\ge0\text{이므로 } |x|-3\le0}$ $\quad\therefore 0\le|x|\le3$

$0\le|x|\le3$이므로 $-3\le x\le3$

즉, $R\subset P$, $\{x\,|\,-3\le x\le3\}\subset\{x\,|\,x\le\alpha\}$에서 $\alpha\ge3$



또, $Q\subset R$, $\{x\,|\,\beta\le x\le0\}\subset\{x\,|\,-3\le x\le3\}$에서 $-3\le\beta\le0$



$0\le-\beta\le3$이므로 $\alpha-\beta$의 최솟값은 3이다.

$\therefore\ |\alpha-\beta|\ge3$

따라서 $|\alpha-\beta|$의 최솟값은 3이다.

40 답 ②

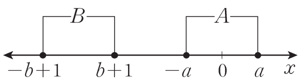
$A=\{x\,|\,(x-a)(x+a)\le0\}=\{x\,|\,-a\le x\le a\}$,

$B=\{x\,|\,|x-1|\le b\}=\{x\,|\,-b\le x-1\le b\}$

$=\{x\,|\,-b+1\le x\le b+1\}$

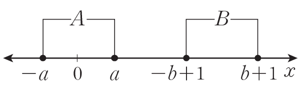
에 대하여 $A\cap B=\varnothing$이기 위해서는

(i)



또는

(ii)



이어야 한다. 그런데 a, b는 양수이므로

(i)에서 $b+1>1$, $-a<0$, 즉 $b+1<-a$일 수 없으므로 모순이다.

(ii)에서 $a<-b+1$ $\quad\therefore\ a+b<1$

또한, a, b는 양수이므로 $a+b>0$이다.

따라서 $A\cap B=\varnothing$이기 위한 필요충분조건은 $0<a+b<1$이다.

41 답 ④

ㄱ. $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac=0$이면

중근 $x=-\dfrac{b}{2a}$를 갖는다.

또한, $x=-\dfrac{b}{2a}$를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\dfrac{b}{2a}\right)+c=0$에서 $\dfrac{-b^2+4ac}{4a}=0$

$\therefore\ b^2-4ac=0$

즉, 필요충분조건이다.

ㄴ. $a>0$이고 $D=b^2-4ac=0$이면 $ax^2+bx+c>0$의 해는

$x\ne-\dfrac{b}{2a}$인 모든 실수이다.

또한, $a>0$일 때, 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 모든 실수이면 $D=b^2-4ac<0$이다.

즉, 필요충분조건이 아니다.

ㄷ. $a>0$이고 $D=b^2-4ac=0$이면 이차부등식

$ax^2+bx+c\le0$의 해는 $x=-\dfrac{b}{2a}$의 단 하나이다.

또한, $a>0$일 때, 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 단 하나의 해를 가지면 $D=b^2-4ac=0$이다.

즉, 필요충분조건이다.

따라서 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

42 답 ⑤

'$p(x)$는 $q(x)$의 충분조건이 아니다.'에서

$p(x)\not\Longrightarrow q(x)$이므로

$p(x)$이지만 $q(x)$가 아닌 것이 있다.

즉, 어떤 x에 대하여 $p(x)$이고 $\sim q(x)$이다.

43 답 33

$||x|-|y||=|x-y|$의 양변을 제곱하면

$||x|-|y||^2=|x-y|^2$

$\Longleftrightarrow(|x|-|y|)^2=(x-y)^2$

$\Longleftrightarrow|x|^2+|y|^2-\underbrace{2|xy|}_{2|x||y|=2|xy|}=x^2+y^2-2xy$

$\Longleftrightarrow|xy|=xy$

$\Longleftrightarrow xy\ge0$

즉, $xy\ge0$은 $||x|-|y||=|x-y|$의 필요충분조건이므로

집합 $\{(x,\ y)\,|\,||x|-|y||=|x-y|,\ x\in A,\ y\in A\}$의 원소의 개수를 구하는 대신 집합 $\{(x,\ y)\,|\,xy\ge0,\ x\in A,\ y\in A\}$의 원소의 개수를 구하면 된다.

$x\in A$, $y\in A$이고, $\underbrace{n(A)=7}_{A=\{-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,\,4\}}$이므로

모든 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $7\times7=49$

이 중 $xy<0$인 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $\underbrace{2\times4+4\times2=16}_{x<0,\,y>0\text{ 또는 }x>0,\,y<0}$

따라서 구하는 원소의 개수는 $49-16=33$

44 답 ②

a, b가 실수일 때

$|a|+|b|=0\Longleftrightarrow a=0,\ b=0$

ㄱ. $a^2+b^2=0\Longleftrightarrow a=0,\ b=0$

ㄴ. $a^2-ab+b^2=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$

$=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2=0$

이므로 $a-\dfrac{b}{2}=0$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=0$

$\therefore\ a=0,\ b=0$

ㄷ. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=0$이므로 $a=b$

따라서 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

45 답 ②

주어진 조건을 s라 하면

$s:(a-1)(b-1)(c-1)>0$에서

$a-1$, $b-1$, $c-1$ 모두 0보다 크거나 한 개만 0보다 크고 두 개는 0보다 작다.

즉, a, b, c 모두 1보다 크거나 한 개만 1보다 크고 두 개는 1보다 작다.

이때, [보기]의 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 조건을 순서대로 p, q, r라 하자.

ㄱ. $p \underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} s$에서 p는 s이기 위한 필요조건이다.

  ($\longrightarrow$의 【반례】) $a>1$, $b>1$, $c<1$

ㄴ. $q \underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} s$에서 q는 s이기 위한 필요조건이다.

  ($\longrightarrow$의 【반례】) $a=3$, $b=2$, $c=-1$

ㄷ. $r \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} s$에서 r는 s이기 위한 충분조건이다.

  ($\longrightarrow$의 증명) a, b, c의 최솟값이 1보다 크다.

  a, b, c 모두 1보다 크다.

  $a-1$, $b-1$, $c-1$ 모두 0보다 크다.

  $(a-1)(b-1)(c-1)>0$

  ($\longleftarrow$의 【반례】) $a=0$, $b=0$, $c=2$

따라서 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

46 답 48

q가 p이기 위한 필요조건이면 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

즉, $x^2+2x-8\geq 0$이면 $(x^2+2ax-4a)(x^2+2x-8)\geq 0$이 성립한다.

따라서 $x^2+2x-8\geq 0$일 때, $x^2+2ax-4a\geq 0$이어야 한다.

여기서 $f(x)=x^2+2ax-4a$라 하면

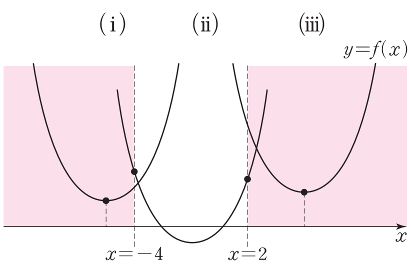
$f(x)=(x+a)^2-a^2-4a$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축은 $x=-a$이다.

$x^2+2x-8\geq 0$에서 $(x+4)(x-2)\geq 0$

즉, $x\leq -4$ 또는 $x\geq 2$일 때 $f(x)\geq 0$이어야 하므로

$\underline{-a\text{의 값에 따라}}$ 곡선 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같이 세 가지
그래프의 축의 위치에 따라
경우가 있다.



(i) $-a<-4$, 즉 $a>4$일 때,

  $x\leq -4$ 또는 $x\geq 2$에서 $f(x)\geq 0$이기 위해서는

  $f(-a)=-a^2-4a\geq 0$이어야 한다.

  $a^2+4a\leq 0$, $a(a+4)\leq 0$ $\therefore -4\leq a\leq 0$

  이때, $a>4$를 만족시키지 않으므로 성립하지 않는다.

(ii) $-4\leq -a\leq 2$, 즉 $-2\leq a\leq 4$일 때,

  $x\leq -4$ 또는 $x\geq 2$에서 $f(x)\geq 0$이기 위해서는

  $f(-4)=16-12a\geq 0$, $f(2)=4\geq 0$이어야 한다.

  $12a\leq 16$ $\therefore a\leq \frac{4}{3}$

  이때, $-2\leq a\leq 4$이므로 $-2\leq a\leq \frac{4}{3}$

(iii) $-a>2$, 즉 $a<-2$일 때,

  $x\leq -4$ 또는 $x\geq 2$에서 $f(x)\geq 0$이기 위해서는

  $f(-a)=-a^2-4a\geq 0$이어야 한다.

  $a^2+4a\leq 0$, $a(a+4)\leq 0$ $\therefore -4\leq a\leq 0$

  이때, $a<-2$이므로 $-4\leq a<-2$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $-4\leq a\leq \frac{4}{3}$

따라서 실수 a의 최댓값 $M=\frac{4}{3}$, 최솟값 $m=-4$이다.

$\therefore 9(M-m)=9\times\left\{\frac{4}{3}-(-4)\right\}=9\times\frac{16}{3}=48$

47 답 A

A의 말의 앞 진술이 참인 경우와 뒷 진술이 참인 경우로 나누어 보자.

(i) A의 말의 앞 진술이 참인 경우

  A의 말에서 A가 3등이면 D는 2등이 아니고, D의 말에서 D는 3등이 아니므로($\because$ A가 3등) E는 5등이다. 또한, E의 말에서 E는 4등이 아니고($\because$ E는 5등) A가 1등인데 이는 A의 말과 모순이다. 즉, A의 말의 앞 진술은 거짓이다.

(ii) A의 말의 뒷 진술이 참인 경우

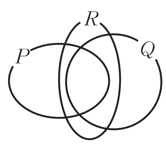
  A의 말에서 A는 3등이 아니고 D가 2등이며, D의 말에서 D는 3등이 아니고($\because$ D는 2등) E는 5등이다. 또한, E의 말에서 E는 4등이 아니고($\because$ E는 5등) A는 1등이며, B의 말에서 B는 2등이 아니고($\because$ D가 2등) C는 3등이다. 마지막으로 C의 말에서 C는 1등이 아니고($\because$ A가 1등) B는 4등임을 알 수 있다.

(i), (ii)에 의하여 1등은 A, 2등은 D, 3등은 C, 4등은 B, 5등은 E이다.

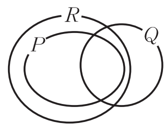
48 답 ④

전체집합을 U, 네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라 하고 벤다이어그램을 그려보자.

조건 (가)에 의하여 $(P\cap Q)\subset R$이므로 이것을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



조건 (나)에 의하여 $P\subset(Q\cup R)$이므로 이것을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$\therefore P\subset R$ ⋯ ㉠

조건 (다)에 의하여 $R\subset S$이므로 $P\subset R\subset S$ ($\because$ ㉠) ⋯ ㉡

조건 (라)에 의하여 $P^C\subset S$이므로 $S=U$ ($\because$ ㉡)

따라서 조건 s는 항상 참이다.

다른 풀이 ①: 집합의 연산 법칙 이용하기

전체집합을 U라 하고 네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라 하면

조건 (가)에서 $(P\cap Q)\subset R$이므로

$(P\cap Q)-R=(P\cap Q)\cap R^C=P\cap Q\cap R^C=\varnothing$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $P\subset(Q\cup R)$이므로

$P-(Q\cup R)=P\cap(Q\cup R)^C=P\cap Q^C\cap R^C=\varnothing$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $(P\cap Q\cap R^C)\cup(P\cap Q^C\cap R^C)=\varnothing$에서

$(P\cap R^C\cap Q)\cup(P\cap R^C\cap Q^C)=\varnothing$ ($\because$ 교환법칙)

$(P\cap R^C)\cap(Q\cup Q^C)=\varnothing$ ($\because$ 분배법칙) $(P\cap R^C)\cap U=\varnothing$

즉, $P\cap R^C=\varnothing$이므로 $P\subset R$

한편, 조건 (다)에서 $R\subset S$이므로

$P\subset R\subset S$

$\therefore P\subset S$

또, 조건 (라)에서 $P^C\subset S$이므로 $P\subset S$에 의하여 $S=U$

즉, 조건 s는 항상 참이다.

다른 풀이 ②: 진리집합의 원소 이용하기

전체집합을 U라 하고 네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라 하면

조건 (나)에서 $a\in P$일 때 $a\notin R$라 하면 $a\in Q$

$\therefore a\in(P\cap Q)$

그런데 조건 (가)에서 $a\in(P\cap Q)$이면 $a\in R$가 되어 모순이다.

$\therefore P\subset R$

조건 (다)에서 $R\subset S$이므로 $P\subset S$

또한, 조건 (라)에서 $P^C\subset S$이므로 S는 전체집합이다.

따라서 항상 참인 것은 s이다.

49 답 700원

B를 샀다면 두 조건 (다), (라)에 의하여 C와 D를 모두 사지 않아야 하고 조건 (나)에 의하여 E를 사야 한다.

그러면 조건 (마)에 의하여 A와 D도 꼭 사야 되므로 모순이 된다.

따라서 B는 사지 않았다.

마찬가지로 C를 사지 않았다면 조건 (라)에 의하여 D를 사지 않아야 하고 조건 (나)에 의하여 E를 사야 한다.

그러면 조건 (마)에 의하여 A와 D도 꼭 사야 하므로 모순이 된다.

따라서 C는 샀다.

이때, 조건 (라)에 의하여 D도 샀고, 조건 (가)에 의하여 A는 사지 않았고, 조건 (마)에 의하여 E 역시 사지 않았다.

따라서 손님이 산 물건은 C와 D이므로 지불한 금액은

$300+400=700$(원)이다.

50 답 16

두 조건 p, q의 진리집합 P, Q는

$P=\{2, 3, 5, 7\}$, $Q=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$이다. ---- ⓐ

한편, 명제 'p 또는 $\sim q$이면 r이다.'가 참이기 위해서는

$(P\cup Q^C)\subset R$ ⋯ ㉠이어야 한다.

이때, $Q^C=\{3, 6, 9\}$이므로

$P\cup Q^C=\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$이고 ㉠에 의하여

$\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}\subset R\subset U$ ---- ⓑ

따라서 집합 R의 개수는 $2^{10-6}=2^4=16$이다. ---- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 조건 p, q의 진리집합을 구한다. ---- [30%]

ⓑ 집합 R의 조건을 찾는다. ---- [40%]

ⓒ 집합 R의 개수를 구한다. ---- [30%]

51 답 165

조건 p의 부정 $\sim p$는

$\sim p$: 제곱수이고 짝수가 아니다. 즉, 제곱수이고 홀수이다. ---- ⓐ

이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은 $\{1, 9, 25, 49, 81\}$이다. ---- ⓑ

따라서 구하는 원소의 합은 $1+9+25+49+81=165$이다. ---- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 조건 $\sim p$를 구한다. ---- [40%]

ⓑ 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소를 구한다. ---- [40%]

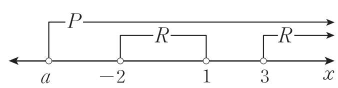
ⓒ 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소의 합을 구한다. ---- [20%]

52 답 1

조건 $x>a$를 p, 조건 $x>b$를 q, 조건 $-2<x<1$ 또는 $x>3$을 r라 하고 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

(i) p는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset P$에서

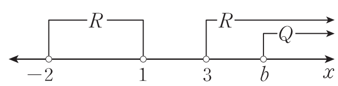
$\{x\mid -2<x<1$ 또는 $x>3\}\subset\{x\mid x>a\}$



$\therefore a\le -2$ ---- ⓐ

(ii) q는 r이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset R$에서

$\{x\mid x>b\}\subset\{x\mid -2<x<1$ 또는 $x>3\}$



$\therefore b\ge 3$ ---- ⓑ

따라서 a의 최댓값은 -2, b의 최솟값은 3이므로 그 합은 1이다. ······ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ a의 값의 범위를 구한다. ······ [40%]
ⓑ b의 값의 범위를 구한다. ······ [40%]
ⓒ a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구한다. ······ [20%]

고난도 도전 문제

문제편 p.89~90

53 답 34

두 조건 'x는 10의 약수', 'x는 6의 약수'의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

주어진 명제가 참이 되려면 집합 P의 원소는 모두 집합 Q의 원소가 되어야 한다.

이때, 집합 P는 10의 약수의 집합 $\{1, 2, 5, 10\}$의 부분집합이고, 집합 Q는 6의 약수의 집합 $\{1, 2, 3, 6\}$의 부분집합이다.

따라서 $P\subset Q$가 되려면 10의 약수 중 5와 10은 집합 P의 원소가 아니어야 한다.

즉, 전체집합 $U=\{1, 2, 3, n\}$에서 n이 5와 10을 제외한 수이면 $P\subset Q$가 성립한다.

한편, n은 10 이하의 자연수이고 1, 2, 3 역시 제외해야 하므로 가능한 n의 값은 4, 6, 7, 8, 9이다.

따라서 자연수 n의 값의 합은

$4+6+7+8+9=34$이다.

54 답 10

두 조건 (가), (나)에 의하여 관찰 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

	비가 옴	비가 오지 않음	합계
오전	$a-5$	5	a
오후	$a-7$	7	a

한편, 조건 (다)에서 오후에 비가 온 날은 오전에는 비가 오지 않았으므로 오전과 오후에 동시에 비가 온 날은 없다.

따라서 조건 (라)에 의하여

$(a-5)+(a-7)=8$

$2a-12=8$, $2a=20$

$\therefore a=10$

55 답 18

$$f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\ge 1) \\ -x+1 & (x<1) \end{cases}$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고,

$$g(x)=-x^2+2tx+6-t^2$$
$$=-(x-t)^2+6$$

에서 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 축의 방정식 $x=t$에 대하여 대칭이고 꼭짓점의 좌표가 $(t, 6)$인 위로 볼록한 포물선이다.

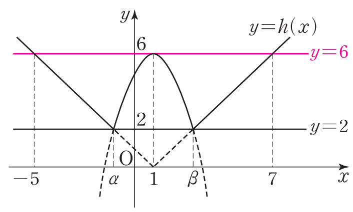
한편,

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$
$$=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 직선 $y=6$과 만나는 점의 좌표가 각각 $(-5, 6)$, $(7, 6)$과 $(t, 6)$이므로

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형을 t의 값에 따라 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 보자.

(i) $t=1$일 때,



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 두 교점 역시 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

두 교점의 x좌표를 α, $\beta(\alpha<1<\beta)$라 하고 β의 값을 구하면

$x-1=-x^2+2x+5$에서

$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$ $\qquad\therefore x=3$

즉, $\beta=3$이고, 이차함수의 그래프의 대칭성에 의하여

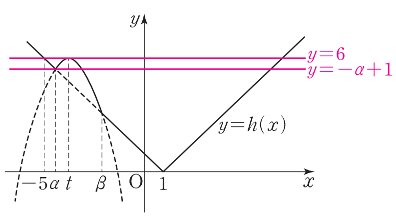
직선 $x=1$에 대하여 대칭

$\alpha=-1$이므로

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 좌표는 $(-1, 2)$, $(3, 2)$이다. ··· ㉠

이때, 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 $k=6$이다.

(ii) $-5<t<1$일 때,



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 α, $\beta(\alpha<\beta,\ -5<\alpha<-1)$ ··· ㉡라 하면

∵ ㉠

두 교점의 y좌표의 값 중 큰 값은 $-\alpha+1$이다.

$\because -\alpha+1>-\beta+1$

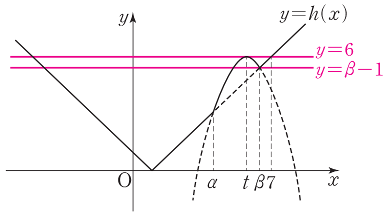
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은

$k=-\alpha+1$ 또는 $k=6$

이때, ㉡에서 $-5<\alpha<-1$, 즉 $2<-\alpha+1<6$이므로

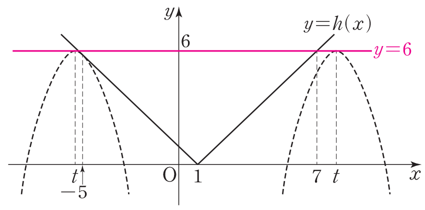
$2<k\le 6$

(iii) $1<t<7$일 때,



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 α, $\beta(\alpha<\beta$, $3<\beta<7)$라 하면 두 교점의 y좌표의 값 중 큰 값은 $\beta-1$이다. ∵㉠ ∵ $\alpha-1<\beta-1$
이때, 이차함수의 그래프의 대칭성에 의하여 k의 값의 범위는 (ii)와 같다.
$2<k\le 6$

(iv) $t\le -5$ 또는 $t\ge 7$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 명제 '어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.'가 참이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $2<k\le 6$
따라서 자연수 k의 값은 3, 4, 5, 6이므로 그 합은
$3+4+5+6=18$

56 답 ②

ㄱ. 【반례】 $a=1$일 때 $x=1$이면 $|1-1|<1$이다. (거짓)
ㄴ. $0<x<1$이면 $-1<x-1<0$이므로 $|x-1|<1$
따라서 $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여
$|x-1|<1\le a$, 즉 $|x-1|<a$가 성립한다. (참)
ㄷ. ㄴ의 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.
즉, ㄴ의 명제의 부정 '$0<x<1$인 어떤 실수 x에 대하여 $|x-1|\ge a$이다.'가 거짓이므로 ㄷ의 명제도 거짓이다. (거짓)
따라서 참인 명제는 ㄴ이다.

다른 풀이 : 진리집합으로 참, 거짓 판별하기

실수의 집합을 R라 하자.
ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $|x-1|>a$가 성립하려면
부등식 $|x-1|>a$를 만족시키는 x의 집합이 실수 전체의 집합이어야 한다.
이 부등식을 풀면 $x-1>a$ 또는 $x-1<-a$에서
$x>1+a$ 또는 $x<1-a$이므로
$\{x|x>1+a\}\cup\{x|x<1-a\}=R$이어야 한다.
즉, $1+a<1-a$에서 $a<0$이어야 주어진 명제가 참이 된다. (거짓)
ㄴ. 조건 $|x-1|<a$의 진리집합은 $\{x|1-a<x<1+a\}$이고
전체집합은 $\{x|0<x<1\}$이므로
$\{x|0<x<1\}\subset\{x|1-a<x<1+a\}$이어야 한다.
즉, $1-a\le 0$, $1\le 1+a$에서 $a\ge 1$이므로 주어진 명제는 참이다. (참)
ㄷ. 전체집합이 $\{x|0<x<1\}$이고 조건 $|x-1|>a$의
진리집합이 $\{x|x<1-a$ 또는 $x>1+a\}$이므로 주어진 명제가 참이 되려면
$\{x|0<x<1\}\cap\{x|x<1-a$ 또는 $x>1+a\}\ne\varnothing$ 이어야 한다.
즉, $0<1-a$ 또는 $1+a<1$에서 $a<1$이어야 주어진 명제가 참이 된다. (거짓)

57 답 3

집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 집합 B에 속하는 원소의 개수를 x, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 집합 A의 원소 중 집합 B에 속하지 않는 원소의 개수는 $n-x$이므로
$P=\{x|x\ge 2\}$, $Q=\{x|n-x\ge 2\}=\{x|x\le n-2\}$
이때, 조건 $\sim p$ '집합 A의 원소 중 집합 B에 속하는 원소는 1개 이하이다.'의 진리집합은 $P^C=\{x|x\le 1\}$이고, $\sim p\Longleftrightarrow q$이므로
두 조건 $\sim p$, q의 진리집합 P^C, Q는 같다.
즉, $P^C=\{x|x\le 1\}$, $Q=\{x|x\le n-2\}$에서
$n-2=1$
$\therefore n=3$
따라서 집합 A의 원소의 개수는 3이다.

58 답 ②

실수의 집합을 R라 하면 명제 $p\longrightarrow q$는 다음과 같다.
ㄱ. ($\longrightarrow$의 증명) $\alpha=a+bi$, $\beta=a-bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)라 하면
$\alpha+\beta=(a+bi)+(a-bi)=2a\in R$이고
$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\in R$
($\longleftarrow$의 【반례】) $\alpha=1$, $\beta=2$이면 합과 곱은 모두 실수이지만 β는 α의 켤레복소수가 아니다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. ($\longrightarrow$의 【반례】) $\alpha=1$이면 $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta$는 실수이지만 $\alpha-\beta$는 순허수가 아니다.
($\longleftarrow$의 증명) $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$
(a, b, c, d는 실수, $i=\sqrt{-1}$)라 하면
$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i\in R$에서 $b+d=0$
$\therefore d=-b$

또한, $\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$가 순허수이므로

$a=c,\ b\neq d$

$\therefore\ \alpha=a+bi,\ \beta=a-bi\ (\because\ a=c,\ d=-b)$

즉, α, β는 서로 켤레복소수이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. ($\longrightarrow$의 증명) $\alpha=a+bi$, $\beta=a-bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)라 하면 α, β의 실수부분은 같고

$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\in R$

($\longleftarrow$의【반례】) $\alpha=2i$, $\beta=3i$이면 α, β의 실수부분은 0으로 같고, $\alpha\beta=-6\in R$이지만 α, β는 서로 켤레복소수가 아니다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건인 것은 ㄴ이다.

59 답 7

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P^C=\{-1,\ 0,\ 1\}$,

$a\in Q^C$, $1\le n(Q^C)\le 3$,

$R^C=\{b,\ c\}$ 또는 $R^C=\{b(=c)\}$

이다.

p는 q이기 위한 충분조건이므로 명제 $p\longrightarrow q$가 참이고

그 대우 $\sim q\longrightarrow\ \sim p$도 참이다.

$\therefore\ Q^C\subset P^C$

이때, $a\in Q^C$이므로 $a\in P^C$이다.

따라서 $a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=1$ ⋯ ㉠

또한, r는 p이기 위한 필요조건이므로 명제 $p\longrightarrow r$가 참이고

그 대우 $\sim r\longrightarrow\ \sim p$도 참이다.

$\therefore\ R^C\subset P^C$ ⋯ ㉡

마지막으로 r는 q이기 위한 충분조건이므로 명제 $r\longrightarrow q$가 참이고

그 대우 $\sim q\longrightarrow\ \sim r$도 참이다.

$\therefore\ Q^C\subset R^C$

㉠~㉢에 의하여 $Q^C\subset R^C\subset P^C$ ⋯ ㉢이고, 집합 R^C의 원소는 2개 이하이므로

집합 Q^C의 원소의 개수는 2 이하이다.

따라서 삼차방정식 $(x-a)(x^2+x+b)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2 이하이다.

(i) 삼차방정식 $(x-a)(x^2+x+b)=0$의 실근의 개수가 1일 때,

이차방정식 $x^2+x+b=0$은 중근 a를 가지거나 실근을 갖지 않는다.
Ⅰ Ⅱ

Ⅰ. 이차방정식 $x^2+x+b=0$이 중근 a를 가질 때,

$x^2+x+b=(x-a)^2$에서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=a^2=\frac{1}{4}$

이 값은 ㉠에 모순이다.

Ⅱ. 이차방정식 $x^2+x+b=0$이 실근을 갖지 않을 때,

이차방정식 $x^2+x+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4b<0\qquad\therefore\ b>\frac{1}{4}$ ⋯ ㉣

이때, $Q^C=\{a\}$이고 ㉢에서 $\{a\}\subset R^C$이므로

$a=b$ 또는 $a=c$

① $a=b$일 때, ㉠에서

$a=-1$이면 $b=-1$이 되어 ㉣에 모순이다.

$a=0$이면 $b=0$이 되어 ㉣에 모순이다.

$a=1$이면 $b=1$이고 ㉢에 의하여 c는 -1, 0, 1 중 하나이다.

② $a=c$일 때, ㉠에서

$a=-1$이면 $c=-1$이고 ㉢에 의하여 b는 -1, 0, 1 중 하나이다. 이때, ㉣에 의하여 $b=1$

$a=0$이면 $c=0$이고 마찬가지로 ㉢, ㉣에 의하여 $b=1$이다.

$a=1$이면 $c=1$이고 마찬가지로 ㉢, ㉣에 의하여 $b=1$이다.

Ⅰ~Ⅱ에서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 1,\ -1)$, $(1,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 1)$, $(-1,\ 1,\ -1)$, $(0,\ 1,\ 0)$

(ii) 삼차방정식 $(x-a)(x^2+x+b)=0$의 실근의 개수가 2일 때,

이차방정식 $x^2+x+b=0$이 a가 아닌 중근 α를 가지거나, a와 a가 아닌 근 β를 갖는다. Ⅰ
Ⅱ

Ⅰ. 이차방정식 $x^2+x+b=0$이 a가 아닌 중근 α를 가질 때,

$x^2+x+b=(x-\alpha)^2$에서

$\alpha=-\frac{1}{2}$, $b=\alpha^2=\frac{1}{4}$이 되어 ㉠에 모순이다.

Ⅱ. 이차방정식 $x^2+x+b=0$이 a와 a가 아닌 근 β를 가질 때,

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+\beta=-1$, $a\beta=b$ ⋯ ㉤

$a=-1$이면 ㉤에서 $\beta=0$, $b=0$이고

㉢에 의하여 $c=-1$

$a=0$이면 ㉤에서 $\beta=-1$, $b=0$이고

㉢에 의하여 $c=-1$

$\because\ Q^C=\{-1,\ 0\},\ R^C=\{0,\ c\},\ Q^C\subset R^C$

$a=1$이면 ㉤에서 $\beta=-2$, $b=-2$가 되어 ㉢에 모순이다.

$Q^C=\{1,\ -2\}$이므로 $Q^C\not\subset P^C$

Ⅰ~Ⅱ에서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(-1,\ 0,\ -1)$, $(0,\ 0,\ -1)$

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 7이다.

60 답 18

조건 (가)에서

$|a|x+a\le(2-|b|)x+b$

$(|a|+|b|-2)x\le b-a$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$0\times x\le$ (0 또는 양수)

$|a|+|b|-2=0$이고 $b-a\ge 0$

즉, $|a|+|b|=2$이고 $b\ge a$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-a^2<(b-2)^2-4$'는 거짓이므로 이 명제의 부정인 '모든 실수 x에 대하여 $x^2-a^2\ge(b-2)^2-4$'는 참이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여

$x^2\ge a^2+(b-2)^2-4$가 성립하려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2\ge 0$이므로 $0\ge a^2+(b-2)^2-4$이어야 한다.

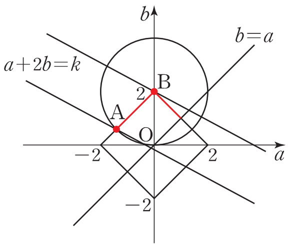
즉, $a^2+(b-2)^2\le 4$ ⋯ ㉡

한편, 방정식 $|a|+|b|=2$가 나타내는 도형과

원 $a^2+(b-2)^2=4$가 만나는 점 중 제2사분면 위의 점을 A,

원 $a^2+(b-2)^2=4$의 중심을 $\mathrm{B}(0,\ 2)$라 하자.

이때, ㉠, ㉡을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형을 좌표평면 상에 나타내면 다음 그림에서 빨간색 선으로 나타낸 부분이다.



점 A의 좌표를 구하기 위해

직선 $b=a+2$와 원 $a^2+(b-2)^2=4$의 방정식을 연립하면

$a=b-2$이므로 $2a^2=4$, $a^2=2$

따라서 제2사분면 위의 점 A의 좌표는

$a=-\sqrt{2}$, $b=2-\sqrt{2}$에서 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$

여기서 $a+2b=k$ (k는 실수)로 놓으면 위의 그림에서

k의 최솟값은 이 직선이 점 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$를 지날 때

$m=-\sqrt{2}+2\times(2-\sqrt{2})=4-3\sqrt{2}$이고,

k의 최댓값은 점 $\mathrm{B}(0,\ 2)$를 지날 때 $M=0+2\times2=4$이다.

$\therefore (M-m)^2=(3\sqrt{2})^2=18$

07 명제의 증명과 절대부등식

핵심 유형 연습

문제편 p.94~96

01 답 ②

Tip

주어진 성질과 연산을 통해 명제가 참임을 증명해.

가정에서 $a>0$이므로 (ⅰ)에 의하여 $a\ne0$이다.

따라서 실수 $\frac{1}{a}\ne0$이므로 성질 (ⅰ) 에 의하여
(가)

$\frac{1}{a}>0$ 또는 $\frac{1}{a}<0$이다.

$\frac{1}{a}<0$인 경우에는 성질 (ⅱ) 와 가정에 의하여
(나)

$a\times\left(-\frac{1}{a}\right)=-1>0$ $\left(\because a>0,\ -\frac{1}{a}>0\right)$이다.

그런데 $-1>0$이라면 (ⅱ)에 의하여
(다)

$(-1)\times(-1)=1>0$ ($\because -1>0$)이 되어 성질 (ⅰ) 에 모순이다.

$-1>0$, $1>0$이 동시에 성립하지 않아.

따라서 $\frac{1}{a}>0$이다.

02 답 풀이 참조

a, b가 실수이므로 성질 (ⅰ)에 의하여 $a^2\ge0$, $b^2\ge0$

$a^2\ge0$의 양변에 b^2을 더하면 $a^2+b^2\ge b^2\ge0$

이때, 가정에서 $a^2+b^2=0$이므로 $0\ge b^2\ge0$

따라서 성질 (ⅱ)에 의하여 $b^2=0$ $\qquad\therefore b=0$

$a^2+b^2=0$에 $b=0$을 대입하면 $a^2=0$ $\qquad\therefore a=0$

03 답 ④

Tip

주어진 명제의 대우를 구하여 빈칸에 알맞은 것을 구해.

주어진 명제의 대우를 이용하여 증명하자.

'a, b가 정수일 때, a, b가 모두 홀수이면 ab는 홀수이다.'

a, b를 모두 홀수 라 하면
(가)

$a=2k+1$, $b=2l+1$ (k, l은 모두 정수)로 나타낼 수 있으므로

$ab=(2k+1)(2l+1)=4kl+2k+2l+1$
(나)

$\quad=2(2kl+k+l)+1$
(나) (가)

그런데 $2kl+k+l$은 정수이므로 ab는 홀수 이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제 'ab가 짝수이면 a 또는 b는 짝수이다.'도 참이다.

04 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '두 자연수 a, b에 대하여 ab가 홀수이면 a^2+b^2은 짝수이다.'가 참임을 보이자.

ab가 홀수이면 a, b 둘 다 홀수이므로

$a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)

로 나타낼 수 있다.

$a^2+b^2=(2m-1)^2+(2n-1)^2$

$\quad\quad\;=2(2m^2+2n^2-2m-2n+1)$

이때, $2m^2+2n^2-2m-2n+1$은 자연수이므로 a^2+b^2은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제 '두 자연수 a, b에 대하여 a^2+b^2이 홀수이면 ab는 짝수이다.'도 참이다.

05 답 ③

Tip

명제가 참임을 증명하기 어려우면 귀류법을 이용해.

$\sqrt{3}$이 무리수가 아니라고 하면 $\sqrt{3}$은 유리수 (가) 이므로

$\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$ (a, b는 서로소인 정수이고 $b\neq0$)로 나타낼 수 있다.

양변을 제곱하면

$(\sqrt{3})^2=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$에서 $3b^2=a^2$ … ㉠

이때, a^2은 3의 배수이고, 3은 소수 (나) 이므로 a는 3의 배수이다.

따라서 $a=3k$ (k는 정수)로 놓고 ㉠에 대입하면

$3b^2=(3k)^2$에서 $b^2=3k^2$

이때, b^2은 3의 배수이므로 b는 3의 배수이다.

그런데 a, b가 모두 3의 배수라는 것은 a, b가 서로소 (다) 라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{3}$은 유리수가 아니므로 무리수이다.

06 답 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 세 실수 a, b, c에 대하여

$a^2>bc$, $ac>b^2$일 때, $a=b$라 하면

$a^2>bc$에서 $a^2>ac$

$ac>b^2$에서 $ac>a^2$

이 되어 모순이다.

따라서 세 실수 a, b, c에 대하여 $a^2>bc$, $ac>b^2$이면 $a\neq b$이다.

07 답 ⑤

Tip

임의의 실수 a에 대하여 $a^2\geq0$이 항상 성립함을 이용해.

