



형상기억 공식집

[정답 및 해설]

차례

[수학 I]

I. 지수함수와 로그함수	2
II. 삼각함수	13
III. 수열	22

[미적분]

I. 수열의 극한	77
II. 미분법	85
III. 적분법	101

[수학 II]

I. 함수의 극한과 연속	30
II. 미분	35
III. 적분	47

[기하]

I. 이차곡선	113
II. 평면벡터	121
III. 공간도형과 공간좌표	127

[확률과 통계]

I. 경우의 수	58
II. 확률	64
III. 통계	70

수능 수학 개념과 공식이 머릿속에 통째로 기억된다!

수학 I

I. 지수함수와 로그함수

01 거듭제곱과 제곱근 ~

08 상용로그의 응용

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 12

01 ㄴ, ㄹ	02 1	
03 풀이 참조	04 ②	05 ①
06 풀이 참조	07 ③	08 ②
09 ④	10 ①	
11 (1) $x=8$ (2) $y=9$	12 $\frac{26}{5}$	
13 ④	14 ⑤	15 ③
16 ④	17 ①	18 $\frac{5}{6}$
19 (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\bigcirc$ (4) $\times$		
20 (1) 1 (2) 2 (3) -1	21 ②	
22 ④	23 ④	24 ⑤

01 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. 0의 제곱근은 0 하나이고, 음수의 제곱근은 없다.

ㄴ. 5의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$ 로 2개이다.

ㄷ. 제곱근 4는 2이다.

ㄹ. -9는 음수이므로 제곱근은 없다.

ㅁ. $\sqrt{16}=4$ 이므로 $\sqrt{16}$ 의 제곱근은 ± 2 이다.

02 답 1

$0 < -a < 1$, $0 < a+1 < 1$ 이므로

(주어진 식) $= (-a) + (a+1) = 1$

03 답 (1) a^7 (2) x^{15}

(3) a^6b^3 (4) x^5

(5) $\frac{81a^{20}}{b^8}$ (6) $8x^5y^3$

$$(1) a^4 \times a^3 = a^{4+3} = a^7$$

$$(2) (x^3)^5 = x^{3 \times 5} = x^{15}$$

$$(3) (a^2b)^3 = a^{2 \times 3} \times b^3 = a^6b^3$$

$$(4) x^8 \div x^3 = x^{8-3} = x^5$$

$$(5) \left(\frac{3a^5}{b^2}\right)^4 = \frac{3^4 a^{5 \times 4}}{b^{2 \times 4}} = \frac{81a^{20}}{b^8}$$

$$(6) (4xy)^2 \times (x^2y)^3 \div 2x^3y^2$$

$$= \frac{16x^2y^2 \times x^6y^3}{2x^3y^2} = \frac{16x^8y^5}{2x^3y^2}$$

$$= 8 \times \frac{x^8}{x^3} \times \frac{y^5}{y^2} = 8x^5y^3$$

04 답 ②

ㄱ. 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}=2$ (참)

ㄴ. -16의 네제곱근은 없다. (거짓)

ㄷ. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[6]{8}$ (참) 네제곱해서 -16이 되는 실수는 없다. (단, 허수는 존재)

ㄹ. $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ (거짓)

05 답 ①

$$\left\{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{4}{9}} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{3 \times \frac{3}{2}}\right\}^{\frac{4}{9}} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{9}{2}}\right\}^{\frac{4}{9}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{9}{2} \times \frac{4}{9}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

06 답 (1) 5 (2) 2

(3) $5^5\sqrt{3}$ (4) $2^3\sqrt{2}$

$$(1) \sqrt[3]{25} \times \sqrt{5} = \sqrt[3]{25 \times 5} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$(2) \sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$(3) \sqrt[5]{729} + 2^5\sqrt{3} = \sqrt[5]{3^6} + 2^5\sqrt{3}$$

$$= 3^5\sqrt{3} + 2^5\sqrt{3}$$

$$= 5^5\sqrt{3}$$

$$(4) \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^7} - \sqrt[3]{2^4}$$

$$= \sqrt[3]{2^6} \times \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2}$$

$$= 4^3\sqrt{2} - 2^3\sqrt{2}$$

$$= 2^3\sqrt{2}$$

07 답 ③ $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

이차방정식 $x^2-2x-6=0$ 의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -6$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore 2^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

08 답 ②

$$\begin{aligned} a + a^{-1} &= \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \right)^2 - 2 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} = 3^2 - 2 = 7 \\ a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} &= \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \right)^3 - 3 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} \times \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 2}{a + a^{-1} + 3} = \frac{20}{10} = 2$$

09 답 ④

$$13^x = 9 \text{에서 } 13^x = 3^2$$

$$\therefore 13 = 3^{\frac{2}{x}} \cdots \textcircled{1}$$

$$117^y = 27 \text{에서 } 117^y = 3^3$$

$$\therefore 117 = 3^{\frac{3}{y}} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } 3^{\frac{2}{x}} \div 3^{\frac{3}{y}} = \frac{13}{117}$$

$$3^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} = \frac{1}{9} = 3^{-2} \quad \therefore \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -2$$

10 답 ①

밑과 진수 조건에 의하여

$$\begin{aligned} x-2 > 0, x-2 \neq 1 \\ \therefore x > 2, x \neq 3 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$-x^2 + 8x - 12 > 0, x^2 - 8x + 12 < 0$$

$$(x-2)(x-6) < 0 \quad \therefore 2 < x < 6 \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 모두 만족시키는 정수 x 의 값은 4, 5이므로 이들의 합은 9이다.

11 답 (1) $x=8$ (2) $y=9$

$$(1) \log_{\frac{1}{2}} x = -3 \quad \therefore x = \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} = 2^3 = 8$$

$$(2) \log_y \sqrt{3} = \frac{1}{4} \text{에서 } \sqrt{3} = y^{\frac{1}{4}} \quad \therefore y = (\sqrt{3})^4 = 9$$

12 답 $\frac{26}{5}$

$$a = \log_3 5 \text{에서 } 3^a = 5$$

$$\therefore 3^a + 3^{-a} = 3^a + \frac{1}{3^a} = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$$

13 답 ④

$$\begin{aligned} \log_3 \sqrt{2} - 2 \log_3 \frac{1}{3} - \log_3 \sqrt{6} \\ &= \frac{1}{2} \log_3 2 - 2 \times (-1) - \frac{1}{2} \log_3 6 \\ &= \frac{1}{2} (\log_3 2 - \log_3 6) + 2 = \log_3 \sqrt{\frac{2}{6}} = \log_3 \sqrt{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{3} + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

14 답 ⑤

$$\begin{aligned} \log_{10} 36 &= \log_{10} 6^2 = 2 \log_{10} 6 \\ &= 2(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 2(a+b) \\ &= 2 \log_a MN = \log_a M + \log_a N \end{aligned}$$

15 답 ③

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 \frac{5}{4} + \cdots + \log_2 \frac{64}{63} \\ &= \log_2 \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{64}{63} \right) \\ &= \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \end{aligned}$$

16 답 ④

$$\begin{aligned} 2^x &= 3 \text{에서 } x = \log_2 3 \\ 3^y &= 8 \text{에서 } y = \log_3 8 = \log_3 2^3 = 3 \log_3 2 \\ \therefore xy &= \log_2 3 \times 3 \log_3 2 = 3 \end{aligned}$$

17 ① 로그의 합은 진수의 곱셈,
로그의 차는 진수의 나눗셈

$$\log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 40$$

$$= \log_2 \left(10 \times 12 \times \frac{1}{40} \right) = \log_2 3$$

$$\therefore \frac{2^{\log_2 3}}{a^{\log_2 b} = b^{\log_2 a}} = 3$$

18 $\frac{5}{6}$

$$\begin{aligned} & (\log_3 5 + \log_{27} 25)(\log_5 9 - \log_{25} 27) \\ &= \left(\log_3 5 + \frac{2}{3} \log_3 5 \right) \left(2 \log_5 3 - \frac{3}{2} \log_5 3 \right) \\ &= \frac{5}{3} \log_3 5 \times \frac{1}{2} \log_5 3 \\ &= \frac{5}{6} \log_3 5 \times \log_5 3 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

19 (1) × (2) ×
(3) ○ (4) ×

20 (1) 1 (2) 2
(3) -1

$$(1) \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$$

$$\begin{aligned} (2) \log \frac{25}{4} + \log 16 \\ &= \log \left(\frac{25}{4} \times 16 \right) = \log (25 \times 4) \\ &= \log 100 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \log \frac{2}{25} - \log \frac{4}{5} \\ &= \log \left(\frac{2}{25} \times \frac{5}{4} \right) = \log \frac{1}{10} = -1 \end{aligned}$$

21 ②

$$\begin{aligned} \log_5 108 &= \frac{\log 108}{\log 5} = \frac{\log(2^2 \times 3^3)}{1 - \log 2} \\ &= \frac{2 \log 2 + 3 \log 3}{1 - \log 2} \\ &= \frac{2a + 3b}{1 - a} \end{aligned}$$

22 ④

$$\begin{aligned} \log 5^{30} &= 30 \log 5 = 30 \log \frac{10}{2} \\ &= 30(\log 10 - \log 2) \\ &= 30(1 - 0.3010) \\ &= 20.97 \end{aligned}$$

$\log 5^{30}$ 의 정수 부분이 20이므로 5^{30} 은 21자리 수이다.

23 ④

$$\begin{aligned} & \log x^2 + \log^3 \sqrt{x} \\ &= 2 \log x + \frac{1}{3} \log x = \frac{7}{3} \log x \\ &= \frac{7}{3} \times (-1.3893) = -3.2417 \\ &= -4 + 0.7583 \\ &\text{따라서 } n = -4, a = 0.7583 \text{이므로} \\ &n - a = -4.7583 \end{aligned}$$

24 ⑤

$$\begin{aligned} & 10 < x < 100 \text{이므로} \\ & \log 10 < \log x < \log 100 \\ & \therefore 1 < \log x < 2 \cdots \text{㉠} \\ & \log x \text{의 소수 부분과 } \log x^3 \text{의 소수 부분이} \\ & \text{같으므로} \\ & \log x^3 - \log x = (\text{정수}) \text{에서} \\ & 2 \log x = n (n \text{은 정수}) \text{이라 하면} \\ & \log x = \frac{n}{2} \\ & \text{㉠에 의하여 } 1 < \frac{n}{2} < 2 \text{이므로 } 2 < n < 4 \end{aligned}$$

n 이 정수이므로

$$\begin{aligned} & n = 3 \text{이고 } \log x = \frac{3}{2} \\ & \therefore x = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10} \end{aligned}$$

종합 연습 문제

정답

문제편 p. 28

25 5

26 14

27 ④

28 ②

29 ②

30 1

31 6

32 ⑤

25 답 5

$$\sqrt[3]{a^4} = \sqrt{a^3 \sqrt{a^k}} \text{에서}$$

우변을 정리하면

$$\sqrt{a^3 \sqrt{a^k}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{3+k}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{3+k}{3}}} \text{이므로}$$

$$a^4 = \sqrt{a^{3+k}} \quad \rightarrow k > 0 \text{일 때 } k^a \sqrt{a} = \sqrt[k^a]{k^a a}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } a^8 = a^{3+k}$$

$$\therefore k = 5 \quad \rightarrow \text{지수를 비교하면 } 8 = 3 + k$$

26 답 14

$$2^x = a \text{에서 } 2 = a^{\frac{1}{x}} \cdots \textcircled{1}$$

$$7^y = a \text{에서 } 7 = a^{\frac{1}{y}} \cdots \textcircled{2}$$

$$14^z = a \text{에서 } 14 = a^{\frac{1}{z}} \cdots \textcircled{3}$$

① × ② × ③을 하면

$$2 \times 7 \times 14 = a^{\frac{1}{x}} \times a^{\frac{1}{y}} \times a^{\frac{1}{z}}$$

$$a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 14^2, \quad a^2 = 14^2$$

$$\therefore a = 14 \quad (\because a > 0)$$

27 답 ④

이차방정식 $x^2 - 8x + 5 = 0$ 에서

$$\alpha + \beta = 8, \quad \alpha\beta = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_5(\alpha + 2) + 2\log_{25}(\beta + 2) \\ &= \log_5(\alpha + 2) + \log_5(\beta + 2) \\ &= \log_5(\alpha + 2)(\beta + 2) \\ &= \log_5\{\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4\} \\ &= \log_5(5 + 2 \times 8 + 4) \\ &= \log_5 25 = \log_5 5^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

28 답 ②

$$99 \leq \log A^{20} < 100 \text{이므로 } 4.95 \leq \log A < 5$$

$$-5 < -\log A \leq -4.95$$

$$-5 < \log \frac{1}{A} \leq -4.95$$

$$-5 < \log \frac{1}{A} \leq -5 + 0.05$$

따라서 $\log \frac{1}{A}$ 의 정수 부분은 -5 이므로 $\frac{1}{A}$ 은 소수점 아래 5째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

29 답 ②

$$(i) x^4 = y^6 \text{에서 } y = (x^4)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{2}{3}} \text{이므로}$$

$$A = \log_x y = \log_x x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_x x = \frac{2}{3}$$

$$(ii) y^6 = z^{10} \text{에서 } z = (y^6)^{\frac{1}{10}} = y^{\frac{3}{5}} \text{이므로}$$

$$B = \log_y z = \log_y y^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \log_y y = \frac{3}{5}$$

$$(iii) z^{10} = x^4 \text{에서 } x = (z^{10})^{\frac{1}{4}} = z^{\frac{5}{2}} \text{이므로}$$

$$C = \log_z x = \log_z z^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log_z z = \frac{5}{2}$$

(i)~(iii)에 의하여

$$A = \frac{2}{3} = \frac{20}{30}, \quad B = \frac{3}{5} = \frac{18}{30}, \quad C = \frac{5}{2} = \frac{75}{30}$$

이므로 $B < A < C$

30 답 1

로그의 성질에 의하여 $\log_a a^n = \frac{n}{m}$ 임을 이용한다. (단, $a > 0, a \neq 1$)

$$\log_3 9 = \log_3 3^2 = \frac{2}{2} \log_3 3 = \log_3 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &(\log_{48} 2)(\log_2 6 + 2^{\log_3 9}) \\ &= (\log_{48} 2)(\log_2 6 + 2^{\log_3 3}) \\ &= (\log_{48} 2)(\log_2 6 + 3^{\log_3 2}) \\ &= (\log_{48} 2)(\log_2 6 + 3) \\ &= (\log_{48} 2)(\log_2 6 + \log_2 8) \\ &= (\log_{48} 2)(\log_2 48) \\ &= (\log_{48} 2) \left(\frac{1}{\log_{48} 2} \right) = 1 \end{aligned}$$

31 [답] 6

이차방정식 $x^2 - 15x + 5 = 0$ 의 두 근이 $\log a, \log b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log a + \log b = 15$$

$$(\log a)(\log b) = 5$$

따라서 구하는 값은

$$\log_{\sqrt{a}} 10 - \log_b 0.01$$

$$= \log_{a^{\frac{1}{2}}} 10 - \log_b 10^{-2}$$

$$= \frac{2\log_a 10 + 2\log_b 10}{2}$$

로그의 밑의 변환 공식 $\log_a 10 = \frac{1}{\log a}$ 을 이용한다.

$$= 2 \left(\frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log b} \right)$$

$$= 2 \times \frac{\log a + \log b}{(\log a)(\log b)}$$

$$= 2 \times \frac{15}{5} = 6$$

32 [답] ⑤

상용로그표에서

$$\log 1.33 = 0.1239, \log 1.01 = 0.0043$$

이므로

로그의 성질 $\log MN = \log M + \log N$ 을 이용한다. (단, $M > 0, N > 0$)

$$\log(13.3 \times 10.1)$$

$$= \log(1.33 \times 1.01 \times 10^2)$$

$$= \log 1.33 + \log 1.01 + \log 10^2$$

$$= 0.1239 + 0.0043 + 2$$

$$= 2.1282$$

09 지수함수와 그 그래프 ~

17 지수함수와 로그함수의 응용

핵심 개념 문제 [정답]

문제편 p. 30

33 ③ 34 ④ 35 ③

36 4 37 ②

38 풀이 참조

39 (1) $x=1$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$

40 ⑤ 41 풀이 참조 42 ③

43 ① 44 ③ 45 ②

46 풀이 참조

47 최댓값 : 6, 최솟값 : 4 48 -8

49 ③ 50 $x=-3$ 또는 $x=6$

51 ② 52 ③

53 (1) $x \geq 1$ (2) $2 < x \leq 4$ (3) $2 < x \leq 3$

54 ② 55 81 56 8

57 ③ 58 $\frac{1}{4} < x < 2$

33 [답] ③

I. $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = 3^0 + 2 = 1 + 2 = 3 \quad \leftarrow (가)$$

II. 점근선의 방정식은 $y=2$ $\leftarrow (나)$

III. 함수 $y=3^x+2$ 의 그래프를 y 축의 방향

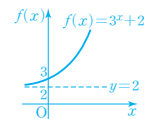
으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식

은 $y=3^x$ 이 된다.

따라서 $a=3, b=2, c=-2$ 이므로

$a+b+c=3$ 이다.

$f(x)=3^x+2$ 의 그래프의 개형을 그리면



34 [답] ④

함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=3^{x+1}+4$

이때, 함수 $y=3^{x+1}+4$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=-3^{x+1}-4 \quad \therefore a=-3, b=-4$$

$$\therefore a+b=-3+(-4)=-7$$

35 [답] ③

$$y=4^x \times 3^{1-x}=4^x \times 3 \times 3^{-x}=3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^x$$

이므로 주어진 함수는 증가함수이다.

$\frac{4}{3} > 1$ 이니까 증가함수이다.

따라서 $x=-1$ 일 때 최솟값 $m=\frac{9}{4}$,

$x=1$ 일 때 최댓값 $M=4$ 를 갖는다.

$$\therefore M-m=\frac{7}{4}$$

36 [답] 4

$y=4 \times 3^x - 9^x$ 에서 $3^x=t (t>0)$ 로 치환하면 $y=4t-t^2 (t>0)$

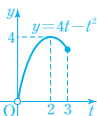
또한, $x \leq 1$ 이므로 $0 < t \leq 3$

$$y=4t-t^2$$

$$=-(t^2-4t+4)+4$$

$$=-(t-2)^2+4$$

따라서 $t=2$ 일 때, 최댓값 4 를 갖는다.



37 [답] ②

$a > 1$ 이므로 함수 $y=a^{x+2}$ 은 증가함수이다.

즉, $f(x)=a^{x+2}$ 이라 하면 $x=-4$ 일 때,

함수 $f(x)$ 는 최솟값을 가지므로

$$f(-4)=\frac{1}{16}$$

$$f(-4)=a^{-2}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{16}, a^2=16$$

$$\therefore a=4 (\because a>1)$$

38 [답] (1) $x=2$ (2) $x=-1$

$$(3) x=\frac{1}{3}$$

$$(4) x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

$$(1) 2^{x+3}=2^5 \text{에서 } x+3=5$$

$$\therefore x=2$$

$$(2) 3^{-(3x-1)}=3^4 \text{에서 } -3x+1=4$$

$$\therefore x=-1$$

$$(3) 5^{x-3}=5^{-2(x+1)} \text{에서 } x-3=-2x-2$$

$$3x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{3}$$

$$(4) 2^{2-2x}=2^{2(x^2-5)} \text{에서 } 2-2x=2x^2-10$$

$$x^2+x-6=0, (x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

39 [답] (1) $x=1$

$$(2) x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$$(1) 2^x + \frac{4}{2^x} = 4 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 4 \times 2^x + 4 = 0$$

이때, $2^x=t (t>0)$ 로 치환하면

$$t^2 - 4t + 4 = 0, (t-2)^2 = 0$$

$$\therefore t=2$$

$$\text{즉, } 2^x=2 \text{이므로 } x=1$$

$$(2) \frac{27}{3^x} + 3^x = 12 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 = 0$$

이때, $3^x=t (t>0)$ 로 치환하면

$$t^2 - 12t + 27 = 0, (t-3)(t-9) = 0$$

$$\therefore t=3 \text{ 또는 } t=9$$

$$t=3^x=3 \text{이면 } x=1$$

$$t=3^x=9=3^2 \text{이면 } x=2$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

40 [답] ⑤

$2^{2x-1} - 2^{x+2} + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자.

$$\frac{1}{2} \times (2^x)^2 - 4 \times 2^x + 5 = 0$$

$2^x + X (X > 0)$ 라 하면 $X^2 - 8X + 10 = 0$

이 이차방정식의 두 근은 $2^a, 2^b$ 이다.

두 근의 곱 $2^a \times 2^b = 10$ 이므로 $2^{a+b} = 10$

$\therefore a+b = \log_2 10$ 지수의 합을 구하므로 2^a 과 2^b 의 곱을 구한다.

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ 임을 이용한다.

41 **답** (1) $x \geq 3$ (2) $x > 2$
(3) $x > -2$ (4) $0 \leq x \leq 1$

(1) $3^x \geq 3^3$ 에서 $x \geq 3$

(2) $2^{2x} > 2^4$ 에서 $2x > 4 \quad \therefore x > 2$

(3) $3^{-(2x-1)} < 3^5$ 에서 $-2x+1 < 5$

$\therefore x > -2$

(4) $\left(\frac{5}{4}\right)^{x^2+2} \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{-(x-2)}$ 에서

$x^2+2 \leq x+2, x^2-x \leq 0$

$x(x-1) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq x \leq 1$

42 **답** ③

$9^{x^2+x} \leq 3^{3x+1}$ 에서 $3^{2x^2+2x} \leq 3^{3x+1}$

$2x^2+2x < 3x+1, 2x^2-x-1 \leq 0$

밑=3 > 1이니까 부등호
방향은 그대로!

$(2x+1)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

따라서 $a = -\frac{1}{2}, b = 1$ 이므로 $a+b = \frac{1}{2}$

43 **답** ①

$(5^x)^2 - 6 \times 5^x + 5 < 0$ 에서 $5^x = X (X > 0)$

로 치환하며

$X^2 - 6X + 5 < 0, (X-1)(X-5) < 0$

$1 < X < 5, 1 < 5^x < 5 \quad \therefore 0 < x < 1$

$5^0 < 5^x < 5^1$

44 **답** ③

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_2(4x-8) = \log_2 4(x-2)$

$= \log_2 4 + \log_2(x-2)$

$= \log_2(x-2) + 2$

$\therefore a=2, b=2 \quad \therefore ab=4$

45 **답** ②

$y = \log_2(x-1) + 2$ 에서

$y-2 = \log_2(x-1)$

$x-1 = 2^{y-2}$

$\therefore x = 2^{y-2} + 1$ $N = \log_a M \Leftrightarrow M = a^N$

즉, 역함수는 $y = 2^{x-2} + 1$ 이므로

$p = -2, q = 1$ 위 식에서 x 와 y 를 바꾸면 역함수이다.

$\therefore p+q = -1$

46 **답** (1) $1, \log_4 9, 2\log_2 3$

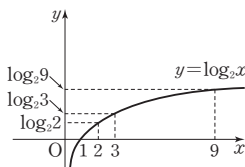
(2) $\log_{\frac{1}{3}} 8, \log_3 25, \log_3 7$

(1) 주어진 로그의 밑을 모두 2로 바꾸면

$1 = \log_2 2,$

$2\log_2 3 = \log_2 9,$

$\log_4 9 = \log_2 3^2 = \log_2 3$



따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

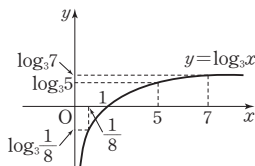
$1, \log_4 9, 2\log_2 3$

(2) 주어진 로그의 밑을 모두 3으로 바꾸면

$\log_3 7,$

$\log_{\frac{1}{3}} 8 = -\log_3 8 = \log_3 \frac{1}{8},$

$\log_9 25 = \log_3 5^2 = \log_3 5$

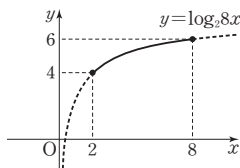


따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

$\log_{\frac{1}{3}} 8, \log_9 25, \log_3 7$

47 **답** 최댓값 : 6, 최솟값 : 4

$2 \leq x \leq 8$ 에서 함수 $y = \log_2 8x$,
즉 $y = 3 + \log_2 x$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $\log_2 8x$ 는
 $x=2$ 일 때 최솟값 $\log_2 2 + 3 = 4$,
 $x=8$ 일 때 최댓값 $\log_2 8 + 3 = 6$ 을 갖는다.

48 **답** -8

$y = 4(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4$
 $= 4(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x$ 에서
 $\log_2 x = t$ 라 하면
 $1 \leq x \leq 4 \quad \therefore 0 \leq t \leq 2$
 $y = 4t^2 - 4t = 4t^2 - 4t + 1 - 1$
 $= (2t-1)^2 - 1 \quad (0 \leq t \leq 2)$
 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $m = -1$,
 $t = 2$ 일 때 최댓값 $M = 8$ 을 갖는다.
 $\therefore Mm = -8$

49 **답** ③

$x^2 - 2x + 9 = (x-1)^2 + 8 > 0$ 이므로
 로그의 진수의 조건을 만족시킨다.
 즉, x 의 값에 관계없이 (진수) > 0 이고 x 의
 값의 범위가 주어지지 않았으므로 정의역은
 모든 실수이다.
 함수 $y = f(x) = \log_a(x^2 - 2x + 9)$ 에서
 $x^2 - 2x + 9 = (x-1)^2 + 8 \geq 8 \dots \textcircled{1}$
 이때, $a > 1$ 이면 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 알
 수 없고, $0 < a < 1$ 이면 진수 $x^2 - 2x + 9$ 가
 최솟값을 가질 때의 함수값 $f(x)$ 가 최대가
 된다.

①에서 진수의 최솟값은 8이므로
 $\log_a 8 = -3, a^{-3} = 8$
 $a^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$

50 **답** $x = -3$ 또는 $x = 6$

$\log_2(x^2 - 3x - 10) = 3$ 에서
 $\frac{x^2 - 3x - 10}{2^3} = 1$
 $x^2 - 3x - 18 = 0, \quad \log_a x = b \Rightarrow x = a^b$
 $(x+3)(x-6) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 6$

51 **답** ②

로그의 진수의 조건에 의하여
 $x+1 > 0, x+4 > 0$ 이므로
 $x > -1 \dots \textcircled{1}$
 $\log_2(x+1) - \log_4(x+4) = 1$ 에서
 $\log_2(x+1) - \frac{1}{2} \log_2(x+4) = 1$ 이고,
 $2\log_2(x+1) - \log_2(x+4) = 2$
 $\therefore \log_2 \frac{(x+1)^2}{x+4} = 2$
 $\frac{(x+1)^2}{x+4} = 4, (x+1)^2 = 4(x+4)$
 $x^2 - 2x - 15 = 0, (x+3)(x-5) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 5$
 그런데 $x = -3$ 은 진수 조건($\because \textcircled{1}$)을 만족
 시키지 않으므로 $x = 5$

52 **답** ③

$(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x - 12 = 0$ 의 두 근을
 α, β 라 하자.
 $\log_2 x = t$ 로 치환하면 $t^2 - 5t - 12 = 0$ 의
 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이다. 즉,
 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 5$ 이므로 $\log_2 \alpha\beta = 5$
 $\therefore \alpha\beta = 2^5 = 32$
 $t = \log_2 x$ 이므로 $t^2 - 5t - 12 = 0$ 의 두 근의 형태는
 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이다.

53 [답] (1) $x \geq 1$

(2) $2 < x \leq 4$

(3) $2 < x \leq 3$

(1) $\log_3(x+1) \leq \log_3 2x$ 에서 $x+1 \leq 2x$

$\therefore x \geq 1 \dots \textcircled{1}$

이때, 진수 조건에서 $x > -1$ 이고 $x > 0$

이므로 $x > 0 \dots \textcircled{2}$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $x \geq 1$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq -1$ 에서

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x-2} \leq \log_{\frac{1}{2}} 2$

$\frac{x}{x-2} \geq 2, x \geq 2(x-2)$ $0 < (\text{밑}) = \frac{1}{2} < 1$ 이니까 부등호 방향은 반대로!

$\therefore x \leq 4 \dots \textcircled{1}$ $x-2$ 는 진수이므로 양수이다. 양변에 곱해도 부등호 방향을 그대로!

또한 진수 조건에서 $x > 0$ 이고 $x > 2$ 이므로 $x > 2 \dots \textcircled{2}$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $2 < x \leq 4$

(3) $\frac{1}{2} \log_3(5-x) \geq \frac{1}{2} \log_3 2 + \log_3(x-2)$

에서 $5-x \geq 2(x-2)^2, 2x^2-7x+3 \leq 0$
 $(2x-1)(x-3) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \dots \textcircled{1}$

이때, 진수 조건에서 $x < 5$ 이고 $x > 2$ 이므로 $2 < x < 5 \dots \textcircled{2}$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $2 < x \leq 3$

54 [답] ②

$\log_3(x^2-6x) \leq \log_3 27$ 에서

$x^2-6x-27 \leq 0, (x+3)(x-9) \leq 0$

$\therefore -3 \leq x \leq 9$

이때, 진수 조건에서 $x^2-6x > 0$,

즉 $x < 0$ 또는 $x > 6$ 이므로 구하는 부등식의 해는 $-3 \leq x < 0$ 또는 $6 < x \leq 9$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은 $-3, -2, -1, 7, 8, 9$ 로 6개이다.

55 [답] 81

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 3 < 0$ 에서 $\log_3 x = X$ 로 치환하면

$X^2 - 2X - 3 < 0, (X+1)(X-3) < 0$

$\therefore -1 < X < 3$

즉, $\frac{1}{3} < x < 27$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = 27$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = 81$

56 [답] 8

$x^{x^2+x} = x^{4(2x-3)}$

(i) 밑이 1인 경우, 즉 $x=1$ 일 때

(좌변) : $1^2 = 1$

(우변) : $1^{-4} = 1$

(ii) 밑이 1이 아닌 경우, 즉 $x \neq 1$ 일 때

$x^2+x=8x-12,$

$x^2-7x+12=0, (x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에 의하여

(모든 해의 합) = $1+3+4=8$

57 [답] ③

$x^{\log_3 x} = \frac{81}{x^3}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하

면 $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81 - \log_3 x^3$

$(\log_3 x)^2 + 3 \log_3 x - 4 = 0$

$\log_3 x = t$ 로 치환하면 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 에서

$(t-1)(t+4) = 0$ 이므로

$t=1$ 또는 $t=-4$

$\therefore \log_3 x = 1$ 또는 $\log_3 x = -4$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{1}{81}$

58 $\frac{1}{4} < x < 2$

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \frac{1}{4}x$ 에서 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 로그를

취하면

$$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}x + \log_{\frac{1}{2}} x$$

↗ $0 < (\text{밑}) = \frac{1}{2} < 1$ 이므로 부등호 방향은 반대로!

$$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0$$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 치환하면

$$t^2 - t - 2 < 0$$

$$(t+1)(t-2) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4} < x < 2$$

↗ $0 < (\text{밑}) = \frac{1}{2} < 1$ 이니까 부등호 방향은 모두 반대로!

종합 연습 문제



문제편 p. 48

59 ②

60 ④

61 4

62 ②

63 ①

64 16

65 ④

66 ④

59 ②

$f(a) = 5^a = 4$, $f(b) = 5^b = 10$ 에서

$$5^{2b} = (5^b)^2 = 10^2 = 100$$

따라서 $5^{2b-a} = \frac{5^{2b}}{5^a} = \frac{100}{4} = 25 = 5^2$ 이므로

$$2b - a = 2$$

60 ④

함수 $y = 4^x + 4^{-x} + 2^{1+x} - 2^{1-x} - 3$ 에서

$$y = 4^x + 4^{-x} + 2(2^x - 2^{-x}) - 3$$

$2^x - 2^{-x} = t$ (단, t 는 실수) ... ㉠라 하면

$$4^x + 4^{-x} = (2^x - 2^{-x})^2 + 2$$

$$= t^2 + 2$$

이므로 주어진 함수는

$$y = 4^x + 4^{-x} + 2(2^x - 2^{-x}) - 3$$

$$= (t^2 + 2) + 2t - 3$$

$$= t^2 + 2t - 1$$

$$= (t+1)^2 - 2$$

따라서 $t = -1$ 에서 최솟값 -2 를 가진다.

61 4

로그함수 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 y 축에 대하

여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \log_5(-x)$$

이 그래프를 x 축과 y 축의 방향으로 각각

m , n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_5\{-(x-m)\} + n$$

$$= \log_5(-x+m) + n$$

이 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \log_5(-1+m) + n$$

$$= \log_5(m-1) + n \cdots \text{㉠}$$

또한, 점 $(-3, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \log_5(3+m) + n \cdots \text{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$-1 = \log_5(m-1) - \log_5(3+m)$$

$$-1 = \log_5 \frac{m-1}{3+m}$$

로그의 정의에 의하여

$$\frac{m-1}{3+m} = \frac{1}{5}, \quad 5m-5=3+m, \quad 4m=8$$

$$\therefore m=2$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$3 = \log_5 5 + n$$

$$3 = 1 + n$$

$$\therefore n=2$$

따라서 구하는 값은

$$m+n=2+2=4$$

62 답②

로그의 진수의 조건에 의하여

$$x-1>0, 7-x>0 \text{ 이므로}$$

$$1<x<7 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{9}}(7-x) \text{ 에서}$$

$$\log_{\frac{1}{9}}(x-1)^2 \geq \log_{\frac{1}{9}}(7-x) \text{ 이고,}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$(x-1)^2 \leq 7-x$$

$$x^2-x-6 \leq 0$$

$$(x+2)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 3 \cdots \textcircled{2}$$

따라서 ①, ②에 의하여 $1 < x \leq 3$ 이므로

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은

2, 3으로 2개이다.

63 답①

$$y = \log_2 \frac{x}{4} \times \log_2 \frac{x}{64}$$

$$= (\log_2 x - \log_2 4)(\log_2 x - \log_2 64)$$

$$= (\log_2 x - 2)(\log_2 x - 6)$$

$$= (\log_2 x)^2 - 8\log_2 x + 12$$

$\log_2 x = t$ 로 치환하면

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 64 \text{ 에서}$$

밑이 2인 로그를 취하면

$$-1 \leq t \leq 6$$

이때, 주어진 함수는

$$y = t^2 - 8t + 12 = (t-4)^2 - 4 \text{ 이므로}$$

$$-1 \leq t \leq 6 \text{ 에서 함수 } y = (t-4)^2 - 4 \text{ 는}$$

$t = -1$ 일 때 최댓값 $M = 21$ 을 갖고,

$t = 4$ 일 때 최솟값 $m = -4$ 를 갖는다.

$$\therefore M - m = 21 - (-4) = 25$$

64 답 16

$$10 \log \frac{B}{A} = -6 \text{ 에서}$$

$$\log \frac{B}{A} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{B}{A} = 10^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{10^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\left(10^{\frac{3}{10}}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

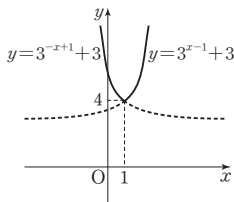
$$64k = 64 \times \frac{1}{4} = 16 \text{ 이다.}$$

65 답④

$x < 1$ 일 때 $y = 3^{-x+1} + 3$ 이고,

$x \geq 1$ 일 때 $y = 3^{x-1} + 3$ 이므로

함수 $y = 3^{|x-1|} + 3$ 의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $y = 3^{-x+1} + 3$, $y = 3^{x-1} + 3$ 의 그래

프의 교점의 좌표는 $(1, 4)$ 이므로 함수

$y = 3^{|x-1|} + 3$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만

나지 않으려면 a 의 값의 범위는 $a < 4$ 이어야 한다.