ㄱ. $a(a-b)-b(a-b)=(a-b)^2\geq0$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore a(a-b)\geq b(a-b)$ (참)

ㄴ. $a^2+b^2-ab=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geq0$

(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

$\therefore a^2+b^2\geq ab$ (참)

ㄷ. $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq0$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$\therefore a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ (참)

따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

08 답 18

$ab+bc+ca=12$이므로

$(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq0$을 변형해서 만들 수 있어.

에서 $(a+b+c)^2\geq36$

$\therefore a+b+c\geq6$ ($\because a+b+c>0$)

따라서 $a+b+c$의 최솟값은 6이므로 $p=6$

또한, $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq0$을 이항해서 만들 수 있어.

에서 $a^2+b^2+c^2\geq12$

따라서 $a^2+b^2+c^2$의 최솟값은 12이므로 $q=12$

$\therefore p+q=6+12=18$

09 답 3

명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+4>0$이다.'가 참이므로

이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-16<0$에서 $(a+4)(a-4)<0$

$\therefore -4<a<4$ … ㉠

명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-ax+a\leq0$이다.'가 거짓이므로

이 명제의 부정인 '모든 실수 x에 대하여 $x^2-ax+a>0$이다.'는 참이다.

이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4a<0$에서 $a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$ … ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<a<4$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다.

10 답 ①

Tip

a, b에 대한 조건이 양수가 아니라 자연수임에 주의하여 문제를 풀어.

ㄱ. $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq2\sqrt{a^2b^2}=2ab>ab$ (참)

ㄴ. $a+4b=12\geq 2\sqrt{4ab}=4\sqrt{ab}$

$\sqrt{ab}\leq 3 \qquad \therefore ab\leq 9$

여기서 등호가 성립할 때, 즉 $a=4b=6$일 때 최댓값을 가지게 된다. 그런데 b는 자연수이므로 $b\neq\frac{6}{4}$이다.

따라서 등호가 성립할 수 없으므로 ab의 최댓값은 9가 아니다. (거짓)

ㄷ. $a^2+\frac{9}{a^2+1}=a^2+1+\frac{9}{a^2+1}-1$

$\geq 2\sqrt{(a^2+1)\times\frac{9}{a^2+1}}-1=6-1=5$

등호는 $a^2+1=\frac{9}{a^2+1}=3$, 즉 $a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$일 때 성립한다.

그런데 a는 자연수이므로 $a\neq-\sqrt{2}$, $a\neq\sqrt{2}$이다.

따라서 $a^2+\frac{9}{a^2+1}$의 최솟값은 5가 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

11 답 25

$\underline{4:a=b:9}$에서 $ab=36$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에서
직사각형의 넓이의 비

$a+b\geq 2\sqrt{ab}=12$ (단, 등호는 $a=b=6$일 때 성립)

이때, 직사각형 ABCD의 넓이는

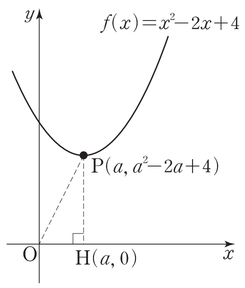
$4+a+b+9=a+b+13$이므로

$a+b+13\geq 12+13=25$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이의 최솟값은 25이다.

12 답 ③

함수 $f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3\ (x>0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P의 x좌표를 $a\ (a>0)$라 하면 $P(a,\ a^2-2a+4)$, $H(a,\ 0)$이다.



직각삼각형 OPH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OP}^2=\overline{OH}^2+\overline{PH}^2$

양변을 $\overline{OH}^2$으로 나누면

$\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OH}^2}=1+\frac{\overline{PH}^2}{\overline{OH}^2}$

$=1+\frac{(a^2-2a+4)^2}{a^2}$

$=1+\left(\underline{a-2+\frac{4}{a}}\right)^2$

$a+\frac{4}{a}$에 산술평균과 기하평균의 관계를 이용해.

$\geq 1+\left(2\sqrt{a\times\frac{4}{a}}-2\right)^2$ (단, 등호는 $a=2$일 때 성립)

$=1+2^2=5$

따라서 $\frac{\overline{OP}}{\overline{OH}}$의 최솟값을 m이라 할 때, $m^2=5$이다.

13 답 ③

> Tip
>
> 코시−슈바르츠의 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$에서 등호는 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$일 때 성립해.

ㄱ. 코시−슈바르츠의 부등식에 의하여

$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(1+1)\geq\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=16$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\therefore \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq 8$ (참)

ㄴ. 코시−슈바르츠의 부등식에 의하여

$4(x+y)=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

$=\underline{\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\right\}}$

x, y가 양수이므로 $x=(\sqrt{x})^2$, $y=(\sqrt{y})^2$

$\geq(1+1)^2$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)$=4$

$\therefore x+y\geq 1$ (참)

ㄷ. 코시−슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1+1)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

≥ 1 ($\because$ ㄴ)

$\therefore x^2+y^2\geq\frac{1}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 답 20

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 l이라 하면

$l=4(a+b+c)$

한편, 대각선의 길이가 5이므로

$a^2+b^2+c^2=5^2$ ⋯ ㉠

코시−슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$3\times 25\ge(a+b+c)^2$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a+b+c\le 5\sqrt{3}$

따라서 $l=4(a+b+c)\le 20\sqrt{3}$이므로 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값은 $20\sqrt{3}$이다.

$\therefore k=20$

15 답 12

음이 아닌 실수 x, y, z에 대하여 $x+y+z=3$이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2+1^2)\underbrace{(x+2+y+3+z+4)}_{(\sqrt{x+2})^2+(\sqrt{y+3})^2+(\sqrt{z+4})^2=x+2+y+3+z+4}\ge(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+4})^2$$

(단, 등호는 $x+2=y+3=z+4$일 때 성립)

$$3\times\underbrace{(x+y+z+9)}_{=3+9=12}\ge(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+4})^2$$

$36\ge(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+4})^2$

$\therefore \sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+4}\le 6$

따라서 $\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+4}$의 최댓값 $M=6$이다.

이때, 등호는 $\sqrt{x+2}=\sqrt{y+3}=\sqrt{z+4}=2$일 때 성립하므로

이때의 x의 값 a를 구하면

$\sqrt{a+2}=2 \qquad \therefore a=2$

$\therefore aM=2\times 6=12$

실전 유형 훈련

문제편 p.97~105

16 답 36

점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$와 직선 $l: 3x+4y+k=0$ 사이의 거리는

직선 l 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$와 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AP}}$의

최솟값이므로, $\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값은 $\boxed{6}$이다. (가)

점 $\mathrm{P}(p,\ q)$는 직선 l 위의 점이므로

$3p+4q+k=0$ ⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(3-p)^2+(4-q)^2$이고

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\begin{aligned}(3^2+4^2)\{(3-p)^2+(4-q)^2\}&\ge\{3(3-p)+4(4-q)\}^2\\&=(25-3p-4q)^2\\&=(\boxed{25}+k)^2\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

(나)

$25\overline{\mathrm{AP}}^2\ge(25+k)^2$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}^2\ge\dfrac{(\boxed{25}+k)^2}{25}$

이때, $\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값이 6이므로

$\dfrac{(25+k)^2}{25}=6^2$

$\therefore \dfrac{|\boxed{25}+k|}{5}=\boxed{6}$

이때, k는 양수이므로 $25+k=30$

따라서 $k=\boxed{5}$이다. (다)

$a=6$, $b=25$, $c=5$이므로

$a+b+c=6+25+5=36$

17 답 22

$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a+b+\dfrac{a+b}{2}}{3}$이므로

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\left(\frac{a+b+\boxed{\dfrac{a+b}{2}}}{3}\right)^3$$

(가)

$$\ge\left(\sqrt[3]{ab\times\boxed{\dfrac{a+b}{2}}}\right)^3=ab\times\boxed{\dfrac{a+b}{2}}$$

a, b가 양수이므로 양변을 $\boxed{\dfrac{a+b}{2}}$로 나누면

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\ge\boxed{ab}$ (나)

양변이 모두 양수이므로 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$이다.

a, b가 양수일 때, $a\ge b\Longleftrightarrow\sqrt{a}\ge\sqrt{b}\Longleftrightarrow a^2\ge b^2$

따라서 $f(a,\ b)=\dfrac{a+b}{2}$, $g(a,\ b)=ab$이므로

$f(4,\ 8)+g(2,\ 8)=\dfrac{4+8}{2}+2\times 8=6+16=22$

18 답 ③

주어진 명제의 대우

'두 실수 x, y에 대하여 $\boxed{x^2+y^2\le 0}$이면 $x+y\le 0$이다.' (가)

가 참임을 보이면 된다.

두 실수 x, y에 대하여 $x^2\ge 0$, $y^2\ge 0$이므로

$\boxed{x^2+y^2\ge 0}$ ⋯ ㉠ (나)

한편, 가정에서 $\boxed{x^2+y^2\le 0}$ ⋯ ㉡이므로

㉠, ㉡에 의하여 $0\le x^2+y^2\le 0$, 즉 $\boxed{x^2+y^2=0}$이다. (다)

이때, $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $x+y=0$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제 '두 실수 x, y에 대하여 $x+y>0$이면 $x^2+y^2>0$이다.'가 참이다.

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 차례로 ㄴ, ㄱ, ㄷ이다.

19 답 ④

문제에서 증명된 명제는

'세 자연수 a, b, c가 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2\ne c^2$이다.'이다.

따라서 빈칸에 알맞은 것은 증명된 명제의 대우

'세 자연수 a, b, c가 $a^2+b^2=c^2$이면 a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'이다.

20 답 ④

p, q가 정수일 때, 이차방정식 $x^2+px+q=0$이 적어도 하나의 정수해를 가지면 p, q 중 적어도 하나는 짝수이다.
(가)

이를 귀류법으로 증명하여 보자.

방정식 $x^2+px+q=0$이 적어도 하나의 정수해를 가진다고 했으므로 그 정수해를 α라 하면

$\alpha^2+p\alpha+q=0$ ⋯ ㉠

(나)

결론을 부정하여 p, q가 모두 홀수라 하면

(i) α가 짝수일 때 : ㉠의 좌변에서 α^2은 짝수, $p\alpha$도 짝수, q는 홀수이므로 좌변의 합이 홀수가 되어 $\underbrace{(\text{좌변})}_{(\text{홀수})}\neq\underbrace{(\text{우변})}_{0}$이다.

(ii) α가 홀수일 때 : ㉠의 좌변에서 α^2은 홀수, $p\alpha$도 홀수, q도

$p\alpha$가 홀수라는 말에서 p를 홀수로 가정했음을 알 수 있어.

홀수이므로 좌변의 합이 홀수가 되어 (좌변)$\neq$(우변)이다.

(i), (ii)에 의하여 p, q가 모두 홀수이면 α가 짝수일 수도, 홀수일 수도 없다. 즉, α는 정수가 될 수 없다.

따라서 $x^2+px+q=0$이 적어도 하나의 정수해를 가지려면 p, q 중 적어도 하나는 짝수 이어야 한다.

21 답 ⑤

결론을 부정하여 p가 짝수, q가 홀수이면 x에 대한 방정식 $x^2+px-2q=0$이 정수해를 가진다고 하자.

정수는 홀수 아니면 짝수이어야 하므로

(가)

(i) x가 홀수이면 x^2은 홀수이고 $px-2q$는 짝수이다.

(나)

따라서 $x^2+px-2q$가 홀수이므로 0 이 될 수 없다.

(다)

(ii) x가 짝수이면 짝수의 곱은 4의 배수이므로

x^2+px는 4의 배수이고 $2q$는 4의 배수가 아니다.

그런데 $x^2+px=\underbrace{2q}_{2\times(\text{홀수})}$이므로 모순이다.

따라서 p가 짝수, q가 홀수이면 x에 대한 방정식 $x^2+px-2q=0$은 정수해를 갖지 않는다.

22 답 ③

주어진 세 이차방정식의 판별식을 차례로 D_1, D_2, D_3이라 하면

$\frac{D_1}{4}=b^2-ac$, $\frac{D_2}{4}=c^2-ab$, $\frac{D_3}{4}=a^2-bc$

이므로 세 식을 변끼리 더하면

$$\frac{1}{4}(D_1+D_2+D_3)=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$$

이때, D_1, D_2, D_3이 모두 음수이면 $D_1+D_2+D_3<0$이 되어 모순이므로 D_1, D_2, D_3 중 적어도 하나는 0 이상이다.

따라서 세 이차방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

23 답 ③

$\sqrt{n^2-1}$이 유리수라 하면 $\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$(p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$n^2-1=\frac{q^2}{p^2}$, 즉 $p^2(n^2-1)=q^2$

이때, n^2-1은 자연수이므로 p는 q^2의 약수이어야 하는데 p, q는 서로소인 자연수이므로 $p=1$이 되어야 한다.

(가)

$n^2-1=q^2$ $\quad\therefore n^2=q^2+1$

q는 짝수 또는 홀수이므로 자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때, $n^2=(2k)^2+1$이므로

(나)

$(2k)^2<n^2<(2k+1)^2$

자연수 k에 대하여 $4k^2<4k^2+1<4k^2+4k+1$이므로 $(2k)^2<n^2<(2k+1)^2$

즉, $2k<n<2k+1$인 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때, $n^2=(2k+1)^2+1$이므로

$(2k+1)^2<n^2<(2k+2)^2$

자연수 k에 대하여 $4k^2+4k+1<4k^2+4k+2<4k^2+8k+4$이므로 $(2k+1)^2<n^2<(2k+2)^2$

즉, $2k+1<n<2k+2$인 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

따라서 $f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로

$f(2)+g(3)=5+49=54$

24 답 12

(x, y, z)는 원시 피타고라스 수이므로 x, y는 서로소이다.

이때, y, z가 서로소가 아니라고 하면 y와 z의 공약수인 소수 p가 존재한다.

(가)

$y=py_1$, $z=pz_1$이라 하면

(나)

$x^2=z^2-y^2=p^2(z_1^2-y_1^2)$이 되어 p는 x^2의 약수이고

p는 소수이므로 p는 x의 약수이다.

즉, x와 y는 모두 소수 p를 약수로 갖는다.

이것은 x, y가 서로소라는 사실에 모순이므로 y와 z는 서로소이다.

따라서 $f(p)=p$, $g(p)=p^2$이므로 $f(3)+g(3)=3+3^2=12$

25 답 7

주어진 명제의 결론을 부정하면

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}>3$ ⋯ ㉠

양변을 제곱하면 $a+b+c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})>9$

위 식에 $a+b+c=3$을 대입하여 정리하면

(가)

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}>3$ ⋯ ㉡

Ⅱ-07 명제의 증명과 절대부등식

한편, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc}$, $\frac{c+a}{2} \ge \sqrt{ca}$이므로

변끼리 더하여 정리하면

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \le \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c$$

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \le \overset{\text{(나)}}{\boxed{1}} \times (a+b+c)=3$$

$$\therefore \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \le \overset{\text{(다)}}{\boxed{3}} \cdots ㉢$$

이때, ㉡과 ㉢은 서로 모순이므로 ㉠은 성립할 수 없다.

따라서 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le 3$이다.

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 수는 각각 3, 1, 3이므로 그 합은

$3+1+3=7$

일등급 UP

＊ 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한 증명

$(1+1+1)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\} \ge (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$

$3(a+b+c) \ge (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$

$9 \ge (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$

$\therefore 0 < \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le 3$

26 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \ge 0$

$\therefore (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ (참)

ㄴ. 【반례】 $a=-1$, $b=-3$이면

(좌변)$=-2<-\frac{3}{2}=$(우변) (거짓)

ㄷ. (i) $|a| \ge |b|$일 때

$|a|-|b| \ge 0$, $|a-b| \ge 0$이므로

$(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$

$=a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=2(ab-|ab|) \le 0$

$\therefore |a|-|b| \le |a-b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때

(좌변)<0, (우변)>0이므로

$|a|-|b|<|a-b|$

(i), (ii)에 의하여 $|a|-|b| \le |a-b|$는 항상 성립한다. (참)

따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

27 답 4

양의 실수 a, b, c에 대하여

$(a+b)^2-4ab=\underbrace{(a-b)^2 \ge 0}_{\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립해.}}$이므로 $4ab \le (a+b)^2$이고,

같은 방법으로 $4bc \le (b+c)^2$, $4ca \le (c+a)^2$이므로

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$=\frac{4ab}{a+b}c+\frac{4bc}{b+c}a+\frac{4ca}{c+a}b$$

$$\le \frac{(a+b)^2}{a+b}c+\frac{(b+c)^2}{b+c}a+\frac{(c+a)^2}{c+a}b$$

$$=(a+b)c+(b+c)a+(c+a)b$$

$$=\overset{\text{(가)}}{\boxed{2}}(ab+bc+ca) \cdots ㉠$$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

한편, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \ge 0$에서

$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) \ge 0$

$$ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{\underset{\text{(나)}}{\boxed{3}}} \cdots ㉡$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

㉠, ㉡으로부터

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \le 2(ab+bc+ca)$$

$$\le \underset{\text{(다)}}{\boxed{\frac{2}{3}}}(a+b+c)^2 \cdots ㉢$$

따라서 ㉢의 양변을 $4abc$로 나누면

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \le \frac{2}{3}(a+b+c)^2 \times \frac{1}{4abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{6abc}$$이다.

따라서 $p=2$, $q=3$, $r=\frac{2}{3}$이므로 $pqr=2\times3\times\frac{2}{3}=4$이다.

28 답 6

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

$$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$=2+2+2=6$

다른 풀이 : 산술평균과 기하평균의 관계의 확장 이용하기

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

$$\ge 6\sqrt[6]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{c}\times\frac{b}{c}}$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$=6\sqrt[6]{1}=6$

29 답 8

$A<n$, $B<n$이라 하면 $A+B<\overset{\text{(가)}}{\boxed{2n}}$

또한, $1 \le k \le n$인 자연수 k에 대하여 $a_k>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a_k+\frac{1}{a_k}\ge 2\sqrt{a_k\times\frac{1}{a_k}}=\boxed{2}$$ (나)

$$A+B=\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$\ge\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{n\text{개}}=2n$$

이것은 $A+B<2n$에 모순이므로 A, B 중 적어도 하나는 n보다 작지 않다.

따라서 $f(n)=2n$, $p=2$이므로 $f(2p)=f(4)=8$

30 답 ④

$x=a$, $4-x=b$라 하면 $a>0$, $b>0$이고

$a+b=4$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b=4\ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b=2$일 때 성립)

한편, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=4+2\sqrt{ab}\le 4+4=8$

이므로 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ($\because$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$)

따라서 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\le 2\sqrt{2}$이므로

$x=2$일 때 $f(x)$의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

31 답 ⑤

ㄱ. 삼각형 GDH와 삼각형 FCG는 직각이등변삼각형이므로

$\angle$FGH$=90^\circ$이다.

또, 문제에서 점 M은 선분 FH의 중점이므로 세 점 F, G, H는 중심이 M인 한 원 위에 있다.

$\therefore$ $\overline{\text{FM}}=\overline{\text{GM}}$ (참)

ㄴ. 삼각형 AEH와 삼각형 BFE가 합동이므로

$\angle$AEH$+\angle$BEF$=90^\circ$에서 $\angle$HEF$=90^\circ$이다.

즉, 삼각형 EFH는 직각이등변삼각형이므로

삼각형 EFH의 넓이는 $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$이고

$\frac{1}{2}\times\overline{\text{EH}}\times\overline{\text{EF}}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{a^2+b^2})^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

선분 EM은 삼각형 EFH를 이등분하므로

삼각형 EFM의 넓이는 $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$이다.

또한, 삼각형 FGH는 직각삼각형이고

$\overline{\text{FG}}=\sqrt{2}b$, $\overline{\text{GH}}=\sqrt{2}a$이므로 삼각형 FGH의 넓이는 ab이다.

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}b\times\sqrt{2}a=ab$

따라서 삼각형 FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

$\therefore$ $\frac{1}{4}(a^2+b^2)\ge\frac{1}{4}\times 2ab=\frac{1}{2}ab$

$(a-b)^2\ge 0$에서 $a^2+b^2\ge 2ab$

따라서 삼각형 EFM의 넓이는 삼각형 FGM의 넓이보다 크거나 같다. (참)

ㄷ. 선분 FH는 직각이등변삼각형 EFH의 빗변이므로

$\overline{\text{FH}}=\sqrt{2}\times\overline{\text{EF}}=\sqrt{2}\times\sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{2}$에서

$a^2+b^2=36$이다.

이때, ㄴ에서 삼각형 FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이므로

$36=a^2+b^2\ge 2ab$에서 $\frac{1}{2}ab\le 9$

즉, 삼각형 FGM의 넓이의 최댓값은 9이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

32 답 ②

두 양수 a, b에 대하여

A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$라 하면

직선 AB의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ ⋯ ㉠

삼각형 OAB의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}ab$ ⋯ ㉡

a, b는 양수이므로 ㉠, ㉡과 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\ge 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=\frac{2}{\sqrt{S}}$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{1}{a}=\frac{2}{b}\text{일 때 성립}\right)$

$1\ge\frac{2}{\sqrt{S}}$, $\sqrt{S}\ge 2$ $\quad\therefore$ $S\ge 4$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 4이다.

다른 풀이 : 직선의 기울기를 m($m<0$)이라 하여 해결하기

점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선 AB의 기울기를 m($m<0$)이라 하면

직선의 방정식은 $y=m(x-1)+2$, 즉 $y=mx-m+2$이므로

두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(1-\frac{2}{m},\ 0\right)$, $(0,\ -m+2)$이다.

삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle\text{OAB}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{m}\right)\times(-m+2)=-\frac{m}{2}-\frac{2}{m}+2$

이때, $m<0$이므로 $-\frac{m}{2}>0$, $-\frac{2}{m}>0$에서

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\triangle\text{OAB}=-\frac{m}{2}-\frac{2}{m}+2\ge 2\sqrt{\left(-\frac{m}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{m}\right)}+2$

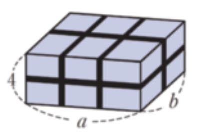
$=2+2=4$ (단, 등호는 $m=-2$일 때 성립)

$-\frac{m}{2}=-\frac{2}{m}$에서 $m^2=4$

$m<0$이므로 $m=-2$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 4이다.

33 답 ②



포장 상자의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 a, b라 하면

밑면의 넓이가 54이므로 $ab=54$ ⋯ ㉠

이때, 포장 상자를 묶은 네 개의 끈의 길이의 합을 l이라 하면

$l=4a+6b+24$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$l=4a+6b+24\geq 2\sqrt{4a\times 6b}+24=2\sqrt{24\times 54}+24$

$\quad=72+24=96$

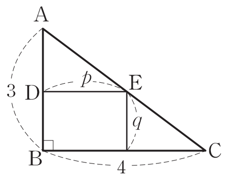
이때, 등호는 $4a=6b=36$일 때 성립하므로

$a=9,\ b=6$

따라서 상자의 모든 모서리의 길이의 합은

$4\times(a+b+4)=4\times(9+6+4)=4\times 19=76$

34 답 ①



$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{ADE}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DE}}$

$3:4=(3-q):p$

$3p=4(3-q)$

따라서 $3p+4q=12$ ⋯ ㉠이므로

$\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}=\dfrac{4q+3p}{pq}=\dfrac{12}{pq}$ ⋯ ㉡

㉡에 의하여 pq가 최대일 때, $\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}$의 값이 최소가 되므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3p+4q=12\geq 2\sqrt{3p\times 4q}$ (단, 등호는 $3p=4q$일 때 성립)

$6\geq\sqrt{12pq},\ 36\geq 12pq \qquad \therefore\ pq\leq 3$

따라서 pq의 최댓값은 3이므로 $\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}$의 최솟값은 $\dfrac{12}{3}=4$이다.

다른 풀이 ①: $\dfrac{3p+4q}{12}=1$임을 이용하여 식 변형하기

1을 곱해도 식은 변하지 않으므로

$$\frac{4}{p}+\frac{3}{q}=\underbrace{\frac{3p+4q}{12}}_{=1}\times\left(\frac{4}{p}+\frac{3}{q}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\underbrace{(3p+4q)\left(\frac{4}{p}+\frac{3}{q}\right)}_{\text{전개하면 }12+\frac{9p}{q}+\frac{16q}{p}+12}\ (\because\ ㉠)$$

$$=\frac{1}{12}\left(24+\frac{9p}{q}+\frac{16q}{p}\right)\geq\frac{1}{12}\left(24+2\sqrt{\frac{9p}{q}\times\frac{16q}{p}}\right)$$

$$\left(\text{단, 등호는 }\frac{9p}{q}=\frac{16q}{p}\text{일 때 성립}\right)$$

$$=\frac{1}{12}(24+2\times 12)=4$$

따라서 $\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}$의 최솟값은 4이다.

다른 풀이 ②: 코시-슈바르츠의 부등식 이용하기

$\triangle\mathrm{ABE}+\triangle\mathrm{BCE}=\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\dfrac{3p}{2}+\dfrac{4q}{2}=6$

$\therefore\ 3p+4q=12$ ⋯ ㉢

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3p+4q)\left(\frac{4}{p}+\frac{3}{q}\right)\geq\underbrace{(\sqrt{12}+\sqrt{12})}_{\sqrt{3p}\times\sqrt{\frac{4}{p}}+\sqrt{4q}\times\sqrt{\frac{3}{q}}}{}^2=(2\sqrt{12})^2=48$$

(단, 등호는 $3p=4q$일 때 성립)

$12\left(\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}\right)\geq 48\ (\because\ ㉢) \qquad \therefore\ \dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}\geq 4$

다른 풀이 ③: 이차함수의 최대·최소 이용하기

㉠에서 $q=3-\dfrac{3}{4}p$이므로

$pq=p\left(3-\dfrac{3}{4}p\right)=-\dfrac{3}{4}p^2+3p$

$\quad=-\dfrac{3}{4}(p^2-4p)=-\dfrac{3}{4}(p-2)^2+3$

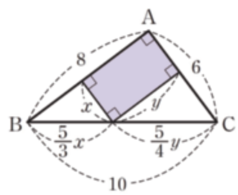
따라서 pq는 $p=2$일 때 최댓값 3을 가지므로

㉡에 의하여 $\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}$의 최솟값은 $\dfrac{12}{3}=4$이다.

35 답 80

삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{8^2+6^2}=10$이다.



그림과 같이 직사각형 S_1의 두 변의 길이를 x, y라 하면 직사각형 S_1의 넓이는 xy이고, 닮음비에 의하여

삼각형 ABC와 닮음인 삼각형의 세 변의 길이의 비는 3 : 4 : 5야.

$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{5}{4}y=10$

$\therefore\ 4x+3y=24$ ⋯ ㉠

이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

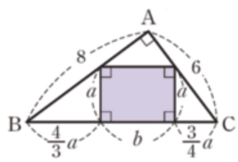
$24=4x+3y\geq 2\sqrt{4x\times 3y}$ (단, 등호는 $4x=3y$일 때 성립)

$24\geq 4\sqrt{3xy},\ \sqrt{3xy}\leq 6,\ 3xy\leq 36$

$\therefore\ xy\leq 12$

따라서 $\underbrace{4x=3y=12}_{\because\ ㉠}$, 즉 $x=3$, $y=4$일 때 직사각형 S_1의 넓이의 최댓값은 12이고 그때의 둘레의 길이

$l_1=2\times(x+y)=2\times(3+4)=14$이다.



한편, 그림과 같이 직사각형 S_2의 두 변의 길이를 a, b라 하면 직사각형 S_2의 넓이는 ab이고, 닮음비에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{4}{3}a+b+\dfrac{3}{4}a=10$

양변에 12를 곱하면 $16a+12b+9a=120$

$\therefore 25a+12b=120 \cdots$ ㉡

이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$120=25a+12b\geq 2\sqrt{25a\times 12b}$ (단, 등호는 $25a=12b$일 때 성립)

$120\geq 20\sqrt{3ab}$, $\sqrt{3ab}\leq 6$, $3ab\leq 36$

$\therefore ab\leq 12$

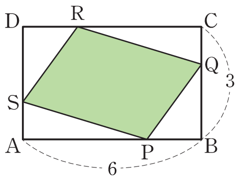
따라서 $\underbrace{25a=12b=60}_{\because ㉡}$, 즉 $a=\frac{12}{5}$, $b=5$일 때 직사각형 S_2의

넓이의 최댓값은 12이고 그때의 둘레의 길이

$l_2=2\times(a+b)=2\times\left(\frac{12}{5}+5\right)=\frac{74}{5}$이다.

$\therefore 100(l_2-l_1)=100\times\left(\frac{74}{5}-14\right)=80$

36 답 ③



$\overline{AP}=\overline{CR}=\frac{6m}{m+n}$, $\overline{AS}=\overline{CQ}=\frac{3n}{m+n}$,

$\overline{BP}=\overline{DR}=\frac{6n}{m+n}$, $\overline{BQ}=\overline{DS}=\frac{3m}{m+n}$에서

$\triangle APS=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AS}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{6m}{m+n}\times\frac{3n}{m+n}=\frac{9mn}{(m+n)^2}$

나머지 세 삼각형 BQP, CRQ, DSR의 넓이도 모두

$\frac{9mn}{(m+n)^2}$이므로 네 삼각형의 넓이의 합은

네 삼각형은 직각을 낀 두 변의 길이의 곱이 같으므로 넓이가 같아.

$4\times\frac{9mn}{(m+n)^2}=\frac{36mn}{(m+n)^2}$이다.

따라서 평행사변형 PQRS의 넓이는

$6\times 3-\frac{36mn}{(m+n)^2}=18\left\{1-\frac{2mn}{(m+n)^2}\right\}$이고

평행사변형 PQRS의 넓이가 최소가 되려면 $\frac{2mn}{(m+n)^2}$의 값이 최대가 되면 된다.

이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{m+n}{2}\geq\sqrt{mn}$에서 $\frac{1}{2}\geq\frac{\sqrt{mn}}{m+n}$

$\frac{1}{4}\geq\frac{mn}{(m+n)^2}$, $\frac{2mn}{(m+n)^2}\leq\frac{1}{2}$이므로

$\frac{2mn}{(m+n)^2}$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

$\therefore 18\left\{1-\frac{2mn}{(m+n)^2}\right\}\geq 18\left(1-\frac{1}{2}\right)=9$

따라서 평행사변형 PQRS의 넓이의 최솟값은 9이다.

37 답 ⑤

$2x^2+y^2-2x=(x^2+y^2+1)+(x^2-2x+1)-2$

$=(x^2+y^2+1)+(x-1)^2-2$

이므로 주어진 식 $2x^2+y^2-2x+\frac{36}{x^2+y^2+1}$을 변형하면

$x^2+y^2+1+\frac{36}{x^2+y^2+1}+(x-1)^2-2 \cdots$ ㉠

두 양수 x, y에 대하여 $x^2+y^2+1>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2+1+\frac{36}{x^2+y^2+1}\geq 2\sqrt{36}=12$

(단, 등호는 $x^2+y^2+1=\frac{36}{x^2+y^2+1}$, 즉 $x^2+y^2=5$일 때 성립)

또한, $(x-1)^2\geq 0$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

따라서 ㉠의 최솟값 m은 $x=1$, $y=2$일 때,

$m=12+0-2=10$이다. $x=1$, $x^2+y^2=5$를 동시에 만족시키는 양수 $y=2$

$\therefore a+b+m=1+2+10=13$

38 답 ⑤

ㄱ. $1+\frac{a}{2}=\frac{2+a}{2}=\frac{1+(1+a)}{2}$이고

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1+\frac{a}{2}=\frac{1+(1+a)}{2}\geq\frac{1}{2}\times 2\sqrt{1\times(1+a)}=\sqrt{1+a}$

이때, 등호는 $1=1+a$일 때 성립하는데 $a>0$이므로 등호가 성립하지 않는다.

$\therefore 1+\frac{a}{2}>\sqrt{1+a}$ (참)

ㄴ. 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$에서

$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$

$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{(a+b)^2}{4}$

$\therefore \frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (참)

ㄷ. 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\}\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$2(a+b)\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, $\frac{a+b}{2}\geq\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$

$\therefore \sqrt{\frac{a+b}{2}}\geq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이 : $x^2-y^2>0 \Longleftrightarrow x^2>y^2 \Longleftrightarrow |x|>|y|$임을 이용하여 참·거짓 판별하기

ㄱ. $1+\frac{a}{2}>0$, $\sqrt{1+a}>0$이므로

$\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-(\sqrt{1+a})^2=\frac{a^2}{4}>0$

$\therefore 1+\frac{a}{2}>\sqrt{1+a}$ (참)

Ⅱ-07 명제의 증명과 절대부등식

ㄴ. $\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$

$=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$

$=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geq 0$

$\therefore \frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (참)

39 답 6

(ⅰ) 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{1})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\}\{x^2+(\sqrt{2}y)^2+(\sqrt{3}z)^2\}$

$\geq(x+2y+3z)^2$ (단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

$(1+2+3)(x^2+2y^2+3z^2)\geq(x+2y+3z)^2$

$6(x^2+2y^2+3z^2)\geq 1$

$\therefore x^2+2y^2+3z^2\geq\frac{1}{6}$

따라서 $x^2+2y^2+3z^2$의 최솟값 $m_1=\frac{1}{6}$

(ⅱ) 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2y})^2+(\sqrt{3z})^2\}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2\right\}$

$\geq(1+2+3)^2$ (단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

$(x+2y+3z)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)\geq(1+2+3)^2$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\geq 36$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$의 최솟값 $m_2=36$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $m_1m_2=\frac{1}{6}\times 36=6$이다.

40 답 ②

$x^2+4y^2=8x^2y^2$을 $4x^2y^2$으로 나누면

$\frac{1}{4y^2}+\frac{1}{x^2}=2$ ⋯ ㉠

코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{2y}\right)^2\right\}\geq\left(\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}\right)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{x}=\frac{b}{4y}\text{일 때 성립}\right)$

이때, $\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}$의 최댓값은 8이고

㉠에서 $\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{2y}\right)^2=2$이므로

$\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{2y}\right)^2\right\}=\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2\right\}\times 2=8^2$

$\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2=32$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2\geq 2\sqrt{\frac{4}{a^2b^2}}$, $32\geq\frac{4}{ab}$

$\therefore ab\geq\frac{1}{8}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{a}=\frac{2}{b}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ab의 최솟값은 $\frac{1}{8}$이므로 $p=8$, $q=1$

$\therefore p+q=9$

41 답 51

부등식 ㉠에 의하여 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}\geq\frac{(1+2)^2}{a+b}$이므로

$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq\frac{\overset{(가)}{\boxed{9}}}{a+b}+\frac{9}{c}$

또한, 부등식 ㉠에 의하여

$\frac{9}{a+b}+\frac{9}{c}=\frac{3^2}{a+b}+\frac{3^2}{c}\geq\frac{(3+3)^2}{a+b+c}$이므로

$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq\frac{9}{a+b}+\frac{9}{c}\geq\frac{\overset{(나)}{\boxed{36}}}{a+b+c}=\overset{(다)}{\boxed{6}}$ $(\because a+b+c=6)$

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

즉, (가), (나), (다)에 알맞은 수를 모두 더한 값은

$9+36+6=51$

일등급 UP

＊ 부등식 $\frac{p^2}{x}+\frac{q^2}{y}\geq\frac{(p+q)^2}{x+y}$의 증명

코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(x+y)\left(\frac{p^2}{x}+\frac{q^2}{y}\right)\geq(p+q)^2$

x, y가 모두 양수이므로 양변을 $x+y$로 나누면

$\frac{p^2}{x}+\frac{q^2}{y}\geq\frac{(p+q)^2}{x+y}$

42 답 5

$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$ ------ ⓐ

$x>0$일 때 $\frac{x^2+1}{x}>0$, $\frac{4x}{x^2+1}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f(x)\geq 2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}\times\frac{4x}{x^2+1}}=4$ ------ ⓑ

이때, 등호는 $\frac{x^2+1}{x}=\frac{4x}{x^2+1}$, $(x^2+1)^2=(2x)^2$

즉, $x=1$일 때 성립한다.

따라서 $f(x)$는 $x=\alpha=1$일 때 최솟값 4를 갖는다. ------ ⓒ

$\therefore \alpha+m=1+4=5$ ------ ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ $f(x)$를 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 변형한다. ⋯ [20%]

ⓑ $f(x)$의 최솟값을 구한다. ⋯ [40%]

ⓒ $f(x)$가 최솟값을 가질 때의 x의 값을 구한다. ⋯ [30%]

ⓓ $\alpha+m$의 값을 구한다. ⋯ [10%]

43 답 6

모든 실수 x에 대하여 $x^2+nx+9>0$이 성립할 조건은

$x^2+nx+9=\left(x+\frac{n}{2}\right)^2+9-\frac{n^2}{4}$에서

$9-\frac{n^2}{4}>0$, $n^2-36<0$, $(n+6)(n-6)<0$

$\therefore -6<n<6$ ---------- ⓐ

따라서 $n\le -6$ 또는 $n\ge 6$이면 주어진 명제는 거짓이므로

그 부정은 참이 된다. ---------- ⓑ

이때, n은 자연수이므로 $n\ge 6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 명제가 참이 되는 n의 값의 범위를 구한다. ---------- [40%]

ⓑ 주어진 명제의 부정이 참이 되는 n의 값의 범위를 구한다. ---------- [40%]

ⓒ 자연수 n의 최솟값을 구한다. ---------- [20%]

다른 풀이 : 명제의 부정을 구하여 해결하기

'모든 실수 x에 대하여 $x^2+nx+9>0$이다.'의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2+nx+9\le 0$이다.'이다.

즉, 주어진 명제의 부정이 참이 되려면 x에 대한 이차방정식

$x^2+nx+9=0$이 실근을 가져야 하므로

판별식을 D라 하면

$D=n^2-36\ge 0$, $(n+6)(n-6)\ge 0$

$\therefore n\le -6$ 또는 $n\ge 6$

이때, n은 자연수이므로 n의 최솟값은 6이다.

44 답 4

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(x+3)+(y+3)\}\left(\frac{y^2}{x+3}+\frac{x^2}{y+3}\right)\ge (y+x)^2=100$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{y}{x+3}=\frac{x}{y+3}\text{일 때, 즉 } x=y\text{일 때 성립}\right)$ ---------- ⓐ

이때, $(x+3)+(y+3)=16$이므로 대입하면

$16\left(\frac{y^2}{x+3}+\frac{x^2}{y+3}\right)\ge 100$

$\therefore \frac{y^2}{x+3}+\frac{x^2}{y+3}\ge\frac{25}{4}$ (단, 등호는 $x=y=5$일 때 성립) ---------- ⓑ

따라서 주어진 식은 $x=5$, $y=5$일 때

최솟값 $m=\frac{25}{4}$를 가진다.

$\therefore \frac{ab}{m}=\frac{5\times 5}{\frac{25}{4}}=4$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 식을 변형하여 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다. ---------- [30%]

ⓑ $\frac{y^2}{x+3}+\frac{x^2}{y+3}$의 최솟값을 구한다. ---------- [50%]

ⓒ $\frac{ab}{m}$의 값을 구한다. ---------- [20%]

다른 풀이 : $\frac{y^2}{x+3}+\frac{x^2}{y+3}$을 xy에 대한 식으로 나타내기

$$\frac{y^2}{x+3}+\frac{x^2}{y+3}=\frac{y^2(y+3)+x^2(x+3)}{(x+3)(y+3)}$$
$$=\frac{x^3+y^3+3(x^2+y^2)}{xy+3(x+y)+9}$$
$$=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)+3(x+y)^2-6xy}{xy+3(x+y)+9}$$
$$=\frac{1000-30xy+300-6xy}{xy+30+9}$$
$$=\frac{-36xy+1300}{xy+39}$$
$$=\frac{-36(xy+39)+2704}{xy+39}$$
$$=\frac{2704}{xy+39}-36$$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y=10\ge 2\sqrt{xy}$

$\therefore xy\le 25$ (단, 등호는 $x=y=5$일 때 성립)

즉, 주어진 식의 최솟값은

$$\frac{y^2}{x+3}+\frac{x^2}{y+3}=\frac{2704}{xy+39}-36\ge\frac{2704}{25+39}-36$$
$$=\frac{2704}{64}-36=\frac{169}{4}-36$$
$$=\frac{169-144}{4}=\frac{25}{4}$$

(이하 동일)

고난도 도전 문제

문제편 p.106~107

45 답 10

$$a^2+b+\frac{16}{2a+b}=a^2-2a+(2a+b)+\frac{16}{2a+b}$$
$$\ge a^2-2a+2\sqrt{(2a+b)\times\frac{16}{2a+b}}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 2a+b=\frac{16}{2a+b}\ \cdots\ ㉠\text{일 때 성립}\right)$

$$=a^2-2a+8$$
$$=(a-1)^2+7\ge 7$$

(단, 등호는 $a=1$ ⋯ ㉡일 때 성립)

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=2$일 때,

$a^2+b+\frac{16}{2a+b}$의 최솟값은 7이므로

$k=7$, $m=1$, $n=2$이다.

$\therefore k+m+n=10$

46 답 6

$x+y+z=12$에서 $x+y=12-z$ ⋯ ㉠

$x^2+y^2+z^2=54$에서 $x^2+y^2=54-z^2$ ⋯ ㉡

코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$이고 ㉠, ㉡을 대입하면

$2(54-z^2)\ge(12-z)^2$

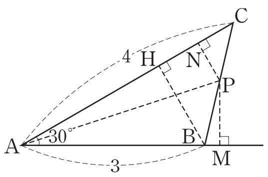
$108-2z^2=144-24z+z^2$, $3z^2-24z+36\le0$

$z^2-8z+12\le0$, $(z-2)(z-6)\le0$

$\therefore 2\le z\le 6$

따라서 z의 최댓값은 6이다.

47 답 55



점 B에서 삼각형 ABC의 변 AC 위에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle$ABH에서 $\overline{\text{BH}}=\dfrac{3}{2}$이므로

특수각의 삼각비에 의하여 $\overline{\text{BH}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\frac{3}{2}$

$\triangle\text{ABC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{AC}}\times\overline{\text{BH}}=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{3}{2}=3$

$\overline{\text{PM}}=x$, $\overline{\text{PN}}=y$라 하고 두 점 A, P를 연결하면

$\triangle\text{ABC}=\triangle\text{ABP}+\triangle\text{ACP}$

$3=\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{\text{PM}}+\dfrac{1}{2}\times4\times\overline{\text{PN}}$

$3=\dfrac{3}{2}x+2y$　　$\therefore 3x+4y=6$ ⋯ ㉠

$\dfrac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{PM}}}+\dfrac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{PN}}}=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}$에서

코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$6\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}\right)=(3x+4y)\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}\right)$ ($\because$ ㉠)

$\ge(3+4)^2=49$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

즉, $\dfrac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{PM}}}+\dfrac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{PN}}}=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}\ge\dfrac{49}{6}$

따라서 $p=6$, $q=49$이므로 $p+q=6+49=55$

다른 풀이 : 산술평균과 기하평균의 관계 이용하기

본풀이에서 $3x+4y=6$이고

$\dfrac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{PM}}}+\dfrac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{PN}}}=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}$에서

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$6\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}\right)=(3x+4y)\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}\right)$

$=25+12\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$

$\ge25+12\times2\sqrt{\dfrac{x}{y}\times\dfrac{y}{x}}$

$=25+24=49$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

즉, $\dfrac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{PM}}}+\dfrac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{PN}}}=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}\ge\dfrac{49}{6}$

따라서 $p=6$, $q=49$이므로 $p+q=6+49=55$

48 답 ②

$\sqrt{x}+\sqrt{2y}\le k\sqrt{x+2y}$에서

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2y}}+\dfrac{\sqrt{2y}}{\sqrt{x+2y}}\le k$이므로

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2y}}+\dfrac{\sqrt{2y}}{\sqrt{x+2y}}$의 최댓값을 구하면 된다.

$x>0$, $y>0$이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(x+2y)\left(\dfrac{1}{x+2y}+\dfrac{1}{x+2y}\right)\ge\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+2y}}+\sqrt{\dfrac{2y}{x+2y}}\right)^2$

$2\ge\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+2y}}+\sqrt{\dfrac{2y}{x+2y}}\right)^2$

$\therefore \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2y}}+\dfrac{\sqrt{2y}}{\sqrt{x+2y}}\le\sqrt{2}$

따라서 양수 k의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

49 답 16

$x>0$, $y>0$일 때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\ge2\sqrt{xy}$가 성립하므로

$a+4b\ge2\sqrt{4ab}=4\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=4b$일 때 성립)

$ab+a+4b=32$에서

$ab+a+4b=32\ge ab+4\sqrt{ab}$

$(\sqrt{ab})^2+4\sqrt{ab}-32\le0$

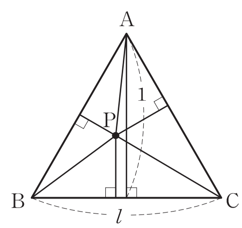
$(\sqrt{ab}+8)(\sqrt{ab}-4)\le0$

$0<\sqrt{ab}\le4$ ($\because \sqrt{ab}>0$)

$\therefore 0<ab\le16$ (단, 등호는 $a=4b$일 때 성립)

따라서 ab의 최댓값은 $a=8$, $b=2$일 때, 16이다.

50 답 ③



높이가 1인 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 l이라 하면

$\triangle\text{ABC}=\triangle\text{PAB}+\triangle\text{PBC}+\triangle\text{PCA}$

$\dfrac{1}{2}\times l\times1$

$=\dfrac{1}{2}\times l\times a+\dfrac{1}{2}\times l\times b+\dfrac{1}{2}\times l\times c$

에서 $a+b+c=1$

이때, $\underline{(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)}$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge0$을 변형한 식으로 등호는 $a=b=c$일 때 성립해.

$1\ge3(ab+bc+ca)$　　$\therefore ab+bc+ca\le\dfrac{1}{3}$

따라서 $ab+bc+ca$의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

51 답 2

$a>0$, $b>0$이므로

$2a+b=4\ge 2\sqrt{2ab}$

$\sqrt{2ab}\le 2$, $2ab\le 4$

$\therefore ab\le 2$ (단, 등호는 $b=2a$일 때 성립) ⋯ ㉠

$$4\left(a-\frac{1}{2a}\right)^2+\left(b-\frac{2}{b}\right)^2=4\left(a^2+\frac{1}{4a^2}-1\right)+b^2+\frac{4}{b^2}-4$$
$$=4a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{4}{b^2}-8$$
$$=\left(4a^2+\frac{1}{a^2}+1\right)+\left(b^2+\frac{4}{b^2}+4\right)-16$$
$$=\left(2a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{2}{b}\right)^2-16$$

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)\left\{\left(2a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{2}{b}\right)^2\right\}\ge\left(2a+b+\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)^2$$

$\left(\text{단, 등호는 } 2a+\frac{1}{a}=b+\frac{2}{b}, \text{ 즉 } b=2a\text{일 때 성립}\right)$

$$=\left(2a+b+\frac{2a+b}{ab}\right)^2$$
$$=\left(4+\frac{4}{ab}\right)^2\ (\because 2a+b=4)$$
$$\underline{\ge 6^2}$$

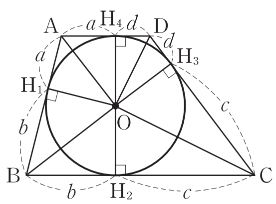
㉠에서 $ab\le 2$, $\frac{1}{ab}\ge\frac{1}{2}$이므로 $4+\frac{4}{ab}\ge 4+2=6$

(단, 등호는 $b=2a$일 때 성립)

즉, $\left(2a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{2}{b}\right)^2\ge\frac{36}{2}=18$

$$\therefore 4\left(a-\frac{1}{2a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}-b\right)^2=\left(2a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{2}{b}\right)^2-16$$
$$\ge 18-16=2$$

52 답 ⑤



그림과 같이 사다리꼴 ABCD와 내접원의 접점을 H_1, H_2, H_3, H_4라 하고 내접원의 중심을 O라 하자.

$\overline{AH_1}=\overline{AH_4}=a$,

$\overline{BH_1}=\overline{BH_2}=b$,

$\overline{CH_2}=\overline{CH_3}=c$, $\overline{DH_3}=\overline{DH_4}=d$라 하자.

ㄱ. $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$이고,

$\overline{AB}\ge\overline{H_2H_4}=2$, $\overline{CD}\ge\overline{H_2H_4}=2$이므로

$x+y=\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}\ge 4$ (참)

ㄴ. $x+y=4$이면 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{H_2H_4}=2$이고

$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}\,/\!/\,\overline{H_2H_4}$

한편, $\overline{AD}\perp\overline{H_2H_4}$이므로 $\overline{AD}\perp\overline{AB}$, $\overline{AD}\perp\overline{CD}$이고,

$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$이므로 사각형 ABCD는 정사각형이다. (참)

ㄷ. $\angle AOH_1=\angle AOH_4$, $\angle BOH_1=\angle BOH_2$이므로

$\angle AOB=90°$

또, $\angle COH_2=\angle COH_3$, $\angle DOH_3=\angle DOH_4$이므로

$\angle COD=90°$

직각삼각형 OAB에서 $\overline{OH_1}^2=\overline{AH_1}\times\overline{BH_1}$

$\therefore ab=1$

또, 직각삼각형 OCD에서 $\overline{OH_3}^2=\overline{CH_3}\times\overline{DH_3}$

$\therefore cd=1$

$\therefore xy=\underline{(a+d)(b+c)\ge 2\sqrt{ad}\times 2\sqrt{bc}}=4\underline{\sqrt{abcd}}=4$ (참)

∵ 산술평균과 기하평균의 관계, 등호는 $a=d$, $b=c$일 때 성립　$=1\times 1=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

Ⅲ 함수와 그래프

08 함수

핵심 유형 연습

문제편 p.112~114

01 답 ⑤

Tip

자연수 n을 분류하여 새롭게 정의된 함수의 함숫값을 구해.

ㄱ. 10의 양의 약수는 1, 2, 5, 10이므로 $f(10)=18$ (참)

ㄴ. $f(n)=n+1$을 만족시키는 자연수 n은 1 또는 합성수 또는 소수이다.

(i) $n=1$일 때, $f(1)=1$이므로 $f(n)\ne n+1$

(ii) n이 합성수일 때, n은 1과 자기 자신 n 이외의 다른 양의 약수를 가지므로 $f(n)>n+1$

(iii) n이 소수일 때, n은 1과 자기 자신 n 이외의 다른 양의 약수를 가지지 않으므로 $f(n)=n+1$

(i)~(iii)에서 $f(n)=n+1$이면 n은 소수이다. (참)

ㄷ. m, n이 서로 다른 소수이면 mn의 모든 약수는

1, m, n, mn이므로

$f(mn)=1+m+n+mn$

$=(m+1)(n+1)=f(m)f(n)$ (∵ ㄴ) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ②

$$2f(5)+3\underbrace{f(6)}_{=2f(6)+f(6)}=2\{f(5)+f(6)\}+f(6)$$
$$=2f(7)+f(6)$$
$$=f(7)+\{f(7)+f(6)\}$$
$$=f(7)+f(8)$$
$$=f(9)$$

03 답 48

조건 (다)의 $(x+y)f(x,\ y)=yf(x,\ x+y)$에서

$f(x,\ x+y)=\dfrac{x+y}{y}f(x,\ y)$이므로

$$\underbrace{f(12,\ 16)}_{x=12,\ y=4}=\frac{16}{4}f(12,\ 4)=\frac{16}{4}\underbrace{f(4,\ 12)}_{x=4,\ y=8}\ (\because \text{ 조건 (나)})$$
$$=\frac{16}{4}\times\frac{12}{8}\underbrace{f(4,\ 8)}_{x=4,\ y=4}=\frac{16}{4}\times\frac{12}{8}\times\frac{8}{4}f(4,\ 4)$$
$$=\frac{16}{4}\times\frac{12}{8}\times\frac{8}{4}\times 4\ (\because \text{ 조건 (가)})=48$$

04 답 ③

> **Tip**
> 함수 f가 일대일대응이므로 일대일함수이고 치역이 X임을 이용해.

ㄱ. 함수 f가 일대일대응이므로 모든 함숫값의 합은 집합 X의 원소의 합 15이다.
이때, $f(1)+f(2)=3$이므로 나머지 함숫값의 합은
$f(3)+f(4)+f(5)=15-\{f(1)+f(2)\}=12$이다. (참)

ㄴ. $f(1)\times f(2)=3$에 의하여 $f(1)=1,\ f(2)=3$ 또는 $f(1)=3,\ f(2)=1$이다.
이때, 함수 f가 일대일대응이므로
$f(3)+f(4)+f(5)=2+4+5=11$이다. (참)

ㄷ. 【반례】 $f(1)-f(2)=3$에서 $f(1)=5,\ f(2)=2$이면
$f(3)+f(4)+f(5)=1+3+4=8$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

05 답 ②

함수 f가 X에서 X로의 일대일대응이므로
$\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
조건 (가)의 $f(2)-f(3)=f(5)-f(1)=f(4)$에서
$f(4)>0$이므로 $f(2)>f(3),\ f(5)>f(1)$이고
조건 (나)에서 $f(1)<f(2)<f(5)$이므로
$f(5)-f(1)\geq 2$, 즉 $f(4)\geq 2$
또한, $f(2)<f(5)$에서 $f(2)\leq 4$이므로
$f(2)-f(3)\leq 3$, 즉 $f(4)\leq 3$
따라서 $f(4)=2$ 또는 $f(4)=3$이다.

(i) $f(4)=2$인 경우
$f(2)-f(3)=f(5)-f(1)=2,\ f(2)<f(5)$에 의하여
$f(5)=5,\ f(1)=3,\ f(2)=4,\ \underbrace{f(3)=2}_{f(4)=2\text{에 모순}}$
또는 $f(5)=4,\ \underbrace{f(1)=2}_{f(4)=2\text{에 모순}},\ f(2)=3,\ f(3)=1$
그런데 어느 경우이든 일대일대응이 아니므로 모순이다.

(ii) $f(4)=3$인 경우
$f(2)-f(3)=f(5)-f(1)=3,\ f(2)<f(5)$에 의하여
$f(5)=5,\ f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=1$이다.

(i)~(ii)에 의하여 $f(1)\times f(4)=2\times 3=6$

다른 풀이 : $f(4)$의 값에 따라 조건을 만족시키는 함수 찾기

함수 f가 X에서 X로의 일대일대응이므로
$\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
먼저, $f(4)$의 값에 따라
조건 (가)의 $f(2)-f(3)=f(5)-f(1)=f(4)$를 만족시키는 함수를 찾자.

(i) $f(4)=1$이면
$\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(5)\}=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서
$f(2)-f(3)=f(5)-f(1)=5-4=3-2$
이때, 조건 (나)의 $f(1)<f(2)<f(5)$를 만족시키지 않으므로 모순이다.

(ii) $f(4)=2$이면
$\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(5)\}=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서
$f(2)-f(3)=f(5)-f(1)=5-3$뿐이므로 모순이다.

(iii) $f(4)=3$이면
$\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(5)\}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$에서
$f(2)-f(3)=f(5)-f(1)=5-2=4-1$
이때, 조건 (나)의 $f(1)<f(2)<f(5)$를 만족시키는 경우는
$f(5)-f(1)=5-2,\ f(2)-f(3)=4-1$인 경우뿐이다.

(iv) $f(4)=4$이면
$\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(5)\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$에서
$f(2)-f(3)=f(5)-f(1)=5-1$뿐이므로 모순이다.

(v) $f(4)=5$이면
$\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(5)\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서
$f(2)-f(3)=f(5)-f(1)=5$를 만족시키지 않으므로 모순이다.

(i)~(v)에서 $f(1)\times f(4)=2\times 3=6$

06 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $f(a_1,\ b_1)=f(a_2,\ b_2)$이면 $2^{a_1}\times 3^{b_1}=2^{a_2}\times 3^{b_2}$에서
2와 3은 서로소이므로 $a_1=a_2,\ b_1=b_2$이어야 한다.
즉, 함수 f는 일대일함수이다.

ㄴ. $f(a_1,\ b_1)=f(a_2,\ b_2)$이면 $2^{a_1}\times 6^{b_1}=2^{a_2}\times 6^{b_2}$에서
$2^{a_1+b_1}\times 3^{b_1}=2^{a_2+b_2}\times 3^{b_2}$
이때, 2와 3은 서로소이므로 $\underbrace{a_1=a_2,\ b_1=b_2}$이어야 한다.
즉, 함수 f는 일대일함수이다. $a_1+b_1=a_2+b_2,\ b_1=b_2$

ㄷ. 【반례】 $f(4,\ 1)=3^4\times 9^1=3^6,\ f(2,\ 2)=3^2\times 9^2=3^6$
즉, $(4,\ 1)\neq(2,\ 2)$이지만 $f(4,\ 1)=f(2,\ 2)$이므로
함수 $f(m,\ n)=3^m\times 9^n$은 일대일함수가 아니다.

따라서 일대일함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 답 2

Tip
두 합성함수 $g(f(x))$, $f(g(x))$를 구하여 동류항의 계수를 각각 비교해.

$f(g(x))=f(2x-1)=a(2x-1)+b=2ax-a+b$

$g(f(x))=g(ax+b)=2(ax+b)-1=2ax+2b-1$

$f\circ g=g\circ f$에서 $-a+b=2b-1$ $\quad\therefore b=-a+1$

이것을 $f(x)$에 대입하면

$f(x)=ax-a+1=a(x-1)+1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.

$\therefore p+q=1+1=2$

08 답 45

자연수 k에 대하여

(i) $p=2k-1$의 꼴일 때,
p가 홀수일 때

$(f\circ f)(p)=f(p+5)=\dfrac{p+5}{2}+5=15$
p가 홀수이므로 $p+5$는 짝수야.

$\dfrac{p+5}{2}=10$ $\quad\therefore p=15$

(ii) $p=4k$의 꼴일 때,

$(f\circ f)(p)=f\left(\dfrac{p}{2}+5\right)=\dfrac{p}{2}+5+5=\dfrac{p}{2}+10=15$
p가 4의 배수이므로 $\dfrac{p}{2}$는 짝수, $\dfrac{p}{2}+5$는 홀수야.

$\dfrac{p}{2}=5$ $\quad\therefore p=10$

이때, $p=4k$의 꼴이 아니므로 성립하지 않는다.

(iii) $p=4k-2$의 꼴일 때,
p가 4의 배수가 아닌 짝수일 때

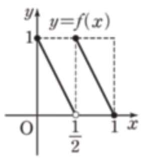
$(f\circ f)(p)=f\left(\dfrac{p}{2}+5\right)=\dfrac{\dfrac{p}{2}+5}{2}+5=15$
p가 4의 배수가 아닌 짝수이므로 $\dfrac{p}{2}$는 홀수, $\dfrac{p}{2}+5$는 짝수야.

$\dfrac{\dfrac{p}{2}+5}{2}=10$, $\dfrac{p}{2}+5=20$, $\dfrac{p}{2}=15$ $\quad\therefore p=30$

(i)~(iii)에 의하여 모든 p의 값의 합은 $15+30=45$

09 답 ③

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 변함에 따라 다음과 같은 개형을 가진다.



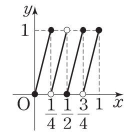
x의 값	$y=f(x)$의 개형
$0\longrightarrow1$	\ \
$1\longrightarrow0$	/ /

$\cdots$ ㉠

따라서 x의 값의 변화에 따라 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 개형을 유추하면 다음과 같다.

x의 값	$f(x)$의 값	$y=(f\circ f)(x)$의 개형
$0\longrightarrow\frac{1}{2}$	$1\longrightarrow0$	/ / ($\because$ ㉠)
$\frac{1}{2}\longrightarrow1$	$1\longrightarrow0$	/ / ($\because$ ㉠)

따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



다른 풀이 : 함수식을 직접 구하여 계산하기

$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right)\\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le1\right)\end{cases}$ 이므로

$$f(f(x))=\begin{cases}-2f(x)+1 & \left(0\le f(x)<\frac{1}{2}\right)\\ -2f(x)+2 & \left(\frac{1}{2}\le f(x)\le1\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-2f(x)+1 & \left(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}<x\le1\right)\\ -2f(x)+2 & \left(0\le x\le\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-2(-2x+1)+2 & \left(0\le x\le\frac{1}{4}\right)\\ -2(-2x+1)+1 & \left(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\right)\\ -2(-2x+2)+2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\right)\\ -2(-2x+2)+1 & \left(\frac{3}{4}<x\le1\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4x & \left(0\le x\le\frac{1}{4}\right)\\ 4x-1 & \left(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\right)\\ 4x-2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\right)\\ 4x-3 & \left(\frac{3}{4}<x\le1\right)\end{cases}$$

따라서 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 ③과 같다.

10 답 ⑤

Tip
역함수가 존재한다는 말은 함수가 일대일대응이라는 말과 같은 의미야.

$f(x)=x|x|+k=\begin{cases}x^2+k & (x\ge0)\\ -x^2+k & (x<0)\end{cases}$ 이고

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로 $2^2+k=1$ $\quad\therefore k=-3$

$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2-3 & (x\ge0)\ \cdots ㉠\\ -x^2-3 & (x<0)\end{cases}$

증가하는 함수로
$x\ge0$이면 $f(x)=x^2-3\ge-3$,
$x<0$이면 $f(x)=-x^2-3<-3$이야.

이때, $(f^{-1}\circ f^{-1})(-2)=t$라 하면 $f(f(t))=-2$

$\{f(t)\}^2-3=-2$ $\quad\therefore f(t)=1\ (\because f(t)\ge0)$

함숫값이 -3 이상이므로 ㉠에서

$f(t)=t^2-3=1 \qquad \therefore t=2\ (\because t\geq 0)$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(-2)=2$

11 답 ①

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

$g(x)=-(x-c)^2+8$, $h(x)=(a+b+1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}\right)x$라

하면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 원점을 지나고 기울기가 양수인 직선이고

$$\begin{aligned}h(2)&=(a+b+1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}\right)\times 2\\&=\{a+(b+1)\}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}\right)\times 2\\&\geq(1+1)^2\times 2\ (\because \text{코시}-\text{슈바르츠의 부등식})\\&=8\ (\text{단, 등호는 } a=b+1\text{일 때 성립})\ \cdots ㉠\end{aligned}$$

이므로 $x\geq 2$에서 $f(x)\geq 8$이다. ⋯ ㉡

함수 $y=g(x)$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(c, 8)$이고 위로 볼록하므로 $g(x)\leq 8$이다. ⋯ ㉢

㉡, ㉢에 의하여 함수 $f(x)$가 일대일함수이고, 치역이 실수 전체의 집합 R이기 위해서는 $g(2)=h(2)=8$이어야 한다.

이때, $h(2)=8$이려면 ㉠에서 등호가 성립할 때이므로

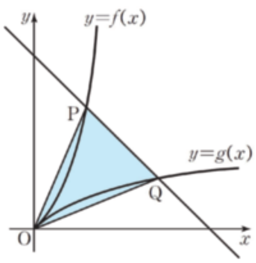
$a=b+1$, 즉 $a-b=1$ ⋯ ㉣

또한, $g(2)=8$에서 $g(2)=-(2-c)^2+8=8$

$\therefore c=2$ ⋯ ㉤

㉣, ㉤에 의하여 $a-b+c=1+2=3$

12 답 8



점 P는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+n+2$의 교점이므로 $x^2+nx=-x+n+2$에서

$x^2+(n+1)x-(n+2)=0$

$(x-1)(x+n+2)=0 \qquad \therefore x=1\ (\because x\geq 0)$

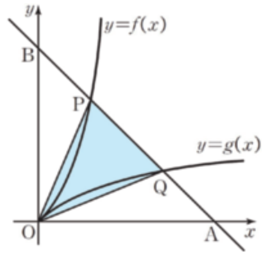
따라서 $\mathrm{P}(1, n+1)$이고 점 Q는 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점이므로 $\mathrm{Q}(n+1, 1)$이다.

따라서 삼각형 POQ의 넓이는

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} n+1 & 1 \\ 1 & n+1\end{matrix}\right|}_{\because \text{ 사선공식}}=\frac{1}{2}\underbrace{\{(n+1)^2-1\}}_{>0}=\frac{1}{2}n(n+2)=40$$

$n(n+2)=80=8\times 10$에서 자연수 $n=8$이다.

다른 풀이 : 삼각형의 넓이를 구하는 기본 공식 이용하기



직선 $y=-x+n+2$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $\mathrm{A}(n+2, 0)$, $\mathrm{B}(0, n+2)$이다.

(삼각형 POQ의 넓이)

$=$(삼각형 OAB의 넓이)$-2\times$(삼각형 OAQ의 넓이)

$=\frac{1}{2}(n+2)^2-2\times\left\{\frac{1}{2}\times(n+2)\times 1\right\}$

$=\frac{1}{2}(n+2)\{(n+2)-2\}$

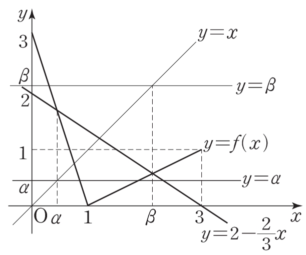
$=\frac{n(n+2)}{2}$

(이하 동일)

13 답 ③

Tip

함수 $y=f(x)$를 직접 구하거나 합성함수 $y=f(f(x))$의 그래프의 개형을 이용해도 되지만 $f(x)$를 치환하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선의 교점을 이용해보자.



$f(f(x))=2-\frac{2}{3}f(x)$에서 $f(x)=t$라 하면

$f(t)=2-\frac{2}{3}t$ ⋯ ㉠

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2-\frac{2}{3}x$의

두 교점의 x좌표를 각각 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

방정식 ㉠의 해는 $t=\alpha$ 또는 $t=\beta$이다.

즉, $f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$

이때, $0<\alpha<1<\beta<3$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 서로 다른 두 점에서 만나고,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$는 한 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(f(x))=2-\frac{2}{3}f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

14 답 ②

주어진 식 $2f(x)+f(\sqrt{4-x^2})=x^2+1$ ⋯ ㉠

에서 $\sqrt{4-x^2}=t\ (0\le t\le 2)$라 하면

$4-x^2=t^2,\ x^2=4-t^2$

$\therefore x=\sqrt{4-t^2}\ (\because 0\le x\le 2)$

따라서 주어진 식에 x 대신 $\sqrt{4-x^2}$을 대입하면

x대신 $\sqrt{4-t^2}$을 대입한 다음 t를 x로 바꾸었다고 생각해도 돼.

$2f(\sqrt{4-x^2})+f(x)=(4-x^2)+1$

$2f(\sqrt{4-x^2})+f(x)=5-x^2$ ⋯ ㉡

㉠$\times 2-$㉡을 계산하면

$3f(x)=2(x^2+1)-(5-x^2)=3x^2-3$

$\therefore f(x)=x^2-1$

$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$

15 답 6

$f(4)=2$에서 $f(4)\le f(2)$ ⋯ ㉠

한편, $f(2)\le 4$이고

공역인 집합 X의 원소 중 가장 큰 수

$f(2)\le 4$에서 $f(2)\le f(4)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(4)\le f(2)\le f(4)$, 즉 $f(2)=f(4)=2$이다.

$f(4)=2$에서 $f(4)\le 3$

$f(4)\le 3$에서 $f(4)\le f(3)$ ⋯ ㉢

한편, $f(3)\le 4$이고

공역인 집합 X의 원소 중 가장 큰 수

$f(3)\le 4$에서 $f(3)\le f(4)$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $f(4)\le f(3)\le f(4)$, 즉 $f(3)=f(4)=2$이다.

또한, $f(1)\le 4$이고

공역인 집합 X의 원소 중 가장 큰 수

$f(1)\le 4$에서 $f(1)\le f(4)=2$

따라서 $f(1)+f(2)+f(3)$의 최댓값은 $2+2+2=6$이다.

16 답 ④

Tip

집합의 원소의 개수와 역함수의 뜻을 이용해.

함수 $f: A \longrightarrow B$가 역함수를 가지려면 함수 f는 일대일대응이어야 하므로 두 집합 A, B의 원소의 개수가 같아야 한다. 따라서 두 집합 A, B의 원소의 개수는 2이다.

$A\cup B=S,\ A\cap B=\varnothing,\ n(S)=4$이므로 $n(A)=n(B)=2$

이때, 가능한 집합 A의 개수는 ${}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$이고

집합 A가 정해지면 집합 B는 자동으로 정해지므로

만약 $A=\{1, 2\}$이면 $B=\{3, 4\}$야.

가능한 집합 A, B의 개수는 6이다.

또한, 각 경우에 대하여 함수 f를 정하는 방법은 2가지이다.

예를 들어 $f: \{1, 2\}\rightarrow\{3, 4\}$는
$f(1)=3,\ f(2)=4$인 경우와 $f(1)=4,\ f(2)=3$인 경우의 2가지야.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $6\times 2=12$이다.

17 답 72

합성함수 $g\circ f$가 항등함수가 되려면 함수 f는 일대일함수이어야 한다.

정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
$x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$

일대일함수 f의 개수는 $4\times 3\times 2=24$이다.

함수 g는 집합 B의 원소 $f(1), f(2), f(3)$에 대응하는 집합 A의 원소는 각각 1, 2, 3으로 결정되고, 나머지 집합 B의 원소에 대응하는 집합 A의 원소는 1, 2, 3의 3가지가 가능하므로 각

$\because g\circ f: A \longrightarrow A$

일대일함수 f에 대하여 함수 g의 개수는 3가지이다.

따라서 순서쌍 (f, g)의 개수는 $24\times 3=72$이다.

18 답 80

$\{(f\circ f)(x)\,|\,x\in X\}\cup\{3, 4\}=X$에서

$=\{1, 2, 3, 4\}$

$\{1, 2\}\subset f(f(X))$이다.

한편, $f(X)\subset X$에서 $f(f(X))\subset f(X)$이므로

(i) $f(X)=\{1, 2, 3, 4\}$인 경우

함수 f는 일대일대응이므로 $4!=24$

(ii) $f(X)=\{1, 2, 3\}$인 경우

① $f(f(X))=\{1, 2\}$일 때,

$f(4)=3$이고

$\{1, 2, 3\}$이 $\{1, 2\}$로 대응되므로
치역 $f(X)=\{1, 2, 3\}$이려면 4가 3으로 대응되어야 해.

정의역이 $\{1, 2, 3\}$이고 치역이 $\{1, 2\}$인 함수의 개수는

${}_3C_2\times 2!=6$

② $f(f(X))=\{1, 2, 3\}$일 때,

$f(4)$의 값은 1, 2, 3의 3가지,

$\{1, 2, 3\}$에서 $\{1, 2, 3\}$으로의 일대일대응의 개수는

$3!=6$이므로

$3\times 6=18$

(iii) $f(X)=\{1, 2, 4\}$일 때, (ii)와 마찬가지이므로

$6+18=24$(가지)이다.

(iv) $f(X)=\{1, 2\}$인 경우

$f(f(X))=\{1, 2\}$이므로

$f(3), f(4)$의 값은 1, 2 각각 2가지

$\{1, 2\}$에서 $\{1, 2\}$로의 일대일대응의 개수는

$2!=2$이므로

$2\times 2\times 2=8$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$24\times 3+8=80$

실전 유형 훈련 문제편 p.115~122

19 답 12

$f(6)=f(2\times3)=\{f(2)\}^3=\underbrace{64}_{64=2^6=4^3=8^2}$ $\quad\therefore f(2)=4$

$f(6)=f(3\times2)=\{f(3)\}^2=64$ $\quad\therefore f(3)=8\ (\because f(x)>0)$

$\therefore f(2)+f(3)=4+8=12$

20 답 16

$h(x)=\{1-f(x)\}\{1-g(x)\}$에서

$f(x)=0$이고 $g(x)=0$, 즉 x가 6의 배수일 때만

$h(x)=1$이고, 그 외에는 모두 $h(x)=0$이다.