66 답④

$9^x = 3^{2x} = 4$ 이므로 주어진 식의 분모, 분자

에 각각 3^x 를 곱하면

$$\frac{3^{3x} - 3^{-3x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{3^{4x} - 3^{-2x}}{3^{2x} + 1} = \frac{16 - \frac{1}{4}}{4 + 1} = \frac{63}{20}$$

II. 삼각함수

18 호도법과 부채꼴의 넓이 ~ 29 사인함수를 이용한 삼각형의 넓이

핵심 개념 문제 **정답**

문제편 p. 50

01 ③

02 (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{3}{4}\pi$ (3) 45° (4) 120°

03 ②

04 (1) $\overline{BC}, \overline{AD}$ (2) $\overline{AB}, \overline{AD}$
(3) $\overline{BC}, \overline{AE}$

05 $\sin A = \frac{12}{13}, \cos A = \frac{5}{13},$
 $\tan A = \frac{12}{5}$

06 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan B = \frac{\sqrt{2}}{2}$

07 $\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$
 $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

08 $-\frac{8}{15}$ 09 ④ 10 ①

11 ③ 12 ⑤ 13 ③

14 ② 15 4

16 풀이 참조 17 ① 18 ③

19 풀이 참조 20 ⑤ 21 ⑤

22 풀이 참조

23 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

24 ⑤ 25 ③ 26 360°

27 풀이 참조 28 ② 29 ②

30 ④ 31 ② 32 ①

33 ④ 34 ③ 35 ③

36 $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{7}$

01 **답** ③

①, ②, ④, ⑤는 동경이 모두 제3사분면에 위치한다. $\rightarrow$ ② -150° , ④ 600°

③ $480^\circ = 360^\circ + 120^\circ$: 제2사분면

02 **답** (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{3}{4}\pi$
(3) 45° (4) 120°

(1) $30^\circ = 30 \times 1^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

(2) $135^\circ = 135 \times 1^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$

(3) $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$

(4) $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$

03 **답** ②

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면

$6\pi = \frac{1}{2}r^2 \times \frac{4}{3}\pi$
 $\therefore r = 3$ ($\because r > 0$) $\rightarrow S = \frac{1}{2}r^2\theta$

$l = r\theta = 3 \times \frac{1}{3}\pi = \pi$ 이므로

구하는 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r + l = 2 \times 3 + \pi = 4\pi + 6$

$\rightarrow$ 둘레의 길이이므로 (반지름의 길이) $\times 2$ 도 더해 주어야 한다.

04 **답** (1) $\overline{BC}, \overline{AD}$ (2) $\overline{AB}, \overline{AD}$
(3) $\overline{BC}, \overline{AE}$

(1) $\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$

(2) $\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$

(3) $\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$

05 $\square$ $\sin A = \frac{12}{13}, \cos A = \frac{5}{13},$

$$\tan A = \frac{12}{5}$$

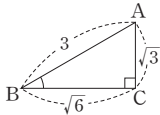
$$\overline{BC} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm})$$

$$\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{12}{13},$$

$$\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5}{13},$$

$$\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{5}$$

06 $\square$ $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan B = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로 } \overline{BC} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

07 $\square$ $\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\theta = \frac{7}{6}\pi$ 를 나타내는 동경과 중심이 원점이고

반지름의 길이가 1인 원에 대하여 동경과 원이 만나는 점을 P라 하면

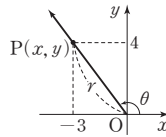
점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$\therefore \sin \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos \theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

08 $\square$ $-\frac{8}{15}$



$\cos \theta = -\frac{3}{5} = \frac{x}{r}$ 에서 $r=5, x=-3$
 θ 가 제2사분면의 각이므로 빗변의 길이는 양수이므로 $x < 0$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \sin \theta + \tan \theta = \frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{15}$$

09 $\square$ ④

$\sin \theta \cos \theta < 0$ 이므로 제2사분면 또는 제4사분면이고, $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 또는 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$

$\sin \theta \tan \theta > 0$ 이므로 제1사분면 또는 제4사분면이다. $\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 또는 $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$

따라서 이를 동시에 만족시키는 각 θ 를 나타내는 동경은 제4사분면에 존재한다.

10 $\square$ ① $\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ 에서 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = 0$$

11 $\square$ ③

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + (1 + \sin \theta)^2}{(1 + \sin \theta) \cos \theta} \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$= \frac{2 + 2\sin \theta}{(1 + \sin \theta) \cos \theta}$$

$$= \frac{2(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta) \cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta}$$

12 ⑤

$$\frac{\sin \theta}{\tan \theta} + \frac{\tan \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta \text{는 제 1사분면의 각이므로 } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} (\because \textcircled{1})$$

13 ③

$$\cos \left(\frac{3}{2}\pi - \theta \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = -\sin \theta$$

이므로

(주어진 식)

$$= \cos \theta - \cos \theta - \sin \theta - (-\sin \theta) = 0$$

14 ②

$$\cos(3\pi - \theta) \xrightarrow{\text{↺}} \cos\{2\pi + (\pi - \theta)\} = \cos(\pi - \theta)$$

$$\cos(3\pi - \theta) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta,$$

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\text{이므로 } \xrightarrow{\text{↺}} \sin\left\{2\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right\} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

(주어진 식)

$$= \frac{\cos \theta \times (-\cos \theta)}{-\cos \theta} + \frac{\cos \theta \times (-\sin \theta)}{\sin \theta}$$

$$= \cos \theta - \cos \theta = 0$$

15 4

$$\sin \frac{21}{4}\pi = \sin \left(4\pi + \frac{5}{4}\pi \right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{9}{4}\pi = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \frac{11}{4}\pi = \tan \left(2\pi + \frac{3}{4}\pi \right)$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}}$$

$$= -1$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\sin \frac{21}{4}\pi + \cos \frac{9}{4}\pi + \tan \frac{11}{4}\pi}{\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right)} = \frac{-1}{-\frac{1}{4}} = 4$$

16 풀이 참조

(1) 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 $\xrightarrow{\text{↺}} 2\pi$ 를 x 의 계수로 나눈다.
 최댓값은 $|-2| + 1 = 3$,
 최솟값은 $-|-2| + 1 = -1$

(2) 주기는 $\frac{2\pi}{3}$
 $\xrightarrow{\text{↺}} 2\pi$ 를 x 의 계수로 나눈다.
 최댓값은 $|3| - 1 = 2$,
 최솟값은 $-|3| - 1 = -4$

17 ①

함수 $f(x) = a \sin bx + c$ 에서 $a > 0$ 이므로

최댓값은 $a + c = 4 \dots \textcircled{1}$,

최솟값은 $-a + c = -2 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하면 $a = 3$, $c = 1$

$b > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$

$$\text{즉, } \frac{2\pi}{b} = 4\pi \text{에서 } b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore abc = 3 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

18 답 ③

함수 $y=f(x)$ 에 대하여
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 에서
 $f(x) = -2\sin^2 x + 2\cos x + 1$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 를 이용한다.

$$= 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$$

이때, $\cos x = t$ 로 치환하면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$f(t) = 2t^2 + 2t - 1 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

$$m = -\frac{3}{2}, M = 3 \text{이므로 } M+m = \frac{3}{2}$$

$f(-\frac{1}{2})$ $f(1)$

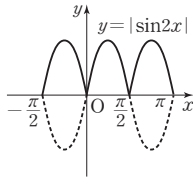
19 답 풀이 참조

최대 · 최소는 없고, (주기) $= \frac{\pi}{4} = 4\pi$

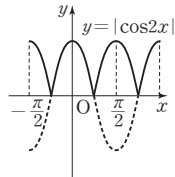
π 를 x 의 계수로 나눈다.

20 답 ⑤

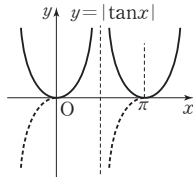
ㄱ. 주기 $\frac{\pi}{2}$



ㄴ. 주기 $\frac{\pi}{2}$



ㄷ. 주기 π



ㄹ. (주기) $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

21 답 ⑤

$f(x) = a \tan bx + c$ 에서 주기는 $\frac{\pi}{|b|} = 4$

이때, $b > 0$ 이므로 $b = \frac{\pi}{4}$

$$f(5) = a \tan \frac{5}{4}\pi + c = a + c = -6 \cdots \textcircled{7}$$

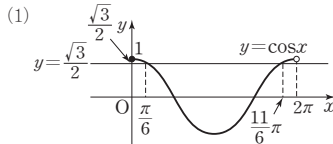
$$f(-1) = a \tan \left(-\frac{\pi}{4}\right) + c = -a + c = 2 \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하면

$$a = -4, c = -2$$

$$\therefore abc = (-4) \times \frac{\pi}{4} \times (-2) = 2\pi$$

22 답 풀이 참조

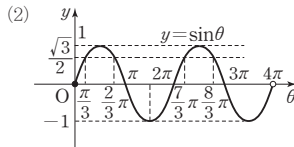


$0 \leq x < 2\pi$ 에서

함수 $y = \cos x$ 의 그래프와

직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

그림에서 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$



$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $0 \leq 2x < 4\pi$ 이고

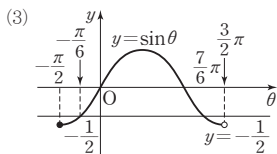
$2x = \theta$ 라 하면

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{3}\pi$$

또는 $\theta = \frac{8}{3}\pi$ θ 의 범위 내에서 모두 찾는다.

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi$$

$$\text{또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$



$$x - \frac{\pi}{2} = \theta \text{라 하면}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{2} < \frac{3}{2}\pi \text{이고}$$

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \text{에서}$$

$$2\sin\theta + 1 = 0$$

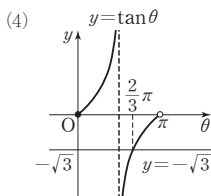
$$\therefore \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{6}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 해는

$$x = \theta + \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$



$$\frac{x}{2} = \theta \text{라 하면}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } 0 \leq \frac{x}{2} < \pi \text{이므로}$$

$$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 0 \text{에서}$$

$$\tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 해는

$$x = 2\theta \text{이므로 } x = \frac{4}{3}\pi$$

23 답 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

$$2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$$

$\cos x = t$ 로 치환하면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$2t^2 - 5t - 3 = 0, (t-3)(2t+1) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2} (\because t \neq 3) \quad \leftarrow -1 \leq t \leq 1 \text{의 범위에 포함되지는 확인하자!}$$

$$\text{즉, } \cos x = -\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

24 답 ⑤

$$\cos^2 x - \sin x = 1 \text{에서}$$

$$(1 - \sin^2 x) - \sin x = 1$$

$$\sin x(\sin x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = -1$$

$$(i) \sin x = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2\pi$$

$$(ii) \sin x = -1 \text{에서 } x = \frac{3}{2}\pi$$

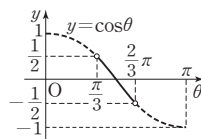
(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근

$$\text{의 합은 } 0 + 2\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{2}\pi \text{이므로}$$

$$p = 2, q = 7$$

$$\therefore p + q = 9$$

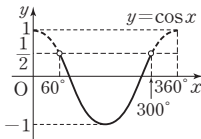
25 답 ③



그래프에서 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi$
 $\rightarrow y = \cos\theta$ 의 그래프를 그리고 $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$ 인 범위를 찾는다.

$$\therefore b - a = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

26 [답] 360°



$$2\sin^2 x > 3\cos x \text{에서}$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$$

$\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

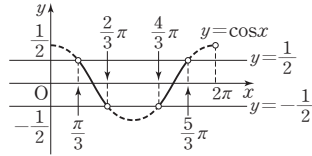
$$2t^2 + 3t - 2 = (2t - 1)(t + 2) < 0$$

$$\therefore t < \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} \text{↖} -1 \leq t \leq 1 \text{이므로 } t+2 > 0 \\ \therefore 2t-1 < 0 \end{matrix}$$

즉, 그림에서 $\cos x < \frac{1}{2}$ 을 만족시키는

x 의 값의 범위는 $60^\circ < x < 300^\circ$ 이므로

$$a+b=360^\circ$$



$$\text{따라서 } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{또는 } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$$

28 [답] ②

$\angle C = 45^\circ$ 이고 사인법칙에서

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ} = 2R \text{이므로}$$

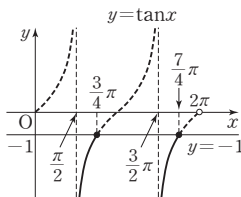
$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{10\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 2R,$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \overline{BC} = 20 = 2R$$

$$\therefore \overline{BC} = 10\sqrt{3}, R = 10$$

27 [답] 풀이 참조

- (1) $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = -1$ 을 그리면 그림과 같다.



따라서 $\tan x \leq -1$ 에서

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{4}$$

- (2) $4\cos^2 x - 1 < 0$ 에서

$$(2\cos x + 1)(2\cos x - 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$$

즉, $0 \leq x < 2\pi$ 에서

함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 두 직선

$$y = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} \text{은 그림과 같다.}$$

- (2) $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 70$ 이고
 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$ 이므로

$$\angle A = \pi \times \frac{1}{12}, \angle B = \pi \times \frac{3}{12}, \angle C = \pi \times \frac{7}{12}$$

$$\angle A = \frac{\pi}{6}, \angle B = \frac{\pi}{4}, \angle C = \frac{7\pi}{12} \text{이므로}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\overline{CA}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \times 1 = 2$$

$$\overline{BC} = 2\sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

$$\overline{CA} = 2\sin \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BC} = 1, \overline{CA} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

30 [답] ④

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

즉, 주어진 등식에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} + c \times \frac{c}{2R} = b \times \frac{b}{2R} \text{에서}$$

$$a^2 + c^2 = b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

31 답 ②

$\overline{AB}=a$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= 8^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \times 8 \times 4\sqrt{3} \times \cos 30^\circ \\ &= 64 + 48 - 96 \\ &= 16 \end{aligned}$$

이때, $a > 0$ 이므로 $a=4$

32 답 ①

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 라 하면

코사인법칙의 활용에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 3 \times 4} \\ &= -\frac{11}{24} \end{aligned}$$

33 답 ④

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를

R 라 하면 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ 사인법칙에 의하여

$3\sin A = 3\sin B = 2\sin C$ 에서

$$\frac{3a}{2R} = \frac{3b}{2R} = \frac{2c}{2R} \text{이므로 } 3a = 3b = 2c$$

양변을 6으로 나누고

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \quad (k > 0) \text{라 하면}$$

$$a=2k, b=2k, c=3k$$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{4k^2 + 9k^2 - 4k^2}{2 \times 2k \times 3k} \\ &= \frac{9k^2}{12k^2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

34 답 ③

$$3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin A \text{에서}$$

$$\sin A = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{4} \quad (\because A \text{는 예각})$$

35 답 ③

$\angle BAD = \angle ADC = 30^\circ$ 이므로

$\angle BAC = 60^\circ$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin 60^\circ = 8\sqrt{3}$$

이때, 선분 AD의 길이를 x 라 하면

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 30^\circ = x$$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2} \times x \times 8 \times \sin 30^\circ = 2x$$

한편, $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$8\sqrt{3} = x + 2x, 3x = 8\sqrt{3}$$

$$\therefore x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

따라서 선분 AD의 길이는 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 이다.

36 답 $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{7}$

$\triangle ABD$ 에서 $\overline{BD}=x$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} x^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ &= 4 + 9 - 6 = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \sqrt{7} \quad (\because x > 0)$$

$\therefore \square ABCD$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 60^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{7} \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{7}$$

37 ①

38 ④

39 5

40 ①

41 ②

42 ①

43 ④

44 ③

37 [답] ①

$5\sin\theta + 12\cos\theta = 0$ 에서

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{12}{5},$$

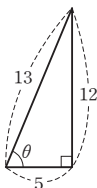
$$\therefore \tan\theta = -\frac{12}{5}$$

이때, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\sin\theta > 0, \cos\theta < 0$$

$$\therefore \sin\theta + \cos\theta$$

$$= \frac{12}{13} - \frac{5}{13} = \frac{7}{13}$$



38 [답] ④

삼각함수의 성질에 의하여

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \text{이므로}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

$$\therefore \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

$$= 1$$

39 [답] 5

주어진 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $|a| + c$,

최솟값은 $-|a| + c$ 이므로

$$|a| + c - (-|a| + c) = 4 \text{에서}$$

$$2|a| = 4, |a| = 2$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$

조건 (나)에서 주기는 π 이므로

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi, |b| = 2 \quad \therefore b = 2 (\because b > 0)$$

즉, 함수 $f(x) = 2\cos 2x + c$ 는

점 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 을 지나므로

$$2\cos \frac{2}{3}\pi + c = 0, -1 + c = 0$$

$$\therefore c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 5$$

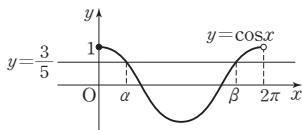
40 [답] ①

방정식 $5\cos x = 3$ 에서 $\cos x = \frac{3}{5}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 코사인함수 $y = \cos x$ 의

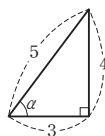
그래프와 직선 $y = \frac{3}{5}$ 의 두 교점의 x 좌표가

각각 α, β ($\alpha < \beta$)이므로 그림으로 나타내면 다음과 같다.



삼각함수의 대칭성에 의하여 $\beta = 2\pi - \alpha$

이므로



$$\sin(\alpha + 2\beta) = \sin(\alpha + 2(2\pi - \alpha))$$

$$= \sin(4\pi - \alpha)$$

$$= -\sin\alpha$$

$$= -\frac{4}{5}$$

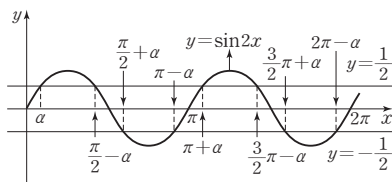
41 [답] ②

$\cos(\pi \sin 2x) = 0$ 에서 $\pi \sin 2x = t$ 로 치환

하면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-\pi \leq t \leq \pi$ 이다.

$\cos t = 0$ 을 만족시키는 t 의 값은

$t = -\frac{\pi}{2}$ 또는 $t = \frac{\pi}{2}$ 이다.



(i) $t = \frac{\pi}{2}$, 즉 $\pi \sin 2x = \frac{\pi}{2}$ 일 때,

$\sin 2x = \frac{1}{2}$ 이므로 x 의 값의 합은

$$\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (\pi + \alpha) + \left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = 3\pi$$

(ii) $t = -\frac{\pi}{2}$, 즉 $\pi \sin 2x = -\frac{\pi}{2}$ 일 때,

$\sin 2x = -\frac{1}{2}$ 이므로 x 의 값의 합은

$$\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + (\pi - \alpha) + \left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + (2\pi + \alpha) = 5\pi$$

(i), (ii)에 의하여 x 의 값의 합은

$$3\pi + 5\pi = 8\pi$$

42 답 ①

$\cos^2 \theta - 2\sin \theta - 9 + a \leq 0$ 에서

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta + 8 - a \geq 0$$

$\sin \theta = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 치환하면

$$t^2 + 2t + 8 - a \geq 0$$

$f(t) = t^2 + 2t + 8 - a$ 로 놓으면

$$f(t) = (t+1)^2 + 7 - a$$

이때, $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면 $f(t)$ 의 최솟값은 0보다 커야 한다.

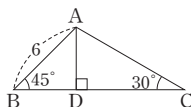
즉, 함수 $f(t)$ 는 $t = -1$ 일 때, 최솟값을 가지므로 $f(-1) = 7 - a \geq 0 \quad \therefore a \leq 7$

따라서 주어진 부등식을 항상 성립하도록 하는 자연수 a 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 7개이다.

43 답 ④

사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}$

$$\therefore \overline{AC} = 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \quad \left(\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$



꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \overline{BD} + \overline{CD} \\ &= 6\cos 45^\circ + 6\sqrt{2}\cos 30^\circ \\ &= 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6} \\ &= 3(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \end{aligned} \quad \left(\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

44 답 ③

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CA}^2 &= 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 60^\circ \\ &= 25 + 64 - 40 = 49 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{CA} = 7$$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times (8+5+7) \times r \end{aligned}$$

$$10r = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore r = \sqrt{3}$$

Ⅲ. 수열

30 등차수열과 등차중항 ~

34 수열의 합과 일반항 사이의 관계

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 76

01 15	02 ③	03 ④
04 ⑤	05 ③	06 ③
07 ⑤	08 512	09 ⑤
10 ④	11 1533	
12 1248000원		
13 $a_1=0, a_n=4n-5$ (단, $n \geq 2$)		
14 ①	15 ⑤	

01 답 15

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 일반항은 $a_n = a + (n-1)d$

$$a_3 = a + 2d = 7 \cdots ㉠$$

$$a_4 + a_6 = 2a + 8d = 22 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡를 연립하면 $a=3, d=2$

따라서 $a_n = 2n + 1$ 이므로 $a_7 = 15$

02 답 ③

등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

일반항은 $a_n = a + (n-1)d$

$$a_4 = a + 3d = 25 \cdots ㉠$$

$$a_{12} = a + 11d = -7 \cdots ㉡$$

㉡-㉠을 하면

$$8d = -32$$

$$\therefore d = -4, a = 37(\because ㉠)$$

$$a_n = -4n + 41 \text{이고,}$$

$$-4n + 41 < 0 \text{이면 } n > 10, \cdots$$

따라서 제 11 항부터 음의 값을 가진다.

03 답 ④

$-13, a, b, c, 15$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다고 하므로 a, b, c 도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

따라서 b 는 a 와 c 의 등차중항이다.

$$\text{즉, } 2b = a + c \text{에서}$$

$$a + b + c = 2b + b = 3b \cdots ㉠$$

항을 하나씩 건너뛰어도 그 순서대로 등차수열을 이룬다.

또한, b 는 -13 과 15 의 등차중항이므로

$$2b = -13 + 15 = 2 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a + b + c = 3(\because ㉠)$$

04 답 ⑤

6의 배수는 $6, 12, 18, \cdots$ 이므로 첫째항이 6이고 공차가 6인 등차수열이다.

이 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 6 + (n-1) \times 6 = 6n$$

제 n 항이 150 이하라 하면 $6n \leq 150$ 이므로 $n \leq 25$

따라서 구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 25 항까지의 합과 같으므로

$$\begin{aligned} \frac{25[2 \times 6 + (25-1) \times 6]}{2} &= 25 \times 78 \\ &= 1950 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$$150 = 6 \times 25 \text{이므로}$$

150 이하의 자연수 중 6의 배수의 합은

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \times (6 + 150)}{2} = 25 \times 78 \\ &= 1950 \end{aligned}$$

05 답 ③

$$a=1 \text{이고 } S_{10} = \frac{10(2+9d)}{2} = 100$$

$$2+9d=20 \quad \therefore d=2 \xrightarrow{\circ} S_n = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$$

따라서 첫째항부터 제 20 항까지의 합 S_{20} 은

$$S_{20} = \frac{20(2+19 \times 2)}{2} = 400$$

06 답 ③

주어진 수열의 첫째항은 21이고, 제 n 항을
마지막항으로 보면 $a_n = -2n + 23$ 에
 $n=1$ 을 대입한다.

$$S_n = \frac{n(21 - 2n + 23)}{2} = -n^2 + 22n$$

$$= -(n-11)^2 + 121$$

따라서 $n=11$ 일 때, S_n 이 최대가 된다.

[다른 풀이]

처음으로 음의 값을 갖는 항 이전까지의 합
이 최대가 된다.

$$a_n = -2n + 23 < 0 \text{ 이라 하면 } n > 11.5$$

따라서 첫째항부터 제 11항까지의 합이 최대
가 된다.

07 답 ⑤

첫째항이 a 이고, 공비가 r 인 등비수열의 일
반항 $a_n = ar^{n-1}$ 에서

$$a_3 = ar^2 = 18 \cdots \text{㉠}, a_5 = ar^4 = 162 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠} \div \text{㉡} \text{을 하면 } r^2 = 9 \text{ 이므로 } r = 3$$

$$\text{㉠에 } r=3 \text{을 대입하면 } a=2 \quad \leftarrow \text{각 항이 양의 실수니까 } r=-3 \text{은 안 된다.}$$

따라서 주어진 등비수열의 일반항

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

08 답 512

첫째항이 $a=4$ 인 등비수열의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_5 a_6}{a_3 a_4} = \frac{ar^4 \times ar^5}{ar^2 \times ar^3} = 16 \text{ 이므로}$$

$$r^4 = 16 \text{에서 } r=2 \text{ (}\because r>0\text{)}$$

$$\therefore a_8 = ar^7 = 4 \times 2^7 = 2^2 \times 2^7 = 512$$

09 답 ⑤

6, a , b 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a = 6 + b \cdots \text{㉠}$$

a , b , 2가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$b^2 = 2a \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$b^2 = 6 + b, b^2 - b - 6 = 0$$

$$(b+2)(b-3) = 0$$

$$\therefore b = -2 \text{ 또는 } b = 3$$

$$b=3 \text{을 ㉠에 대입하면 } a = \frac{9}{2}$$

$b=-2$ 는 양수라는 조건에 맞지 않으므로 제외한다.

$$\therefore a + b = \frac{15}{2}$$

10 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_4 = a_1 r^3 = 9r^3 = -\frac{1}{3} \text{에서 } r^3 = -\frac{1}{27}$$

$$\text{이때, } r \text{는 실수이므로 } r = -\frac{1}{3}$$

따라서 첫째항이 9이고 공비가 $-\frac{1}{3}$ 인

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 8항까지의
합 S_8 은

$$S_8 = \frac{9 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^8 \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{27}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^8 \right\}$$

11 답 1533

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} \xrightarrow{\text{㉠}} S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = (r^3 + 1)S_3 = 189$$

$$\xrightarrow{\text{㉡}} \frac{a(r^3 + 1)(r^3 - 1)}{r - 1} \text{로 인수분해하고,}$$

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} \text{을 이용한다.}$$

$$21(r^3 + 1) = 189, r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2$$

$$S_9 = \frac{a \{ (r^3)^3 - 1^3 \}}{r - 1}$$

$$= \frac{a(r^3 - 1)(r^6 + r^3 + 1)}{r - 1}$$

$$= (r^6 + r^3 + 1)S_3$$

$$\therefore S_9 = 21(r^6 + r^3 + 1)$$

$$= 21(64 + 8 + 1) = 1533$$

$$\xrightarrow{\text{㉢}} r^3 = 8 \text{ 이므로}$$

12 [답] 1248000원

연이율 r , 1년마다 복리로 매년 초에 a 원씩
적립하였을 때, n 년 후의 원리합계 S 는

$$S = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{이므로}$$

$$S = \frac{10^5 \times 1.04 \times (1.04^{10} - 1)}{0.04}$$

$$= 10^5 \times 1.04 \times 12 = 1248000 \text{ (원)}$$

13 [답] $a_1=0, a_n=4n-5$ (단, $n \geq 2$)

S_n 의 식에 n 대신 $n-1$ 을
대입한다.

$$S_{n-1} = 2(n-1)^2 - 3(n-1) + 1$$

$$= 2n^2 - 7n + 6$$

$n \geq 2$ 에서 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = 2n^2 - 3n + 1 - (2n^2 - 7n + 6)$$

$$= 4n - 5$$

$$a_1 = S_1 = 2 - 3 + 1 = 0$$

따라서 수열의 일반항은

$$a_1 = 0, a_n = 4n - 5 \text{ (단, } n \geq 2 \text{)}$$

14 [답] ①

$$S_n = 2^n - 1 \text{에서 } S_{n-1} = 2^{n-1} - 1$$

$n \geq 2$ 에서 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1)$$

$$= 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} \text{ (단, } n \geq 2 \text{)}$$

$$a_1 = S_1 = 2 - 1 = 1 \text{이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2^{n-1}$$

15 [답] ⑤

$$S_n = n^2 + 2n + 3 \text{에서}$$

$$S_{n-1} = (n-1)^2 + 2(n-1) + 3 = n^2 + 2$$

$n \geq 2$ 에서 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = n^2 + 2n + 3 - (n^2 + 2) = 2n + 1$$

$$a_1 = S_1 = 1 + 2 + 3 = 6 \text{이므로 주어진 수열}$$

$\{a_n\}$ 의 일반항을 구하자.

$$a_1 = 6, a_n = 2n + 1 (n \geq 2)$$

$$\therefore a_{18} = 2 \times 18 + 1 = 37$$

종합 연습 문제 [정답]

문제편 p. 86

16 ⑤

17 ④

18 ②

19 ②

20 ②

21 ③

22 ②

23 ②

16 [답] ⑤

조건 (가)에서 등차중항에 의하여

$$2b = a + 18 \quad \therefore a = 2b - 18 \cdots \text{㉠}$$

조건 (나)에서 등비중항에 의하여

$$a^2 = 3b \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(2b - 18)^2 = 3b$

$$4b^2 - 75b + 324 = 0,$$

$$(b - 12)(4b - 27) = 0 \rightarrow \text{조립제법을 이용하면}$$

$$\therefore b = 12 \text{ 또는 } b = \frac{27}{4}$$

12	4	-75	324
		48	-324
	4	-27	0

$$\text{㉠에 의하여 } \begin{cases} a = -\frac{9}{2} \\ b = \frac{27}{4} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \end{cases}$$

이때, $a > 0$ 이어야 하므로 $a = 6, b = 12$

$$\therefore a + b = 18$$

17 [답] ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 = a_1 + 3d = -97 \text{에서}$$

$$-106 + 3d = -97$$

$$3d = 9 \quad \therefore d = 3$$

한편,

$$a_m = a_1 + (m-1)d$$

$$= -106 + (m-1) \times 3 = 3m - 109$$

이므로 $a_m > 0$ 에서

$$3m - 109 > 0 \quad \therefore m > 36. \times \times \times$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 37이다.

18 [답] ②

$$a_4 = a_1 + 3d = 3 + 3d$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 3 + 6d$$

$$a_4 : a_7 = 5 : 9 \text{에서 } 9a_4 = 5a_7$$

$$9(3 + 3d) = 5(3 + 6d)$$

$$27 + 27d = 15 + 30d$$

$$3d = 12 \quad \therefore d = 4$$

19 [답] ②

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 각각 1, 3
이므로

$$a_{n+1} - a_n = 1, b_{n+1} - b_n = 3$$

$a_n + b_n = c_n$ 이라 하면

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 등차수열이면 $\{a_n + b_n\}$ 도 등차수열이다.

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) \\ &= (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{c_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다.

$$c_1 = a_1 + b_1 = 4 \text{이므로}$$

$$c_{10} = c_1 + 9 \times 4 = 4 + 36 = 40$$

20 [답] ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_k = a \times 5^{k-1} = 5^8 \dots \textcircled{1}$$

$$a_{2k+3} = a \times 5^{2k+2} = 5^{16} \dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$\frac{a \times 5^{2k+2}}{a \times 5^{k-1}} = \frac{5^{16}}{5^8}, 5^{k+3} = 5^8$$

따라서 $k+3=8$ 에서 $k=5$

21 [답] ③

$$S_n = 5^{n-1} + k \text{이므로 } a_1 = S_1 = 1 + k,$$

$$S_2 = 5 + k \text{이므로}$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (5 + k) - (1 + k) = 4$$

$$S_3 = 5^2 + k = 25 + k \text{이므로}$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = (25 + k) - (5 + k) = 20$$

따라서 세 수 a_1 , a_2 , a_3 이 이 순서대로 등비
수열을 이루므로

$$a_2^2 = a_1 \times a_3, \text{ 즉 } 4^2 = (1 + k) \times 20$$

$$4 = 5k + 5 \quad \therefore k = -\frac{1}{5}$$

22 [답] ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r (r 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} a_4 + a_5 + a_6 &= a_1 r^3 + a_2 r^3 + a_3 r^3 \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) r^3 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 81 = 3r^3 \text{에서 } r^3 = 27$$

r 는 실수이므로 $r = 3$

$$\begin{aligned} \therefore a_3 + a_4 + a_5 &= a_1 r^2 + a_2 r^2 + a_3 r^2 \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) r^2 \\ &= 3 \times 3^2 = 27 \end{aligned}$$

23 [답] ②

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 이 공비가 2인 등비수열이므로

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} \times 2 = \frac{2}{a_1}$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1} = \frac{3}{a_1} \text{이므로}$$

$$\frac{3}{a_1} = \frac{1}{2} \text{에서 } a_1 = 6$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{a_4} = \frac{1}{a_1} \times 2^3 = \frac{1}{6} \times 8 = \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$a_4 = \frac{3}{4}$$

[다른 풀이]

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 공비가 2인 등비수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(이하 동일)

35 합이 기호 Σ 의 성질 ~

39 수학적 귀납법

핵심 개념 문제

정답

문제편 p. 88

- 24 0 25 239 26 ④
 27 ④ 28 ② 29 605
 30 ③ 31 ③ 32 ④
 33 ⑤ 34 $\frac{728}{81}$ 35 ①
 36 (가) $n=2$ (나) $1+h$
 (다) $1+(k+1)h$
 37 (가) 1 (나) $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
 (다) $2k^2+7k+6$

24 답 0

$$\sum_{i=1}^{10} b_i = \sum_{k=1}^{10} b_k \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k \\ = 2 \times 10 - 20 = 0$$

25 답 239

$$\sum_{k=1}^5 (3^k - 2^{k+1}) = \sum_{k=1}^5 3^k - \sum_{k=1}^5 2^{k+1} \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^5 3^k = \frac{3(3^5 - 1)}{3 - 1} = 363$$

$$\sum_{k=1}^5 2^{k+1} = \frac{4(2^5 - 1)}{2 - 1} = 124$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 (3^k - 2^{k+1}) = 363 - 124 \\ = 239$$

26 답 ④

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15} \\ = \frac{15(2 \times 3 + 14 \times 3)}{2} \\ = 360$$

$$\sum_{k=1}^{15} a_{k+1} = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{16}$$

$$= \sum_{k=1}^{16} a_k - a_1$$

$$= \frac{16(2 \times 3 + 15 \times 3)}{2} - 3$$

$$= 405$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15} (a_k + a_{k+1}) = 360 + 405 = 765$$

27 답 ④

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 10 \times 11 = \sum_{k=1}^{10} k(k+1)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10} k(k+1) \\ = \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k) \\ = \frac{10(10+1)(20+1)}{6} + \frac{10(10+1)}{2} \\ = 440$$

28 답 ②

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n \text{에서}$$

$$n=1 \text{일 때, } a_1 = 1 + 3 = 4$$

$$n \geq 2 \text{일 때,}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ = n^2 + 3n - (n-1)^2 - 3(n-1) \\ = 2n + 2$$

$$\text{이때, } a_1 = 4 = 2 \times 1 + 2 \text{이므로}$$

$$a_n = 2n + 2 \ (n \geq 1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 ka_k = \sum_{k=1}^5 (2k^2 + 2k) \\ = 2 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} \\ = 110 + 30 \\ = 140$$

29 **답** 605

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^l (k+l) \right\} \quad \leftarrow \text{여기서 문자 } l \text{ 은 변수가 아니므로 상수 취급한다.} \\
 &= \sum_{l=1}^{10} \left\{ \frac{l(l+1)}{2} + l^2 \right\} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{10} (3l^2 + l) \\
 &= \frac{1}{2} \left(3 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} \right) \\
 &= 605
 \end{aligned}$$

30 **답** ③

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} \quad \leftarrow \text{첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열} \\
 &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right) \quad \leftarrow \text{첫째항이 5이고 공차가 4인 등차수열} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{77} - \frac{1}{81} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{81} \right) = \frac{20}{81}
 \end{aligned}$$

31 **답** ③

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^8 \frac{2}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \\
 & \quad + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{58}{45} = \frac{q}{p}
 \end{aligned}$$

따라서 $p=45$, $q=58$ 이므로 $p+q=103$

32 **답** ④

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \quad \leftarrow \text{분모를 유리화하면} \\
 &= \sum_{k=1}^{80} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\
 &= \sum_{k=1}^{80} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - k - 1} = \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \quad \leftarrow \text{3} \\
 &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) \\
 &= \sqrt{81} - 1 = 8
 \end{aligned}$$

33 **답** ⑤

$a_{n+1} = a_n - 3$, $a_{n+1} - a_n = -3$ 이므로 수열의 귀납적 정의에 의하여 이 수열은 공차가 -3 인 등차수열이다.

또한, 첫째항 $a_1 = 3$ 이므로

$$a_{10} = 3 + 9 \times (-3) = -24$$

$\leftarrow a_n = a_1 + (n-1)d$

34 **답** $\frac{728}{81}$

$a_{n+1}^2 = a_n \times a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비는 $\frac{1}{3}$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^6 a_k &= \sum_{k=1}^6 \left\{ 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right\} \\
 &= \frac{6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= 9 \left(1 - \frac{1}{729} \right) = \frac{728}{81}
 \end{aligned}$$

35 **답** ①

$a_{n+1} = 2a_n + 1$ 에서 n 대신에 $1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

$$a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31$$

$$\therefore a_6 = 2a_5 + 1 = 2 \times 31 + 1 = 63$$

[다른 풀이]

$(a_{n+1} + 1) = 2(a_n + 1)$ 이므로

수열 $\{a_n + 1\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

즉, $a_6 + 1 = (a_1 + 1) \times 2^5 = 64$ 이므로

$a_6 = 63$ 이다.