1부터 100까지의 자연수 중 6의 배수는 16개이므로

$h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(100)=16$

21 답 ③

ㄱ. x가 유리수일 때 $f(x)=0$이므로 $f(f(x))=f(0)=0$

x가 무리수일 때 $f(x)=1$이므로 $f(f(x))=\underbrace{f(1)=0}_{\because 1\text{은 유리수}}$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=0$이다. (참)

ㄴ. x가 유리수일 때 x^2도 유리수이므로

$f(x)=0$이고 $f(x^2)=0$이다. $\therefore f(x)\geq f(x^2)$

x가 무리수일 때 x^2은 유리수 또는 무리수이므로

$f(x)=1$이고 $f(x^2)=0$ 또는 $f(x^2)=1$ $\quad\therefore f(x)\geq f(x^2)$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(x^2)$이다. (참)

ㄷ. 【반례】 $x=\sqrt{2}$일 때 $f(x^2)=0$이고

$f(x^3)=1$이므로 $f(x^2)<f(x^3)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22 답 9

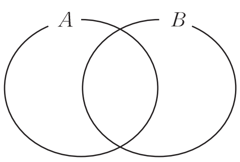
함수 f가 일대일대응이므로 $n(A)=n(B-A)$

함수 f가 일대일대응이면 정의역과 공역의 원소의 개수가 같아.

$\therefore n(B-A)=6$

또, 함수 g가 일대일대응이므로 $n(A-B)=n(A\cap B)$ ⋯ ㉠

이때, 그림과 같은 벤다이어그램에서



$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=6$

이므로 ㉠에 의해

$n(A-B)=n(A\cap B)=3$

$\therefore n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)=6+3=9$

23 답 ②

함수 $f(x)$의 함숫값이 모두 양수이므로

$f(3)-f(2)=f(1)$에서 $f(3)>f(2)$, $f(3)>f(1)$이고

$f(3)+f(2)=f(4)$에서 $f(4)>f(3)$, $f(4)>f(2)$이다.

즉, $f(4)>f(3)>f(2)>f(1)$ 또는

$f(4)>f(3)>f(1)>f(2)$이므로

$f(4)=4$, $f(3)=3$

한편, $f(3)+f(2)=f(4)$에서 $f(2)=1$이고 $\underbrace{f(1)=2}_{\because \text{일대일대응}}$

$\therefore f(1)+f(3)=2+3=5$

24 답 ①

(i) $f(1)=2$, $f(4)=5$이므로

$f(2)\neq2$, $f(2)\neq5$ ($\because$ 일대일대응)

(ii) $f(2)=1$이면 $f(1)=f(f(2))=1$이 되어 $f(1)=2$라는 조건에 모순이다.

(iii) $f(2)=4$이면 $f(4)=f(f(2))=1$이 되어 $f(4)=5$라는 조건에 모순이다.

함수 f가 일대일대응이므로 (i)~(iii)에 의하여

$f(2)=3$이다.

$\therefore f(3)=f(f(2))=1$

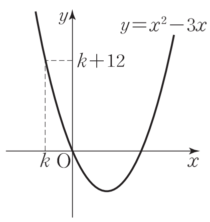
25 답 ①

A에서 B로의 함수 $y=x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$가 일대일대응이

되려면 대칭축인 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 $k\leq\frac{3}{2}$을 만족시키는

점 $(k, k+12)$가 이차함수

$y=x^2-3x$의 그래프 위에 있어야 한다.



즉, $k+12=k^2-3k$에서

$k^2-4k-12=0$, $(k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2\ \left(\because k\leq\frac{3}{2}\right)$

26 답 1

일차함수 $g(x)=ax+b\ (a\neq0)$라 하면

$(f\circ g)(x)=x^2+3x$에서

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))=f(ax+b)\\&=(ax+b)^2-(ax+b)-2\\&=a^2x^2+(2ab-a)x+b^2-b-2=x^2+3x\end{aligned}$$

$\therefore a^2=1$, $2ab-a=3$, $b^2-b-2=0$

이때, $a^2=1$에서 $a=1$ 또는 $a=-1$이므로

(i) $a=1$일 때, $2ab-a=3$, $b^2-b-2=0$에서 $b=2$

(ii) $a=-1$일 때, $2ab-a=3$, $b^2-b-2=0$에서 $b=-1$

따라서 $g_1(x)=x+2$, $g_2(x)=-x-1$

또는 $g_1(x)=-x-1$, $g_2(x)=x+2$이므로

$g_1(3)+g_2(3)=5+(-4)=1$

27 답 ①

X에서 X로의 함수 $f(x)$는 '$3x$를 5로 나눈 나머지'이므로

$f(0)=0,\ f(1)=3,\ f(2)=1,\ f(3)=4,\ f(4)=2$이다.

함수 $g:X \longrightarrow X$는 집합 X의 모든 원소 x에 대하여

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시키므로

$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$에서 $\underbrace{f(3)=g(3)=4}_{\because\, g(1)=3,\ f(1)=3,\ f(3)=4}$

$(f\circ g)(3)=(g\circ f)(3)$에서 $f(4)=g(4)=2$

$(f\circ g)(4)=(g\circ f)(4)$에서 $f(2)=g(2)=1$

$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)$에서 $f(1)=g(1)=3$

$(f\circ g)(0)=(g\circ f)(0)$에서 $f(g(0))=g(0)$

$f(0)=0$이고 f는 일대일대응이므로 $g(0)=0$이어야 한다.

$\therefore g(0)+g(2)=0+1=1$

28 답 2

합성함수 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)+1$이므로

$(g\circ f)(x)=\begin{cases} x^2+2ax+4 & (x<0) \\ x+4 & (x\ge 0)\end{cases}$이다.

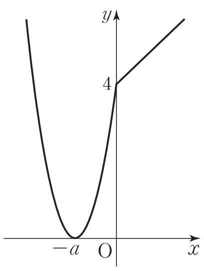
$a\le 0$이면 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge \underbrace{4}_{(g\circ f)(x)\ge (g\circ f)(0)=4}\}$이므로 성립하지 않는다.

따라서 $a>0$이어야 한다.

이때, $y=x^2+2ax+4=(x+a)^2+4-a^2$의 그래프의

꼭짓점의 x좌표가 음수이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이

$\{y\,|\,y\ge 0\}$이기 위해서는 그림과 같이 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 한다.



즉, $4-a^2=0$에서 $a^2=4$ $\quad\therefore a=\pm 2$

이때, $a>0$이므로 $a=2$이다.

29 답 ④

자연수 n에 대하여

$f(n)=\begin{cases} n-2 & (n\ge 100) \\ f(f(n+4)) & (n<100)\end{cases}$이므로

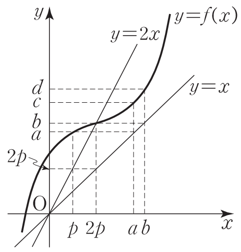
$f(95)=f(f(99))=f(f(f(103)))$

$\quad=f(f(101))=f(99)$

$\quad=f(f(103))=f(101)=99$

30 답 ⑤

두 직선 $y=x$와 $y=2x$를 이용하여 좌표평면에 x, y의 값을 표시하면 다음 그림과 같다.



$\therefore (f\circ f)(p)+(f\circ f)(2p)=f(f(p))+f(f(2p))$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =f(a)+f(b)=c+d$

31 답 1

$a+2b=2\left(\frac{1}{2}a+b\right)=2f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)$이므로

$x=\frac{1}{2}$을 $f(x),\ f^2(x),\ f^3(x),\ \cdots$에 차례로 대입하면

$f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$

$f^2\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$f^3\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\vdots$

$f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^{99}\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore a+2b=2f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$

32 답 1

합성함수 $g\circ f$가 정의되려면 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역에 포함되어야 한다.

함수 g의 정의역은 $Y=\{2x-3\,|\,x\ge k\}=\{y\,|\,y\ge 2k-3\}$

또한, 함수 $f(x)=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$의 그래프의 축이

직선 $x=2$이고, 함수 f의 정의역이 $x\le k$이므로

(i) $\underbrace{k<2\text{일 때,}}_{\text{꼭짓점을 포함하지 않을 때,}}$ 함수 f의 치역은 $\{y\,|\,y\ge k^2-4k+2\}$이므로

$k^2-4k+2\ge 2k-3,\ k^2-6k+5\ge 0,\ (k-1)(k-5)\ge 0$

$\therefore k\le 1$ 또는 $k\ge 5$

이때, $k<2$이므로 $k\le 1$

(ii) $\underbrace{k\ge 2\text{일 때,}}_{\text{꼭짓점을 포함할 때,}}$ 함수 f의 치역은 $\{y\,|\,y\ge -2\}$이므로

$-2\ge 2k-3,\ 1\ge 2k \qquad \therefore k\le\frac{1}{2}$

이때, $k\ge 2$이므로 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 k의 최댓값은 1이다.

33 답 ①

$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$는 $1\longrightarrow1$, $2\longrightarrow3$, $3\longrightarrow4$, $4\longrightarrow2$인

대응관계를 의미하므로 $f^2=\underline{f\circ f}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$이다.

$1\longrightarrow1\longrightarrow1$, $2\longrightarrow3\longrightarrow4$, $3\longrightarrow4\longrightarrow2$, $4\longrightarrow2\longrightarrow3$

$\therefore f^3=f\circ f\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$

34 답 6

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 x의 값이 변함에 따라 다음과 같은 개형을 가진다.

x의 값	$y=f(x)$의 개형
$0\longrightarrow4$	_/
$4\longrightarrow0$	_

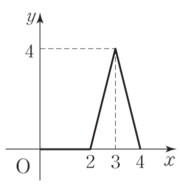
x의 값	$y=g(x)$의 개형
$0\longrightarrow4$	/\\
$4\longrightarrow0$	/\\

따라서 x의 값의 변화에 따라 두 함수 $y=(g\circ f)(x)$와 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프의 개형을 유추하면 다음과 같다.

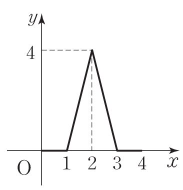
x의 값	$f(x)$의 값	$y=(g\circ f)(x)$의 개형
$0\longrightarrow2$	0	—
$2\longrightarrow4$	$0\longrightarrow4$	/\\

x의 값	$g(x)$의 값	$y=(f\circ g)(x)$의 개형
$0\longrightarrow2$	$0\longrightarrow4$	_/
$2\longrightarrow4$	$4\longrightarrow0$	_

따라서 두 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.



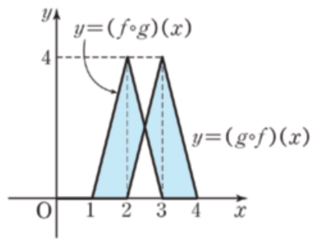
$y=(g\circ f)(x)$



$y=(f\circ g)(x)$

따라서 두 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분은 다음과 같으므로 그 넓이는

$2\times\underbrace{\left(\frac{1}{2}\times1\times4+\frac{1}{2}\times4\times\frac{1}{2}\right)}_{\text{두 삼각형의 넓이의 합}}=2\times(2+1)=6$



35 답 22

$0\le x\le2$일 때, $f(x)=2$ ⋯ ㉠이고

$2<x\le4$일 때, $\underbrace{f(x)=4-x}_{x\text{절편이 4이고, 기울기가 }-1\text{인 직선의 방정식}}$ ⋯ ㉡

(i) $0\le x\le10$일 때,

$0\le f(x)\le2$이므로 $y=f(f(x))=2$ ($\because$ ㉠)

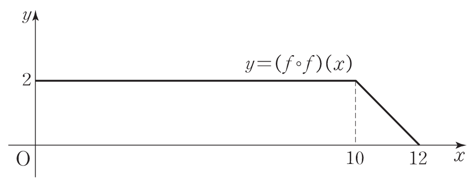
(ii) $10<x\le12$일 때, $\underbrace{f(x)=x-8}_{x\text{절편이 8이고, 기울기가 1인 직선의 방정식}}$ ⋯ ㉢이고

$2\le f(x)\le4$이므로

$y=f(f(x))=4-f(x)$ ($\because$ ㉡)

$=4-(x-8)$ ($\because$ ㉢)$=12-x$

(i), (ii)에 의하여 $0\le x\le12$에서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 $\underbrace{\text{도형}}_{\text{사다리꼴}}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(10+12)\times2=22$

36 답 ②

$f(x)\ge0$일 때, 즉 $x\le1$일 때

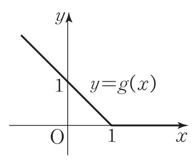
$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$이고,

$f(x)<0$일 때, 즉 $x>1$일 때

$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}$

$=\frac{f(x)-f(x)}{2}=0$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=h(x)$의 그래프는

(i) $x\ge1$일 때, $g(x)=0$이므로

$h(x)=g(g(x))=g(0)=1$

(ii) $0<x<1$일 때, $g(x)=-x+1$이고

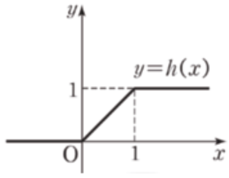
$0<-x+1<1$이므로

$h(x)=g(g(x))=g(-x+1)=-(-x+1)+1=x$

(iii) $x\le0$일 때, $g(x)=-x+1$이고 $-x+1\ge1$이므로

$h(x)=g(g(x))=g(-x+1)=0$

(i)~(iii)에 의하여 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



37 답 3

$h(x)=\dfrac{2f(x)+5}{f(x)+1}$에서

$h(g(x))=\dfrac{2f(g(x))+5}{f(g(x))+1}=\dfrac{2x+5}{x+1}$이므로

$(h\circ g)(2)=h(g(2))=\dfrac{4+5}{2+1}=\dfrac{9}{3}=3$

다른 풀이 : $g(2)=k$라 하여 계산하기

$g(2)=k$라 하면 $g^{-1}(k)=f(k)=2$

$\therefore (h\circ g)(2)=h(g(2))=h(k)$

$=\dfrac{2f(k)+5}{f(k)+1}=\dfrac{2\times2+5}{2+1}=\dfrac{9}{3}=3$

38 답 ②

$f^{-1}(3)=1$이므로 $f(1)=3$에서 $a+b=3$ ⋯ ㉠

$(f\circ g)^{-1}(6x+3)=x$에서 $(f\circ g)(x)=6x+3$이고,

양변에 $x=0$을 대입하면 $f(g(0))=3$

이때, 함수 f는 일대일대응이고 $f(1)=3$이므로

$g(0)=1=c$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a+b+c=3+1=4$

다른 풀이 : 항등식 이용하기

$f^{-1}(3)=1$이므로 $f(1)=3$에서 $a+b=3$ ⋯ ㉠

또, $(f\circ g)^{-1}(6x+3)=x$에서 $(f\circ g)(x)=6x+3$이고,

$f(g(x))=a(3x+c)+b$이므로 $3ax+ac+b=6x+3$에서

양변의 동류항의 계수를 비교하자.

$3a=6$ ⋯ ㉡, $ac+b=3$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$, $c=1$

$\therefore a+b+c=4$

39 답 16

5와 6의 최소공배수는 30이므로

자연수 k에 대하여 $5k$와 $5k+30$은 6으로 나눈 나머지가 같다.

즉, 함수 f의 함숫값은

$f(5)=f(35)=f(65)=f(95)=5$,

$f(10)=f(40)=f(70)=f(100)=4$,

$f(15)=f(45)=f(75)=3$,

$f(20)=f(50)=f(80)=2$,

$f(25)=f(55)=f(85)=1$,

$f(30)=f(60)=f(90)=0$이다.

이때, 함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로

함수 f는 일대일함수이면서 공역과 치역이 같아야 한다.

즉, 정의역 X의 원소가 공역 Y의 원소 0, 1, 2, 3, 4, 5에 각각 하나씩 대응되어야 한다.

$f(n)=0$을 만족시키는 n의 값은 3개,

$f(n)=1$을 만족시키는 n의 값은 3개,

$f(n)=2$를 만족시키는 n의 값은 3개,

$f(n)=3$을 만족시키는 n의 값은 3개,

$f(n)=4$를 만족시키는 n의 값은 4개,

$f(n)=5$를 만족시키는 n의 값은 4개가 있으므로

각각에서 1개씩 뽑으면 함수 $f(n)$의 역함수가 존재하기 위한 집합

한 개씩만 원소로 가져야 해.

S의 부분집합 X의 개수는

$3^4\times4^2=2^4\times3^4$

따라서 $a=4$, $b=4$이므로 $ab=4\times4=16$

40 답 ③

$f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=3+a$, $f(4)=4+a$이고

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

$f(3)=2$, $f(4)=3$

$\therefore a=-1$

이때, $f(2)=4$

$f^2(2)=f(f(2))=f(4)=3$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(3)=2$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=4$

$f^5(2)=f(f^4(2))=f(4)=3$

$f^n(2)$의 값은 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때 4, 3, 2가 이 순서대로 반복되고 있어.

⋮

$\therefore f^{10}(2)=f^1(2)=4$

한편, $g^{10}(2)=k$라 하면 $f^{10}(k)=2$이므로

$f^{10}(k)=f^7(k)=f^4(k)=f^1(k)=2$에서 $k=3$

$\therefore g^{10}(2)=3$

$\therefore a+f^{10}(2)+g^{10}(2)=-1+4+3=6$

41 답 8

$X\cap Y=\{2, 3, 4\}$이므로 조건 (나)에서

$g(2)=f(2)+1$, $g(3)=f(3)+1$, $g(4)=f(4)+1$ ⋯ ㉠

이때, 조건 (가)에 의해 세 수 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 서로 다른 수이므로

집합 $Z=\{3, 4, 5\}=\{f(2)+1, f(3)+1, f(4)+1\}$이고

$\{f(2), f(3), f(4)\}=\{2, 3, 4\}$

이때, 함수 f는 일대일대응이므로 $f(1)=5$이다.

(i) $g(2)=3$인 경우

㉠에서 $f(2)=2$이고, 조건 (다)에서 $f(3)<g(2)=3$이므로 $f(3)=2$가 되어 함수 f가 일대일대응이라는 조건에 모순이다.

(ii) $g(2)=4$인 경우

㉠에서 $f(2)=3$이고,

조건 (다)에서 $f(3)<g(2)=4$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(3)\neq f(2)=3$

$f(3)=2$

$f(1)=5$이므로 $f(4)=4$이다.

한편, ㉠에서 $g(3)=3$, $g(4)=5$이다.

(iii) $g(2)=5$인 경우

조건 (다)에서 $f(1)>5$가 되어 성립하지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여

$(g\circ f)(2)=g(3)=3$, $(g\circ f^{-1})(4)=g(4)=5$

$\therefore (g\circ f)(2)+(g\circ f^{-1})(4)=3+5=8$

42 답 2

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2b-1 & (x\geq 1) \\ -x^2+2bx+a+1 & (x<1) \end{cases}$의 역함수가 존재하려면

함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.

$g(x)=x^2+ax+2b-1$, $h(x)=-x^2+2bx+a+1$이라 하면
$g(1)=h(1)=a+2b$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가
계속 증가하거나 계속 감소해야 해.

(i) $x\geq 1$일 때, 함수 $f(x)$가 증가하여야 하므로

$y=x^2+ax+2b-1=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+2b-1$에서

직선 $x=-\frac{a}{2}$가 직선 $x=1$보다 왼쪽에 있거나 일치해야 한다.

즉, $-\frac{a}{2}\leq 1$에서 $a\geq -2$

(ii) $x<1$일 때, 함수 $f(x)$가 증가하여야 하므로

$y=-x^2+2bx+a+1=-(x-b)^2+b^2+a+1$에서

직선 $x=b$가 직선 $x=1$보다 오른쪽에 있거나 일치해야 한다.

즉, $b\geq 1$

(i), (ii)에 의하여 $a+4b\geq -2+4=2$

43 답 5

$g^{-1}(8)=k$라 하면 $g(k)=f(f(k))=8$

여기서 $f(k)=t$ ⋯ ㉠라 하면 $f(t)=8$

한편, $x<2$일 때 $f(x)>-1$, $x\geq 2$일 때 $f(x)\leq -1$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 계속 감소해.

$t<2$이다.

즉, $f(t)=8=\frac{1}{4}t^2-t$에서 $t^2-4t-32=0$

$(t+4)(t-8)=0$ $\quad\therefore t=-4$ 또는 $t=8$

그런데 $t<2$이므로 $t=-4$

㉠에서 $f(k)=-4$이므로 $k\geq 2$이고 $f(k)=-k+1=-4$

$\therefore k=5$

즉, $g^{-1}(8)=5$

44 답 50

점 A$(2, 4)$에서 $f(2)=4$이고

$f(2)-f^{-1}(2)=10$에서 $f^{-1}(2)=f(2)-10=-6$

조건 (가)에서 점 B와 점 A는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

점 B$(4, 2)$이고 조건 (나)에 의하여 점 D와 점 B는 y좌표가

같으므로 점 D의 좌표는 $(f^{-1}(2), 2)$ 즉 D$(-6, 2)$이다.

또한, 조건 (가)에서 점 C와 점 D는 직선 $y=x$에 대하여

대칭이므로 점 C$(2, -6)$이다.

이때, 점 A와 점 C의 x좌표가 같으므로 선분 AC는 y축에

평행하고 선분 BD와 수직이다.

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 10\times 10=50$

45 답 ①

ㄱ. $(g\circ f)(a)=(g\circ f)(b)$, 즉 $g(f(a))=g(f(b))$이면

함수 g가 일대일함수이므로 $f(a)=f(b)$이다.

또한, 함수 f가 일대일함수이므로 $a=b$이다.

따라서 $g\circ f$는 일대일함수이다. (참)

ㄴ. 【반례】 집합 $\{1, 2\}$에서 정의된 함수 f가

$f(1)=1$, $f(2)=1$이고 집합 $\{1\}$에서 정의된 함수 g가

$g(1)=1$이면 $f(g(x))=x$이지만 g가 f의 역함수는 아니다.

(거짓)

ㄷ. 【반례】 정의역과 공역이 모두 집합 $\{1, 2\}$인 함수 f가

$f(1)=2$, $f(2)=1$이면 $f(1)=f^{-1}(1)$,

$f(2)=f^{-1}(2)$이지만 $f(1)\neq 1$, $f(2)\neq 2$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

46 답 ④

ㄱ. $x=0$, $y=0$을 조건 (나)의 식에 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)$에서 $f(0)=0$

$\therefore f^{-1}(0)=0$ (참)

ㄴ. $f^{-1}(2)=3$에서 $f(3)=2$이므로 $x=3$, $y=3$을 조건 (나)의

식에 대입하면 $f(6)=f(3+3)=f(3)+f(3)=4$

$\therefore f^{-1}(4)=6\neq 9$ (거짓)

ㄷ. $f^{-1}(x)=a$, $f^{-1}(y)=b$라 하면 $f(a)=x$, $f(b)=y$이므로

$x+y=f(a)+f(b)=f(a+b)$

$\therefore f^{-1}(x+y)=a+b=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

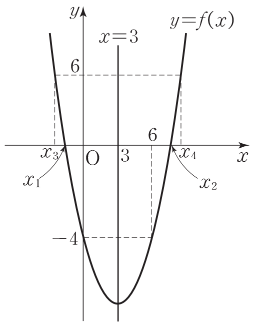
47 답 12

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$f(0)=f(6)=-4$이다.

즉, $f(f(x))=-4$를 만족시키는 $f(x)$의 값은

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=6$이다.



$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 x_1, x_2라 하고

$f(x)=6$을 만족시키는 x의 값을 x_3, x_4라 하면

두 점 $(x_1, f(x_1))$과 $(x_2, f(x_2))$, 두 점 $(x_3, f(x_3))$과 $(x_4, f(x_4))$는

각각 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$x_1+x_2=6$, $x_3+x_4=6$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=6+6=12$

다른 풀이 : 이차방정식의 근과 계수의 관계 이용하기

$f(x)=a(x-3)^2-7$ $(a>0)$이라 하면 $f(0)=-4$이므로

$9a-7=-4$에서 $9a=3$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}(x-3)^2-7$

이때, $f(f(x))=-4$를 만족시키는 $f(x)$의 값을 t라 하면

$f(t)=-4$에서 $\frac{1}{3}(t-3)^2-7=-4$, $(t-3)^2=9$

$t-3=3$ 또는 $t-3=-3$

따라서 $t=6$ 또는 $t=0$이므로 $f(x)=6$ 또는 $f(x)=0$

(i) $f(x)=6$에서 $\frac{1}{3}(x-3)^2-7=6$

$\therefore x^2-6x-30=0$

따라서 이 이차방정식의 두 실근을 x_1, x_2라 하면

$x_1+x_2=6$

(ii) $f(x)=0$에서 $\frac{1}{3}(x-3)^2-7=0$

$\therefore x^2-6x-12=0$

따라서 이 이차방정식의 두 실근을 x_3, x_4라 하면

$x_3+x_4=6$

따라서 방정식 $f(f(x))=-4$의 모든 실근의 합은

$x_1+x_2+x_3+x_4=6+6=12$

48 답 ④

$f(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$, $g(x)=x^2-ax+3$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\{g(x)-2\}\{g(x)+1\}\geq 0$

$\therefore g(x)\geq 2$ 또는 $g(x)\leq -1$

(i) $g(x)\geq 2$에서 $x^2-ax+3\geq 2$, 즉 $x^2-ax+1\geq 0$

이것이 모든 실수 x에 대하여 성립하여야 하므로

$\underbrace{a^2-4\leq 0}_{(\text{판별식})\leq 0}$에서 $-2\leq a\leq 2$

(ii) $g(x)\leq -1$에서 $x^2-ax+3\leq -1$, 즉 $x^2-ax+4\leq 0$

이때, $h(x)=x^2-ax+4$라 하면 $y=h(x)$의 그래프는

아래로 볼록인 포물선이므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\leq 0$을

만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는 $-2\leq a\leq 2$

Ⅲ-08 함수

49 답 123

$f(x+g(y))=(x+y^2-2)^2-3$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 x 대신 $-g(y)$를 대입하면

$f(0)=\{-g(y)+y^2-2\}^2-3=1$

$\{-g(y)+y^2-2\}^2=4$

$-g(y)+y^2-2=\pm 2$

$\therefore g(y)=y^2$ 또는 $g(y)=y^2-4$

(i) $g(y)=y^2$일 때,

㉠에 대입하면

$f(x+y^2)=(x+y^2-2)^2-3$

이 식이 x, y에 대한 항등식이므로 $y=0$을 대입하면

$f(x)=(x-2)^2-3$

$\therefore f(7)+g(7)=(5^2-3)+7^2=22+49=71$

(ii) $g(y)=y^2-4$일 때,

마찬가지의 방법으로 ㉠에 대입하고 $y=0$을 대입하면

$f(x+y^2-4)=(x+y^2-2)^2-3$

$f(x-4)=(x-2)^2-3$

$\therefore \underbrace{f(7)}_{f(x-4)=(x-2)^2-3\text{에 } x=11\text{을 대입해.}}+g(7)=(9^2-3)+(7^2-4)=78+45=123$

(i), (ii)에 의하여 $f(7)+g(7)$의 최댓값은 123이다.

50 답 4

조건 (가)에 의하여 이차함수 $f(x)$를

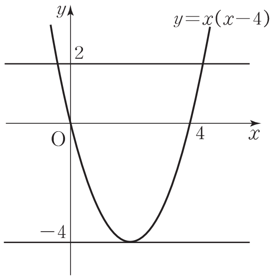
$f(x)=ax(x-4)$ $(a\neq 0)$라 하고 조건 (나)에 대입하면

$ax(x-4)-4(x-4)=0$에서

$(ax-4)(x-4)=0$이다.

이때, 이 이차방정식의 실근의 개수가 1이므로

$ax-4=0$의 근이 $x=4$ $\quad\therefore a=1$



$f(x)=x(x-4)=(x-2)^2-4$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -4)$이므로 $f(f(x))=-4$를 만족시키기 위해서는 $f(x)=2$가 되어야 한다.

즉, $x^2-4x=2$에서 $x^2-4x-2=0$이다.

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 4이다.

51 답 ③

ㄱ. $(f\circ f)(x)=x$일 때, $f(a)=b$이면

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=a$이므로 $f(b)=a$이다.

따라서 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 f의 대응관계는 $f(a)=a$이거나 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=b$이면서 $f(b)=a$이어야만 한다.

그런데 집합 X의 원소가 다섯 개이므로 원소를 두 개씩 짝지어도 짝지어지지 않는 원소가 존재한다.

따라서 $(f\circ f)(x)=x$이면 $f(a)=a$인 집합 X의 원소 a가 존재한다. (참)

ㄴ. $(f\circ f)(x)=f(x)$인 집합 X의 원소를 k라 하면

$(f\circ f)(k)=f(k)$

여기서 $f(k)=b$라 하면 $b\in X$이고 $f(b)=b$

따라서 $(f\circ f)(x)=f(x)$이면 $f(b)=b$인 집합 X의 원소 b가 존재한다. (참)

ㄷ. 【반례】 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$, $f(4)=5$, $f(5)=4$라 하면

$(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f(f(2))=f(3)=1$에서

$(f\circ f\circ f)(1)=1$이므로 집합 X의 어떤 원소 x에 대하여

$(f\circ f\circ f)(x)=x$이지만 $f(c)=c$인 집합 X의 원소 c는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

52 답 ③

주어진 그림에서 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (0\le x<1) \\ -2x+4 & (1\le x\le 2) \end{cases}$

(i) $0\le f(x)<1$일 때, $f(f(x))=f(x)+1=1$ $\quad\therefore f(x)=0$

ⓘ $0\le x<1$일 때, $f(x)=x+1=0$ $\quad\therefore x=-1$

이때, $x=-1$은 $0\le x<1$이라는 조건에 모순이다.

ⓘⓘ $1\le x\le 2$일 때, $f(x)=-2x+4=0$ $\quad\therefore x=2$

(ii) $1\le f(x)\le 2$일 때, $f(f(x))=-2f(x)+4=1$

$\therefore f(x)=\dfrac{3}{2}$

ⓘ $0\le x<1$일 때, $f(x)=x+1=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{2}$

ⓘⓘ $1\le x\le 2$일 때, $f(x)=-2x+4=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore x=\dfrac{5}{4}$

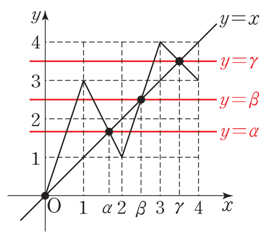
(i), (ii)에서 $(f\circ f)(x)=1$을 만족시키는 x의 개수는 3이다.

53 답 36

조건 (나)에서 $f(f(a))=f(a)$, $f(f(b))=f(b)$

이때, $f(a)=k$라 하면 $f(k)=k$

즉, k는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표이다.



이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 위의 그림과 같이 α, β, γ $(0<\alpha<\beta<\gamma)$라 하여 $f(x)$의 값이 0, α, β, γ인 경우를 각각 나타내면 다음과 같다.

(i) $f(x)=0$인 경우

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $\underbrace{y=0}_{x\text{축}}$은 $x=0$에서만 만난다.

따라서 조건을 만족시키는 x의 값은 0이다.

(ii) $f(x)=\alpha$인 경우

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

이때, $x\ne\alpha$인 x의 값을 각각 p_1, p_2 $(p_1<\alpha<p_2)$라 하면 조건을 만족시키는 x의 값은 p_1, α, p_2이다.

(iii) $f(x)=\beta$인 경우

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

이때, $x\ne\beta$인 x의 값을 각각 q_1, q_2 $(q_1<q_2<\beta)$라 하면 조건을 만족시키는 x의 값은 q_1, q_2, β이다.

(ⅳ) $f(x)=\gamma$인 경우

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\gamma$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

이때, $x\neq\gamma$인 x의 값을 r_1 $(r_1<\gamma)$라 하면 조건을 만족시키는 x의 값은 r_1, γ이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $f(f(x))=f(x)$를 만족시키는 서로 다른 x의 값은 모두 9개이다.

따라서 조건을 만족시키는 집합 $X=\{a, b\}$의 개수는 서로 다른 9개에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$

54 답 2

조건 (가)에서 함수 f는 원점에 대하여 대칭이고,

조건 (나)에서 함수 f는 감소하는 함수이다.

$f(1-x)+f(1-x^2)<0$에서

$f(1-x)<-f(1-x^2)$

$f(1-x)<f(-1+x^2)$ ($\because$ 조건 (가))

$1-x>-1+x^2$ ($\because$ 조건 (나))

$x^2+x-2<0$, $(x+2)(x-1)<0$

$\therefore$ $-2<x<1$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0이므로 개수는 2이다.

55 답 ②

조건 (가)에서 $x_1=0$, $x_2=0$일 때,

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\qquad\therefore$ $f(0)=0$

$x_1=1$, $x_2=-1$일 때, $f(0)=f(1)+f(-1)$에서

$f(-1)=-f(1)$

이때, 조건 (나)에 의해

f는 일대일함수

$f(1)\neq0$, $f(-1)\neq0$

따라서 두 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는

0이 대응할 수 있는 원소는 0의 1가지,

1이 대응할 수 있는 원소는 -2, -1, 1, 2의 4가지,

-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$의 1가지

이므로 구하는 함수 f의 개수는

$1\times4\times1=4$이다.

56 답 ④

집합 A의 원소는 일대일함수이므로 $n(A)=3\times2\times1=6$

집합 B의 원소는 $f(1)\neq1$인 함수이므로

$f(1)$은 2, 3 중 하나이고, $f(2)$, $f(3)$은 각각 1, 2, 3 중 하나이다.

즉, $n(B)=2\times3\times3=18$

$\therefore$ $n(A)+n(B)=6+18=24$

57 답 12

조건 (나)에서 함수 f는 집합 X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)=x_1$이거나 $f(x_1)=x_2$이면 $f(x_2)=x_1$이어야 한다.

또한, 조건 (다)에서 어떤 x에 대하여 $f(x)=x^2$이므로

$f(1)=1$ 또는 $f(2)=4$이어야 한다.

(ⅰ) $f(1)=1$, $f(2)\neq4$일 때,

$f(2)$의 값은 2 또는 3 또는 5

ⓘ $f(2)=2$이면

집합 X의 나머지 세 원소 3, 4, 5에 대하여

㉠ $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_1$ $(x_1\neq x_2)$인 순서쌍 (x_1, x_2)가 하나 있을 때,

순서쌍을 정하는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$(가지)

나머지 원소는 자기 자신에 대응되므로

함수 f의 개수는 3

㉡ $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_1$ $(x_1\neq x_2)$인 순서쌍 (x_1, x_2)가 없을 때,

세 원소는 모두 자기 자신에 대응되므로

함수 f의 개수는 1

ⓘⓘ $f(2)=3$이면 $f(3)=2$이고

$f(4)=5$, $f(5)=4$이거나 $f(4)=4$, $f(5)=5$이므로

함수 f의 개수는 2

ⓘⓘⓘ $f(2)=5$이면 $f(5)=2$이고

$f(3)=4$, $f(4)=3$이거나 $f(3)=3$, $f(4)=4$이므로

함수 f의 개수는 2

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에서 함수 f의 개수는 $3+1+2+2=8$

(ⅱ) $f(1)\neq1$, $f(2)=4$일 때,

$f(4)=2$이고

ⓘ $f(1)=3$이면 $f(3)=1$이므로 $f(5)=5$

ⓘⓘ $f(1)=5$이면 $f(5)=1$이므로 $f(3)=3$

ⓘ, ⓘⓘ에서 함수 f의 개수는 $1+1=2$

(ⅲ) $f(1)=1$, $f(2)=4$일 때,

$f(4)=2$이고

$f(3)=5$, $f(5)=3$이거나 $f(3)=3$, $f(5)=5$이므로

함수 f의 개수는 2

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$8+2+2=12$

58 답 8

등식 $f(ab)=f(a)+f(b)$에 $a=2$, $b=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)+f(2)$

$2=2f(2)$ $\quad\therefore f(2)=1$ ---------- ⓐ

또, $f(ab)=f(a)+f(b)$에 $a=4$, $b=2$를 대입하면

$f(8)=f(4)+f(2)=2+1=3$ ---------- ⓑ

$\therefore f^{-1}(3)=8$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $f(2)$의 값을 구한다. .... [40%]
ⓑ $f(8)$의 값을 구한다. .... [40%]
ⓒ $f^{-1}(3)$의 값을 구한다. .... [20%]

59 답 1

$y=f(3x-2)$의 역함수를 구하기 위해 x, y를 서로 바꾸어 쓰면

$x=f(3y-2)$이다. ---------- ⓐ

양변에 f^{-1}를 취하면 $f^{-1}(x)=3y-2$

이때, $f^{-1}(x)=g(x)$이므로 $g(x)=3y-2$

따라서 구하는 역함수는 $y=\frac{1}{3}g(x)+\frac{2}{3}$이다. ---------- ⓑ

즉, $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$이므로 $a+b=1$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ x, y를 서로 바꾼다. .... [30%]
ⓑ 역함수를 구한다. .... [50%]
ⓒ $a+b$의 값을 구한다. .... [20%]

60 답 42

(i) $n=3$일 때, X에서 X로의 함수의 개수는 $3^3=27$이고,
X에서 X로의 상수함수의 개수는 3이므로
$f(3)=27-3=24$ ---------- ⓐ

(ii) $n=4$일 때, X에서 X로의 일대일대응인 함수의 개수는
$4\times3\times2\times1=24$이고, 1이 1에 대응되는 X에서 X로의
일대일대응인 함수의 개수는 $3\times2\times1=6$이므로
$g(4)=24-6=18$ ---------- ⓑ

(i), (ii)에 의하여 $f(3)+g(4)=24+18=42$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $f(3)$의 값을 구한다. .... [40%]
ⓑ $g(4)$의 값을 구한다. .... [40%]
ⓒ $f(3)+g(4)$의 값을 구한다. .... [20%]

고난도 도전 문제

문제편 p.123~124

61 답 ⑤

ㄱ. $f(11)=f(10)+1=f(5)+1=f(4)+2$
$\qquad=f(2)+2=f(1)+2=3$ (참)

ㄴ. 자연수 a에 대하여 $n=2^a$이면
$f(2^a)=f(2^{a-1})=\cdots=f(2)=f(1)=1$이므로
$f(2^a+1)=f(2^a)+1=1+1=2$
즉, 자연수 m, k $(k<m)$에 대하여
$f(2^m+2^k)=\underline{f(2^k(2^{m-k}+1))=f(2^{m-k}+1)}$
$f(2^k(2^{m-k}+1))=f(2^{k-1}(2^{m-k}+1))=\cdots=f(2^{m-k}+1)$
$\qquad=f(2^{m-k})+1=1+1=2$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의해 $f(n)=2$인 자연수 n은 2^m+1 또는 2^m+2^k 꼴의 수이다.

(i) $n=2^m+1$일 때
$n=2^m+1\le50$에서 $1\le m\le\underline{5}$ ⇨ 5개
$\because 2^5+1=33$, $2^6+1=65$

(ii) $n=2^m+2^k$일 때,
$n=2^m+2^k\le50$에서 $1\le k<m\le\underline{5}$ ⋯ ㉠
$\because 2^5+2^4=32+16=48$

ⓘ $m=5$일 때, $k=1, 2, 3, 4$의 4개
ⓘⓘ $m=4$일 때, $k=1, 2, 3$의 3개
ⓘⓘⓘ $m=3$일 때, $k=1, 2$의 2개
ⓘⓥ $m=2$일 때, $k=1$의 1개
따라서 ㉠을 만족시키는 두 자연수 m, k의
순서쌍 (m, k)의 개수는 $4+3+2+1=10$이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(n)=2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는
$5+10=15$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

62 답 54

조건 (가)에 의해

$f(f(1))+f^{-1}(1)=2$ ⋯ ㉠

$f(f(2))+f^{-1}(2)=4$ ⋯ ㉡

$f(f(3))+f^{-1}(3)=6$ ⋯ ㉢

함수 f의 치역이 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로

집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\ge1$이고 $f^{-1}(x)\ge1$이다.

즉, $f(f(1))\ge1$, $f^{-1}(1)\ge1$이므로

㉠에서 $f(f(1))=1$, $f^{-1}(1)=1$

따라서 $f(1)=1$이다.

한편, f는 일대일대응이므로 $f(2)\ne1$이고 $f^{-1}(2)\ne1$이다.

즉, $f(f(2))\ge2$, $f^{-1}(2)\ge2$이므로

㉡에서 $f(f(2))=2$, $f^{-1}(2)=2$

따라서 $f(2)=2$이다.

마찬가지의 방법에 의해 ㉢에서 $f(3)=3$이다.

조건 (나)에서 $f(4)\neq4$이므로 $f(4)=5$ 또는 $f(4)=6$

(i) $f(4)=5$이면

$f(5)=4$, $f(6)=6$ 또는 $f(5)=6$, $f(6)=4$

ⓘ $f(5)=4$, $f(6)=6$일 때,

$f(6)\times\{f^{-1}(4)+f(5)\}=6\times(5+4)=54$

ⓘⓘ $f(5)=6$, $f(6)=4$일 때,

$f(6)\times\{f^{-1}(4)+f(5)\}=4\times(6+6)=48$

(ii) $f(4)=6$이면

$f(5)=4$, $f(6)=5$ 또는 $f(5)=5$, $f(6)=4$

ⓘ $f(5)=4$, $f(6)=5$일 때,

$f(6)\times\{f^{-1}(4)+f(5)\}=5\times(5+4)=45$

ⓘⓘ $f(5)=5$, $f(6)=4$일 때,

$f(6)\times\{f^{-1}(4)+f(5)\}=4\times(6+5)=44$

(i), (ii)에 의하여 구하는 최댓값은 54이다.

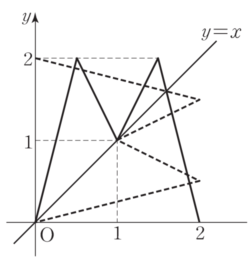
63 답 ⑤

$y=f(x)$ ⋯ ㉠를 $f(f(x))=x$에 대입하면

$f(y)=x$ ⋯ ㉡

따라서 방정식 $f(f(x))=x$의 근은 두 식 ㉠, ㉡을 연립한 방정식의 근과 같다.

이때 ㉡의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음과 같다.



그림에서 $y=f(x)$와 $f(y)=x$의 교점의 개수는 9이므로 방정식 $f(f(x))=x$의 서로 다른 실근의 개수는 9이다.

64 답 15

$h(x)=f(x)+g(x)$ ⋯ ㉠에 x 대신 $h(x)$를 대입하면

$h(h(x))=f(h(x))+g(h(x))=g(x)+f(x)=h(x)$

$\therefore h(h(x))=h(x)$

이때, 조건 (가)에서 $h(x)$는 일대일대응이므로 $h(x)=x$

따라서 조건 (나)에 의해 $f(h(x))=f(x)=g(x)$

㉠에 x 대신 10, 20을 각각 대입하면

$h(10)=f(10)+g(10)=2f(10)=10$

$h(20)=f(20)+g(20)=2g(20)=20$

$\therefore f(10)+g(20)=\frac{1}{2}\times(10+20)=15$

65 답 10

$f(f(x))=f(x)$가 성립하려면

첫째, $f(a)=a$이면 $f(f(a))=f(a)=a$가 되어 성립한다.

둘째, $f(a)=b(a\neq b)$이면 $f(f(a))=f(b)=b$이어야 하므로 자기 자신에 대응하지 않는 원소(a)는 자기 자신에 대응하는 원소(b)에 대응해야 한다.

(i) 자기 자신에 대응하는 원소가 3개인 경우

함수 $f(x)=x$의 1개

(ii) 자기 자신에 대응하는 원소가 2개인 경우

자기 자신에 대응하지 않는 한 원소를 정하는 방법의 수가 3가지,

그 원소에 대응하는 원소를 정하는 방법의 수가 2가지이므로

$3\times2=6$(개)

(iii) 자기 자신에 대응하는 원소가 1개인 경우

자기 자신에 대응하는 원소를 정하는 방법의 수가 3가지,

나머지 원소는 모두 자기 자신에 대응하는 원소에 대응해야 하므로 $3\times1=3$(개)

(i)~(iii)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$1+6+3=10$

66 답 ⑤

ㄱ. 조건 (가)에 $x=0$을 대입하면 $f(0)\geq0$

조건 (나)에 $x=0$을 대입하면 $f(y)\geq f(0)+f(y)$에서

$f(0)\leq0$

$\therefore f(0)=0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에 y 대신 $-x$를 대입하면

$f(0)\geq f(x)+f(-x)$

ㄱ에서 $f(0)=0$이므로

$f(x)+f(-x)\leq0$이다.

$\therefore f(x)\leq-f(-x)$ (참)

ㄷ. 조건 (가)에 x 대신 $-x$를 대입하면

$f(-x)\geq-x$, $-f(-x)\leq x$이다.

이제 조건 (가)와 ㄴ에 의하여

$x\leq f(x)\leq-f(-x)\leq x$이므로 $f(x)=x$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

67 답 288

함수 $f: X \longrightarrow Y$는 일대일함수이므로 가능한 함수의 개수는 $4\times3\times2=24$이다.

또한, 합성함수 $g\circ f: X \longrightarrow Z$의 치역이 Z이므로

$\{g(f(1)), g(f(2)), g(f(3))\}=\{1, 2\}$

원소 $g(f(1))$, $g(f(2))$, $g(f(3))$이 $\{1, 2\}$에 대응하는 함수의 개수는 $2\times2\times2=8$이다.
그런데 세 원소 모두 1에 대응하거나 모두 2에 대응할 때 치역은 Z가 아니므로 가능한 함수의 개수는 $8-2=6$이다.
이때, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$의 원소 중 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 아닌 나머지 원소 하나는 1 또는 2 중에 어떤 값에나 대응할 수 있으므로 구하는 순서쌍 (f, g)의 개수는 $24\times6\times2=288$이다.

다른 풀이 : 함수 g의 개수를 직접 구하기

함수 $f: X \longrightarrow Y$는 일대일함수이므로 가능한 함수의 개수는 $4\times3\times2=24$이다.
또한, 합성함수 $g\circ f: X \longrightarrow Z$의 치역이 Z이므로
$\{g(f(1)), g(f(2)), g(f(3))\}=\{1, 2\}$
하나의 함수 f에 대하여 가능한 함수 g의 개수를 구해 보자.
예를 들어 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$일 때,
합성함수 $g\circ f: X \longrightarrow Z$의 치역이 Z이어야 한다.
즉, $\{g(1), g(2), g(3)\}=\{1, 2\}$
위의 조건을 만족시키는 경우는
$g(1)=g(2)=1$, $g(3)=2$ 또는
$g(1)=g(2)=2$, $g(3)=1$ 또는
$g(1)=g(3)=1$, $g(2)=2$ 또는
$g(1)=g(3)=2$, $g(2)=1$ 또는
$g(2)=g(3)=1$, $g(1)=2$ 또는
$g(2)=g(3)=2$, $g(1)=1$
의 6가지이다.
그런데 위의 각각의 경우에 대하여 $g(4)$는 1 또는 2 중 아무 값이나 가능하므로 구하는 순서쌍 (f, g)의 개수는 $24\times6\times2=288$이다.

68 답 ⑤

ㄱ. 양의 실수 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)$라 하자.
주어진 식에서 $f(af(b))=f(af(a))=bf(a)$이고,
$f(af(a))=af(a)$이므로
주어진 식의 b에 a를 대입했어.
$bf(a)=af(a)$이다.
이때, $f(a)>0$이므로 $a=b$이다.
따라서 함수 f는 일대일함수이다. (참)

ㄴ. $f(f(af(b)))=f(bf(a))=af(b)$에 $a=\dfrac{x}{f(1)}$, $b=1$을 대입하면 $f(f(x))=x$이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 함수 f는 일대일대응이므로 역함수 f^{-1}이 존재한다.
또, ㄴ의 $f(f(x))=x$에서
$f^{-1}(f(f(x)))=f^{-1}(x)$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$이다.
$\therefore f=f^{-1}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

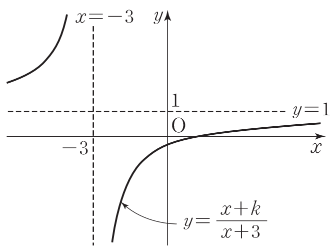
09 유리식과 유리함수

핵심 유형 연습 문제편 p.128~129

01 답 ②

Tip
두 점근선의 교점을 이용하여 그래프의 개형을 그려.

함수 $y=\dfrac{x+k}{x+3}=\dfrac{x+3+k-3}{x+3}=\dfrac{k-3}{x+3}+1$의 그래프의 두 점근선은 $x=-3$, $y=1$이다.
(i) $k-3>0$, 즉 $k>3$일 때 주어진 함수의 그래프는 제 1, 2, 3 사분면만 지난다.
(ii) $k-3<0$, 즉 $k<3$일 때 주어진 함수의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 그래프는 그림과 같아야 한다.



즉, $x=0$일 때, $y<0$이어야 하므로 $\dfrac{k}{3}<0$에서 $k<0$
그래야 제4사분면을 지나.
(i), (ii)에 의하여 정수 k의 최댓값은 -1이다.
참고 $k=3$이면 $y=1$이므로 모든 사분면을 지나지 않는다.

02 답 1

함수 $y=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x+1)-1}{x+1}=\dfrac{-1}{x+1}+1$의 그래프의 점근선이 $x=-1$, $y=1$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-1, 1)$이고,
함수 $y=\dfrac{-x+1}{x-2}=\dfrac{-(x-2)-1}{x-2}=\dfrac{-1}{x-2}-1$의 그래프의 점근선이 $x=2$, $y=-1$이므로
두 점근선의 교점의 좌표는 $(2, -1)$이다.
따라서 평행이동 $f: (x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$에 의하여 점 $(-1, 1)$은 점 $(2, -1)$로 옮겨지므로
$-1+m=2$, $1+n=-1$에서 $m=3$, $n=-2$
$\therefore m+n=1$

다른 풀이 : 평행이동한 함수식을 구하여 계수 비교하기

$y=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 $y=-\dfrac{1}{x-m+1}+1+n$의 그래프가 된다.

이 그래프가 $y=\frac{-x+1}{x-2}=\frac{-(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}-1$의 그래프와 일치하므로 $-m+1=-2$, $1+n=-1$에서
$m=3$, $n=-2$ $\quad\therefore m+n=1$

03 답 6

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}+5$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 그래프이므로
$g(x)=\frac{k}{x-m}+5$
함수 $g(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $(m, 5)$이고
조건 (가)에서 함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점근선의 교점 $(m, 5)$는 직선 $y=x$ 위의 점이다.
$\therefore m=5$, $g(x)=\frac{k}{x-5}+5$

$$f(x)-g(x)=\left(\frac{k}{x}+5\right)-\left(\frac{k}{x-5}+5\right)$$
$$=\frac{k}{x}-\frac{k}{x-5}=\frac{-5k}{x(x-5)}=\frac{5k}{x(5-x)}$$

$0<x<5$에서 $\frac{5k}{x(5-x)}>0$이므로
분모 $x(5-x)$가 최대일 때 $f(x)-g(x)$의 값은 최소이다.
$$x(5-x)=-x^2+5x=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\le\frac{25}{4}$$
이므로 $f(x)-g(x)$는 $x=\frac{5}{2}$일 때 최댓값 $\frac{5k}{\frac{25}{4}}=\frac{4k}{5}$를 갖는다.
또한, 조건 (나)에서 $\frac{4k}{5}=4$이므로 $k=5$
따라서 $g(x)=\frac{5}{x-5}+5$이고 $g(10)=\frac{5}{10-5}+5=6$

다른 풀이 : k가 상수임을 이용하여 m의 값 구하기

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}+5$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 그래프이므로
$g(x)=\frac{k}{x-m}+5$
조건 (가)의
$g(a)=b$에서 $\frac{k}{a-m}+5=b$ ⋯ ㉠
$g(b)=a$에서 $\frac{k}{b-m}+5=a$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $k=\underline{(b-5)(a-m)=(a-5)(b-m)}$
전개하여 인수분해하자.
$ab-bm-5a+5m=ab-am-5b+5m$
$(a-b)m-5(a-b)=0$, $(a-b)(m-5)=0$
$a\ne b$이므로 $m=5$
(이하 동일)

04 답 2

Tip
함수 $f(x)$의 역함수의 그래프 위의 한 점을 알면 함수 $f(x)$의 그래프 위의 한 점을 알 수 있어.

함수 $f(x)=\frac{x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로
$f(2)=\frac{2+b}{2+a}=3$ $\quad\therefore 3a-b=-4$ ⋯ ㉠
또, 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로
함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(3, 2)$를 지난다.
$f(3)=\frac{3+b}{3+a}=2$ $\quad\therefore 2a-b=-3$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$
$\therefore a^2+b^2=2$

05 답 21

$f(x)=\frac{6x+b}{x-a}=\frac{6(x-a)+6a+b}{x-a}=\frac{6a+b}{x-a}+6$에서
함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $(a, 6)$이다.
한편, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 $(6, a)$이고,
함수 $y=f(x-a)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로 함수 $y=f(x-a)+b$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $(2a, 6+b)$이다.
이때, 주어진 조건에 의하여 점 $(6, a)$와 점 $(2a, 6+b)$가 같으므로 $a=3$, $b=-3$
따라서 $f(x)=\frac{6x-3}{x-3}$이므로
$f(4)=\frac{6\times4-3}{4-3}=21$

06 답 ⑤

$f(x)=\frac{2x-3}{x-2}=\frac{1}{x-2}+2$이고
$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{1}{\frac{2x-3}{x-2}-2}+2$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{x-2}}+2=x-2+2=x$$
이므로 $y=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=f(x)=\frac{1}{x-2}+2$
따라서 $y=(f\circ f\circ f)(x)=f(x)$의 두 점근선은 $x=2$, $y=2$이고,
두 점근선의 교점은 $(2, 2)$이므로 $a=2$, $b=2$
$\therefore a+b=4$

07 답 ④

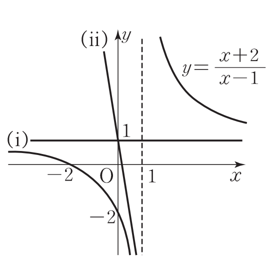
Tip
유리함수의 그래프의 점근선과 m의 값에 관계없이 직선이 지나는 점을 먼저 구해.

$y=\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+1$이므로

$y=\frac{x+2}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, 직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$을 지나므로

함수 $y=\frac{x+2}{x-1}$의 그래프가 직선 $y=mx+1$과 만나지 않으려면



(i) 직선이 $y=1$일 때, $m=0$

(ii) $y=\frac{x+2}{x-1}$와 $y=mx+1$에서

$\frac{x+2}{x-1}=mx+1$

$x+2=mx^2+(1-m)x-1$

즉, 이차방정식

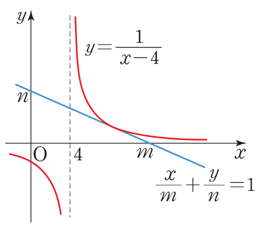
$mx^2-mx-3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=m^2+12m<0$, $m(m+12)<0$

$\therefore -12<m<0$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m의 값의 범위는 $-12<m\le 0$이므로 구하는 정수 m은 $-11, -10, \cdots, -1, 0$의 12개이다.

08 답 10



곡선 $y=\frac{1}{x-4}$과 직선

$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, 즉 $y=n\left(1-\frac{x}{m}\right)$가

한 점에서 만나므로

$\frac{1}{x-4}=n\left(1-\frac{x}{m}\right)$

$\frac{m}{x-4}=n(m-x)$

$\frac{m}{n}=(x-4)(m-x)$

$(x-m)(x-4)+\frac{m}{n}=0$

$x^2-(m+4)x+4m+\frac{m}{n}=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(m+4)^2-4\left(4m+\frac{m}{n}\right)=0$

$m^2-8m+16-\frac{4m}{n}=0 \cdots$ ㉠

한편, 직선 $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$과 좌표축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}mn=8 \qquad \therefore mn=16 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m^2-8m+16-\frac{m^2}{4}=0$, $4m^2-32m+64-m^2=0$

$3m^2-32m+64=0$, $(3m-8)(m-8)=0$

이때, m은 자연수이므로 $m=8$

㉡에 대입하면 $n=2$

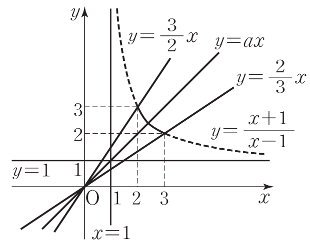
$\therefore m+n=8+2=10$

09 답 ④

$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\underline{\frac{2}{x-1}+1}$

$x=2$일 때, $y=3$이고 $x=3$일 때, $y=2$

따라서 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



$y=ax$의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 그림에서

두 그래프가 만나기 위한 a의 값의 범위는 $\frac{2}{3}\le a\le\frac{3}{2}$

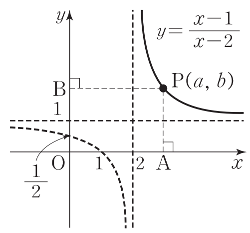
따라서 $M=\frac{3}{2}$, $m=\frac{2}{3}$이므로 $M-m=\frac{5}{6}$

10 답 5

Tip
$\overline{PA}+\overline{PB}$의 최솟값, 즉 점 P의 좌표의 합의 최솟값을 구해야 해.

$y=\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+1$ $(x>2)$이므로 함수

$y=\frac{x-1}{x-2}$ $(x>2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $\overline{PA}=b=\frac{1}{a-2}+1$,

$\overline{PB}=a$이므로

$\overline{PA}+\overline{PB}=\frac{1}{a-2}+1+a$

$=\frac{1}{a-2}+(a-2)+3$

이때, $a>2$에서 $a-2>0$, $\frac{1}{a-2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{a-2}+(a-2)+3\ge 2\sqrt{\frac{1}{a-2}\times(a-2)}+3=5$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{a-2}=a-2\text{일 때 성립}\right)$

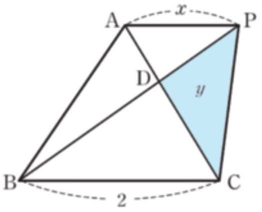
따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 최솟값은 5이다.

11 답 5

$\overline{AP}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 $\triangle APD \backsim \triangle CBD$

$\therefore\ \underline{\overline{PD} : \overline{BD} = x : 2}$

$\triangle CPD : \triangle CDB = x : 2$
$\triangle CPD : \triangle CPB = x : (x+2)$



이때, $\triangle PBC = \triangle ABC = 3$이므로

$\triangle PCD = \dfrac{x}{x+2} \times \triangle PBC$

$\therefore\ y = \dfrac{3x}{x+2}\ (x \geq 0)$

따라서 $a=3$, $b=0$, $c=2$이므로 $a+b+c=3+0+2=5$

12 답 10

곡선 $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c} = \dfrac{b-ac}{x+c} + a$의 한 점근선 $x=-c$는

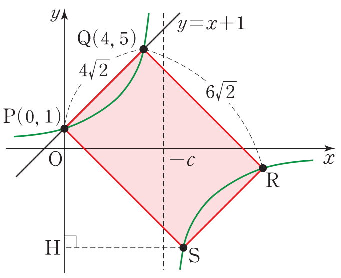
$c<0$이므로 $x>0$인 부분에 있다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$의 교점이 $P(0, 1)$, $Q(4, 5)$이고,

곡선 $y=f(x)$ 위의 다른 두 점 R, S와 직사각형을 이루므로

기울기가 -1이고 점 P, Q를 각각 지나는 직선과 $f(x)$의 교점이

S, R이다.



이때, $\overline{PQ} = 4\sqrt{2}$이고 직사각형 PQRS의 넓이가 48이므로

$\overline{PS} = \overline{QR} = 6\sqrt{2}$이다.

점 S에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PS}$의 기울기가 -1이므로 $\triangle PHS$는 빗변의 길이가 $6\sqrt{2}$인

직각이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{PH} = \overline{HS} = 6$이므로 $S(6, -5)$이다.

세 점 $P(0, 1)$, $Q(4, 5)$, $S(6, -5)$가

곡선 $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 위의 점이므로 각각 대입하면

$1 = \dfrac{b}{c}$, $5 = \dfrac{4a+b}{4+c}$, $-5 = \dfrac{6a+b}{6+c}$

세 식을 연립하여 a, b, c의 값을 각각 구하면

$a=0$, $b=c=-5$

$\therefore\ f(x) = -\dfrac{5}{x-5}$

$f^{-1}(-1) = k$라 하면 $f(k) = -1$

$f(k) = -\dfrac{5}{k-5} = -1 \qquad \therefore\ k=10$

$\therefore\ f^{-1}(-1) = 10$

실전 유형 훈련

문제편 p.130~135

13 답 ④

$\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{(a-b)+2b}{a-b} = \dfrac{2b}{a-b} + 1$이므로

$\dfrac{a+b}{a-b} = 2x+1$

$\therefore\ \underbrace{\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}}_{\text{서로 역수야.}} = 2x+1 - \dfrac{1}{2x+1}$

$= \dfrac{4x^2+4x+1-1}{2x+1} = \dfrac{4x(x+1)}{2x+1}$

14 답 10

$\dfrac{3}{a} + \dfrac{3}{b} = \dfrac{16}{a+b}$에서 $\dfrac{3(a+b)}{ab} = \dfrac{16}{a+b}$

$3(a+b)^2 = 16ab$, $3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$

$(3a-b)(a-3b) = 0$

$\therefore\ 3a=b$ 또는 $a=3b$

따라서 $\left(\dfrac{b}{a}, \dfrac{a}{b}\right)$의 값은 $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$ 또는 $\left(\dfrac{1}{3}, 3\right)$이므로

$\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} = 3 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3} \qquad \therefore\ 3\left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}\right) = 3 \times \dfrac{10}{3} = 10$

다른 풀이 : 식을 변형하여 $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}$로 만들기

$\dfrac{3}{a} + \dfrac{3}{b} = \dfrac{16}{a+b}$에서 $\dfrac{3(a+b)}{ab} = \dfrac{16}{a+b}$

$\dfrac{(a+b)^2}{ab} = \dfrac{16}{3}$, $\dfrac{a^2+b^2}{ab} + 2 = \dfrac{16}{3}$

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{16}{3} - 2 \qquad \therefore\ \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{10}{3}$

$\therefore\ 3\left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}\right) = 3 \times \dfrac{10}{3} = 10$

15 답 ②

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x+2} = \dfrac{a(x+2)+b-2a}{x+2} = \dfrac{b-2a}{x+2} + a$에서

$f(x-a) - b = \dfrac{b-2a}{x-a+2} + a - b$이므로

함수 $y = f(x-a) - b$의 그래프의 점근선은

$x = a-2$, $y = a-b$이다.

이때, 함수 $y = |f(x-a) - b|$의 그래프가 y축에 대하여

대칭이므로 함수 $y = f(x-a) - b$의 그래프의 점근선이 $x=0$,

$y=0$이어야 한다.

따라서 $a-2=0$, $a-b=0$이므로 $a=b=2$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{2x+2}{x+2}$

$\therefore\ f(a+b) = f(4) = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

16 답 ⑤

$y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=1$, $y=2$의 교점인 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=x+m$, $y=-x+n$은 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=1+m$, $2=-1+n$에서 $m=1$, $n=3$

$\therefore m+n=4$

17 답 ③

$g(x+5)=\dfrac{f(x+4)}{f(x+4)-1}=\dfrac{\dfrac{g(x)}{g(x)-1}}{\dfrac{g(x)}{g(x)-1}-1}=g(x)$이므로

$g(100)=g(95)=\cdots=g(5)=\dfrac{f(4)}{f(4)-1}=\dfrac{4}{4-1}=\dfrac{4}{3}$

18 답 3

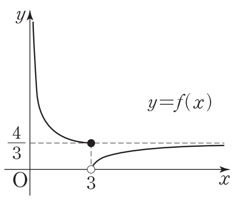
함수 $f(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{3}$ $(0<x\le3)$의 그래프는 점근선이 $x=0$이고

점 $\left(3, \dfrac{4}{3}\right)$를 지나므로 치역은 $f(x)\ge\dfrac{4}{3}$이다.

따라서 함수 $f : X \longrightarrow X$가 일대일대응이려면

$x>a$에서 증가하는 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{x-a}+b$ $(x>3)$의 치역이

$0<f(x)<\dfrac{4}{3}$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=-\dfrac{1}{x-a}+b$의 점근선이 $y=\dfrac{4}{3}$이므로

$b=\dfrac{4}{3}$이고

점 $(3, 0)$을 지나야 하므로

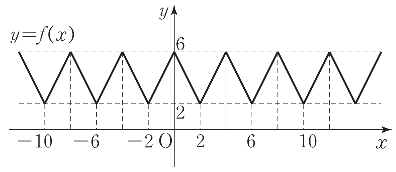
$0=-\dfrac{1}{3-a}+\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{1}{3-a}=\dfrac{4}{3}$

$3=4(3-a)$, $4a=9$ $\qquad \therefore a=\dfrac{9}{4}$

$\therefore ab=\dfrac{9}{4}\times\dfrac{4}{3}=3$

19 답 ④

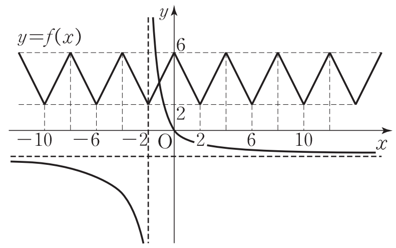
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



또, $y=\dfrac{ax}{x+2}=a-\dfrac{2a}{x+2}$이므로 $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프의

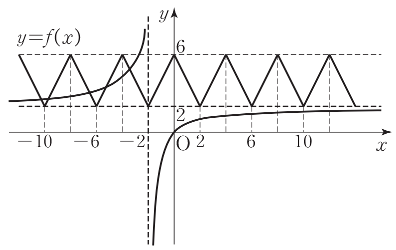
점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=a$이다.

(i) $a<0$일 때



따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프의 교점은 유한 개이다.

(ii) $a>0$일 때



그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프의 교점의 개수가 무수히 많게 되는 a의 값의 범위는 $2\le a\le6$

$y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프의 x축에 평행한 점근선이 $y=2$와 $y=6$, 또는 그 사이일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프가 무수히 많은 점에서 만나.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 정수 a의 값은

2, 3, 4, 5, 6으로 그 합은 20이다.

20 답 ⑤

함수 $y=\dfrac{k}{x-1}+3$에서

$y=0$이면 $-3=\dfrac{k}{x-1}$, $x-1=-\dfrac{k}{3}$

$x=1-\dfrac{k}{3}=\dfrac{3-k}{3}$이므로 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3-k}{3}, 0\right)$

또한, $x=0$이면 $y=3-k$이므로 $\mathrm{B}(0, 3-k)$

함수 $y=\dfrac{k}{x-1}+3$ $(0<k<3)$의 그래프의 두 점근선의 교점을

R라 하면 $\mathrm{R}(1, 3)$

이때, 선분 BP의 중점이 R이므로 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면

$\dfrac{0+a}{2}=1$에서 $a=2$이고

$\dfrac{(3-k)+b}{2}=3$에서 $(3-k)+b=6$, $b=3+k$

즉, $\mathrm{P}(2, 3+k)$이다.

ㄱ. $k=1$이면 $\mathrm{P}(2, 4)$ (참)

ㄴ. $\mathrm{A}\left(\dfrac{3-k}{3}, 0\right)$, $\mathrm{B}(0, 3-k)$에서

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{-(3-k)}{\dfrac{3-k}{3}}=-3$이고

$\mathrm{A}\left(\dfrac{3-k}{3}, 0\right)$, $\mathrm{P}(2, 3+k)$에서

직선 AP의 기울기는 $\dfrac{3+k}{2-\dfrac{3-k}{3}}=\dfrac{3+k}{\dfrac{3+k}{3}}=3$

따라서 두 직선의 기울기의 합은 $-3+3=0$ (참)

ㄷ. 사각형 PBAQ의 넓이는 사다리꼴 PBOQ의 넓이에서 삼각형 OAB의 넓이를 빼서 구할 수 있다.

□PBAQ

$=\dfrac{1}{2}\times\{(3-k)+(3+k)\}\times 2-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3-k}{3}\times(3-k)$

$=6-\dfrac{(3-k)^2}{6}$

이때, $\underline{\text{삼각형 OAB의 넓이는 }\frac{3}{2}\text{보다 작고,}}$

세 점 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 3)$을 연결한 삼각형의 넓이 $\frac{3}{2}$보다 작아.

사각형 PBAQ의 넓이가 자연수이므로 삼각형 OAB의 넓이는 1이어야 한다.

즉, $\dfrac{(3-k)^2}{6}=1$에서 $3-k=\sqrt{6}$ $\quad\therefore k=3-\sqrt{6}$

이때, $2<\sqrt{6}<3$이므로 $0<k<1$이다.

$\mathrm{B}(0, 3-k)$, $\mathrm{P}(2, 3+k)$에서

직선 BP의 기울기는 $\dfrac{(3+k)-(3-k)}{2-0}=\dfrac{2k}{2}=k$

따라서 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21 답 6

함수 $y=\dfrac{bx+a}{x+a}=\dfrac{a-ab}{x+a}+b$의 그래프를 평행이동하면

함수 $y=\dfrac{x+b}{x+6}=\dfrac{b-6}{x+6}+1$의 그래프가 된다.

이때, 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프는 평행이동하여도 k의 값은 같으므로 $a-ab=b-6$이다.

$ab-a+b=6$ $\quad\therefore (a+1)(b-1)=5$

a, b가 자연수이므로 $a+1$, $b-1$은 정수이고

$a+1>1$이므로 $a+1=5$, $b-1=1$에서 $a=4$, $b=2$

$\therefore a+b=4+2=6$

다른 풀이 : 평행이동한 함수의 식과 계수 비교하기

함수 $y=\dfrac{bx+a}{x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 함수

$y=\dfrac{b(x-p)+a}{(x-p)+a}+q=\dfrac{bx-bp+a+q(x-p+a)}{x-p+a}$

$=\dfrac{(b+q)x+(a-bp-pq+aq)}{x-p+a}$의 그래프가 된다.

이 그래프가 $y=\dfrac{x+b}{x+6}$의 그래프와 일치하므로

$-p+a=6$, $b+q=1$, $a-bp+q\underbrace{(-p+a)}_{=6}=b$에서

$a-bp+6q=b$ ⋯ ㉠

$p=a-6$, $q=1-b$를 ㉠에 대입하면

$a-b(a-6)+6(1-b)=b$

$ab-a+b=6$ $\qquad\therefore (a+1)(b-1)=5$

(이하 동일)

22 답 ⑤

방정식 $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))=1$이므로

$g(x)$의 정의에 의해 $f^{-1}(x)$의 값이 정수가 되는 자연수 x의 값을 찾아야 한다.

$y=\dfrac{x+14}{2x-8}$의 x, y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$x=\dfrac{y+14}{2y-8}$

$2xy-8x=y+14$, $(2x-1)y=8x+14$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{8x+14}{2x-1}=\dfrac{18}{2x-1}+4$

$\dfrac{18}{2x-1}+4$의 값이 정수가 되려면 $2x-1$은 18의 약수이어야 한다.

x가 자연수이므로 $2x-1$은 홀수인 자연수이고,

$2x-1$이 $\underbrace{18}_{18=2\times 3^2}$의 홀수인 약수이다.

$2x-1$의 값이 1, 3, 9인 경우의 x의 값은 각각 1, 2, 5이므로

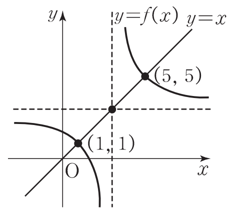
모든 자연수 x의 값의 합은 $1+2+5=8$

23 답 7

조건 (나)에서 $f(f(x))=x$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또한, 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(1, 1)$, $(5, 5)$를 지나므로 그림과 같이 두 점근선의 교점이 $(3, 3)$임을 알 수 있다.