36 **답** (가) $n=2$, (나) $1+h$,
(다) $1+(k+1)h$

(i) $n=2$ 일 때, $(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h$
($\because h^2>0$)

(ii) $n=k$ 일 때,
 $(1+h)^k>1+kh$ 가 성립한다고 가정하
자.

양변에 $1+h$ 를 곱하면
 $(1+h)^{k+1}>(1+kh)(1+h)$
 $=1+(k+1)h+kh^2$
 $>1+(k+1)h$ ($\because kh^2>0$)

(i), (ii)에 의하여 $h>0$ 일 때,
 $n\geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여
 $(1+h)^n>1+nh$ 가 성립한다.

37 **답** (가) 1,
(나) $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$,
(다) $2k^2+7k+6$

(i) $n=1$ 일 때,
(좌변)=(우변)=1 이므로 주어진 등식
은 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고
가정하면

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ \text{이 식의 양변에 } (k+1)^2 \text{을 더하면} \\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이
성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
이 성립한다.

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 98

38 ⑤ 39 ② 40 ⑤
41 (1) $n=14$ (2) $n=7$ 42 ④
43 ① 44 ②

38 **답** ⑤

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라
하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 a_{2k} &= a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10} \\ &= (a_1+d)+(a_3+d)+(a_5+d) \\ &\quad + (a_7+d)+(a_9+d) \\ &= (a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+5d \\ &= \sum_{k=1}^5 a_{2k-1}+5d \\ &= 25+5d \end{aligned}$$

이므로 $25+5d=45$ 에서 $d=4$

$$\begin{aligned} \text{한편, } \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} + \sum_{k=1}^5 a_{2k} \\ &= 25+45=70 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10(2a+9 \times 4)}{2} = 10a+180$$

이므로 $10a+180=70$ 에서 $a=-11$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{15} a_k &= \frac{15(2 \times (-11) + 14 \times 4)}{2} \\ &= 255 \end{aligned}$$

39 답 ②

첫째항은 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{\sum_{k=1}^n a_k} &= \frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}}{\frac{a(1-r^n)}{1-r}} \\ &= \frac{\frac{a(1+r^n)(1-r^n)}{1-r}}{\frac{a(1-r^n)}{1-r}} \\ &= 1+r^n=4 \\ \therefore r^n &= 3 \cdots \textcircled{1} \\ \therefore \frac{\sum_{k=1}^{8n} a_k}{\sum_{k=1}^{4n} a_k} &= \frac{S_{8n}}{S_{4n}} = \frac{\frac{a(1-r^{8n})}{1-r}}{\frac{a(1-r^{4n})}{1-r}} \\ &= \frac{\frac{a(1+r^{4n})(1-r^{4n})}{1-r}}{\frac{a(1-r^{4n})}{1-r}} \\ &= 1+r^{4n}=1+(r^n)^4 \\ &= 1+3^4 (\because \textcircled{1}) \\ &= 82\end{aligned}$$

40 답 ⑤

$a_1=1$ 이웃하는 두 항 사이의 관계식에서 n 대신에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

$$a_2+a_1=3 \times (-1) = -3 \text{에서 } a_2=-4$$

$$a_3+a_2=3 \times (-1)^2=3 \text{에서 } a_3=7$$

$$a_4+a_3=3 \times (-1)^3=-3 \text{에서 } a_4=-10$$

⋮

따라서 n 이 홀수이면 $a_n > 0$, n 이 짝수이면 $a_n < 0$ 이므로 $a_{10} < 0$, $a_{12} < 0$ 이다.

또, 각 항의 절댓값으로 이루어진 수열

$\{|a_n|\}$ 은 1, 4, 7, 10, ...이므로

첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이다.

$$|a_{10}|=1+9 \times 3=28$$

$$|a_{12}|=1+11 \times 3=34$$

$$\therefore a_{10}=-28, a_{12}=-34$$

$$\therefore a_{10}+a_{12}=-62$$

41 답 (1) $n=14$ (2) $n=7$

$$(1) \sum_{k=1}^{n+1} (k+2) = 150 \text{에서}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2(n+1) = 150$$

$$n^2+7n-294=0, (n+21)(n-14)=0$$

$$\therefore n=14 (\because n>0)$$

$$(2) \sum_{k=3}^n 3k^2 = 405 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^n 3k^2 - \sum_{k=1}^2 3k^2 = 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 - 12$$

$$= 405$$

$$n(n+1)(2n+1) = 840$$

$$n(n+1)(2n+1) = 7 \times 8 \times 15$$

$$\therefore n=7$$

42 답 ④

이차방정식 $x^2-nx+n=0$ 에서 근과 계수의

관계에 의하여 $\alpha_n + \beta_n = n$, $\alpha_n \beta_n = n$

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n = n^2 - 2n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{10} (n^2 - 2n)$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 2 \times \frac{10 \times 11}{2}$$

$$= 385 - 110 = 275$$

43 답 ①

첫째항이 -1 이고 공차가 3인 등차수열

$\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = -1 + (n-1) \times 3 = 3n-4$$

$$\therefore \sum_{k=1}^6 a_k(a_k-2)$$

$$= \sum_{k=1}^6 (3k-4)(3k-6)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^6 (k-2)(3k-4)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^6 (3k^2 - 10k + 8)$$

$$= 9 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 30 \times \frac{6 \times 7}{2} + 3 \times 48$$

$$= 819 - 630 + 144 = 333$$

44 답②

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, k^3-k 가 6의 배수라 가정하면

$$\begin{aligned} & (k+1)^3 - (k+1) \\ &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \end{aligned}$$

이때, $k^3-k=(k-1)k(k+1)$ 은 연속된 세 자연수의 곱으로 6의 배수이고, $k^2+k=k(k+1)$ 은 연속된 두 자연수의 곱으로 2의 배수이므로 k^3-k , $3(k^2+k)$ 는 모두 6의 배수이다.

따라서 $f(k)=k^3-k$, $g(k)=k^2+k$, $p=2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(p)+g(p) &= f(2)+g(2) \\ &= (2^3-2)+(2^2+2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

수학 II

I. 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한 ~

05 최대, 최소 정리와 사잇값의 정리

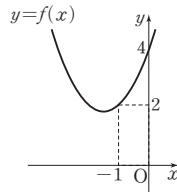
핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 102

- 01 (1) 2 (2) 2 (3) $-\infty$ (4) ∞
 02 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) 0 (4) 2
 03 ③ 04 ④ 05 ③
 06 (1) 1 (2) 3 07 1 08 ④
 09 ① 10 ⑤ 11 ㄱ, ㄴ
 12 (1) 최댓값 : 10, 최솟값 : 1
 (2) 최댓값 : 5, 최솟값 : 1
 13 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조
 14 $-6 < a < 6$

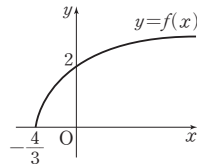
01 답 (1) 2 (2) 2 (3) $-\infty$ (4) ∞

(1) $f(x)=x^2+3x+4$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



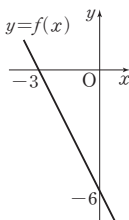
$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 4) = 2$$

(2) $f(x)=\sqrt{3x+4}$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



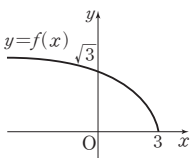
$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3x+4} = \sqrt{4} = 2$$

- (3) $f(x) = -2x - 6$ 이라 하면 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 6) = -\infty$$

- (4) $f(x) = \sqrt{-x+3}$ 이라 하면 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x+3} = \infty$$

02 답 (1) ∞ (2) $-\infty$

(3) 0 (4) 2

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ (상수/0 꼴)

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ (상수/0 꼴)

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+2} = 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$

03 답 ③

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + f(0) + \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -1 + 0 + 1 = 0$$

04 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

05 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} &\quad \text{분모를 유리화한다.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+7}+3) \\ &= 3+3=6 \end{aligned}$$

06 답 (1) 1 (2) 3

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 1} \{2f(x) - g(x)\} \\ &= 2\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ &= 2 \times 3 - 5 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5f(x)}{g(x)} &= \frac{5\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \\ &= \frac{5 \times 3}{5} \\ &= 3 \end{aligned}$$

07 답 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + a}{x - 1} \text{가 수렴하고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + a) = 0$$

$$1 - 2 + a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

08 답 ④

극한값이 존재하고, $x \rightarrow 2$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+a} - b) = 0 \text{에서}$$

$$b = \sqrt{2+a} \cdots \textcircled{1}$$

주어진 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{2+a}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{2+a})(\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a})}{(x-2)(\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a}} = \frac{1}{2\sqrt{2+a}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$2\sqrt{2+a} = 4 \text{에서 } a = 2$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } b = 2$$

$$\therefore ab = 4$$

09 답 ①

최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = 0$ 인 삼차

$$\text{함수 } f(x) \text{를 } f(x) = x^3 + ax^2 + bx \cdots \textcircled{1}$$

(단, a, b 는 상수)라 하자.

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 6 \text{을 만족시키므로}$$

$$f(-1) = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } -1 + a - b = 0 \text{에서 } b = a - 1 \cdots \textcircled{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + (a-1)x \\ &= x(x+1)(x+a-1) \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} x(x+a-1) \\ &= (-1) \times (a-2) = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -4, b = -5 (\because \textcircled{2})$$

따라서 $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$ 이므로

$$f(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 - 5 \times 2 = -18$$

10 답 ⑤

$x = -2$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 가 $x = a$
에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \xrightarrow{\text{연속}} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + b}{x+2} = 5$$

$x \rightarrow -2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + ax + b) = 0, 4 - 2a + b = 0$$

$$\therefore b = 2a - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + 2a - 4}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (x+a-2) = a - 4 = 5$$

$$\therefore a = 9, b = 14 \quad \therefore a + b = 23$$

$$\xrightarrow{\text{연속}} b = 2a - 4 = 18 - 4 = 14$$

11 답 ㄱ, ㄴ

두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 - 2$ 는 다
항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } 3f(x) - 2g(x) &= 3(x+3) - 2(x^2-2) \\ &= -2x^2 + 3x + 13 \end{aligned}$$

이므로 함수 $3f(x) - 2g(x)$ 는 모든 실
수 x 에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)g(x) = (x+3)(x^2-2)$ 이므로 함
수 $f(x)g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속
이다.

$$\text{ㄷ. } \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2-2}{x+3} \text{에서 } x+3=0,$$

즉 $x = -3$ 에서 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 정의되지
않으므로 $x = -3$ 에서 불연속이다.

ㄹ. 함수 $2g(x) = 2(x^2-2)$ 는 연속함수이

지만 함수 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+3}{x^2-2}$ 에서 $x = \sqrt{2}$

또는 $x = -\sqrt{2}$ 일 때, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 정

의되지 않는다.

따라서 $x = \pm\sqrt{2}$ 에서 함수

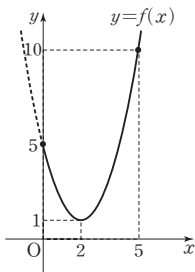
$2g(x) - \frac{f(x)}{g(x)}$ 는 불연속이다.

따라서 모든 실수 x 에서 연속인 함수는
ㄱ, ㄴ이다.

12 [답] (1) 최댓값 : 10, 최솟값 : 1

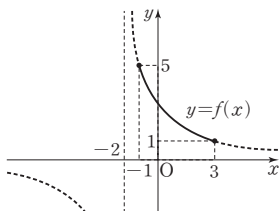
(2) 최댓값 : 5, 최솟값 : 1

- (1) 닫힌구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 5]$ 에서 연속이다.



따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(0)=5$, $f(2)=1$, $f(5)=10$ 이므로 최댓값은 10, 최솟값은 1이다.

- (2) 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이다.



따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(-1)=5$, $f(3)=1$ 이므로 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.

13 [답] (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

- (1) $f(x)=2x^3+3x-4$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고
 $f(0)=-4<0$, $f(1)=1>0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에서 하나 존재하므로 방정식 $f(x)=0$ 이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

- (2) $g(x)=\frac{3}{x}-2x+1$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고
 $g(1)=2>0$, $g(2)=-\frac{3}{2}<0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

14 [답] $-6 < a < 6$

$f(x)=x^2-5x+a$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

이때, 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(-1)=1+5+a=a+6$$

$$f(2)=4-10+a=a-6$$

$f(-1)f(2)<0$ 이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 실수 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재하므로

$$f(-1)f(2)=(a+6)(a-6)<0$$

$$\therefore -6 < a < 6$$

15 ②

16 2

17 ③

18 64

19 5

20 ③

21 ①

22 15

15 답 ②

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^3}{2x^3 - 1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + t^3}{-2t^3 - 1} \quad (x = -t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -\infty \text{ 일 때 } t \rightarrow \infty) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{t}}{-2 - \frac{1}{t^3}} \\ &= \frac{1+0}{-2-0} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

16 답 2

극한값 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 가 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \text{ 이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (5x + a) = a - 5$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} (-x - 4) \\ &= 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a - 5 = -3 \text{ 에서 } a = 2$$

17 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - f(x)}{3x + 2f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - \frac{f(x)}{x}}{3 + 2 \times \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{8-3}{3+6} = \frac{5}{9} = \frac{q}{p} \\ \therefore p + q &= 9 + 5 = 14 \end{aligned}$$

18 답 64

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 10}{f(x)} = \frac{1}{2} \text{ 에서 } f(x) \text{ 는 } x^2 \text{ 의}$$

계수가 2인 이차함수이어야 한다.

$$f(x) = 2x^2 + ax + b (a, b \text{ 는 상수}) \text{ 라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + ax + b}{x+2} = 8 \dots \text{㉠}$$

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0 \text{ 이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} \text{ 의 극한값이 } 0 \text{ 이 아니므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + ax + b) = 0$$

$$\text{즉, } 8 - 2a + b = 0 \text{ 이므로}$$

$$b = 2a - 8 \dots \text{㉡}$$

㉠에 ㉡을 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + ax + 2a - 8}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} (2x + a - 4) \quad \left(\begin{array}{l} \text{㉠} \end{array} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (2x + a - 4) \quad \left(\begin{array}{l} \text{㉡} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$= a - 8 = 8$$

$$\therefore a = 16, b = 24 (\because \text{㉡})$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^2 + 16x + 24 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \times 2^2 + 16 \times 2 + 24 \\ &= 64 \end{aligned}$$

19 답 5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{x} \right) = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{4}{x} \right) = 5 \text{ 이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

20 답 ③

극한값이 존재하고, $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0 \text{ 에서}$$

$$1 + a + b = 0$$

주어진 식에 $b = -a - 1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1+a) \\ &= a+2=5 \end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=-4$ 이므로

$a^2 + b^2 = 25$ 이다. $\rightarrow 1+a+b=0$ 에서 $b=-4$

21 답 ①

$$f(x)g(x) = \begin{cases} (-x+4)(2x+k) & (x \leq 3) \\ (3x-1)(2x+k) & (x > 3) \end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 연속이라면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) \\ &= f(3)g(3) \end{aligned}$$

$$\text{에서 } (9-1)(6+k) = (-3+4)(6+k)$$

$$7(6+k) = 0 \quad \therefore k = -6$$

22 답 15

방정식 $f(x)=0$ 이 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가지며 이 실근이 열린구간 $(-1, 3)$ 에 존재하기 위해서는 사잇값의 정리에 의하여 $f(-1)f(3) < 0$

$$f(-1) = -1 - 4 - 2 + k = k - 7$$

$$f(3) = 27 - 36 + 6 + k = k - 3$$

즉, $f(-1)f(3) < 0$ 에서

$$(k-3)(k-7) < 0$$

$$\therefore 3 < k < 7$$

따라서 정수 k 의 값은 4, 5, 6이므로

모든 정수 k 의 값의 합은

$$4+5+6=15$$

II. 미분

06 평균변화율 ~

07 미분계수와 미분가능성

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 114

01 ③

02 ②

03 (1) -3 (2) -1 (3) 82 04 ②

05 ④ 06 (1) -3 (2) -3 (3) 10

01 답 ③

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4^2 - 1^2}{4 - 1} = \frac{15}{3} = 5$$

(y의 변화량)
(x의 변화량)

02 답 ②

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} \\ &= f(a+1) - f(a) \\ &= (a+1)^2 + 3(a+1) - (a^2 + 3a) \\ &= 2a + 4 \end{aligned}$$

(y의 변화량)
(x의 변화량)

즉, $2a+4=2$ 에서 $a=-1$

03 답 (1) -3 (2) -1

(3) 82

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-8 - 1}{3} = -3$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{-1 - 0}{1} = -1$$

$$(3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(8) - f(2)}{8 - 2} = \frac{500 - 8}{6} = 82$$

04 답 ②

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} & \quad \text{같은 게 들어가야 한다.} \\ &= \lim_{2h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(1) = 4 \quad \text{같은 게 들어가야 한다.} \end{aligned}$$

05 답 ④

$f(1) = -1$ 이므로 주어진 식은

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) + 1}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^2 - 1} \times \frac{x^3 - 1}{x^3 - 1} \right\} \quad \leftarrow f(1) = -1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \right\} \quad \leftarrow \text{분모, 분자에 각각 } x^3 - 1 \text{을 곱한다.} \\ &= f'(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= f'(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2} f'(1) = 3 \quad \leftarrow x=1 \text{을 대입한다.} \end{aligned}$$

06 답 (1) -3 (2) -3 (3) 10

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 와 같다.

$$\begin{aligned} (1) f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-3(1+\Delta x) + 4\} - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x} = -3 \\ (2) f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(-1+\Delta x)^2 + (-1+\Delta x) - 1\} - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2\Delta x - 3) = -3 \\ (3) f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(2+\Delta x)^3 - 2(2+\Delta x) + 4\} - 8}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3 + 6(\Delta x)^2 + 10\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{(\Delta x)^2 + 6\Delta x + 10\} = 10 \end{aligned}$$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 118

07 ①	08 -3	09 ②
10 1	11 8	12 ②
13 ②	14 5	

07 답 ①

x 의 값이 2에서 $2+h$ 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} &= \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4 \end{aligned}$$

$h+4=10$ 이므로

$h=6$

08 답 -3

직선 AB의 기울기는 x 의 값이 3에서 6까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = 3, \frac{f(6)}{3} = 3$$

$\therefore f(6) = 9$

$f(0) = f(6)$ 이므로 x 의 값이 0에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} &= \frac{f(3) - f(6)}{3 - 0} \\ &= -\frac{9}{3} = -3 \end{aligned}$$

09 답 ②

x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

또, 함수 $f(x)$ 의 $x=c$ 에서의 미분계수는 $f'(c)=1$ 이다.

$$\begin{aligned}
 f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(c+h)^2 - 3(c+h)\} - (c^2 - 3c)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2ch - 3h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2c - 3) = 2c - 3 \\
 2c - 3 &= 1, 2c = 4 \quad \therefore c = 2
 \end{aligned}$$

10 1

$\frac{1}{n}$ 은 h 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때, $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f(1) \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ f(1+h) - f(1) \} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(1+h)^2 - (1+h) + 3\} - 3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 1) = 1
 \end{aligned}$$

11 8

$f(1) = 1, f'(1) = 4$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - 1}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x^2) - f(1)\}(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \times (x+1) \\
 &= 2f'(1) = 2 \times 4 = 8
 \end{aligned}$$

12 ②

- ㄱ. $x=a$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$ 인 점에서의 접선의 기울기보다 크므로
 $f'(a) > f'(b)$ (거짓)
- ㄴ. $a \leq x \leq b$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하므로

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a) + f(b)}{2} \text{ (거짓)}$$

- ㄷ. $x=b$ 인 점에서의 접선의 기울기는 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로

$$f'(b) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ (참)}$$

- ㄹ. $x=a, x=b, x=\frac{a+b}{2}$ 인 점에서의 각
 각의 접선의 기울기를 비교하면 $x=a$ 인
 점에서의 접선의 기울기가 가장 크고
 $x=b$ 인 점에서의 접선의 기울기가 가장
 작으므로

$$f'(a) > f'\left(\frac{a+b}{2}\right) > f'(b) \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

13 ②

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h-2) - 0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1
 \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

- ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는

$x=2$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} \\
 = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} \\
 = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1
 \end{aligned}$$

이므로 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

- ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = k(2) = 4$ 이므로 $k(x)$ 는

$x=2$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(2+h) - k(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 - 4h + 4) - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h - 4) = -4 \end{aligned}$$

이므로 $k(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.
따라서 $x=2$ 에서 연속이지만 미분가능하
지 않은 함수는 ㄴ이다.