따라서 $\underline{f(x)=\dfrac{3x+k}{x-3}}$이고

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프에서 점근선은 $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$야.

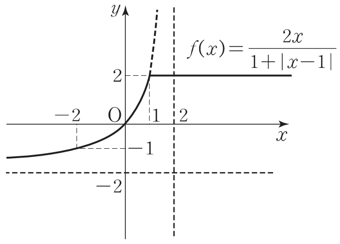
$f(1)=\dfrac{3+k}{-2}=1$에서 $k=-5$이므로 $f(x)=\dfrac{3x-5}{x-3}$

$\therefore f(4)=\dfrac{3\times 4-5}{4-3}=7$

24 답 ①

$f(x)=\dfrac{2x}{1+|x-1|}=\begin{cases} 2 & (x\ge 1) \\ \dfrac{2x}{2-x} & (x<1) \end{cases}$에서

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 함수 $y=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면

$-2<f(x)\le 2$이므로 $y=f(t)\ (-2<t\le 2)$이다.

따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)=f(t)$는 $t=2$, 즉 $f(x)=2$인 x에 대하여 최댓값 2를 갖는다.

25 답 4

$h(x)=g(x+a)+2$에서 함수 $h(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $h^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore h^{-1}(x)=f(x-2)-a$

그런데 $h^{-1}(x)=f(x+b)+2$이므로

$a=b=-2$

$\therefore ab=4$

다른 풀이 : $h(h^{-1}(x))=x$, $g^{-1}(x)=f(x)$임을 이용하기

$h(x)=g(x+a)+2$에 x 대신 $h^{-1}(x)$를 대입하면

$\underline{x}=g(h^{-1}(x)+a)+2$

$\because h(h^{-1}(x))=x$

$g(h^{-1}(x)+a)=x-2$

$h^{-1}(x)+a=\underline{f(x-2)}$

$\because g^{-1}(x)=f(x)$

$h^{-1}(x)=f(x-2)-a=f(x+b)+2$

따라서 $a=b=-2$이므로 $ab=4$

26 답 12

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 유리함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$b=\dfrac{3}{a}$에서 $ab=3\ (a>0,\ b>0)$

또, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 직선 $x+y=0$ 사이의 거리가 3이므로

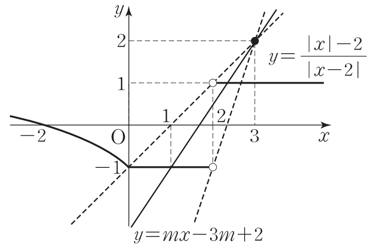
$\dfrac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3$에서 $a+b=3\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(3\sqrt{2})^2-2\times 3=18-6=12$

27 답 4

$y=\dfrac{|x|-2}{|x-2|}=\begin{cases} 1 & (x>2) \\ -1 & (0\le x<2) \\ \dfrac{x+2}{x-2} & (x<0) \end{cases}$ 이므로 함수 $y=\dfrac{|x|-2}{|x-2|}$의

그래프는 다음과 같다.



이때, 직선 $y=mx-3m+2=m(x-3)+2$는 점 $(3,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이므로 함수 $y=\dfrac{|x|-2}{|x-2|}$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 직선의 기울기 m의 값의 범위는

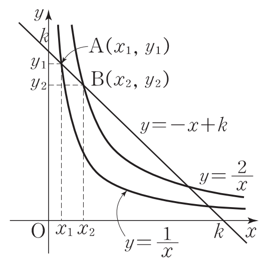
$\underline{1<m<3}$이다.

m의 범위는 $(3,\ 2)$와 두 점 $(2,\ 1)$, $(2,\ -1)$을 각각 이은 선분의 기울기 사이야.

따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $a+b=4$이다.

28 답 ⑤

직선 $y=-x+k\ (k\ge 3)$가 두 유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 만나는 점 중 y축에 가까운 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$는 다음과 같다.



ㄱ. 직선의 $\underline{기울기가\ -1}$이므로 $x_2-x_1=y_1-y_2$ (참)

(기울기)$=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$

ㄴ. 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$이 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$y_1=\dfrac{1}{x_1}$ $\quad\therefore x_1y_1=1$

점 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$가 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$y_2=\dfrac{2}{x_2}$ $\quad\therefore x_2y_2=2$

$\therefore x_1y_1<x_2y_2$ (참)

ㄷ. 두 직선 OA, OB의 기울기를 비교하면

$\dfrac{y_2}{x_2}<\dfrac{y_1}{x_1}$이고 $x_1x_2>0$이므로 양변에 x_1x_2를 곱하면

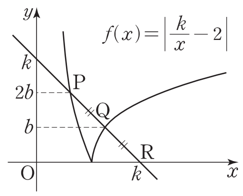
$x_1y_2<x_2y_1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이 : 두 점 A, B의 좌표를 각각 비교하기

ㄷ. $0<x_1<x_2$, $0<y_2<y_1$이므로 $0<x_1y_2<x_2y_1$ (참)

29 답 ②



$$f(x)=\begin{cases}\frac{k}{x}-2 & \left(0<x\le\frac{k}{2}\right)\\ 2-\frac{k}{x} & \left(x>\frac{k}{2}\right)\end{cases}$$

점 Q는 함수 $y=2-\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

점 Q의 y좌표를 b $(b>0)$라 하면

$b=2-\frac{k}{x}$에서 $x=\frac{k}{2-b}$, 즉 $\mathrm{Q}\left(\frac{k}{2-b},\ b\right)$

점 P는 함수 $y=\frac{k}{x}-2$의 그래프 위의 점이고

점 P의 y좌표는 점 Q의 y좌표의 2배이므로

$2b=\frac{k}{x}-2$에서 $x=\frac{k}{2b+2}$, 즉 $\mathrm{P}\left(\frac{k}{2b+2},\ 2b\right)$

점 R의 x좌표는 k이고

주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이므로 세 점 P, Q, R는 이 순서대로 x좌표의 차가 같다.

즉, $\frac{k}{2-b}-\frac{k}{2b+2}=k-\frac{k}{2-b}$

$(2b+2)-(2-b)=(2b+2)(2-b)-(2b+2)$

$3b=-2b^2+2b+4-(2b+2)$

$2b^2+3b-2=0$, $(2b-1)(b+2)=0$

$\therefore b=\frac{1}{2}$ $(\because b>0)$

이 값을 $\mathrm{Q}\left(\frac{k}{2-b},\ b\right)$에 대입하면 $\mathrm{Q}\left(\frac{2k}{3},\ \frac{1}{2}\right)$이고,

이를 직선의 방정식 $x+y=k$에 대입하면

$\frac{2k}{3}+\frac{1}{2}=k$, $\frac{1}{3}k=\frac{1}{2}$ $\qquad\therefore k=\frac{3}{2}$

다른 풀이 : 이차방정식의 근의 공식 이용하기

$$f(x)=\begin{cases}\frac{k}{x}-2 & \left(0<x\le\frac{k}{2}\right)\\ 2-\frac{k}{x} & \left(x>\frac{k}{2}\right)\end{cases}$$

점 P의 x좌표를 a $\left(0<a\le\frac{k}{2}\right)$라 하면

점 P는 함수 $y=\frac{k}{x}-2$의 그래프와 직선 $x+y=k$의 교점이므로

$\frac{k}{x}-2=k-x$, $x^2-(k+2)x+k=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$a=\frac{k+2-\sqrt{k^2+4}}{2}$ $\left(\because a\le\frac{k}{2}\right)$

점 Q의 x좌표를 b $\left(b>\frac{k}{2}\right)$라 하면

점 Q는 함수 $y=2-\frac{k}{x}$의 그래프와 직선 $x+y=k$의 교점이므로

$2-\frac{k}{x}=k-x$, $x^2-(k-2)x-k=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$b=\frac{k-2+\sqrt{k^2+4}}{2}$ $\left(\because b>\frac{k}{2}\right)$

점 R의 x좌표는 k이고

주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이므로

$b-a=k-b$, 즉

$\frac{k-2+\sqrt{k^2+4}}{2}-\frac{k+2-\sqrt{k^2+4}}{2}=k-\frac{k-2+\sqrt{k^2+4}}{2}$

$-2+\sqrt{k^2+4}=\frac{k+2-\sqrt{k^2+4}}{2}$

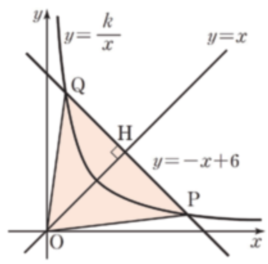
$-4+2\sqrt{k^2+4}=k+2-\sqrt{k^2+4}$

$3\sqrt{k^2+4}=k+6$, $9k^2+36=k^2+12k+36$

$8k^2-12k=0$, $4k(2k-3)=0$

$\therefore k=\frac{3}{2}$ $(\because k>0)$

30 답 ③



원점 O에서 직선 $y=-x+6$에 내린 수선의 발을 H라 하면

직선 OH와 직선 $y=-x+6$은 서로 수직이므로 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

따라서 직선 OH의 방정식은 $y=x$이고, 점 H의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

한편, 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+6$은 모두

직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

선분 OH는 삼각형 OPQ의 중선이고 무게중심 G는 선분 OH를 $2:1$로 내분하는 점이므로 $\mathrm{G}(2,\ 2)$이다.

점 $\mathrm{G}(2,\ 2)$가 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\frac{k}{2}$ $\qquad\therefore k=4$

이때, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2 $(x_1>x_2)$라 하면

x_1, x_2는 방정식 $\frac{4}{x}=-x+6$, 즉 $x^2-6x+4=0$의 두 근이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=6$, $x_1x_2=4$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}(x_1-x_2)$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=$(두 점 P, Q의 x좌표의 차)$\times\sqrt{2}$

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=6^2-4\times4=20$이므로

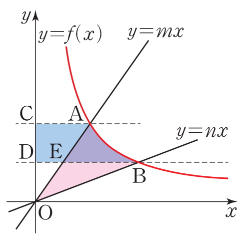
$x_1-x_2=2\sqrt{5}$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{10}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times3\sqrt{2}=6\sqrt{5}$

31 답 3

두 선분 OA와 BD의 교점을 E라 하자.



두 점 A, B의 좌표를 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$라 하면

두 점이 함수 $f(x)=\frac{k}{x}$ 위의 점이므로

$x_1y_1=k$, $x_2y_2=k$

이때, $\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}x_1y_1$, $\triangle\mathrm{OBD}=\frac{1}{2}x_2y_2$이므로

$\triangle\mathrm{OAC}=\triangle\mathrm{OBD}=\frac{1}{2}k$

$\therefore \square\mathrm{ACDE}=\triangle\mathrm{OBE}$

$\triangle\mathrm{OAC}-\triangle\mathrm{OED}=\triangle\mathrm{OBD}-\triangle\mathrm{OED}$

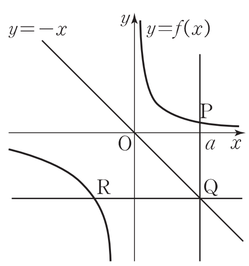
따라서 도형 ACDB의 넓이는 도형 OAB의 넓이와 같으므로

그 넓이는 3이다.

32 답 9

점 P의 x좌표를 a라 하자.

(i) $a>0$일 때



$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{2}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ -a)$, $\mathrm{R}\left(-\frac{8}{a},\ -a\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=a+\frac{2}{a}$, $\overline{\mathrm{QR}}=a+\frac{8}{a}$

$\therefore \triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$

$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(a+\frac{8}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+10\right)$

$\geq\frac{1}{2}\left(2\sqrt{a^2\times\frac{16}{a^2}}+10\right)=9$

(단, 등호는 $a=2$일 때 성립)

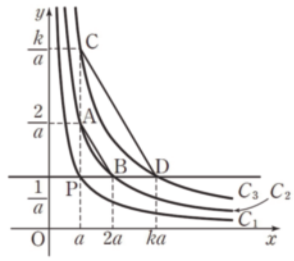
따라서 $a=2$일 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은 9이다.

(ii) $a<0$일 때

$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{8}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ -a)$, $\mathrm{R}\left(-\frac{2}{a},\ -a\right)$이므로 (i)과 같은 방법으로 하면 $a=-2$일 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은 9이다.

(i), (ii)에 의하여 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은 9이다.

33 답 ④



그림과 같이 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$ $(a>0)$이라 하면

네 점 A, B, C, D의 좌표는

$\mathrm{A}\left(a,\ \frac{2}{a}\right)$, $\mathrm{B}\left(2a,\ \frac{1}{a}\right)$, $\mathrm{C}\left(a,\ \frac{k}{a}\right)$, $\mathrm{D}\left(ka,\ \frac{1}{a}\right)$이다.

ㄱ. (선분 AB의 기울기)$=\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{2}{a}}{2a-a}=-\frac{1}{a^2}$

(선분 CD의 기울기)$=\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{k}{a}}{ka-a}=\frac{1-k}{(k-1)a^2}=-\frac{1}{a^2}$

이므로 선분 AB와 선분 CD는 평행하다. (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{\overline{\mathrm{PB}}}=\frac{ka-a}{2a-a}=k-1$

$k=3$이면 $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=3-1=2$에서 $\overline{\mathrm{CD}}=2\overline{\mathrm{AB}}$ (거짓)

ㄷ. $\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{PA}}=\frac{1}{2}\times a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ (참)

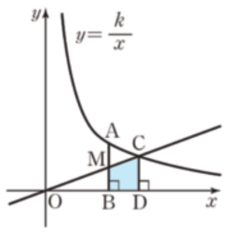
a의 값에 관계없이 넓이가 일정해.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

34 답 16

함수 $y=\frac{k}{x}$ $(x>0,\ k>0)$의 그래프 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$와 점 P에서 x축에 내린 수선의 발 Q에 대하여 삼각형 OPQ의 넓이는 $\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}pq=\frac{k}{2}$로 일정하다.

k는 상수이므로 일정한 값이야.



즉, 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 두 점 A, C에 대하여

$\triangle$OAB$=\triangle$OCD$=\frac{k}{2}$이고

$\triangle$OAB$=\triangle$OMB$+\triangle$OAM ⋯ ㉠

$\triangle$OCD$=\triangle$OMB$+\square$BDCM ⋯ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $\underbrace{0}_{\frac{k}{2}-\frac{k}{2}=0}=\triangle$OAM$-\square$BDCM이므로

$\square$BDCM$=\triangle$OAM$=\frac{1}{2}\triangle$OAB ($\because \overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}$)

$=\frac{k}{4}=4$

$\therefore k=16$

35 답 ②

두 양수 a, b에 대하여 두 점 P, Q의 좌표를 각각

$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{4}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-b,\ -\frac{4}{b}\right)$라 하면 네 점 A, B, C, D의 좌표는

$\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{4}{a}\right)$, $\mathrm{C}(-b,\ 0)$, $\mathrm{D}\left(0,\ -\frac{4}{b}\right)$

이때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}$

$=\frac{1}{2}\times(a+b)\times\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}+4\right)$

$=4+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$

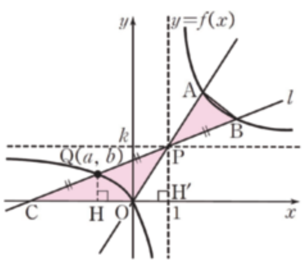
$a>0$, $b>0$이므로 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore S=4+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq 4+2\times 2=8$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최솟값은 8이다.

36 답 20



직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 Q$(a,\ b)$라 하자.

두 삼각형 APB, OPQ는 서로 합동이고, $S_2=2S_1$이므로

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{CQ}}$ ⋯ ㉠

한편, 두 점 Q, P에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 두 삼각형 CQH, CPH′은 닮음비가 1 : 2인 닮은 삼각형이고,

P$(1,\ k)$이므로 $b=\frac{k}{2}=f(a)$

즉, $\frac{k}{2}=\frac{k}{a-1}+k$이므로 $a=-1$

$\therefore \mathrm{Q}\left(-1,\ \frac{k}{2}\right)$

또한, ㉠에 의하여 $\underbrace{\mathrm{C}(-3,\ 0)}_{\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{HH'}}=2,\ \mathrm{H}(-1,\ 0)\text{이므로 }\mathrm{C}(-3,\ 0)\text{이야.}}$이고 두 점 C, Q를 지나는

직선 l의 방정식은 $y=\frac{\frac{k}{2}-0}{-1-(-3)}(x+3)$, $y=\frac{k}{4}(x+3)$,

$kx-4y+3k=0$이고 원점과 직선 l 사이의 거리가 1이므로

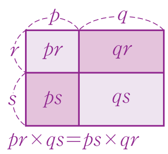
$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+16}}=1$에서 $(3k)^2=k^2+16$, $8k^2=16$, $k^2=2$

$\therefore 10k^2=20$

37 답 12

직사각형의 각 사분면에 속한 부분의 넓이가 제 1 사분면부터 차례로 $\underbrace{3}_{\because\, xy=3}$, a, 4, b이고 직사각형의 성질에 의해

$a\times b=3\times 4=12$



38 답 ⑤

곡선 $y=\frac{2}{x}$ 위의 점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2}{t}\right)$라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$에서 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(2t,\ \frac{4}{t}\right)$이고

$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{4}{t}\right)$, $\mathrm{D}(2t,\ 0)$이다.

ㄱ. 곡선 위의 점 A의 y좌표가 $\frac{4}{t}$이므로 $\frac{4}{t}=\frac{2}{x}$에서

$x=\frac{t}{2}$, 즉 $\mathrm{A}\left(\frac{t}{2},\ \frac{4}{t}\right)$

이때, $\overline{\mathrm{BA}}=\frac{t}{2}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=2t-\frac{t}{2}=\frac{3}{2}t$이므로

$\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{AQ}}=1:3$ ⋯ ㉠ (참)

ㄴ. 곡선 위의 점 C의 x좌표가 $2t$이므로 $y=\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}$

즉, $\mathrm{C}\left(2t,\ \frac{1}{t}\right)$

이때, $\overline{\mathrm{DC}}=\frac{1}{t}$, $\overline{\mathrm{CQ}}=\frac{4}{t}-\frac{1}{t}=\frac{3}{t}$이므로

$\overline{\mathrm{DC}}:\overline{\mathrm{CQ}}=1:3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 △QAC∽△QBD이므로 선분 AC와 선분 BD는 평행하다. (참)
SAS 닮음

ㄷ. (ⅰ) 점 P는 직사각형 OBQD의 대각선 OQ의 중점이므로 대각선 BD의 중점이다. 따라서 점 P는 직선 BD 위의 점이다.

(ⅱ) $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{4}{t}\right)$, $\mathrm{D}(2t,\ 0)$에서 직선 BD의 방정식은

$\frac{x}{2t}+\frac{y}{\frac{4}{t}}=1$, 즉 $\frac{x}{2t}+\frac{ty}{4}=1$

직선 $\frac{x}{2t}+\frac{ty}{4}=1$과 곡선 $y=\frac{2}{x}$를 연립하여 y를 소거하면

$\frac{x}{2t}+\frac{t}{2x}=1$에서 $x^2+t^2=2tx$, $x^2-2tx+t^2=0$

이때, 방정식 $x^2-2tx+t^2=(x-t)^2=0$은 중근을 가지므로 직선 $\frac{x}{2t}+\frac{ty}{4}=1$은 점 $\left(t,\ \frac{2}{t}\right)$에서 곡선 $y=\frac{2}{x}$와 접한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 직선 BD는 곡선 $y=\frac{2}{x}$와 점 P에서 접한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

39 답 4

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$이라 하면 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{t},\ t\right)$이다.

삼각형 OAB가 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$에서 $t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t}-t\right)^2$

$t^2+\frac{1}{t^2}=2t^2+\frac{2}{t^2}-4 \qquad \therefore t^2+\frac{1}{t^2}=4$

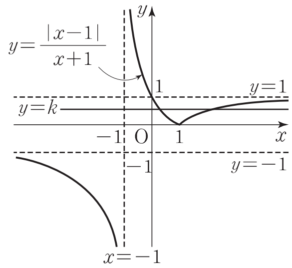
즉, $\overline{\mathrm{OA}}^2=4$에서 $\overline{\mathrm{OA}}=2$이므로 원의 반지름의 길이는 2이다.

따라서 원의 넓이는 4π이므로 $a=4$

40 답 1

주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=\frac{|x-1|}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다. ⓐ

이때, $y=\frac{|x-1|}{x+1}=\begin{cases}\frac{x-1}{x+1} & (x\ge 1)\\ \frac{-x+1}{x+1} & (x<1)\end{cases}$ 이므로 함수의 그래프는 다음과 같다.



ⓑ

즉, 함수 $y=\frac{|x-1|}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2이려면 $0<k<1$이어야 한다.

따라서 $a=0$, $b=1$이므로 $a^2+b^2=1$ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 방정식의 실근과 그래프 사이의 관계를 파악한다. [30%]

ⓑ x의 값의 범위에 따라 $y=\frac{|x-1|}{x+1}$의 그래프를 그린다. [40%]

ⓒ k의 값의 범위를 구하고 a^2+b^2의 값을 구한다. [30%]

41 답 11

$f(x)=\frac{bx+c}{a-x}=\frac{-b(a-x)+ab+c}{a-x}=\frac{ab+c}{a-x}-b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a$, $y=-b$이므로

$a=d$ ⋯ ㉠이고 $-b=-3$에서 $b=3$이다. ⓐ

또, $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$을 지나므로

$f(1)=\frac{1}{4}$에서

$\frac{1}{4}=\frac{b+c}{a-1}$, $a-1=4b+4c=12+4c$

$\therefore a-4c=13$ ⋯ ㉡

$f^{-1}(1)=\frac{7}{4}$에서 $f\left(\frac{7}{4}\right)=1$이므로

$1=\frac{\frac{7}{4}b+c}{a-\frac{7}{4}}=\frac{7b+4c}{4a-7}$

$4a-7=7b+4c=21+4c$, $4a-4c=28$

$\therefore a-c=7$ ⋯ ㉢ ⓑ

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=5$, $c=-2$, $d=5$

$\therefore a+b+c+d=5+3+(-2)+5=11$ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ a, d 사이의 관계식과 b의 값을 구한다. [30%]

ⓑ a, c 사이의 관계식을 구한다. [40%]

ⓒ 연립방정식을 풀고 $a+b+c+d$의 값을 구한다. [30%]

42 답 12

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{2}{a}+1\right)$ $(a>0)$, 선분 OA의 중점을 $\mathrm{M}(1,\ 0)$이라 하면 삼각형의 중선정리에 의해

$$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{OM}^2)$$
$$=2\left\{(a-1)^2+\left(\frac{2}{a}+1\right)^2+1^2\right\}$$
$$=2\left\{a^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2-2\left(a-\frac{2}{a}\right)+3\right\}$$
$$=2\left\{\left(a-\frac{2}{a}\right)^2+4-2\left(a-\frac{2}{a}\right)+3\right\}$$
$$=2\left\{\left(a-\frac{2}{a}\right)^2-2\left(a-\frac{2}{a}\right)+7\right\} \quad \cdots\cdots ⓐ$$

이때, $a-\frac{2}{a}=A$라 하면

$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=2(A^2-2A+7)=2\{(A-1)^2+6\}$

따라서 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$은 $A=1$일 때, 최솟값 12를 갖는다. ⋯⋯ ⓑ

일등급 UP에 의해 $a=2$일 때야.

| 채점기준 |

ⓐ 점 P의 x좌표를 a라 하고 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$을 a에 대하여 나타낸다. ⋯⋯ [60%]

ⓑ $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$의 최솟값을 구한다. ⋯⋯ [40%]

일등급 UP

*** $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$의 최솟값**

$A=1$에서 $a-\frac{2}{a}=1$, 즉 $a^2-a-2=0$

$(a-2)(a+1)=0$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>0)$

따라서 점 P의 좌표가 $(2, 2)$일 때 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$의 최솟값은 12이다.

고난도 도전 문제

문제편 p.136~137

43 답 ⑤

$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+2$이므로

함수 $f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=2$

한편, 원 $C:(x+1)^2+(y-2)^2=r^2$의 중심의 좌표가

$(-1, 2)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점과 같다.

ㄱ. 원 C와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 접할 때,

$(x+1)^2+\left(-\frac{3}{x+1}+2-2\right)^2=r^2$

$(x+1)^2+\frac{9}{(x+1)^2}=r^2$

$(x+1)^4-r^2(x+1)^2+9=0$

$(x+1)^2=X$라 하면

$X^2-r^2X+9=0$

이때, X에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=r^4-36=0$, $(r^2+6)(r^2-6)=0$

$(r+\sqrt{6})(r-\sqrt{6})(r^2+6)=0$

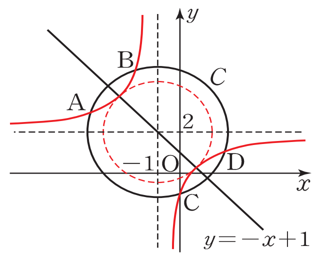
$\therefore r=\sqrt{6}$

그러므로 $r=\sqrt{6}$이면 원 C와 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나므로

접하므로

원 C와 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 네 점에서 만나려면

$r>\sqrt{6}$이어야 한다. (참)



ㄴ. 원 C와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 모두 점 $(-1, 2)$에 대하여 대칭이므로

교점 A와 D, B와 C는 각각 점 $(-1, 2)$에 대하여 대칭이다.

즉, $\frac{x_1+x_4}{2}=-1$, $\frac{x_2+x_3}{2}=-1$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=(-2)+(-2)=-4$ (참)

ㄷ. 원 C와 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 모두 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이므로

기울기가 ±1이고 점 $(-1, 2)$를 지나는 직선에 대하여 대칭이야.

두 교점 A, B도 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선 AB의 기울기는 1이고,

$\overline{AB}=2\sqrt{2}$에서 $x_2-x_1=2$, $y_2-y_1=2$

$y_2-y_1=2$에서

$\left(-\frac{3}{x_2+1}+2\right)-\left(-\frac{3}{x_1+1}+2\right)=2$

$-\frac{3}{x_2+1}+\frac{3}{x_1+1}=2$, $\frac{3(x_2+1)-3(x_1+1)}{(x_2+1)(x_1+1)}=2$

$3(x_2-x_1)=2(x_2+1)(x_1+1)$

$x_2-x_1=2$이므로

$6=2(x_2+1)(x_1+1)$, $(x_2+1)(x_1+1)=3$

$x_2=x_1+2$를 대입하여 정리하면

$(x_1+3)(x_1+1)=3$, $x_1^2+4x_1=0$, $x_1(x_1+4)=0$

$\therefore x_1=-4\ (\because x_1<0)$, $y_1=-\frac{3}{-4+1}+2=1+2=3$

즉, $A(-4, 3)$이므로 원 C: $(x+1)^2+(y-2)^2=r^2$에 대입하면

$r^2=(-3)^2+1^2=10$

따라서 원 C의 넓이는 10π이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

44 답 25

곡선 $y=-\frac{3}{x-1}$과 직선 $y=x+k$를 모두 x축의 방향으로

-1만큼 평행이동해도 삼각형의 넓이는 변하지 않으므로

평행이동하여 세 점 A, B, C에 대응하는 점을 각각

A′, B′, C′이라 하자.

곡선 $y=-\frac{3}{x-1}$과 직선 $y=x+k$를 모두 x축의 방향으로

-1만큼 평행이동시키면

$y=-\dfrac{3}{(x+1)-1}=-\dfrac{3}{x}$, $y=(x+1)+k=x+k+1$이고

곡선 $y=-\dfrac{3}{x}$과 직선 $y=x+k+1$은 모두 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

즉, 곡선 $y=-\dfrac{3}{x}$과 직선 $y=x+k+1$이 제4사분면에서 만나는 한 점을 $\mathrm{A'}\left(a,\ -\dfrac{3}{a}\right)$ $(a>0)$이라 하면

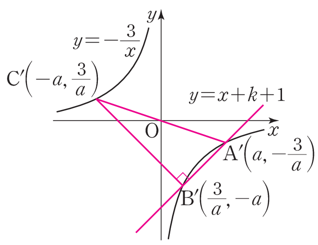
$\mathrm{B'}$은 점 $\mathrm{A'}$과 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{B'}\left(\dfrac{3}{a},\ -a\right)$이다.

또한, $\angle \mathrm{A'B'C'}=90°$이고 곡선 $y=-\dfrac{3}{x}$ 위에 있는 점 $\mathrm{C'}$은 점 $\mathrm{B'}$과 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{C'}\left(-a,\ \dfrac{3}{a}\right)$이다.

이때, $\overline{\mathrm{A'B'}}=\underbrace{\sqrt{2}\left|a-\dfrac{3}{a}\right|}_{}$, $\overline{\mathrm{B'C'}}=\sqrt{2}\left|a+\dfrac{3}{a}\right|$이고

(두 점의 x좌표의 차 또는 y좌표의 차)$\times\sqrt{2}$



삼각형 $\mathrm{A'B'C'}$의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A'B'}}\times\overline{\mathrm{B'C'}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\left|a-\frac{3}{a}\right|\times\sqrt{2}\left|a+\frac{3}{a}\right|$$
$$=\left|a^2-\left(\frac{3}{a}\right)^2\right|=8$$

(i) $a>\dfrac{3}{a}$일 때,

$\left|a^2-\left(\dfrac{3}{a}\right)^2\right|=a^2-\left(\dfrac{3}{a}\right)^2=8$, $a^4-8a^2-9=0$

$(a^2-9)(a^2+1)=0$, $a^2=9$

$a>0$이므로 $a=3$이고 $a>\dfrac{3}{a}$을 만족시킨다.

$\therefore \mathrm{A'}(3,\ -1)$

이때, $\mathrm{A'}(3,\ -1)$은 직선 $y=x+k+1$ 위의 점이므로

$-1=3+k+1 \qquad \therefore k=-5$

(ii) $a<\dfrac{3}{a}$일 때,

$\left|a^2-\left(\dfrac{3}{a}\right)^2\right|=\left(\dfrac{3}{a}\right)^2-a^2=8$, $a^4+8a^2-9=0$

$(a^2+9)(a^2-1)=0$, $a^2=1$

$a>0$이므로 $a=1$이고 $a<\dfrac{3}{a}$을 만족시킨다.

$\therefore \mathrm{A'}(1,\ -3)$

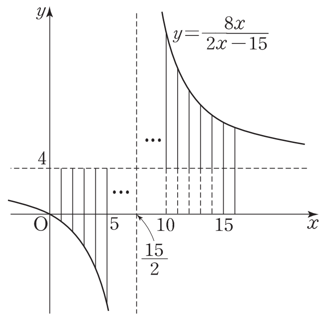
이때, $\mathrm{A'}(1,\ -3)$은 직선 $y=x+k+1$ 위의 점이므로

$-3=1+k+1 \qquad \therefore k=-5$

(i), (ii)에서 $k=-5$이므로 $k^2=25$

45 답 15

함수 $f(x)=\dfrac{8x}{2x-15}=\dfrac{4(2x-15)+60}{2x-15}=\dfrac{60}{2x-15}+4$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{15}{2},\ 4\right)$에 대하여 대칭이므로

$f(7)+f(8)=8$, $f(6)+f(9)=8$, $f(5)+f(10)=8$,

$f(4)+f(11)=8$, $f(3)+f(12)=8$, $f(2)+f(13)=8$,

$f(1)+f(14)=8$에서

$S(14)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(14)=8\times7=56$

$f(15)=\dfrac{60}{2\times15-15}+4=4+4=8$,

$f(16)=\dfrac{60}{2\times16-15}+4=\dfrac{60}{17}+4>7$

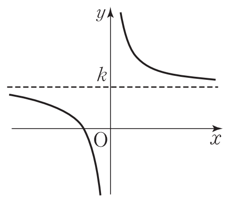
이므로 $S(15)<70<S(16)$이다.

따라서 $S(n)\le70$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 15이다.

46 답 1

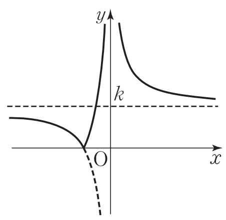
$k>1$일 때, 함수 $f(x)=\left|\dfrac{2}{x}+k\right|-k$의 그래프를 다음 순서로 그려보자.

$y=\dfrac{2}{x}+k$



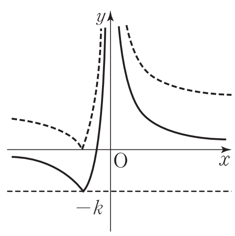
⇩

$y=\left|\dfrac{2}{x}+k\right|$

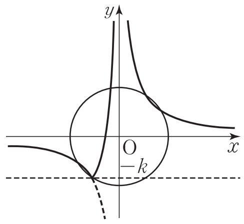


⇩

$y=\left|\dfrac{2}{x}+k\right|-k$



즉, 함수 $f(x)$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프에서 $y<-k$인 부분을 직선 $y=-k$에 대하여 대칭이동한 곡선이다.



한편, 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 원 $x^2+y^2=5$가 만나는 점 중에서 y좌표가 가장 작은 점의 y좌표가 $-k$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 원 $x^2+y^2=5$가 5개의 점에서 만남을 알 수 있다.

$y=\dfrac{2}{x}$에서 $x=\dfrac{2}{y}$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$\dfrac{4}{y^2}+y^2=5$에서 $(y^2)^2-5y^2+4=0$

$(y^2-1)(y^2-4)=0$, $(y-1)(y+1)(y-2)(y+2)=0$

$\therefore y=\pm1$ 또는 $y=\pm2$

이 중 가장 작은 값 -2에 대하여 $-2=-k$이므로 $k=2$

$\therefore f(2)=\left|\dfrac{2}{2}+2\right|-2=1$

47 답 ⑤

ㄱ. 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(a, \dfrac{2}{a}\right)$ $(a>0)$라 하면 점 P를 지나고 기울기가 m인 직선 $y=m(x-a)+\dfrac{2}{a}$가 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$에 접하므로 방정식 $m(x-a)+\dfrac{2}{a}=\dfrac{2}{x}$

즉, $amx^2+(2-a^2m)x-2a=0$은 중근을 갖는다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2-a^2m)^2+8a^2m=0$이고 $a^2m=t$라 하면

$(2-t)^2+8t=0$에서

$t^2+4t+4=0$, $(t+2)^2=0$

$a^2m=t=-2 \qquad \therefore m=-\dfrac{2}{a^2}$

따라서 점 P에서 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$에 접하는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{2}{a^2}(x-a)+\dfrac{2}{a}$이고 이 직선과 x축의 교점 A, y축의 교점 B의 좌표는 각각 $(2a, 0)$, $\left(0, \dfrac{4}{a}\right)$이므로

점 $\mathrm{P}\left(a, \dfrac{2}{a}\right)$는 선분 AB의 중점이다. (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}^2=4a^2+\dfrac{16}{a^2}\geq2\sqrt{4a^2\times\dfrac{16}{a^2}}=16$이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 4이다. (참)

ㄷ. $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\times2a\times\dfrac{4}{a}=4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

48 답 1

$f(0)=0$이고 $f(x)=\dfrac{2(x-a)+2a}{x-a}=\dfrac{2a}{x-a}+2$

$f(x+2a)+a=\dfrac{2a}{x+a}+2+a$이므로

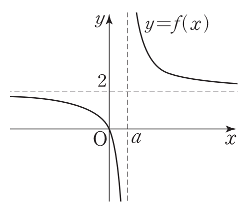
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2a}{x-a}+2 & (x<a)\\ \dfrac{2a}{x+a}+2+a & (x\geq a)\end{cases}$$

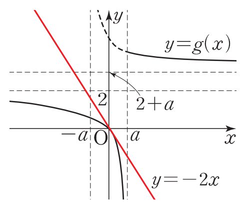
즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선인 $x=a$를 기준으로

$x<a$인 부분의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프이고,

$x\geq a$인 부분의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프이다.

(i) $a>0$일 때,



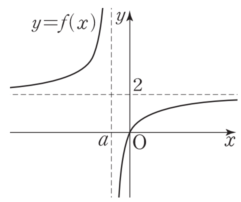


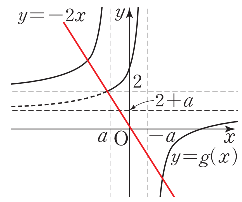
이때, $x\geq a$에서 $g(x)>2$이므로

$x\geq a$에서 함수 $y=g(x)$는 직선과 만나지 않는다.

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x$의 교점의 개수는 2 이하이므로 성립하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,





$y=\dfrac{2a}{x+a}+2+a$의 점근선은 $x=-a$, $y=2+a$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

$x=a$일 때, $y=-2x$의 함숫값은 $-2a$이므로 그림과 같이 $g(a)\leq-2a$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x$은 서로 다른 세 점에서 만난다.

$g(a)=3+a$이므로 $3+a\leq-2a$

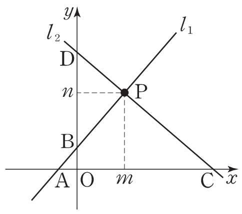
$3a\leq-3 \qquad \therefore a\leq-1$

(i), (ii)에서 실수 a의 최댓값 $M=-1$이다.

$\therefore M^2=1$

49 답 5

함수 $y=\frac{nx}{x-m}=\frac{mn}{x-m}+n$의 두 점근선 $x=m$, $y=n$의 교점을 P라 하면 $\mathrm{P}(m, n)$이므로 점 P를 지나고 기울기가 1, -1인 직선이 l_1, l_2이다.



그림과 같이 직선 l_1이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 l_2가 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하면

삼각형 PAC와 삼각형 PBD는 닮은 삼각형이고
모든 직각이등변삼각형은 닮은 도형이야.

그 닮음비가 $n : m$이므로 넓이의 비 $S_x : S_y=n^2 : m^2$

즉, $4 : 1=n^2 : m^2$

$\therefore n=2m$

이때, m, n은 집합 A의 원소이므로 순서쌍 (m, n)은

$(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$의 5개이다.

50 답 16

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1 & (0<x\le 1)\\ 1-\frac{1}{x} & (x>1 \text{ 또는 } x<0)\end{cases}$$ 이므로

(i) $0<a<b\le 1$일 때

$f(a)=f(b)$에서 $\frac{1}{a}-1=\frac{1}{b}-1$

즉, $a=b$이므로 $a<b$에 모순이다.

(ii) $1<a<b$일 때

$f(a)=f(b)$에서 $1-\frac{1}{a}=1-\frac{1}{b}$

즉, $a=b$이므로 $a<b$에 모순이다.

(iii) $0<a\le 1<b$일 때

$f(a)=f(b)$에서 $\frac{1}{a}-1=1-\frac{1}{b}$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2 \cdots$ ㉠

이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$, $\sqrt{ab}\ge 1$에서 $ab\ge 1$

㉠을 변형하면 $\frac{a+b}{ab}=2$, $\frac{a+b}{2}=ab$이므로 $\frac{a+b}{2}\ge 1$

$\therefore f\left(\frac{a+b}{2}\right)=1-\frac{2}{a+b}$
$f(x)=1-\frac{1}{x}$에 대입했어.

$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)$이고

$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=2-\frac{4}{a+b}=2-\frac{\frac{4}{ab}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$,

$f(a)=\frac{1}{a}-1$이므로

$2-\frac{\frac{4}{ab}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}-1 \cdots$ ㉡

㉠에서 $\frac{1}{b}=2-\frac{1}{a}$을 ㉡에 대입하면

$$2-\frac{\frac{4}{a}\left(2-\frac{1}{a}\right)}{2-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}-1$$

$2-\frac{2}{a}\left(2-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-1$, $2-\frac{4}{a}+\frac{2}{a^2}=\frac{1}{a}-1$

$2\left(\frac{1}{a}\right)^2-5\left(\frac{1}{a}\right)+3=0$

$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{2}{a}-3\right)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

이때, $a=1$을 ㉠에 대입하면

$1+\frac{1}{b}=2 \qquad \therefore b=1$

즉, $a=b=1$이므로 $0<a\le 1<b$에 모순이다.

따라서 $a=\frac{2}{3}$이고 이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{\frac{2}{3}}+\frac{1}{b}=2$, $\frac{3}{2}+\frac{1}{b}=2$

$\therefore b=2$

(i)~(iii)에 의하여 $12ab=12\times\frac{2}{3}\times 2=16$

10 무리식과 무리함수

핵심 유형 연습

문제편 p.140~141

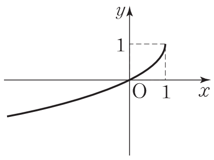
01 답 ④

Tip

무리함수의 정의역과 치역을 파악하면 그래프를 쉽게 그릴 수 있어.

ㄱ. $a=-1$이면 주어진 함수는 $y=-\sqrt{-(x-1)}+1$이고 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 그림과 같다.

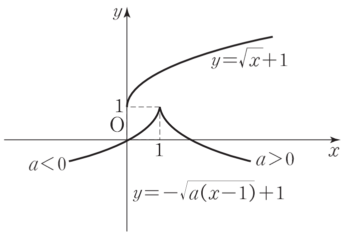
원점을 지나.



따라서 그래프는 제 2사분면을 지나지 않는다. (거짓)

ㄴ. a의 값에 관계없이 $\sqrt{a(x-1)}\geq 0$이므로 $-\sqrt{a(x-1)}\leq 0$이다. 즉, 함수 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 치역은 $\{y\,|\,y\leq 1\}$이다. (참)

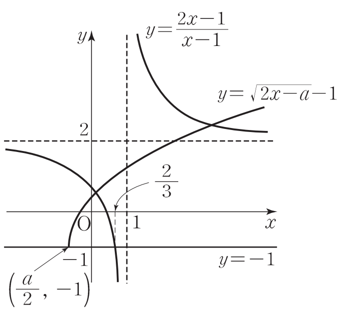
ㄷ. 함수 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프는 a의 값의 부호에 따라 다음과 같다.



따라서 a의 값에 관계없이 함수 $y=\sqrt{x}+1$의 그래프와 만나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ③



분수함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$의 그래프의 점근선이 $x=1$, $y=2$이고 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

또, 무리함수 $y=\sqrt{2x-a}-1=\sqrt{2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)}-1$은 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\geq\dfrac{a}{2}\right\}$이고, 치역이 $\{y\,|\,y\geq -1\}$이다.

$y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{2}{3},\ -1\right)$을 지나므로 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프와 $y=\sqrt{2x-a}-1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 그림과 같이 $\dfrac{a}{2}\leq\dfrac{2}{3}$이어야 한다.

두 함수의 그래프는 $x>1$에서 무조건 1번 만나므로 $x<1$에서도 만나는 a의 값의 범위를 구하면 돼.

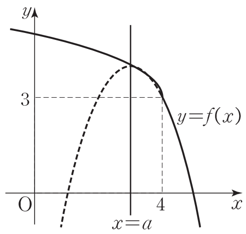
$\therefore\ a\leq\dfrac{4}{3}$

03 답 15

함수 $f(x)$가 일대일대응이 되기 위해서는

곡선 $y=-(x-a)^2+b\ (x\geq 4)$가 점 $(4,\ 3)$을 지나야 하고, … ㉠

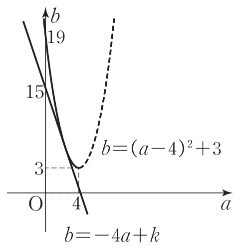
곡선 $y=-(x-a)^2+b$가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로 $a\leq 4$이어야 한다. … ㉡



즉, $\underset{\because ㉠}{\underline{3=-(4-a)^2+b}}$에서 $b=(a-4)^2+3$ $\underset{\because ㉡}{\underline{(a\leq 4)}}$

이때, $4a+b=k$ (k는 상수)라 하면 다음 그림과 같이 곡선 $b=(a-4)^2+3\ (a\leq 4)$과 직선 $b=-4a+k$가 접할 때 k의 값이 최소가 된다.

기울기가 -4인 직선의 b절편



a에 대한 방정식 $(a-4)^2+3=-4a+k$에서

$a^2-4a+19-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4-(19-k)=0\qquad\therefore\ k=15$

04 답 6

Tip

무리함수의 역함수를 구하여 주어진 이차함수와 계수를 비교해.

$y=\sqrt{ax+b}+c$에서 $\sqrt{ax+b}=y-c$

$ax+b=(y-c)^2$, $ax=(y-c)^2-b$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{a}(y-c)^2-\dfrac{b}{a}$

따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 역함수는

$y=\frac{1}{a}(x-c)^2-\frac{b}{a}=\frac{1}{a}x^2-\frac{2c}{a}x+\frac{c^2-b}{a}$이고 이 함수가

$y=ax^2+bx+c$이므로 계수를 비교하면

$\frac{1}{a}=a$, $-\frac{2c}{a}=b$, $\frac{c^2-b}{a}=c$

$\frac{1}{a}=a$에서 $a^2=1$ $\therefore a=1\ (\because a>0)$ ⋯ ㉠

이것을 다른 두 식에 대입하면

$-\frac{2c}{a}=b$에서 $b=-2c$

$\frac{c^2-b}{a}=c$에서 $b=c^2-c$

이 두 식을 연립하면 $c^2-c=-2c$에서

$c^2+c=0$, $c(c+1)=0$

$\therefore c=-1\ (\because c\neq0)$, $b=2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+b^2+c^2=1+4+1=6$

05 답 ③

$f^{-1}(\sqrt{x+a}-1)=x+b$에서 $f(x+b)=\sqrt{x+a}-1$

이때, $f(1)=0$이므로 $x=1-b$를 대입하면

$f(1)=\sqrt{1-b+a}-1$에서 $0=\sqrt{1-b+a}-1$

$\sqrt{a-b+1}=1$, $a-b+1=1$

$\therefore a-b=0$

06 답 ②

함수 $f(x)$는 x의 값이 커질수록 함숫값이 작아지는 감소함수이다.

ㄱ. $a<1$이므로 $f(a)>f(1)=1$이고, $\underbrace{f(f(a))<f(1)}_{f(a)>1\text{이므로 } f(f(a))<f(1)}=1$

$\therefore (f\circ f)(a)<1<f(a)$ (거짓)

ㄴ. $0<a<b<1$이므로 $f(a)>f(b)>1$이고,

$(f\circ f)(a)<(f\circ f)(b)$이다. (참)

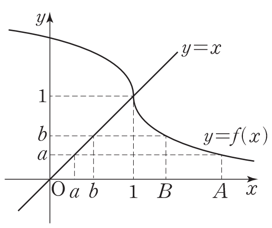
ㄷ. $0<a<b<1$에서 $f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$라 하면

$f(f^{-1}(a))>f(f^{-1}(b))$, 즉 $a>b$가 되어 모순이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

다른 풀이 : 그래프를 이용하여 대소 비교하기

ㄷ. $f^{-1}(a)=A$, $f^{-1}(b)=B$라 하면 $f(A)=a$, $f(B)=b$



$0<a<b<1$이므로 그림에서 $A>B$

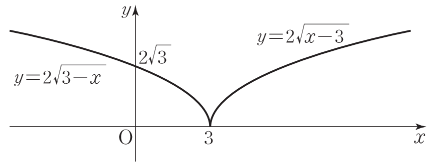
즉, $f^{-1}(a)>f^{-1}(b)$ (거짓)

07 답 ②

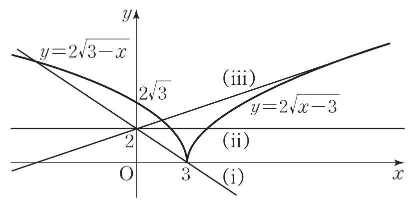
Tip

$g(x)=mx+2$는 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 실수인 직선이므로 기울기를 조금씩 바꾸어가면서 문제를 해결해.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)=mx+2$의 그래프는 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.



$\therefore n=3$

(i) 직선 $y=g(x)$가 점 $(3, 0)$을 지나는 경우

$0=3m+2$에서 $m=-\frac{2}{3}$

(ii) 직선 $y=g(x)$가 x축에 평행인 경우 $m=0$

(iii) 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=2\sqrt{x-3}$에 접하는 경우

$2\sqrt{x-3}=mx+2$에서 $4(x-3)=(mx+2)^2$

$m^2x^2+4(m-1)x+16=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4(m-1)^2-16m^2=0$에서

$-12m^2-8m+4=0$, $3m^2+2m-1=0$

$(3m-1)(m+1)=0$ $\therefore m=\frac{1}{3}$ 또는 $m=-1$

그런데 접하려면 $m>0$이어야 하므로 $m=\frac{1}{3}$

(i)~(iii)에 의하여 $S=-\frac{2}{3}+0+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

$\therefore n\times S=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

08 답 3

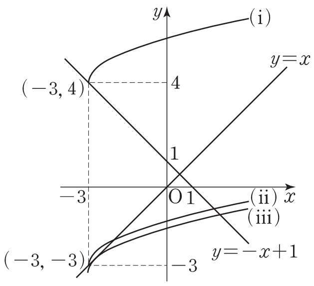
$f(g(x))=f(x)$에서

$\{g(x)\}^2-g(x)+3=x^2-x+3$

$\{g(x)\}^2-x^2-\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x-1\}=0$

$\therefore g(x)=x$ 또는 $g(x)=-x+1$



방정식 $f(g(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 그림과 같이 함수 $g(x)=2\sqrt{x+3}-k$의 그래프가 직선 $y=-x+1$과 한 점에서 만나고, 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) 함수 $g(x)=2\sqrt{x+3}-k$의 그래프와 직선 $y=-x+1$이 한 점에서 만날 때

즉, $g(-3)\leq 4$일 때이므로

$2\sqrt{-3+3}-k\leq 4 \qquad \therefore k\geq -4$

(ii), (iii) 함수 $g(x)=2\sqrt{x+3}-k$의 그래프가 점 $(-3, -3)$을 지날 때

$2\sqrt{-3+3}-k=-3$

$\therefore k=3$

또한, 함수 $g(x)=2\sqrt{x+3}-k$의 그래프가 직선 $y=x$에 접할 때의 k의 값을 구하면

$2\sqrt{x+3}-k=x$에서 $2\sqrt{x+3}=x+k$

양변을 제곱하여 정리하면

$4(x+3)=(x+k)^2$, $x^2+2(k-2)x+k^2-12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-12)=-4k+16=0$

$\therefore k=4$

따라서 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나는 k의 값의 범위는 $3\leq k<4$

(i)~(iii)에서 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 k의 값의 범위는 $3\leq k<4$

따라서 정수 k의 값은 3이다.

09 답 4

두 함수 $y=\sqrt{|x|-1}+1$, $y=a-|x|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점 사이의 거리가 4이므로 두 점의 좌표를 $(-2, k)$, $(2, k)$라 할 수 있다.

즉, $x=2$일 때 두 함수의 함숫값이 같으므로

$\sqrt{|2|-1}+1=a-|2|$에서 $2=a-2 \qquad \therefore a=4$

10 답 40

Tip

정사각형의 성질을 이용하여 미지수를 구해.

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 A의 좌표를 $A(t^2, t)$ $(t>0)$라 하면 세 점 B, C, D의 좌표는 각각

$B\left(-\frac{t^2}{2}, t\right)$, $C\left(-\frac{t^2}{2}, -2t\right)$, $\underline{D(t^2, -2t)}$이다.

점 A와 x좌표가 같고, 점 C와 y좌표가 같아.

점 D의 좌표를 $y=-\sqrt{kx}$에 대입하면

$-2t=-\sqrt{kt^2} \qquad \therefore k=4$

또한, 사각형 ABCD가 정사각형이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\frac{3}{2}t^2=3t \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 $\overline{AB}=\frac{3}{2}\times 2^2=6$이므로

정사각형의 넓이 $S=6\times 6=36$

$\therefore k+S=4+36=40$

11 답 6

주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시켜 넓이를 구해도 마찬가지이다.

두 함수 $y=\sqrt{3x}$, $y=2x-3$의 역함수를 구하면

$y=\sqrt{3x}$에서 $x=\frac{1}{3}y^2$이므로 $y=\frac{1}{3}x^2\ (x\geq 0)$

$y=2x-3$에서 $x=\frac{1}{2}(y+3)$이므로

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

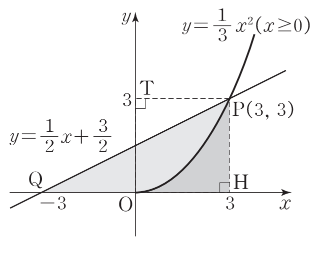
두 역함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하기 위해 연립하면

$\frac{1}{3}x^2=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, $2x^2-3x-9=0$, $(2x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\geq 0)$

즉, 교점의 좌표는 $(3, 3)$이다.

두 역함수의 그래프의 교점을 P, 점 P에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 H, T라 하고 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이 x축과 만나는 점을 Q라 하여 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 영역의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle PQH-\underline{\frac{1}{3}\square PTOH}=\frac{1}{2}\times 6\times 3-\frac{1}{3}\times 3^2=6$

$\because$ 주어진 이차함수의 그래프의 성질

실전 유형 훈련

문제편 p.142~147

12 답 ②

주어진 무리식의 값이 실수가 되려면

(근호 안)≥ 0, (분모)$\ne 0$을 만족시켜야 한다.

(i) (근호 안)≥ 0에서 $4-x\ge 0$이고 $x-2\ge 0$

$\therefore 2\le x\le 4$

(ii) (분모)$\ne 0$에서 $4-x\ne x-2$ $\quad\therefore x\ne 3$

(i), (ii)를 모두 만족시키는 정수는 2, 4이므로 구하는 합은

$2+4=6$이다.

13 답 ⑤

$x^2-4=\left(a^2+2+\dfrac{1}{a^2}\right)-4=a^2-2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2$,

$y^2-4=\left(b^2+2+\dfrac{1}{b^2}\right)-4=b^2-2+\dfrac{1}{b^2}=\left(b-\dfrac{1}{b}\right)^2$

이때, $0<b<1<a$에서

$b<1<\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{a}<1<a$이므로

$xy-\sqrt{x^2-4}\sqrt{y^2-4}$

$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)-\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}\sqrt{\left(b-\dfrac{1}{b}\right)^2}$

$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)-\underbrace{\left|a-\dfrac{1}{a}\right|\left|b-\dfrac{1}{b}\right|}_{\left|a-\frac{1}{a}\right|=a-\frac{1}{a},\ \left|b-\frac{1}{b}\right|=-\left(b-\frac{1}{b}\right)}$

$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)+\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\left(b-\dfrac{1}{b}\right)$

$=\left(ab+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{ab}\right)+\left(ab-\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{ab}\right)$

$=2\left(ab+\dfrac{1}{ab}\right)$

$=2\times 6=12$

14 답 ①

$y=\sqrt{2x-3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{2(x-a)-3}+1+b=\sqrt{2x-2a-3}+1+b$

이 식이 $y=\sqrt{ax+b}+c$와 같으므로

$a=2$, $b=-2a-3$, $c=1+b$

따라서 $a=2$, $b=-7$, $c=-6$이므로

$a+b+c=2+(-7)+(-6)=-11$

15 답 5

함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$은 $-1\le x\le 3$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$A=\{y\,|\,f(-1)\le y\le f(3)\}=\{y\,|\,0\le y\le 2\}$

$p>0$이므로 함수 $g(x)=\dfrac{p}{x-4}+q$는 $-1\le x\le 3$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고 $A=B$이므로

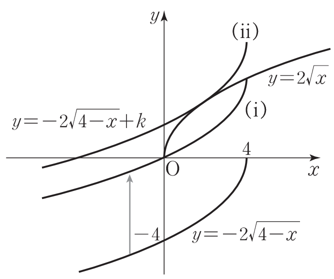
$g(-1)=2$, $g(3)=0$이다.

즉, $\dfrac{p}{-5}+q=2$, $-p+q=0$이므로 연립하여 풀면 $p=q=\dfrac{5}{2}$

$\therefore p+q=5$

16 답 16

함수 $y=-2\sqrt{4-x}+k$의 그래프는 함수 $y=-2\sqrt{4-x}$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 것이므로 두 함수 $y=2\sqrt{x}$, $y=-2\sqrt{4-x}+k$의 그래프를 서로 다른 두 점에서 만나도록 그려보면 다음 그림과 같이 $y=-2\sqrt{4-x}+k$의 그래프가 (i)이거나 (i), (ii)의 그래프 사이에 위치하여야 한다.



(i) 함수 $y=-2\sqrt{4-x}+k$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=-2\sqrt{4-0}+k$에서 $k=4$

(ii) 두 함수 $y=-2\sqrt{4-x}+k$, $y=2\sqrt{x}$의 그래프가 접할 때이므로

연립한 방정식 $-2\sqrt{4-x}+k=2\sqrt{x}$에서

$-2\sqrt{4-x}=2\sqrt{x}-k$, $(-2\sqrt{4-x})^2=(2\sqrt{x}-k)^2$

$16-4x=4x-4k\sqrt{x}+k^2$, $8x-4k\sqrt{x}+k^2-16=0$

이때, $\sqrt{x}=t$라 하면 $8t^2-4kt+k^2-16=0$이고

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=4k^2-8(k^2-16)=0$에서 $4k^2=128$, $k^2=32$

$\therefore k=4\sqrt{2}$ ($\because k>0$)

(i), (ii)에 의하여 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $4\le k<4\sqrt{2}$이므로

$16\le k^2<32$에서 $\alpha=16$, $\beta=32$

$\therefore \beta-\alpha=32-16=16$

다른 풀이 : 점에 대한 대칭이동 이용하기

(ii) $y=-2\sqrt{4-x}+k$에서 $k-y=2\sqrt{4-x}$

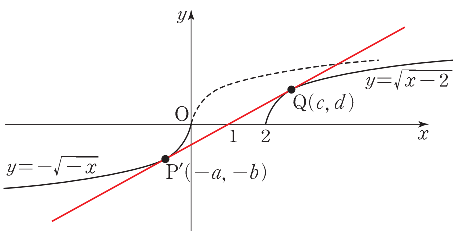
이것은 함수 $y=2\sqrt{x}$의 x에 $4-x$를, y에 $k-y$를 대입한 것이므로 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 점 $\left(2, \dfrac{k}{2}\right)$에 대하여 대칭이동한 함수이다.

점 $\left(2, \dfrac{k}{2}\right)$가 직선 $x=2$ 위에 있으므로 두 곡선이 접할 때의 접점의 x좌표도 2이다.

즉, $-2\sqrt{4-2}+k=2\sqrt{2}$에서 $k=4\sqrt{2}$

17 답 ②

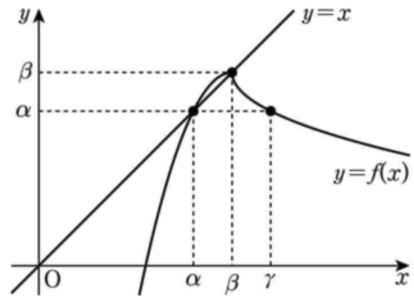
함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{-x}$
이때, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 P'이라 하면
$\mathrm{P}'(-a,\ -b)$이고 곡선 $y=-\sqrt{-x}$ 위의 점이다.
이때, $\dfrac{b+d}{a+c}=m$이라 하면 $m=\dfrac{b+d}{a+c}=\dfrac{d-(-b)}{c-(-a)}$이므로
m은 곡선 $y=\sqrt{x-2}$ 위의 점 $\mathrm{Q}(c,\ d)$와 곡선 $y=-\sqrt{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}'(-a,\ -b)$을 지나는 직선의 기울기이다.



따라서 m이 최대일 때는 직선 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}$가 그림과 같이 두 곡선
$y=\sqrt{x-2}$와 $y=-\sqrt{-x}$에 모두 접할 때이고,
두 곡선은 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭이므로
이때의 직선 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}$는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.
직선 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}$를 $y=m(x-1)\ (m>0)$이라 두고
곡선 $y=\sqrt{x-2}$와 연립하여 x를 소거하면
$y^2=x-2,\ x=y^2+2$
$y=m(y^2+1),\ my^2-y+m=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=1-4m^2=0$
$\therefore\ m=\dfrac{1}{2}\ (\because\ m>0)$
따라서 구하는 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

18 답 ③

방정식 $\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$에서
$f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ ⋯ ㉠
조건 (나)에서 $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta$이고
조건 (가)에서 방정식 ㉠의 실근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$뿐이므로
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 $\alpha,\ \gamma$이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐이거나,
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α뿐이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 $\beta,\ \gamma$이다.
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 $\alpha,\ \gamma$이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐인 경우를 생각하자.
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 $\alpha,\ \gamma$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\alpha$는 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표는 각각 $\alpha,\ \gamma$이다.
또한, 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\beta$는 오직 한 점에서 만나고 이 점의 x좌표는 β이다.
이때, 곡선 $y=f(x)$와 x축에 평행한 직선이 오직 한 점에서 만나려면 만나는 점의 좌표가 $(a,\ b)$이어야 한다.
그러므로 점 $(a,\ b)$는 점 $(\beta,\ \beta)$와 일치한다.
$\therefore\ a=b=\beta$ ⋯ ㉡
한편, $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 두 점 $(\alpha,\ \alpha),\ (\beta,\ \beta)$에서 만난다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=x$에서 $-(x-a)^2+b=x$
㉡에서 $-(x-\beta)^2+\beta=x$
$(x-\beta)^2+(x-\beta)=0$
$(x-\beta)(x-\beta+1)=0$
$\therefore\ x=\beta$ 또는 $x=\beta-1$
$f(\alpha)=\alpha$이고 $\alpha\neq\beta$이므로
$\alpha=\beta-1$
$f(\gamma)=\alpha$이고 $\gamma>\beta=a=b$이므로
$-\sqrt{\gamma-a}+b=\alpha$
$-\sqrt{\gamma-\beta}+\beta=\beta-1$
$\sqrt{\gamma-\beta}=1\qquad\therefore\ \gamma=\beta+1$
이때, $\alpha+\beta+\gamma=15$이므로
$(\beta-1)+\beta+(\beta+1)=15$
$3\beta=15$
$\therefore\ \beta=5,\ \alpha=4,\ \gamma=6$
㉡에서 $a=b=5$이고
$f(x)=\begin{cases}-(x-5)^2+5 & (x\leq 5)\\ -\sqrt{x-5}+5 & (x>5)\end{cases}$이므로
$$\begin{aligned}f(\alpha+\beta)&=f(9)\\&=-\sqrt{9-5}+5\\&=3\end{aligned}$$
한편, 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α뿐이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 $\beta,\ \gamma$인 경우에도 같은 방법으로 $f(\alpha+\beta)=3$이다.

19 답 9

주어진 그래프는 꼭짓점이 $(-3,\ 5)$인 이차함수의 일부이므로
$y=k(x+3)^2+5\ (x\geq -3)$라 하면 점 $(0,\ 2)$를 지나므로
$2=k(0+3)^2+5$에서
$9k=-3\qquad\therefore\ k=-\dfrac{1}{3}$

즉, 주어진 그래프의 함수식은

$y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+5\ (x\geq-3)$이고

$(x+3)^2=-3(y-5)$에서

$x+3=\sqrt{-3y+15}\ (\because x\geq-3)$

$\therefore x=\sqrt{-3y+15}-3$

즉, 주어진 그래프가 나타내는 함수의 역함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$는

$y=\sqrt{-3x+15}-3$이다.

따라서 $a=-3$, $b=15$, $c=-3$이므로

$a+b+c=9$

20 답 2

함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 역함수 관계이므로 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

직선 $y=\frac{1}{2}x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선은

$y=2x$이므로 함수 $f(x)=\frac{x^2}{2}+k\ (x\geq0)$의 그래프와 직선

$y=2x$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하는 것과 같다.

이때, $x\geq0$이므로 x에 대한 방정식 $f(x)=2x$가 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$f(x)=2x$에서 $\frac{x^2}{2}+k=2x$

$\therefore x^2-4x+2k=0$ ⋯ ㉠

(i) ㉠의 두 실근을 α, β라 할 때, α, β가 모두 음이 아니려면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4\geq0$, $\alpha\beta=2k\geq0$ $\quad\therefore k\geq0$

(ii) ㉠의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=4-2k>0$ $\quad\therefore k<2$

(i), (ii)에 의하여 $0\leq k<2$

따라서 정수 k는 0, 1의 2개이다.

21 답 ④

무리함수 $y=\sqrt{2x-5}+k$는 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 함수이므로

함수 $y=\sqrt{2x-5}+k$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은

함수 $y=\sqrt{2x-5}+k$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이다.

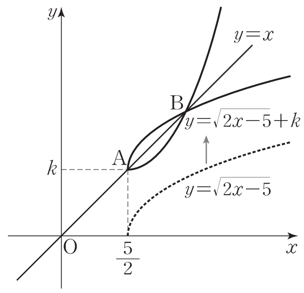
한편, 함수 $y=\sqrt{2x-5}+k$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x-5}$의

그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로

두 교점 A, B에 대하여 선분 AB의 길이가 최대일 때는

그림과 같이 $y=\sqrt{2x-5}+k$의 그래프의 시작점이

직선 $y=x$ 위의 점일 때이다.



따라서 이때의 k의 값은 $\frac{5}{2}$이고

함수 $y=\sqrt{2x-5}+\frac{5}{2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 또 다른 교점은

$\sqrt{2x-5}+\frac{5}{2}=x$에서

$2\sqrt{2x-5}=2x-5$

여기서 $\sqrt{2x-5}=t$라 하면

$2t=t^2$, $t(t-2)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=2$

즉, $\sqrt{2x-5}=0$ 또는 $\sqrt{2x-5}=2$에서

$x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=\frac{9}{2}$

따라서 선분 AB의 길이가 최대일 때 두 점 A, B의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$이므로 선분 AB의 길이의 최댓값은

$\sqrt{\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

22 답 ②

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

$x\geq1$에서 함수 $y=\frac{-3x+1}{x+1}$의 그래프는 점근선이

$x=-1$, $y=-3$이고 점 $(1, -1)$을 지나는 그래프로

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이고,

$x<1$에서 무리함수 $y=\sqrt{1-x}+k$도 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 범위에서 감소하는 함수이다.

따라서 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 무리함수

$y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 점 $(1, -1)$을 지나야 한다.

즉, $-1=\sqrt{1-1}+k$에서 $k=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}-1 & (x<1)\\ \frac{-3x+1}{x+1} & (x\geq1)\end{cases}$이고

$f^{-1}(f^{-1}(a))=3$이면 $f(f(3))=a$이므로

$\underline{a=f(f(3))=f(-2)=\sqrt{3}-1}$

$f(3)=\frac{-3\times3+1}{3+1}=\frac{-8}{4}=-2$

$f(-2)=\sqrt{1-(-2)}-1=\sqrt{3}-1$

23 답 ①

$f(x)=\begin{cases} \sqrt{2x}+1 & (x\ge0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases}$에서

$f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 & (x\ge1) \\ x-1 & (x<1) \end{cases}$이므로

함수 $f(x)$의 그래프가 $x=0$을 기준으로 바뀌고 이때의 함숫값이 1이므로
역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 $x=1$을 기준으로 바뀌고 이때의 함숫값은 0이야.

부등식 $f^{-1}(x)\le g(x)$에서

(i) $x\ge1$인 경우

$\frac{1}{2}(x-1)^2\le-\frac{1}{3}x^2+5$

$3(x-1)^2\le-2x^2+30$, $3x^2-6x+3\le-2x^2+30$

$5x^2-6x-27\le0$, $(5x+9)(x-3)\le0$

$\therefore -\frac{9}{5}\le x\le3$

이때, $x\ge1$이므로 $1\le x\le3$

(ii) $x<1$인 경우

$x-1\le-\frac{1}{3}x^2+5$

$3x-3\le-x^2+15$, $x^2+3x-18\le0$

$(x+6)(x-3)\le0$

$\therefore -6\le x\le3$

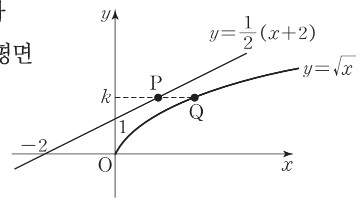
이때, $x<1$이므로 $-6\le x<1$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $-6\le x\le3$

따라서 $a+b=(-6)+3=-3$

24 답 ①

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}(x+2)$를 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.



점 P의 y좌표를 k $(k\ge0)$라 하면

(i) 점 P의 x좌표는

$k=\frac{1}{2}(x+2)$에서 $x=2k-2$

(ii) 점 Q의 x좌표는 $k=\sqrt{x}$에서 $x=k^2$

그림에서 점 Q의 x좌표가 점 P의 x좌표보다 크므로 (i), (ii)에서

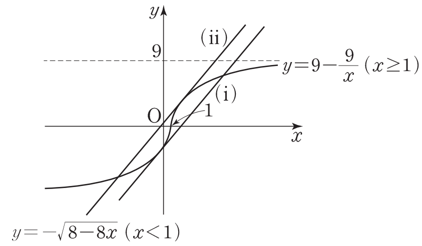
$\overline{\mathrm{PQ}}=k^2-(2k-2)=k^2-2k+2=(k-1)^2+1$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $k=1$일 때 1이다.

25 답 ④

함수 $y=\begin{cases} 9-\frac{9}{x} & (x\ge1) \\ -\sqrt{8-8x} & (x<1) \end{cases}$의 그래프와 기울기가 1이고

y절편이 k인 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 두 접선 (i), (ii) 사이에 있을 때이다.



(i) $-\sqrt{8-8x}=x+k$에서 $8-8x=x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k+4)x+k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(k+4)^2-(k^2-8)=8k+24=0$에서 $k=-3$

(ii) $9-\frac{9}{x}=x+k$에서 $9x-9=x^2+kx$

$x^2+(k-9)x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(k-9)^2-36=k^2-18k+45$

$=(k-15)(k-3)=0$

에서 $k=3$ ($\because$ 그래프에서 $0<k<9$)

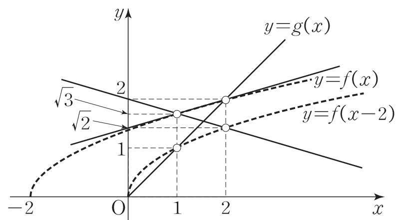
(i), (ii)에 의하여 $-3<k<3$이므로 정수 k는

-2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

26 답 ④

$f(x-2)=\sqrt{(x-2)+2}=\sqrt{x}$이고

$f(x-2)=\sqrt{x}$, $g(x)=px+q$, $f(x)=\sqrt{x+2}$가 주어진 조건을 만족시키려면 다음 그림과 같이 세 가지 경우가 있다.



(i) $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(1, 1)$, $(2, 2)$를 지날 때,

$g(1)+g(2)=1+2=3$

(ii) $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(1, \sqrt{3})$, $(2, \sqrt{2})$를 지날 때,

$g(1)+g(2)=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(iii) $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(1, \sqrt{3})$, $(2, 2)$를 지날 때,

$g(1)+g(2)=\sqrt{3}+2$

이때, $\sqrt{3}+2>3$이고 $\sqrt{3}+2>\sqrt{3}+\sqrt{2}$이므로

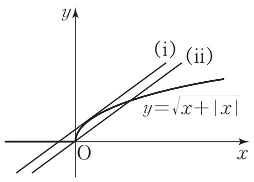
$g(1)+g(2)$의 최댓값은 $\sqrt{3}+2$이다.

27 답 ③

$x\ge0$일 때 $y=\sqrt{2x}$이고, $x<0$일 때 $y=0$이므로

함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프는 그림과 같다.

Ⅲ-10 무리식과 무리함수



주어진 함수의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선 $y=x+k$가 그림의 두 직선 (i), (ii) 사이에 위치하여야 한다.

(i) 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\sqrt{2x}=x+k$에서 $2x=(x+k)^2$, $x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=0$, $-2k+1=0$ $\quad \therefore k=\dfrac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때, $k=0$

(i), (ii)에 의하여 k의 값의 범위는 $0<k<\dfrac{1}{2}$이다.