14 답 5

함수 $y=f(x)$ 는 $x=0$, $x=2$ 인 점에서 불
연속이므로 $m=2$

또한, $x=-1$, $x=0$, $x=2$ 에서 미분가능
하지 않으므로 $n=3 \quad \therefore m+n=5$

08 도함수의 정의 ~

09 다항함수의 미분법

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 120

15 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=1$

(3) $f'(x)=2x$

16 (1) $y'=0$ (2) $y'=0$

(3) $y'=4x^3$ (4) $y'=6x^5$

17 (1) $f'(x)=12x^2-6x$, $f'(3)=90$

(2) $f'(x)=3x^2-2$, $f'(3)=25$

18 (1) $y'=-\frac{2}{3}x+2$ (2) $y'=4x^3-6x^2+4$

(3) $y'=48x^3-18x^2$ (4) $y'=3x^2-7$

19 (1) -4 (2) 2 20 31

15 답 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=1$

(3) $f'(x)=2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6-6}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h+1 - (x+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

16 답 (1) $y'=0$ (2) $y'=0$

(3) $y'=4x^3$ (4) $y'=6x^5$

$$\begin{aligned} (1) y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 - (-4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2 - x^2\} \times \{(x+h)^2 + x^2\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2xh + h^2) \{(x+h)^2 + x^2\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \{(x+h)^2 + x^2\} \\ &= 2x \times 2x^2 = 4x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^6 - x^6}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^3 - x^3\} \times \{(x+h)^3 + x^3\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2h + 3xh^2 + h^3) \{(x+h)^3 + x^3\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \{(x+h)^3 + x^3\} \\
 &= 3x^2 \times 2x^3 = 6x^5
 \end{aligned}$$

17 $\boxed{\text{답}}$ (1) $f'(x) = 12x^2 - 6x$,
 $f'(3) = 90$
 (2) $f'(x) = 3x^2 - 2$,
 $f'(3) = 25$

(1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x$
 $f(x+h) = 4(x+h)^3 - 3(x+h)^2 + 2(x+h)$
 $\therefore$ $f(x+h) - f(x)$
 $= (12x^2 - 6x)h + (12x - 3)h^2 + 4h^3$
 $f'(x)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(12x^2 - 6x)h + (12x - 3)h^2 + 4h^3}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \{12x^2 - 6x + (12x - 3)h + 4h^2\}$
 $= 12x^2 - 6x$
 $\therefore f'(x) = 12x^2 - 6x, f'(3) = 90$

(2) $f(x) = x^3 - 2x$
 $f(x+h) = (x+h)^3 - 2(x+h)$
 $f(x+h) - f(x)$
 $= (3x^2 - 2)h + 3xh^2 + h^3$
 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2 - 2)h + 3xh^2 + h^3}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 - 2 + 3xh + h^2)$
 $= 3x^2 - 2$
 $\therefore f'(x) = 3x^2 - 2, f'(3) = 25$

18 $\boxed{\text{답}}$ (1) $y' = -\frac{2}{3}x + 2$

(2) $y' = 4x^3 - 6x^2 + 4$

(3) $y' = 48x^3 - 18x^2$

(4) $y' = 3x^2 - 7$

(1) $y' = \left(-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1\right)' = -\frac{2}{3}x + 2$

(2) $y' = (x^4 - 2x^3 + 4x + 4)'$
 $= 4x^3 - 6x^2 + 4$

(3) $y' = (3x^3)' \times (4x - 2) + 3x^3 \times (4x - 2)'$
 $= 9x^2(4x - 2) + 3x^3 \times 4$
 $= 36x^3 - 18x^2 + 12x^3 = 48x^3 - 18x^2$

(4) $y' = (x - 1)'(x - 2)(x + 3)$
 $+ (x - 1)(x - 2)'(x + 3)$
 $+ (x - 1)(x - 2)(x + 3)'$
 $= (x - 2)(x + 3) + (x - 1)(x + 3)$
 $+ (x - 1)(x - 2)$
 $= 3x^2 - 7$

19 $\boxed{\text{답}}$ (1) -4 (2) 2

(1) $f'(x) = 4x - 4$ $\therefore f'(0) = -4$

(2) $f'(x) = (x^2 - 2x)' \times (3x - 1)$
 $+ (x^2 - 2x) \times (3x - 1)'$
 $= (2x - 2)(3x - 1)$
 $+ (x^2 - 2x) \times 3$
 $= 6x^2 - 8x + 2 + 3x^2 - 6x$
 $= 9x^2 - 14x + 2$

$\therefore f'(0) = 2$

20 $\boxed{\text{답}}$ 31

$f'(x) = (5x + 2)' \times (2x^2 - x + 1)$
 $+ (5x + 2) \times (2x^2 - x + 1)'$
 $= 5 \times (2x^2 - x + 1)$
 $+ (5x + 2) \times (4x - 1)$
 $= 10x^2 - 5x + 5 + 20x^2 + 3x - 2$
 $= 30x^2 - 2x + 3$

$\therefore f'(1) = 30 - 2 + 3 = 31$

21 ②

22 ④

23 10

24 1

25 $\frac{5}{3}$

26 8

27 $a=5, b=1$

28 ①

21 답 ②

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는 $x=1$ 에서의 미분계수와 같다.

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - 2 \times 1^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4) = 4$$

22 답 ④

$f(0+0) = f(0)f(0)$ 에서 $\{f(0)\}^2 = f(0)$

$\therefore f(0) = 1$ $\leftarrow \begin{matrix} f(0)\{f(0)-1\}=0 \text{에서} \\ f(x) > 0 \text{이므로 } f(0)=1 \text{이다.} \end{matrix}$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} \quad \leftarrow f(0)=1$$

$\leftarrow f(x)$ 는 변수 h 가 없으므로 $\lim$ 의 영향을 받지 않는다.

$$= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= f'(0) f(x)$$

23 답 10

$f(x) = x^2 + ax + b$ 에서

$f(1) = 1 + a + b = 1$ 이므로

$a + b = 0 \dots \textcircled{1}$

$f'(x) = 2x + a$ 이므로

$f'(2) = a + 4 = -1$

$\therefore a = -5$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 5$

$\therefore b - a = 10$

24 답 1

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - 1}{x + 1} = 3$ 에서

$\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow -1} \{g(x) - 1\} = g(-1) - 1 = 0$

$\therefore g(-1) = 1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)}$

$= g'(-1) = 3$

$f(x) = x^2 g(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x) = 2x \times g(x) + x^2 \times g'(x)$ 이므로

$f'(-1) = -2 \times g(-1) + 1 \times g'(-1)$

$= -2 \times 1 + 1 \times 3 = 1$

25 답 $\frac{5}{3}$

$f(x) = (x^2 + 2)g(x)$ 에서

$f'(x) = 2x \times g(x) + (x^2 + 2) \times g'(x)$

$f'(1) = 11, g(1) = 3$ 이므로

$f'(1) = 2g(1) + 3g'(1)$

$= 2 \times 3 + 3g'(1) = 11$

$\therefore g'(1) = \frac{5}{3}$

26 답 8

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 2}{x - 3}, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 2}{x - 3} = -2$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) + 2\} = 0, \lim_{x \rightarrow 3} \{g(x) - 2\} = 0$

이므로

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$

$\therefore f(3) = -2, g(3) = 2 \dots \textcircled{1}$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 2}{x - 3}$

$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = 2$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 2}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = g'(3) = -2 \\
 &\therefore f'(3) = 2, g'(3) = -2 \dots \textcircled{A} \\
 &h(x) = f(x)g(x) \text{라 하면} \\
 &h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{이므로} \\
 &\textcircled{A}, \textcircled{A} \text{에 의하여} \\
 &h'(3) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3) \\
 &= 2 \times 2 + (-2) \times (-2) \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

27 [답] $a=5, b=1$

다항식 $x^6 - 6x + a$ 가 $(x-b)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^6 - 6x + a = (x-b)^2 Q(x) \dots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A}$ 에 $x=b$ 를 대입하면

$$b^6 - 6b + a = 0 \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 6x^5 - 6 &= 2(x-b)Q(x) \\
 &+ (x-b)^2 Q'(x) \dots \textcircled{C}
 \end{aligned}$$

$\textcircled{C}$ 에 $x=b$ 를 대입하면

$$6b^5 - 6 = 0, b^5 = 1$$

$$\therefore b = 1 (\because b \text{가 실수이므로})$$

이를 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$1 - 6 + a = 0$$

$$\therefore a = 5$$

$$\therefore a = 5, b = 1$$

28 [답] ①

함수 $f(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, \frac{15}{4})$ 를 지나

므로 $f(-1) = \frac{15}{4}$ 이고, $x = -1$ 에서의 접선

$$l \text{의 기울기가 } \frac{5}{4} \text{이므로 } f'(-1) = \frac{5}{4}$$

$g(x) = (x^2 - x + 2)^2 f(x)$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하자.

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \{(x^2 - x + 2)^2\}' f(x) \\
 &\quad + (x^2 - x + 2)^2 f'(x) \\
 &= 2(x^2 - x + 2) \times (2x - 1) \times f(x) \\
 &\quad + (x^2 - x + 2)^2 \times f'(x) \\
 \therefore g'(-1) &= 2 \times 4 \times (-3) \times f(-1) \\
 &\quad + 16 \times f'(-1) \\
 &= -90 + 20 = -70
 \end{aligned}$$

10 다항함수의 접선의 방정식 ~

16 속도와 가속도

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 126

29 풀이 참조 30 $y = 3x$

31 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{31}{4}$

32 (1) 존재한다. (2) 존재하지 않는다.

33 2 34 $\frac{1}{2}$

35 풀이 참조 36 풀이 참조

37 풀이 참조

38 (1) -7, -2, 3 (2) -4, 1, 5

39 극댓값: 1, 극솟값: -3

40 (1) 최댓값: 2, 최솟값: $-\frac{2}{3}$

(2) 최댓값: 2, 최솟값: -1

(3) 최댓값: 2, 최솟값: 0

(4) 최댓값: 3, 최솟값: $-\frac{2}{3}$

(5) 최댓값: 3, 최솟값: -1

41 9

42 (1) 3, 3 (2) 4, 4 (3) 3, 3

43 ② 44 풀이 참조

45 풀이 참조

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 **증가** 하고,
 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 **감소** 하며, 구간 $(1, \infty)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 **증가** 한다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$

36 [답] 풀이 참조

다항함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 2$ (a 는 실수)가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a \geq 0 \text{ 이어야 한다.}$$

이차방정식 $3x^2 + 2ax + a = 0$ 의 판별식을

$$D \text{ 라 하면 } \frac{D}{4} = a^2 - 3a \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 3$$

따라서 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$0 \leq a \leq 3$$

37 [답] 풀이 참조

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{13}{3}$	$\searrow$	-17	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서

$$\text{극대 이고 극댓값은 } \frac{13}{3}.$$

$x = 3$ 에서 **극소** 이고 극솟값은 -17

38 [답] (1) $-7, -2, 3$

$$(2) -4, 1, 5$$

(1) $a = -7, a = -2, a = 3$ 을 각각 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq f(a)$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대가 되므로 극대가 되는 x 의 값은 $-7, -2, 3$ 이다.

(2) $a = -4, a = 1, a = 5$ 를 각각 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(a) \leq f(x)$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소가 되므로 극소가 되는 x 의 값은 $-4, 1, 5$ 이다.

39 [답] 극댓값 : 1, 극솟값 : -3

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$= 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$= 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

증가와 감소를 나타낸 표에 의하여 극댓값은

$$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 - 3 = 1,$$

극솟값은

$$f(3) = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 - 3 = -3$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

40 [답] (1) 최댓값 : 2, 최솟값 : $-\frac{2}{3}$

$$(2) \text{ 최댓값 : 2, 최솟값 : } -1$$

$$(3) \text{ 최댓값 : 2, 최솟값 : 0}$$

$$(4) \text{ 최댓값 : 3, 최솟값 : } -\frac{2}{3}$$

$$(5) \text{ 최댓값 : 3, 최솟값 : } -1$$

(1) 닫힌구간 $\left[-\frac{1}{3}, 2\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2이고, 최솟값은 $-\frac{2}{3}$ 이다.

(2) 닫힌구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2이고, 최솟값은 -1이다.

(3) 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2이고, 최솟값은 0이다.

(4) 닫힌구간 $\left[-2, -\frac{1}{3}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 3이고, 최솟값은 $-\frac{2}{3}$ 이다.

(5) 닫힌구간 $[-4, 5]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 3이고, 최솟값은 -1이다.

41 [답] 9

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 18x - 12 \\ &= -6(x^2 - 3x + 2) \\ &= -6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$
 보통 $f'(x)=0$ 인 x 중에서 극대·극소가 된다.

구간 $[0, 3]$ 에서 극솟값은
 $f(1) = -3$, $f(1) = -2 \times 1^3 + 9 \times 1^2 - 12 \times 1 + 2 = -3$

극댓값은 $f(2) = -2$
 $f(2) = -2 \times 2^3 + 9 \times 2^2 - 12 \times 2 + 2 = -2$

또한, 구간 양 끝에서의 함수값은 $f(0)=2$,
 $f(3) = -7$, $f(3) = -2 \times 3^3 + 9 \times 3^2 - 12 \times 3 + 2 = -7$

따라서 최댓값 $M=2$, 최솟값 $m=-7$ 이므로
 $M-m=2-(-7)=9$

42 [답] (1) 3, 3 (2) 4, 4

(3) 3, 3

(1) 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수는 3이므로 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(2) 사차함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수는 4이므로 방정식 $g(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

(3) 이차함수 $y=h(x)$ 와 삼차함수 $y=i(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 3이므로 방정식 $h(x)=i(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

43 [답] ②

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-k$ 라 놓으면
 $f'(x)=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because x>0$)
 따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이고 최소이다.

$f(1)=2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 12 \times 1 - k = -7-k$
 이때, 최솟값은 $f(1) = -7-k$ 인데 최솟값이 0 이상이어야 하므로 $-7-k \geq 0$ 에서 $k \leq -7$ 이다.

따라서 상수 k 의 최댓값은 -7이다.

44 [답] 풀이 참조

속도 $v(t)$ $=f'(t)$	점 P가 양의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위	점 P가 음의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위	점 P가 운동 방향을 바꾼 시간 t
(1) $-2t+3$	$0 < t < \frac{3}{2}$	$t > \frac{3}{2}$	$t = \frac{3}{2}$
(2) $-2t+8$	$0 < t < 4$	$t > 4$	$t = 4$
(3) $9t^2+18t-27$	$t > 1$	$0 < t < 1$	$t = 1$
(4) $3t^2-12t$	$t > 4$	$0 < t < 4$	$t = 4$

(1) 점 P의 위치 $f(t) = -t^2 + 3t - 4$ 에 대해

여 $f'(t) = -2t + 3 > 0$ 이면 $t < \frac{3}{2}$ 이므로

점 P가 양의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $0 < t < \frac{3}{2}$ 이고, 음의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $t > \frac{3}{2}$

이고, 운동 방향을 바꾼 시간은 $t = \frac{3}{2}$ 이다.

- (2) 점 P의 위치 $f(t) = -t^2 + 8t + 12$ 에 대하여 $f'(t) = -2t + 8 > 0$ 이면 $t < 4$ 이므로 점 P가 양의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $0 < t < 4$ 이고, 음의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $t > 4$ 이고, 운동 방향을 바꾼 시점은 $t = 4$ 이다.

- (3) 점 P의 위치 $f(t) = 3t^3 + 9t^2 - 27t$ 에 대하여 $f'(t) = 9t^2 + 18t - 27$

$$= 9(t-1)(t+3) > 0$$

이면 $t > 1$ 이므로 점 P가 양의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $t > 1$ 이고, 음의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $0 < t < 1$ 이고, 운동 방향을 바꾼 시점은 $t = 1$ 이다.

- (4) 점 P의 위치 $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9$ 에 대하여 $f'(t) = 3t^2 - 12t = 3t(t-4) > 0$ 이면 $t > 4$ 이므로 점 P가 양의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $t > 4$ 이고, 음의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $0 < t < 4$ 이고, 운동 방향을 바꾼 시점은 $t = 4$ 이다.

45 [답] 풀이 참조

수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 위치 x 가 $x = -6t^2 + 36t$ 에서

점 P의 속도 v 는 $v = \frac{dx}{dt} = -12t + 36$

점 P의 가속도 a 는 $a = \frac{dv}{dt} = -12$

- (1) $t=1$ 에서의 점 P의 위치 : 30

시간 t 에 대한 위치 $x = -6t^2 + 36t$ 에 $t=1$ 을 대입하면 $x=30$

- (2) $t=2$ 에서의 점 P의 속도 : 12

시간 t 에 대한 속도 $v = -12t + 36$ 에 $t=2$ 를 대입하면 $v=12$

- (3) $t=3$ 에서의 점 P의 가속도 : -12

- (4) 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시간 :

$$t = 3$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -12t + 36 = 0$$

$$\therefore t = 3$$

종합 연습 문제 [정답]

문제편 p. 140

46 ④

47 ③

48 $-\frac{4}{3}$

49 ④

50 $\frac{24}{5}$

51 ③

52 $-4 < a < 0$

53 ④

46 [답] ④

곡선 $y = x^3$ 에서 $y' = 3x^2$ $y = x^n$ 일 때, $y' = nx^{n-1}$

접점을 (t, t^3) 이라 하면 접선의 기울기는 $y' = 3t^2$ 기울기가 m 이고 한 점 (a, b) 를 지나
는 직선의 방정식은 $y - b = m(x - a)$

따라서 접선의 방정식은 $y - t^3 = 3t^2(x - t)$

이 접선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2 - t^3 = 3t^2(0 - t) \text{에서}$$

$$t^3 = 1 \quad \therefore t = 1 \quad \text{에서 } t \text{는 실수이다.}$$

따라서 점 $(1, 1)$ 을 지나고 기울기가 3인 접선의 방정식은 $y = 3x - 2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 13$$

47 [답] ③

$f(x) = x^3 - 2ax^2 + ax$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 4ax + a$$

$y = x^n$ 일 때, $y' = nx^{n-1}$
모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 방정식 $3x^2 - 4ax + a = 0$ 의 판별식을

D 라 하면 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식은 $D = b^2 - 4ac$

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 3a = a(4a - 3) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{3}{4}$$

따라서 상수 a 의 최솟값은 0이다.

48 답 $-\frac{4}{3}$

함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c) \text{인 실수 } c \text{가 } -2 \text{와}$$

2 사이에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=12x^2-2 \text{이므로}$$

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=12c^2-2 \quad (-2 < c < 2)$$

$$\text{에서 } \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{31-(-25)}{4}=\frac{56}{4}=14$$

$$12c^2-2=14, \quad c^2=\frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } c=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } c=\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

모든 실수 c 의 값의 곱은

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{4}{3}$$

49 답 ④

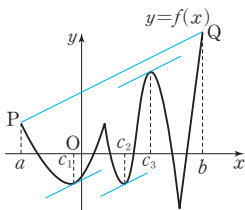
$x=a$ 인 곡선 위의 점을 P,

$x=b$ 인 곡선 위의 점을 Q라 하면

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 직선 PQ의 기울기이므로

$f'(c)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 $x=c$ 에서의 접선의 기울기이고 c 는 접점의 x 좌표이다.

따라서 그림과 같이 직선 PQ의 기울기와 같은 접선의 기울기를 갖는 접점은 $x=c_1$, $x=c_2$, $x=c_3$ 의 3개이므로 c 의 개수는 3이다.



50 답 $\frac{24}{5}$

곡선을 $y=f(x)$ 라 하면 $f'(x)=\frac{2}{5}x$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{5}t^2)$ 이라 하면 접선의

기울기는 $f'(t)=\frac{2}{5}t$ 이므로

접선의 방정식은 $y-\frac{1}{5}t^2=\frac{1}{5}t(x-t)$

이 접선이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$-3-\frac{1}{5}t^2=-\frac{2}{5}t, \quad t^2=15$$

$$t=\sqrt{15} \text{ 또는 } t=-\sqrt{15}$$

따라서 접선의 기울기는

$$f'(\sqrt{15})=\frac{2\sqrt{15}}{5} \text{ 또는}$$

$$f'(-\sqrt{15})=-\frac{2\sqrt{15}}{5} \text{이므로}$$

$$m_1^2+m_2^2=\left(\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)^2+\left(-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)^2 \\ =\frac{24}{5}$$

51 답 ③

함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$ 에서

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$, $x=4$ 에서 극값을 가지므로

이차방정식 $-3x^2+2ax+b=0$ 의 두 근이 2, 4이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+4=-\frac{2a}{-3}=\frac{2}{3}a, \quad \frac{2}{3}a=6$$

$$\therefore a=9$$

$$2 \times 4 = -\frac{b}{3}, \quad -\frac{b}{3} = 8$$

$$\therefore b = -24$$

$$\therefore a+b = -15$$

52 **답** $-4 < a < 0$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 극댓값 $f(1)=4$, 극솟값 $f(3)=0$ 이

므로 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-a$ 가

서로 다른 세 점에서 만나려면 $-4 < a < 0$

따라서 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 개의 실근을 갖기 위해서는 $f(x)$ 가 a, b 에서 극값을 가질 때 $f(a)f(b) < 0$ 이어야 한다.

$$-4 < a < 0$$

53 **답** ④

위치 x 가 $x=x(t)$ 일 때,

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$= 6t^2 - 30t + 24$$

$$= 6(t-1)(t-4)$$

$$= 0 \quad \text{운동 방향을 바꿀 때는 속도가 음에서 양, 또는 양에서 음으로 바뀐다는 뜻이므로 } v(t)=0 \text{일 때를 의미한다.}$$

에서 $t=1$ 또는 $t=4$

속도 v 가 $v=v(t)$ 일 때,

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 30 \text{이므로 점 P가 처음}$$

으로 운동 방향을 바꾸는 순간 $t=1$ 일 때, 점

P의 가속도는

$$a(1) = -18$$

III. 적분

17 부정적분의 정의 ~

18 부정적분의 계산

핵심 개념 문제 **정답**

문제편 p. 142

01 풀이 참조 02 풀이 참조

03 (1) $x^4 + \frac{5}{3}x^3 + C$

(2) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

04 (1) $\frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $2\theta + C$

05 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - \frac{22}{3}$

01 **답** 풀이 참조

(1) $(3x)' = 3$ 이므로 $3x$ 의 도함수는 3 ,

$3x$ 는 3 의 한 부정적분

(2) $(2x^2 - 2)' = 4x$ 이므로 $2x^2 - 2$ 의 도함수는

$4x$, $2x^2 - 2$ 는 $4x$ 의 한 부정적분

(3) $(4x^3 + 2x - 1)' = 12x^2 + 2$ 이므로

$4x^3 + 2x - 1$ 의 도함수는 $12x^2 + 2$,

$4x^3 + 2x - 1$ 은 $12x^2 + 2$ 의 한 부정적분

02 **답** 풀이 참조

(1) $(7x)' = 7$ 이므로 $\int 7 dx = 7x + C$

(2) $(x^2)' = 2x$ 이므로 $\int 2x dx = x^2 + C$

(3) $(x^3)' = 3x^2$ 이므로

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

(4) $(4x^3)' = 12x^2$ 이므로

$$\int 12x^2 dx = 4x^3 + C$$

03  (1) $x^4 + \frac{5}{3}x^3 + C$

(2) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

(1) $\int (4x^3 + 5x^2) dx$
 $= 4 \int x^3 dx + 5 \int x^2 dx$
 $= 4 \left(\frac{1}{4}x^4 + C_1 \right) + 5 \left(\frac{1}{3}x^3 + C_2 \right)$

$= x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 4C_1 + 5C_2$

이때, C_1, C_2 는 모두 임의의 상수이므로

$C = 4C_1 + 5C_2$ 라 하면

$\int (4x^3 + 5x^2) dx = x^4 + \frac{5}{3}x^3 + C$

(2) $\int (x+1)(x-2) dx$
 $= \int x^2 dx - \int x dx - \int 2 dx$
 $= \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 \right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2 \right) - (2x + C_3)$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C_1 - C_2 - C_3$

이때, C_1, C_2, C_3 은 모두 임의의 상수이

므로 $C = C_1 - C_2 - C_3$ 이라 하면

$\int (x+1)(x-2) dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

04  (1) $\frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $2\theta + C$

(1) $\int \frac{x^3}{x-2} dx - \int \frac{2x^2}{x-2} dx$
 $= \int \frac{x^3 - 2x^2}{x-2} dx$
 $= \int \frac{x^2(x-2)}{x-2} dx$
 $= \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

(단, C 는 적분상수)

(2) $\int (\sin \theta + \cos \theta)^2 d\theta$
 $= \int (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta$
 $= \int (1 + 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta$
 $= \int (1 + \sin 2\theta) d\theta$
 $= \int 1 d\theta + \int \sin 2\theta d\theta$
 $= \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + C$
 $= \theta - \frac{1}{2} (2 \cos^2 \theta - 1) + C$
 $= \theta - \cos^2 \theta + \frac{1}{2} + C$
 $= \theta - \cos^2 \theta + C$ (단, C 는 적분상수)

05  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - \frac{22}{3}$

$f'(x) = x^2 + 4x + 3$ 이므로

$f(x) = \int (x^2 + 4x + 3) dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + C$

(단, C 는 적분상수)

$f(1) = -2$ 이므로 $\frac{1}{3} + 2 + 3 + C = -2$

$\therefore C = -\frac{22}{3}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - \frac{22}{3}$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 146

06 ⑤

07 ①

08 12

09 ⑤

10 ④

11 ⑤

12 6

13 8

06  ⑤

① $\left(\frac{1}{2}x^2 \right)' = x \quad \therefore \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

② $(2x^3)' = 6x^2 \quad \therefore \int 6x^2 dx = 2x^3 + C$

③ $\left(\frac{1}{4}x^4 \right)' = x^3 \quad \therefore \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

④ $(6x)' = 6 \quad \therefore \int 6 dx = 6x + C$

⑤ $x' = 1 \quad \therefore \int 1 dx = x + C$

07 [답] ①

$$f(x) = \int (1-3x^2) dx \text{에서}$$

$$f'(x) = 1-3x^2 \text{이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$$

$$= 1 - 12$$

$$= -11$$

08 [답] 12

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $9x^2-3x+2$ 이므로

$$f'(x) = 9x^2 - 3x + 2$$

$$\therefore f(x) = \int (9x^2 - 3x + 2) dx$$

$$= 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

(단, C 는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$f(-1) = -3 - \frac{3}{2} - 2 + C = 2$$

$$\therefore C = \frac{17}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{17}{2} \text{이므로}$$

$$f(1) = 12$$

09 [답] ⑤

주어진 그래프로부터

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & (x \geq 0) \\ -x+2 & (x < 0) \end{cases}$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$f(x) = \int (-x+2) dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + C_1$$

(단, C_1 은 적분상수)

$$f(-2) = 5 \text{에서 } -2 - 4 + C_1 = 5$$

$$\text{이므로 } C_1 = 11$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 11$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$f(x) = \int 2dx = 2x + C_2$$

(단, C_2 는 적분상수)

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \text{에서}$$

$$C_2 = 11 \quad \therefore f(x) = 2x + 11$$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x) = \begin{cases} 2x+11 & (x \geq 0) \\ -\frac{1}{2}x^2+2x+11 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{이므로 } f(2) = 15$$

10 [답] ④

$$f'(x) = (x+3)(x-5) \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 2x - 15) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x + C$$

(단, C 는 적분상수)

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 5$ 이므로
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값 15를 갖고, $x = 5$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f(-3) = 15 \text{에서 } -9 - 9 + 45 + C = 15$$

$$\therefore C = -12$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x - 12 \text{이므로}$$

$f(x)$ 의 극솟값은

$$f(5) = \frac{125}{3} - 112 = -\frac{211}{3}$$

11 [답] ⑤

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+xy^2+x^2y$$

에 $x=0, y=0$ 을 각각 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \text{에서 } f(0)=0$$

$$\begin{aligned} \text{이때, } f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \end{aligned}$$

이므로 임의의 실수 x 에 대한 도함수는

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+xh+xh^2+x^2h-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + x + xh + x^2 \right\} \\ &= f'(0) + x + x^2 \\ &= x^2 + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x^2 + x) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

(단, C 는 적분상수)

한편, $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore f(1) = \frac{5}{6}$$

12 [답] 6

삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 갖고,
그 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$x=-1$ 에서도 극값을 갖고 $f(0)=0$ 이다.

즉, $f'(1)=f'(-1)=0$ 이므로

$f'(x)=a(x+1)(x-1)$ ($a \neq 0$)이라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = a \int (x^2 - 1) dx \\ &= a \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) + C \end{aligned}$$

(단, C 는 적분상수)

이때, $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x) = ax \left(\frac{1}{3}x^2 - 1 \right) = \frac{a}{3}x(x^2 - 3)$$

$f(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$ 또는

$$x=-\sqrt{3}$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 0 + (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 6$$

13 [답] 8

$$\frac{d}{dx} \left\{ f(x) + \int xf(x) dx \right\} = x^3 + x \text{에서}$$

$$f'(x) + xf(x) = x^3 + x \cdots \textcircled{1}$$

다항함수 $f(x)$ 의 최고차항의 차수를 n 이라

하면 좌변의 차수는 $n+1$, 우변의 차수는

3이므로

$$n+1=3 \quad \therefore n=2$$

함수 $f(x)$ 는 이차함수이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0)$$

라 하면 $f'(x) = 2ax + b$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2ax + b + x(ax^2 + bx + c) = x^3 + x$$

$$ax^3 + bx^2 + (2a+c)x + b = x^3 + x \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 은 x 에 대한 항등식이므로

$$a=1, b=0, 2a+c=1$$

$$\text{즉, } a=1, b=0, c=-1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 1 \quad \therefore f(3) = 8$$

19 정적분의 정의 ~

21 정적분으로 표시된 함수

핵심 개념 문제 [정답]

문제편 p. 148

14 풀이 참조

15 (1) 10 (2) $\frac{7}{3}$ (3) 4

16 풀이 참조 17 풀이 참조 18 ③

19 풀이 참조 20 ③

14 **답** 풀이 참조

$$(1) \int_0^1 \frac{2}{3} x dx = \left[\frac{1}{3} x^2 \right]_0^1 \\ = \frac{1}{3} \times 1^2 - \frac{1}{3} \times 0^2 = \frac{1}{3}$$

$$(2) \int_1^3 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 26$$

15 **답** (1) 10 (2) $\frac{7}{3}$ (3) 4

$$(1) \int_0^2 (3x^2 + 1) dx = \left[x^3 + x \right]_0^2 \\ = (2^3 + 2) - 0 = 10$$

$$(2) \int_1^2 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$(3) \int_1^3 2 dx = \left[2x \right]_1^3 = 2 \times 3 - 2 \times 1 = 4$$

16 **답** 풀이 참조

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

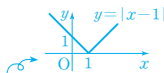
$$(1) \int_0^1 (x^2 - x) dx \\ = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx \\ = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$(2) \int_0^1 (3x^2 + 2x) dx \\ = 3 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 x dx \\ = 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

17 **답** 풀이 참조

$$\int_0^1 (x+3) dx + \int_1^5 (x+3) dx \\ = \int_0^5 (x+3) dx \\ = \left[\frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_0^5 = \frac{1}{2} \times 25 + 15 = \frac{55}{2}$$

$$(2) \int_{-3}^1 (x^2 - 4x) dx + \int_1^2 (x^2 - 4x) dx \\ = \int_{-3}^2 (x^2 - 4x) dx \\ = \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 \right]_{-3}^2 \\ = \frac{8}{3} - 8 - (-9 - 18) = \frac{65}{3}$$

18 **답** ③

$0 \leq x < 1$ 일 때, $|x-1| = -x+1$

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, $|x-1| = x-1$

$$\therefore \int_0^4 |x-1| dx \\ = \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^4 (x-1) dx \\ = \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^4 \\ = 5$$

19 **답** 풀이 참조

$$(1) \frac{d}{dx} \int_1^x t dt \\ = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) \\ = x - 0 = x$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_2^x (3t-2) dt \\ = \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{2} t^2 - 2t \right]_2^x \\ = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{3}{2} x^2 - 2x - (6-4) \right\} \\ = 3x - 2 - 0 \\ = 3x - 2$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{-1}^x (4t^2 - 2t + 1) dt \\ = \frac{d}{dx} \left[\frac{4}{3} t^3 - t^2 + t \right]_{-1}^x \\ = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{4}{3} x^3 - x^2 + x - \left(-\frac{4}{3} - 1 - 1 \right) \right\} \\ = 4x^2 - 2x + 1 - 0 \\ = 4x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \frac{d}{dx} \int_4^x (t^4 - 4t^2 + 4) dt \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{5} t^5 - \frac{4}{3} t^3 + 4t \right]_4^x \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{4}{3} x^3 + 4x \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{4^5}{5} - \frac{4^4}{3} + 16 \right) \right] \\
 &= x^4 - 4x^2 + 4 - 0 = x^4 - 4x^2 + 4
 \end{aligned}$$

20 [답] ③

$$\int_1^x f(t) dt = x^3 + x^2 + ax \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 + 2x + a$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + 1 + a \quad \therefore a = -2 \quad \leftarrow \int_1^1 f(t) dt = 0$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

$$\therefore f(2) = 12 + 4 - 2 = 14$$

종합 연습 문제

정답

문제편 p. 154

21 ②

22 ④

23 ⑤

24 $-\frac{1}{4}$

25 $\frac{1}{2}$

26 ①

27 $\frac{17}{2}$

28 $\frac{494}{27}$

21 [답] ②

(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^3 (x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\
 &= \int_1^3 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_1^3 \\
 &= (9 - 9) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

22 [답] ④

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & (x \leq 2) \\ 3x + 4 & (x > 2) \end{cases} \text{에 대하여}$$

정적분의 정의를 이용하자.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^3 f(x) dx \\
 &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\
 &= \int_0^2 (3x^2 - 2) dx + \int_2^3 (3x + 4) dx \\
 &= \left[x^3 - 2x \right]_0^2 + \left[\frac{3}{2} x^2 + 4x \right]_2^3 \\
 &= 8 - 4 + \left\{ \frac{27}{2} + 12 - (6 + 8) \right\} = \frac{31}{2}
 \end{aligned}$$

23 [답] ⑤

$$|x - k| = \begin{cases} -x + k & (x \leq k) \\ x - k & (x > k) \end{cases} \text{이므로}$$

$$x|x - k| = \begin{cases} -x^2 + kx & (x \leq k) \\ x^2 - kx & (x > k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-2}^1 x|x - k| dx \\
 &= \int_{-2}^k (-x^2 + kx) dx + \int_k^1 (x^2 - kx) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{k}{2} x^2 \right]_{-2}^k + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{k}{2} x^2 \right]_k^1 \\
 &= \frac{1}{3} k^3 - \frac{5}{2} k - \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

$$f(k) = \frac{1}{3} k^3 - \frac{5}{2} k - \frac{7}{3} \quad (-2 \leq k \leq 2)$$

이라 하면

$$f'(k) = k^2 - \frac{5}{2} = 0 \text{에서}$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$-2 \leq k \leq 2$ 에서 함수 $f(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(k)$ 는 $k = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 일 때,

극소이면서 최소가 된다.