28 답 ③

방정식 $f(f(x))=k$의 해를 $x=\alpha$, $f(\alpha)=\beta(\beta\ge-3)$라 하면

$f(\beta)=\sqrt{|\beta|-2}-3=k$

$|\beta|-2=(k+3)^2$

즉, $|\beta|=(k+3)^2+2$ ⋯ ㉠

(i) $k=-1$일 때,

㉠에서 $|\beta|=6$ $\quad \therefore \beta=6$ ($\because \beta\ge-3$)

즉, $\sqrt{|\alpha|-2}-3=6$

$\sqrt{|\alpha|-2}=9$, $|\alpha|-2=81$ $\therefore \alpha=\pm83$

$\therefore g(-1)=2$

(ii) $k=-2$일 때,

㉠에서 $|\beta|=3$ $\quad \therefore \beta=\pm3$

즉, $\sqrt{|\alpha|-2}-3=-3$ 또는 $\sqrt{|\alpha|-2}-3=3$이므로

$\sqrt{|\alpha|-2}=0$ 또는 $\sqrt{|\alpha|-2}=6$

$|\alpha|-2=0$ 또는 $|\alpha|-2=36$

$\therefore \alpha=\pm2$ 또는 $\alpha=\pm38$

$\therefore g(-2)=4$

(i), (ii)에 의하여 $g(-1)+g(-2)=2+4=6$

29 답 75

직선 OB를 $y=ax$ $(a>0)$, 점 B의 x좌표를 $k(k>0)$라 하면 $B(k, ak)$

또한, 점 A와 점 B는 원점에 대하여 대칭이므로 $A(-k, -ak)$이고 $\overline{OA}=\overline{OB}$이다.

또한, 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 직선 OC는 선분 AB의 수직이등분선이다.

따라서 직선 OC는 $y=-\dfrac{1}{a}x$이다.

점 C는 함수 $y=-\dfrac{6}{x}$의 그래프 위의 점이므로

점 C의 좌표를 구하면 $-\dfrac{6}{x}=-\dfrac{1}{a}x$, $x^2=6a$

이때, 점 C는 제 4사분면 위의 점이므로

$x=\sqrt{6a}$에서 $C\left(\sqrt{6a}, -\dfrac{\sqrt{6a}}{a}\right)$

삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$\overline{OC}=\sqrt{3}\,\overline{OB}$

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$이므로

$h=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}a \Rightarrow \overline{OC}=\sqrt{3}\,\overline{OB}$

양변을 제곱하면 $\overline{OC}^2=3\overline{OB}^2$

$6a+\dfrac{6}{a}=3(k^2+a^2k^2)$

$2a+\dfrac{2}{a}=k^2+a^2k^2$

$\dfrac{2(a^2+1)}{a}=k^2(1+a^2)$

$\therefore ak^2=2$ ⋯ ㉠

점 $B(k, ak)$는 곡선 $y=2\sqrt{x}$ 위의 점이므로

$ak=2\sqrt{k}$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2k\sqrt{k}=2$

$\therefore k=1$, $a=2$

따라서 $B(1, 2)$이다.

이때, $\overline{AB}=2\overline{OB}=2\sqrt{5}$이므로 정삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{5})^2=5\sqrt{3}$

$\therefore S^2=5^2\times3=75$

30 답 15

두 무리함수의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 그래프에 접하는 원의 반지름의 길이를 구해도 마찬가지이다.

역함수

함수 $y=\sqrt{3x}$의 역함수는 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ $(x\ge0)$ ⋯ ㉠이고,

함수 $y=-\sqrt{-3x+12}$의 역함수는

$y=-\dfrac{1}{3}x^2+4$ $(x\le0)$이다.

두 역함수의 그래프는 점 $(0, 2)$에 대하여 대칭이므로

구하는 원의 중심은 $(0, 2)$이고, 반지름의 길이가 r이므로

원의 방정식은 $x^2+(y-2)^2=r^2$ ⋯ ㉡

㉠에서 $x^2=3y$를 ㉡에 대입하면

$3y+(y-2)^2=r^2$

방정식 $y^2-y+4-r^2=0$의 판별식을 D라 하면 ㉠, ㉡이 접하므로

$D=1-4(4-r^2)=0$, $-15+4r^2=0$ $\quad \therefore 4r^2=15$

다른 풀이 : 주어진 함수로 구하기

두 함수 $y=\sqrt{3x}$ ⋯ ㉠, $y=-\sqrt{-3x+12}$의 그래프는

점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이므로

두 함수 $y=f(x)$와 $y=2b-f(2a-x)$는 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이야.

구하는 원의 중심은 $(2,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 r이므로

원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=r^2$ ⋯ ㉡

㉠에서 $y^2=3x$를 ㉡에 대입하면 $(x-2)^2+3x=r^2$

방정식 $x^2-x+4-r^2=0$의 판별식을 D라 하면 ㉠, ㉡이 접하므로

$D=1-4(4-r^2)=0,\ -15+4r^2=0 \qquad \therefore 4r^2=15$

31 답 2

두 함수의 그래프의 교점을 구하기 위해 두 함수식을 연립하면

$\frac{1}{a}(x-2a)^2=\sqrt{ax}$에서 $(x-2a)^4=a^3x$

이때, $x-2a=X$라 하면

$0<x<2a$이므로 $-2a<X<0$인 근을 구할 거야.

$X^4=a^3(X+2a)$

$X^4-a^3X-2a^4=0$

방정식에 $X=-a$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용해.

$-a$	1	0	0	$-a^3$	$-2a^4$
		$-a$	a^2	$-a^3$	$2a^4$
	1	$-a$	a^2	$-2a^3$	0

$(X+a)(X^3-aX^2+a^2X-2a^3)=0$ ⋯ ㉠

$X=x-2a=-a$

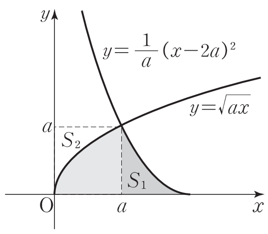
$\therefore x=a$

따라서 두 함수의 그래프의 교점은 $(a,\ a)$이다.

이때, $y=\sqrt{ax}$의 역함수가 $y=\frac{1}{a}x^2\ (x\geq 0)$이고,

두 함수 $y=\frac{1}{a}x^2$, $y=\frac{1}{a}(x-2a)^2$의 그래프의 모양이 같으므로

다음 그림의 두 부분 S_1, S_2의 넓이가 같다.



즉, 색칠한 부분의 넓이는 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이와 같다.

따라서 $a^2=4$이고 $a>0$이므로 $a=2$이다.

일등급 UP

＊그래프와 무연근

방정식 ㉠에서 실근은 하나 더 있지만 필요로 하는 근을 구했기에 더 이상 찾는 것은 무의미하다. 이전 교육과정에서는 이런 근을 방정식을 변형하면서 생긴 원래의 방정식과는 관계가 없는 근(무연근)이라 했다.

32 답 ④

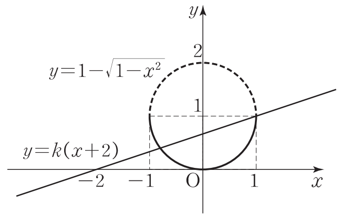
$y=1-\sqrt{1-x^2}$에서 $y-1=-\sqrt{1-x^2}$

양변을 제곱하면

$(y-1)^2=1-x^2$

$\therefore x^2+(y-1)^2=1\ (y\leq 1)$

따라서 $y=1-\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 원 $x^2+(y-1)^2=1$에서 $y\leq 1$인 부분이므로 다음 그림과 같다.



$y=k(x+2)$는 k의 값에 관계없이 점 $(-2,\ 0)$을 지나는 직선이고, 주어진 곡선과 서로 다른 두 점에서 만나려면

(i) 직선 $y=k(x+2)$의 기울기가 0보다 커야 하므로

$k>0$

(ii) 직선 $y=k(x+2)$가 점 $(1,\ 1)$을 지날 때, $1=3k$에서

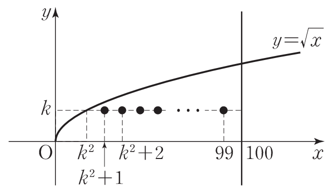
$k=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$0<k\leq\frac{1}{3}$이므로 $\alpha=0,\ \beta=\frac{1}{3}$

$\therefore \alpha+3\beta=1$

33 답 755



$1\leq k\leq 9$인 정수 k에 대하여 주어진 영역의 내부에 있는 점 중 y좌표가 k인 점은

$(k^2+1,\ k),\ (k^2+2,\ k),\ \cdots,\ (\boxed{99},\ k)$ (가)

이므로 이 점의 개수를 $f(k)$라 하면

$f(k)=99-(k^2+1)+1=\boxed{99-k^2}$

따라서 구하는 점의 개수는

$f(1)+f(2)+\cdots+f(9)$

$=(99-1^2)+(99-2^2)+\cdots+(99-9^2)$

$=99\times 9-(1^2+2^2+\cdots+9^2)$

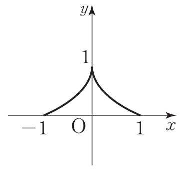
$=891-285=\boxed{606}$ (나)

따라서 $p=99,\ q=606,\ f(7)=99-7^2=50$이므로

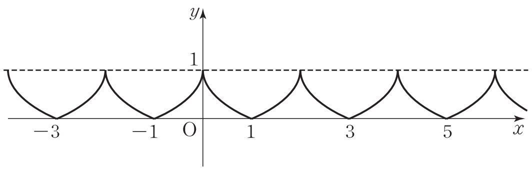
$p+q+f(7)=99+606+50=755$

34 답 ⑤

조건 (가)에서 $-1\le x\le 1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다. 조건 (나)에서 $y=f(x)$가 주기가 2인 주기함수이므로 그래프는 [그림 2]와 같다.



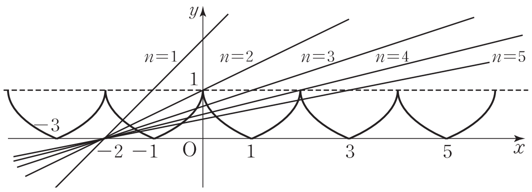
[그림 1]



[그림 2]

이때, 자연수 n에 대하여 직선 $x-ny+2=0$

즉, $y=\frac{1}{n}(x+2)$는 점 $(-2,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{n}$인 직선이므로 $n=1,\ 2,\ 3\ \cdots$일 때의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $g(1)=1,\ g(2)=2,\ g(3)=3,\ \cdots$에서

$g(n)=n\ \cdots$ ㉠이다. $\therefore g(3)=3$ (참)

ㄴ. $f(2)=1,\ f(3)=0,\ f(4)=1,\ f(5)=0,\ \cdots$이고,

$g(2)=2,\ g(3)=3,\ g(4)=4,\ g(5)=5,\ \cdots$이므로

$n\ge 2$일 때, $f(n)<g(n)$이다. (참)

ㄷ. ㉠에 의하여 $g(n)=n,\ g(n+2)=n+2$이므로

$(f\circ g)(n)=f(g(n))=f(n)$이고

$(f\circ g)(n+2)=f(g(n+2))=f(n+2)$이다.

이때, 조건 (나)에 의해서 $f(n+2)=f(n)$이므로

$(f\circ g)(n)=(f\circ g)(n+2)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

35 답 ①

$A(k,\ \sqrt{k})$, $B(k,\ 3\sqrt{k})$에 대하여 두 점 A, B의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $M(k,\ 2\sqrt{k})$이다.

이때, 삼각형 ABC가 정삼각형이고 선분 AB가 x축에 수직이므로 점 C의 y좌표는 점 M의 y좌표와 같다.

즉, $2\sqrt{k}=3\sqrt{x}$에서 $x=\frac{4}{9}k$이므로

점 C의 좌표는 $C\left(\frac{4}{9}k,\ 2\sqrt{k}\right)$이다.

한편, 선분 CM은 정삼각형 ABC의 높이이므로

$\overline{CM}=\sqrt{3}\times\overline{AM}$에서 $\overline{CM}^2=3\times\overline{AM}^2$

$\left(\frac{5}{9}k\right)^2=3(\sqrt{k})^2,\ \frac{25}{81}k^2=3k \qquad \therefore k=\frac{243}{25}\ (\because k>0)$

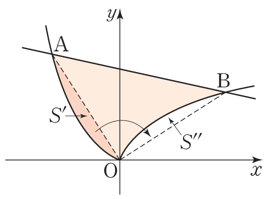
따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는

$\overline{AB}=2\sqrt{k}=2\sqrt{\frac{243}{25}}=2\times\frac{9\sqrt{3}}{5}=\frac{18\sqrt{3}}{5}$

36 답 40

함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{2}x^2\ (x\le 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하고 점 A는 같은 방법의 대칭이동으로 점 B로 이동한다.

따라서 그림과 같이 S'의 부분과 S''의 부분의 넓이는 서로 같다.



따라서 구하는 부분의 넓이를 S라 하면 S는 삼각형 OBA의 넓이와 같다.

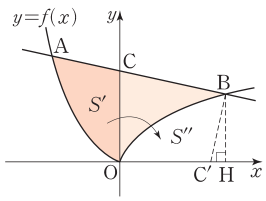
이때, 삼각형 OBA에서 밑변을 선분 AB라 하면 높이는 원점과 직선 $x+3y-20=0$ 사이의 거리이다.

$\overline{AB}=\sqrt{(8+4)^2+(4-8)^2}=4\sqrt{10}$ 이고

높이는 $\frac{|0+3\times 0-20|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$ 이므로

$S=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}=40$

다른 풀이 : 제2사분면에 있는 도형을 이동시켜 구하기



직선 $x+3y-20=0$이 y축과 만나는 점은 $C\left(0,\ \frac{20}{3}\right)$이다.

점 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $C'\left(\frac{20}{3},\ 0\right)$이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

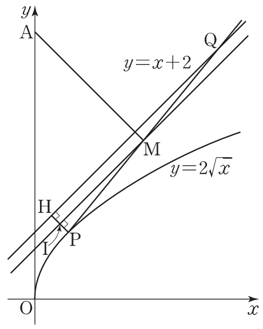
그림과 같이 S'의 부분과 S''의 부분의 넓이는 서로 같기 때문에 구하는 부분의 넓이를 S라 하면 S는 사다리꼴 COHB의 넓이에서 삼각형 BC′H의 넓이를 뺀 값이다.

$\square\mathrm{COHB}=\frac{1}{2}\times\left(4+\frac{20}{3}\right)\times 8=\frac{128}{3}$이고

$\triangle\mathrm{BC'H}=\frac{1}{2}\times\left(8-\frac{20}{3}\right)\times 4=\frac{8}{3}$이므로

$S=\frac{128}{3}-\frac{8}{3}=40$

37 답 ①



함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 점 P에서 직선 $y=x+2$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 PH의 중점을 I라 하자.

삼각형 PQH에서 중점연결정리에 의하여 $\overline{\mathrm{MI}} /\!/ \overline{\mathrm{QH}}$이므로

선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등분선 위에 있다.

두 점 A, M 사이의 거리의 최솟값은 점 A와 직선 MI 사이의 거리의 최솟값과 같다.

즉, 점 A와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리 및 직선 $y=x+2$와 직선 MI 사이의 거리의 최솟값의 합과 같다.

직선 $y=x+2$와 직선 MI 사이의 거리의 최솟값은 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 최솟값의 $\frac{1}{2}$이다.

점 $\mathrm{P}(a, 2\sqrt{a})$라 할 때, 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리는 $x-y+2=0$에서

$\frac{|a-2\sqrt{a}+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|(\sqrt{a}-1)^2+1|}{\sqrt{2}}$이므로

점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 최솟값은 $a=1$일 때 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

그러므로 직선 $y=x+2$와 직선 MI 사이의 거리의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ··· ㉠

점 $\mathrm{A}(0, 8)$과 직선 $y=x+2$ 사이의 거리는 $x-y+2=0$에서

$\frac{|0-8+2|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ ··· ㉡

㉠, ㉡에서 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은

$\frac{\sqrt{2}}{4}+3\sqrt{2}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$

38 답 6

함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}k\ (x\geq 0)$의 역함수가

$g(x)=\sqrt{4x-k}$이므로 ········· ⓐ

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉, 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}k=x$에서 $x^2-4x+k=0$이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

(두 근의 합)≥ 0, (두 근의 곱)≥ 0, (판별식)>0

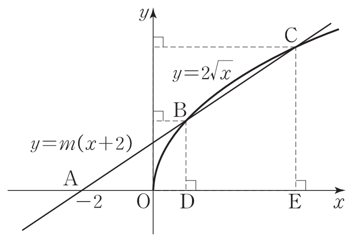
$k\geq 0$, $\frac{D}{4}=(-2)^2-k>0$이어야 한다. ········· ⓑ

즉, $0\leq k<4$이므로 모든 정수 k는 0, 1, 2, 3으로 구하는 합은 $0+1+2+3=6$이다. ········· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 역함수 관계임을 파악한다. ········· [30%]
ⓑ 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 조건을 구한다. ········· [40%]
ⓒ k의 값의 범위를 구하고 모든 정수 k의 값의 합을 구한다. ········· [30%]

39 답 40



두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AB}}$이고 두 삼각형 ABD, ACE가 닮음이므로 $\overline{\mathrm{CE}}=2\overline{\mathrm{BD}}$이다. ········· ⓐ

두 점 B, C의 y좌표를 각각 k, $2k\ (k>0)$라 하고

$y=m(x+2)$와 $y=2\sqrt{x}$, 즉 $\frac{1}{4}y^2=x$를 연립하면

$y=m\left(\frac{1}{4}y^2+2\right)$에서 이차방정식 $my^2-4y+8m=0$의 두 근이 k, $2k$이다. ········· ⓑ

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k+2k=\frac{4}{m}$, $k\times 2k=8$이므로 $k=2\ (\because k>0)$이고

$m=\frac{2}{3}$이다.

$\therefore 60m=60\times\frac{2}{3}=40$ ········· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 선분 CE, BD의 길이 사이의 관계식을 구한다. ········· [30%]
ⓑ k의 값을 구하기 위하여 방정식을 세운다. ········· [40%]
ⓒ 근과 계수의 관계를 이용하여 k의 값을 구하고 $60m$의 값을 구한다. ········· [30%]

다른 풀이 : 두 교점의 좌표를 구하여 기울기 계산하기

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DE}}$이고 직선 l은 m의 값에 관계없이 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$을 지나므로 점 B의 x좌표를 $k\ (k>0)$라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=k+2$에서 $\overline{\mathrm{DE}}=k+2$이다.

즉, 점 E의 x좌표는 $k+(k+2)=2k+2$이므로

두 점 B, C의 y좌표는 각각 $2\sqrt{k}$, $2\sqrt{2k+2}$이다.

이때, $2\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CE}}$이므로 $4\sqrt{k}=2\sqrt{2k+2}$에서

$4k=2k+2$, $2k=2$

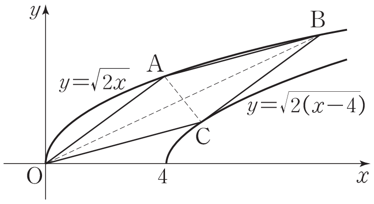
$\therefore k=1$

즉, 점 B의 좌표는 $(1, 2)$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선 l의

기울기 $m=\dfrac{2-0}{1-(-2)}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore 60m=40$

40 답 27



곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 A의 좌표는 $A(4, 2\sqrt{2})$이고

점 B의 좌표를 $B(2b^2, 2b)$, 곡선 $y=\sqrt{2(x-4)}$ 위의 점 C의

좌표를 $C(2c^2+4, 2c)\,(c>0)$라 하자.

이때, 선분 AC의 중점의 좌표는 $(c^2+4, c+\sqrt{2})$이고

선분 OB의 중점의 좌표는 (b^2, b)인데 사각형 OABC가

평행사변형이므로 두 선분 OB, AC의 중점이 일치한다. ------ ⓐ

중점의 x좌표 $b^2=c^2+4$에서 $b^2-c^2=4$이고

중점의 y좌표 $b=c+\sqrt{2}$에서 $b-c=\sqrt{2}$ ⋯ ㉠이다.

$b^2-c^2=(b-c)(b+c)=4$에 $b-c=\sqrt{2}$를 대입하면

$\sqrt{2}(b+c)=4 \qquad \therefore b+c=2\sqrt{2}$ ⋯ ㉡ ------ ⓑ

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 점 B의 좌표는

$B(9, 3\sqrt{2})$이다.

$\therefore \overline{AB}^2=(9-4)^2+(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2=25+2=27$ ------ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 선분 AC, OB의 중점이 일치함을 파악한다. ······ [40%]

ⓑ 두 선분의 중점이 일치함을 이용하여 관계식을 세운다. ······ [30%]

ⓒ $\overline{AB}^2$의 값을 구한다. ······ [30%]

일등급 UP

＊ 무리함수의 그래프 위의 점의 표현

㉠, ㉡에서 두 점 B, C의 좌표를 $B(b, \sqrt{2b})$, $C(c, \sqrt{2(c-4)})$라 하면 계산 과정이 복잡해진다. 무리함수에서 문자를 이용해 좌표를 설정할 때는 근호 안이 완전제곱이 되도록 하는 문자를 좌표로 설정하면 계산 과정이 간단해진다.

고난도 도전 문제

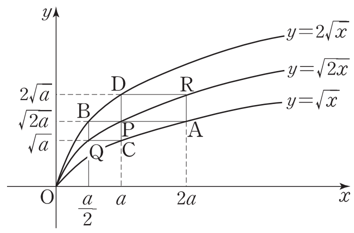
문제편 p.148~149

41 답 ⑤

점 $P(a, \sqrt{2a})$의 좌표를 기준으로 다른 점들의 좌표를 구하자.

직선 $x=a$와 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$가 만나는 점의 좌표는 각각 $C(a, \sqrt{a})$, $D(a, 2\sqrt{a})$이고,

직선 $y=\sqrt{2a}$와 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$가 만나는 점의 좌표는 각각 $A(2a, \sqrt{2a})$, $B\left(\dfrac{a}{2}, \sqrt{2a}\right)$이다.



ㄱ. 두 점 Q, R의 좌표는 $Q\left(\dfrac{a}{2}, \sqrt{a}\right)$, $R(2a, 2\sqrt{a})$이므로 둘 다 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점이다. (참)

ㄴ. $\overline{PB}=a-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$, $\overline{PC}=\sqrt{2a}-\sqrt{a}$이므로

$\square PBQC=\overline{PB}\times\overline{PC}=\dfrac{a}{2}\times(\sqrt{2a}-\sqrt{a})=\dfrac{a\sqrt{a}}{2}(\sqrt{2}-1)$

또한, $\overline{PA}=2a-a=a$, $\overline{PD}=2\sqrt{a}-\sqrt{2a}$이므로

$\square PARD=\overline{PA}\times\overline{PD}=a\times(2\sqrt{a}-\sqrt{2a})$

$=a\sqrt{a}\times\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

$\therefore \dfrac{\square PARD}{\square PBQC}=\dfrac{a\sqrt{a}\times\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\dfrac{a\sqrt{a}}{2}(\sqrt{2}-1)}=2\sqrt{2}$

따라서 점 P의 위치에 관계없이 □PBQC와 □PARD의 넓이의 비는 $1:2\sqrt{2}$로 일정하다. (참)

ㄷ. $\square PBQC=S$라 하면 ㄴ에 의해 $\square PARD=2\sqrt{2}S$이다.

즉, $\square PBQC+\square PARD=(2\sqrt{2}+1)S$이므로

$4+\sqrt{2}=(2\sqrt{2}+1)S$

$\therefore S=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}$

따라서 두 사각형의 넓이의 곱은

$S\times 2\sqrt{2}S=2\sqrt{2}S^2=4\sqrt{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

42 답 ④

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$에서 $x\geq 0$, $8-x\geq 0$이고

$\sqrt{x}+\sqrt{8-x}\geq 0$이다.

한편, $x+(8-x)=8$이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1+1)\{x+(8-x)\}\geq(\sqrt{x}+\sqrt{8-x})^2$

(단, 등호는 $x=4$일 때 성립)

즉, $(\sqrt{x}+\sqrt{8-x})^2\leq 16$

$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{8-x}\leq 4$

따라서 최댓값은 4이다.

다른 풀이 : $\{f(x)\}^2$의 최댓값 이용하기

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$에서 $x\geq 0$, $8-x\geq 0$이므로

함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,0\leq x\leq 8\}$이다.

$f(x)\geq 0$이므로 $\{f(x)\}^2$이 최대일 때, $f(x)$도 최대이다.

$\{f(x)\}^2=x+2\sqrt{8x-x^2}+8-x$

$\quad\quad\quad =8+2\sqrt{8x-x^2}$

이때, $y=8x-x^2=-(x-4)^2+16$이므로 $0\leq x\leq 8$에서

$x=4$일 때, y는 최댓값 16을 갖는다.

따라서 $x=4$일 때, $\{f(x)\}^2$은 최댓값 $8+2\sqrt{16}=16$을 가지므로

$f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{16}=4$이다.

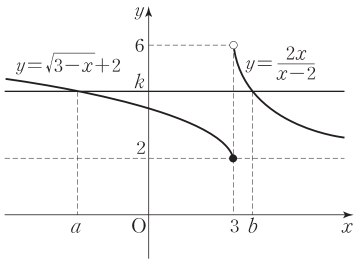
43 답 2

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

이때, $f(a)=f(b)=k$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선

$y=k$의 두 교점의 x좌표가 a, b $(a<3<b)$이다.

$y=\frac{2x}{x-2}$의 그래프의 한 점근선이 $y=2$이므로 $a\neq 3$이야.



$x>3$일 때, $\frac{2b}{b-2}=k$에서 b가 정수이므로 k는 유리수이다.

$x\leq 3$일 때, $\sqrt{3-a}+2=k$에서 a가 정수이고 k가 유리수이므로

그래프에서 k는 $2<k<6$인 자연수이다.

즉, 가능한 k의 값은 3 또는 4 또는 5이다.

(i) $k=3$일 때, $a=2$, $b=6$

(ii) $k=4$일 때, $a=-1$, $b=4$

(iii) $k=5$일 때, $a=-6$, $b=\frac{10}{3}$

(i)~(iii)에서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(2, 6)$, $(-1, 4)$의

2개이다.

일등급 UP

*** 유리식의 성질**

$k=\frac{2b}{b-2}=\frac{2(b-2)+4}{b-2}=2+\frac{4}{b-2}$에서 k가 자연수이면 $b-2$는 4의 약수이다. 즉, 가능한 k의 값은 3 또는 4이다.

44 답 120

$y=\sqrt{x(4-x)}+1$에서 $(y-1)^2=-x^2+4x$ $(y\geq 1)$

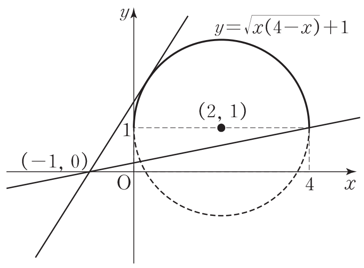
$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=4$ $(y\geq 1)$

즉, 곡선 $y=\sqrt{x(4-x)}+1$은 중심이 $(2, 1)$이고 반지름의 길이가

2인 반원이다.

한편, $\frac{b}{a+1}=\frac{b-0}{a-(-1)}$에서 $\frac{b}{a+1}$의 값은 두 점

$(-1, 0)$, (a, b)를 연결한 직선의 기울기이다.



두 점 $(-1, 0)$, (a, b)를 연결한 직선의 기울기의 최솟값은

$(a, b)=(4, 1)$일 때이므로 최솟값 $m=\frac{1}{5}$

또, 최댓값은 점 $(-1, 0)$을 지나는 직선 $y=M(x+1)$이 반원에

접할 때이다. 즉, 원의 중심 $(2, 1)$과 직선 $Mx-y+M=0$

사이의 거리가 반지름의 길이 2일 때이므로

$\frac{|2M-1+M|}{\sqrt{M^2+1}}=2$에서 $|3M-1|=2\sqrt{M^2+1}$

$9M^2-6M+1=4M^2+4$, $5M^2-6M-3=0$

$\therefore M=\frac{3\pm\sqrt{9+15}}{5}=\frac{3\pm 2\sqrt{6}}{5}$

이때, $M>0$이므로 $M=\frac{3+2\sqrt{6}}{5}$

따라서 $M+m=\frac{3+2\sqrt{6}}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\sqrt{6}$이므로

$p=\frac{4}{5}$, $q=\frac{2}{5}$이다.

$\therefore 100(p+q)=100\times\frac{6}{5}=120$

45 답 8

$f(x)=x$, 즉 $\sqrt{ax-a}=x$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-ax+a=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

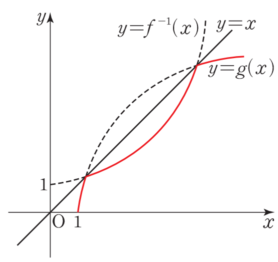
$D=a^2-4a>0$ $(\because a>4)$이므로

곡선 $f(x)=\sqrt{ax-a}$와 직선 $y=x$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $y=f(x)$와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에

대하여 대칭이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



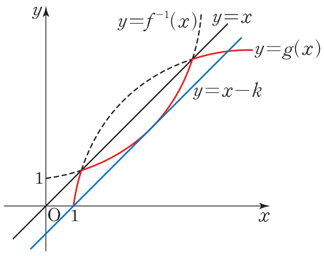
[그림 1]

이때, 양수 k의 값에 관계없이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선

$y=x-k$의 교점이 2개인 경우가 생기지 않으려면

[그림 2]와 같이 직선 $y=x-k$가 함수 $y=f(x)$의 꼭짓점

$(1, 0)$을 지날 때 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 접해야 한다.



[그림 2]

직선 $y=x-k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때 $k=1$이고,

$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x^2+1$이므로

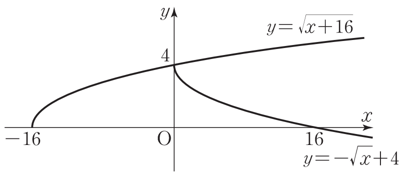
$\dfrac{1}{a}x^2+1=x-1,\ x^2-ax+2a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D'이라 하면 $D'=a^2-8a=0$에서

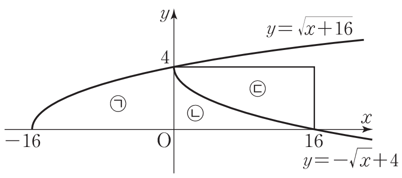
$a=8\ (\because a>4)$

46 답 85

함수 $y=\sqrt{x+16}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -16만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=-\sqrt{x}+4$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 두 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

이때, 함수 $y=-\sqrt{x}+4$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x+16}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 16만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같이 함수 $y=\sqrt{x+16}$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 영역 ㉠의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 함수 $y=-\sqrt{x}+4$의 그래프와 두 직선 $x=16,\ y=4$로 둘러싸인 영역 ㉢의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.

따라서 영역 ㉠과 영역 ㉡의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 영역 ㉡과 영역 ㉢의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.

x축 위의 정수인 점은 $0,\ 1,\ \cdots,\ 16$으로 17개, y축 위의 정수인 점은 $0,\ 1,\ \cdots,\ 4$로 5개이므로 구하는 점의 개수는 $17\times5=85$이다.

다른 풀이 : 정수 y에 대한 정수 x의 개수 구하기

[그림 1]에서 정수 y에 대한 정수 x의 개수를 구해보자.

(ⅰ) $y=0$일 때, x의 값은 $-16,\ -15,\ -14,\ \cdots,\ 16$의 33개
$0=\sqrt{x+16}$에서 $x=-16$이고 $0=-\sqrt{x}+4$에서 $x=16$

(ⅱ) $y=1$일 때, x의 값은 $-15,\ -14,\ -13,\ \cdots,\ 9$의 25개
$1=\sqrt{x+16}$에서 $x=-15$이고 $1=-\sqrt{x}+4$에서 $x=9$

(ⅲ) $y=2$일 때, x의 값은 $-12,\ -11,\ -10,\ \cdots,\ 4$의 17개

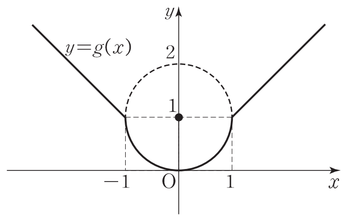
(ⅳ) $y=3$일 때, x의 값은 $-7,\ -6,\ -5,\ \cdots,\ 1$의 9개

(ⅴ) $y=4$일 때, x의 값은 0의 1개

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $33+25+17+9+1=85$이다.

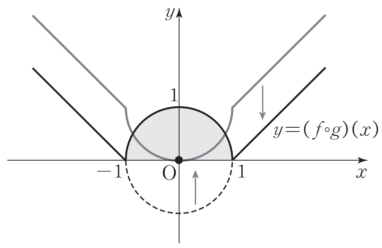
47 답 3

함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



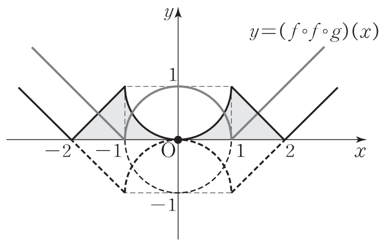
[그림 1]

한편, 함수 $y=(f\circ g)(x)=|g(x)-1|$의 그래프는 [그림 2]와 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 x축의 아래쪽 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



[그림 2]

또, 함수 $y=(f\circ f\circ g)(x)=|(f\circ g)(x)-1|$의 그래프는 [그림 3]과 같이 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 x축의 아래쪽 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



[그림 3]

따라서 구하는 두 영역의 넓이의 합은 평행한 두 변의 길이가 각각 2, 4이고 높이가 1인 사다리꼴의 넓이이다.

$\therefore A+B=\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times1=3$

48 답 4

$y=x+|x-n|=\begin{cases} 2x-n & (x\ge n) \\ n & (x<n) \end{cases}$이고,

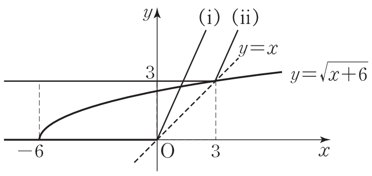
$y=x+|x-n|$의 그래프는 점 (n, n)을 지나고 점 (n, n)은 직선 $y=x$ 위에 있다.

두 함수 $y=\sqrt{x+6}$, $y=x+|x-n|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

(ⅰ) $y=x+|x-n|$의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지날 때 $n=0$

(ⅱ) $y=\sqrt{x+6}$과 $y=x$의 그래프는 점 $(3, 3)$에서 만나므로

$y=x+|x-n|$이 점 $(3, 3)$을 지날 때 $n=3$



(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 n의 값의 범위는 $0\le n<3$

(ⅲ) $y=x+|x-n|$의 그래프가 점 $(-6, 0)$을 지날 때,

$n=0$ 또는 $n=-12$

이때, $y=2x-n$ $(x\ge n)$의 그래프의 y절편 $-n>0$이므로

$n<0$ $\qquad \therefore n=-12$

(ⅳ) $y=2x-n$과 $y=\sqrt{x+6}$의 그래프가 접할 때,

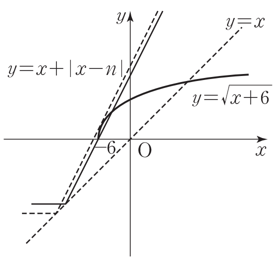
$2x-n=\sqrt{x+6}$에서 $4x^2-4nx+n^2=x+6$

$4x^2-(4n+1)x+n^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4n+1)^2-16(n^2-6)=0$에서 $8n+97=0$

$\therefore n=-\dfrac{97}{8}$



(ⅲ), (ⅳ)에서 구하는 n의 값의 범위는 $-\dfrac{97}{8}<n\le -12$

따라서 구하는 n의 값의 범위는 $0\le n<3$ 또는 $-\dfrac{97}{8}<n\le -12$

이므로 정수 n의 개수는 -12, 0, 1, 2의 4이다.

Ⅲ-10
무리식과
무리함수

memo