24 - $\frac{1}{4}$

$\int_0^1 f(t)dt = a$ (a 는 상수) $\cdots$ ㉠라 하면

$$f(x) = x^2 - 3x + 3a \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 f(t)dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 - 3t + 3a)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3at \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3a$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3a = a \text{에서 } 2a = \frac{7}{6}$$

$$\therefore a = \frac{7}{12}$$

따라서 $f(x) = x^2 - 3x + \frac{7}{4}$ 이므로

$$f(1) = -\frac{1}{4}$$

25 $\frac{1}{2}$

주어진 식 $\int_1^x f(t)dt = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4ax$ 에

$x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)dt = 1 - \frac{3}{2} + 4a = 0, \quad 4a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}$$

$a = \frac{1}{8}$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \text{이고 이 식의}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} \int_1^x f(t)dt = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(0) = \frac{1}{2}$$

26 ①

$\int (3t^3 + 2t - 5)dt = F(t) \cdots$ ㉠라 하면

$$\int_4^x (3t^3 + 2t - 5)dt = \left[F(t) \right]_4^x$$

$$= F(x) - F(4)$$

이고, ㉠에서 $F'(t) = 3t^3 + 2t - 5$ 이므로

$$F'(4) = 192 + 8 - 5 = 195$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-4} \int_4^x (3t^3 + 2t - 5)dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{F(x) - F(4)}{x - 4}$$

$$= F'(4)$$

$$= 195$$

27 $\frac{17}{2}$

조건 (가)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + bx + c) = c = 0$$

$$\therefore f(x) = ax^2 + bx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (ax + b) = b = -1$$

$$\therefore f(x) = ax^2 - x$$

조건 (나)에서

$$\int_0^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^2 (ax^2 - x)dx = \left[\frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}a - 2 = 5$$

$$\frac{8}{3}a = 7$$

$$\therefore a = \frac{21}{8}$$

따라서 $f(x) = ax^2 + bx = \frac{21}{8}x^2 - x$ 이므로

$$f(2) = \frac{17}{2}$$

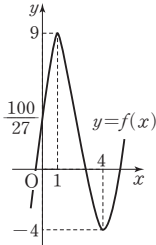
28 $\frac{494}{27}$

삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 9를 가지므로 $f'(1)=0, f(1)=9$

삼차함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 극솟값 -4 를 가지므로 $f'(4)=0, f(4)=-4$

또한, $f(0)=\frac{100}{27}$ 이므로 삼차함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$0 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 $f'(x) \geq 0$

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 $f'(x) \leq 0$

$$\therefore \int_0^4 |f'(x)| dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 f'(x) dx - \int_1^4 f'(x) dx \\ &= [f(x)]_0^1 - [f(x)]_1^4 \quad \leftarrow f'(x) \leq 0 (1 \leq x \leq 4) \text{이므로} \\ &= \{f(1) - f(0)\} - \{f(4) - f(1)\} \\ &= 2f(1) - f(0) - f(4) \\ &= 2 \times 9 - \frac{100}{27} - (-4) \\ &= \frac{494}{27} \end{aligned}$$

22 곡선과 좌표축 사이의 넓이 ~

24 속도와 위치

핵심 개념 문제

문제편 p. 156

29 (1) 1 (2) 6, $-x^2+6x$

30 풀이 참조 31 풀이 참조 32 ④

33 (1) 1, $3t^2-6t$ (2) 3, $3t^2-6t$

34 (1) 1, $|t^2+6t|$ (2) 3, 8, $|t^2+6t|$

29 (1) 1

(2) 6, $-x^2+6x$

(1) 곡선 $y=-x^2+6x$ 과 x 축 및 두 직선 $x=1, x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^4 (-x^2+6x) dx$$

(2) 곡선 $y=-x^2+6x$ 과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^6 (-x^2+6x) dx$$

30 풀이 참조

(1) 곡선 $y=x^3-x$ ($0 \leq x \leq 1$)와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |x^3-x| dx \\ &= \int_0^1 (x-x^3) dx \end{aligned}$$

(2) 곡선 $y=x^3-x$ ($-1 \leq x \leq 0$)와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^0 |x^3-x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3-x) dx \end{aligned}$$

(3) 곡선 $y=x^3-x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 |x^3-x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3-x) dx + \int_0^1 (x-x^3) dx \end{aligned}$$

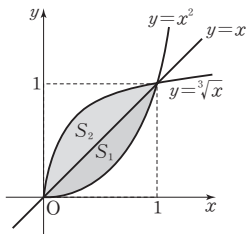
31 [답 풀이 참조]

곡선 $y=x^2-2$ 와 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^2 \{2 - (x^2 - 2)\} dx \\ = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3}$$

32 [답 ④]

그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 과 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=\sqrt[3]{x}$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하자.



$$S_1 = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$y=\sqrt[3]{x}$ 에서 $x=y^3$ 이므로 S_2 는 곡선 $x=y^3$ 과 직선 $x=y$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$S_2 = \int_0^1 (y - y^3) dy = \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^1 \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 넓이는 $S_1 + S_2 = \frac{5}{12}$

33 [답 (1) 1, $3t^2-6t$

(2) 3, $3t^2-6t$

(1) $t=2$ 에서의 점 P의 위치 x 는

$$x = 1 + \int_0^2 (3t^2 - 6t) dt$$

(2) $t=0$, $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (3t^2 - 6t) dt$$

34 [답 (1) 1, $|t^2+6t|$

(2) 3, 8, $|t^2+6t|$

(1) $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 실제로 움직인

$$\text{거리} = \int_0^1 (|t^2 + 6t|) dt$$

(2) $t=3$, $t=8$ 까지 점 P가 실제로 움직인

$$\text{거리} = \int_3^8 (|t^2 + 6t|) dt$$

종합 연습 문제 [정답]

문제편 p. 162

35 풀이 참조

36 ⑤

37 4

38 ②

39 ①

40 ②

41 ①

42 $\frac{16}{45}$

35 [답 풀이 참조]

두 곡선 $y=x^2+2x$, $y=-3x^2-2x+8$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^1 \{-3x^2 - 2x + 8 - (x^2 + 2x)\} dx \\ = \int_{-2}^1 (-4x^2 - 4x + 8) dx = 18$$

36 [답 ⑤]

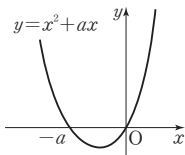
곡선 $x=y^2-16$ 과 y 축의 교점의 y 좌표는 $y^2-16=0$ 에서 $(y+4)(y-4)=0$ 이므로 $y=-4$ 또는 $y=4$

닫힌구간 $[-4, 4]$ 에서 $y^2-16 \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-4}^4 |y^2 - 16| dy = \int_{-4}^4 (-y^2 + 16) dy \\ = 2 \int_0^4 (-y^2 + 16) dy \\ = 2 \left[-\frac{1}{3}y^3 + 16y \right]_0^4 \\ = \frac{256}{3}$$

37 4

곡선 $y=x^2+ax(a>0)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2+ax=0$ 에서 $x(x+a)=0$ 이므로 $x=0$ 또는 $x=-a$
 $a>0$ 이므로 곡선 $y=x^2+ax$ 는 그림과 같다.



곡선 $y=x^2+ax$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^0 |x^2+ax| dx \\ &= \int_{-a}^0 (-x^2-ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_{-a}^0 \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^3 = \frac{1}{6}a^3 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6}a^3 = \frac{32}{3}, a^3 = 64$$

$$(a-4)(a^2+4a+16)=0$$

$$\therefore a=4$$

38 ②

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 그림에서 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=12$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $y=12$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

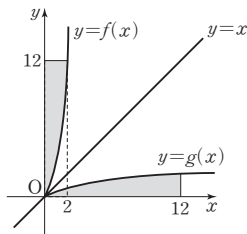
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=12$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3+2x=12$ 에서

↪ 조립제법에 의해

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 2 & -12 & \\ & & 2 & 4 & 12 & \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 0 & \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+2x+6)=0 \text{ 이므로 } x=2$$

구하는 넓이는 x 축, y 축과 두 직선 $x=2$, $y=12$ 로 둘러싸인 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것과 같으므로 구하는 넓이를 S 라 하면



$$\begin{aligned} S &= 2 \times 12 - \int_0^2 (x^3+2x) dx \\ &= 24 - \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_0^2 \\ &= 24 - 8 \\ &= 16 \end{aligned}$$

39 ①

$$\begin{aligned} y &= |x^2-3x| \\ &= \begin{cases} x^2-3x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ -x^2+3x & (0 < x < 3) \end{cases} \end{aligned}$$

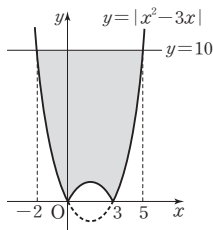
이므로 곡선 $y=|x^2-3x|$ 와 직선 $y=10$ 의 교점은 $x<0$ 또는 $x>3$ 일 때 존재한다.

이때, 이 교점의 x 좌표는

$$x^2-3x=10$$

$$(x+2)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=5$$



구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^0 (-x^2 + 3x + 10) dx \\
 &\quad + \int_0^3 (x^2 - 3x + 10) dx \\
 &\quad + \int_3^5 (-x^2 + 3x + 10) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 10x \right]_{-2}^0 \\
 &\quad + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 10x \right]_0^3 \\
 &\quad + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 10x \right]_3^5 \\
 &= \frac{34}{3} + \frac{51}{2} + \frac{34}{3} \\
 &= \frac{289}{6} \quad \leftarrow \text{이차함수의 대칭성을 이용하면 두 값은 동일하다.}
 \end{aligned}$$

40 [답] ②

$0 \leq t \leq 3$ 일 때 $v(t) \geq 0$ 이고, $3 \leq t \leq 4$ 일 때

$v(t) \leq 0$ 이므로

구하는 거리는

$$\begin{aligned}
 &\int_0^4 |-2t + 6| dt \\
 &= \int_0^3 (-2t + 6) dt + \int_3^4 (2t - 6) dt \\
 &= \left[-t^2 + 6t \right]_0^3 + \left[t^2 - 6t \right]_3^4 \\
 &= 9 + 1 = 10
 \end{aligned}$$

41 [답] ①

주어진 그래프로부터 점 P의 속도 $v(t)$ 는

$$v(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < 1) \\ -t + 2 & (1 \leq t < 4) \\ 2t - 10 & (t \geq 4) \end{cases}$$

$t=2$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리를

s 라 하자.

$$\begin{aligned}
 s &= \int_2^5 |v(t)| dt \\
 &= \int_2^4 |-t + 2| dt + \int_4^5 |2t - 10| dt \\
 &= \int_2^4 (t - 2) dt + \int_4^5 (-2t + 10) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_2^4 + \left[-t^2 + 10t \right]_4^5 = 2 + 1 = 3
 \end{aligned}$$

42 [답] $\frac{16}{45}$

속도 $v(t)$ 가 이차함수이고 함수 $y=v(t)$ 의

그래프와 t 축의 교점이 두 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$

이므로

$$v(t) = a(t-3)(t-5) \quad (\text{단, } a > 0)$$

$$v(0) = 4 \text{에서 } v(0) = 15a = 4 \text{이므로}$$

$$a = \frac{4}{15}$$

$$\therefore v(t) = \frac{4}{15}(t-3)(t-5)$$

$$= \frac{4}{15}t^2 - \frac{32}{15}t + 4$$

한편, 점 P가 출발할 때의 운동 방향과 반대

방향으로 움직인 시간은 $v(t) \leq 0$ 이므로

$t=3$ 에서 $t=5$ 일 때까지이다.

따라서 구하는 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned}
 s &= \int_3^5 \left| \frac{4}{15}t^2 - \frac{32}{15}t + 4 \right| dt \\
 &= \int_3^5 \left(-\frac{4}{15}t^2 + \frac{32}{15}t - 4 \right) dt \\
 &= \left[-\frac{4}{45}t^3 + \frac{16}{15}t^2 - 4t \right]_3^5 \\
 &= \frac{16}{45}
 \end{aligned}$$

확률과 통계

I. 경우의 수

01 원순열 ~

04 조 나누는 방법과 분배하는 방법

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 166

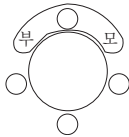
01 풀이 참조	02 ④	03 360
04 500	05 ①	06 6
07 60	08 60	09 26
10 (1) 15 (2) 90		
11 (1) 15 (2) 90		

01 정답 풀이 참조

- (1) 4개의 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$ 이다.
- (2) 4개의 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열한 것을 원형으로 배열하면 같은 것이 4개씩 있다.
- (3) 4개의 문자 A, B, C, D를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{4} = 3!$ 이다.

02 정답 ④

- (i) 부모 사이에 앉을 자녀 한 명을 뽑는 방법 : 4
- (ii) 부모와 자녀 한 명을 한 사람으로 생각하고 원탁에 배열하는 방법 :

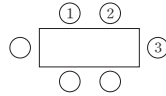


$(4-1)! = 3!$ $\rightarrow$ n 명을 원에 배열하는 방법은 $(n-1)!$

- (iii) 부모가 서로 자리를 바꿀 경우 : 2
- $\therefore$ (구하는 경우의 수) $= 4 \times 3! \times 2$
 $= 48$

03 정답 360

원순열로 생각하고 배열하는 경우 : 5!



하나의 배열이 시작되는 위치가 ①, ②, ③으로 다를 경우 : 3

$$\therefore (\text{구하는 경우의 수}) = 5! \times 3 = 120 \times 3 = 360$$

04 정답 500



$$④ \times {}_5\Pi_3 = 4 \times 5^3 = 4 \times 125 = 500$$

$\rightarrow$ 여기에 0을 제외한 숫자 1, 2, 3, 4가 올 수 있다.

05 정답 ①

편지를 각각 1, 2, 3, 4, 5라 하고, 우체통을 각각 A, B, C라 하자. 각각의 편지에 A, B, C라는 이름을 붙이는 경우라 생각하면

$$(1, 2, 3, 4, 5) \leftrightarrow (A, A, A, B, C)$$

$$\leftrightarrow (A, A, B, B, C)$$

$$\vdots$$

따라서 A, B, C를 중복을 허락하여 5개 선택하여 배열하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$ 이다.

06 정답 6

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

07 정답 60

a, a, a, n, n, b의 여섯 개의 문자 중 같은 것을 포함하는 순열을 이용하면

$$(\text{구하는 경우의 수}) = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

$\rightarrow$ a가 3개, n이 2개, 전체가 6개이므로!

08 60

맨 앞자리의 숫자를 정하여 경우의 수를 구하자.

(i) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

일의 자리의 숫자는 반드시 5이고 나머지 다섯 자리에 0, 0, 2, 5, 5를 일렬로 나열

하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!}=30$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 5인 경우

일의 자리의 숫자는 반드시 5이고 나머지 다섯 자리에 0, 0, 2, 2, 5를 일렬로 나열

하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!}=30$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$$30 + 30 = 60$$

09 26

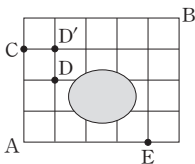
(i) $A \rightarrow C \rightarrow B : 1 \times \frac{6!}{5!} = 6$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow D' \rightarrow B : \frac{3!}{2!} \times 1 \times \frac{5!}{4!} = 15$

(iii) $A \rightarrow E \rightarrow B : 1 \times \frac{5!}{4!} = 5$

따라서 최단거리로 가는 방법의 수는

$$6 + 15 + 5 = 26(\text{가지})\text{이다.}$$



10 (1) 15 (2) 90

(1) ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$ 2, 2, 2로 나눈 것이 서로 구별되지 않으니까 $\frac{1}{3!}$ 을 곱한다.

(2) $\left({}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \right) \times 3!$
 $= {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$ 2, 2, 2로 나뉘어도 각각은 구별되니까 (1)의 식에 $3!$ 을 곱한다.
 $= 90$

11 (1) 15 (2) 90

(1) ${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 15$

1, 2, 2로 나눈 것이 어느 두 개가 같으니까 $\frac{1}{2!}$ 을 곱한다.

(2) $\left({}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \right) \times 3! = 90$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 174

12 ①

13 ③

14 ④

15 256

16 ④

17 ①

18 18

19 ⑤

12 ①

먼저 여자 4명을 묶어서 한 사람으로 보면

전체 4명을 원탁에 앉히는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

13 ③

가운데 영역에 색을 칠한 후 나머지 영역을 칠하는 경우의 수를 구할 때, 원순열을 이용하자.

서로 다른 6개의 색을 각각 a, b, c, d, e, f 라 하면 가운데 정오각형에 칠할 수 있는 색을 택하는 경우의 수는 ${}_6C_1 = 6$

가운데 정오각형에 a 를 칠했다고 하면 5개의 색 b, c, d, e, f 를 사용하여 나머지 둘레에 있는 정오각형에 칠할 수 있는 경우의 수는 $(5-1)! = 4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

14 답 ④

첫 번째 자리에는 반드시 숫자가 와야 하므로 1, 3, 4, 6의 4가지이고, 첫 번째 자리를 제외한 나머지 자리에는 4개의 숫자 1, 3, 4, 6과 3개의 특수문자 #, \$, % 중 중복을 허용하여 3개를 뽑아 나열하면 되므로
 그 경우의 수는 ${}_7\Pi_3 = 7^3$
 따라서 구하는 경우의 수는 4×7^3

15 답 256

만 천 백 십 일

중복을 허용하여 네 개의 숫자 0, 2, 3, 5로 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수 중에서 일의 자리의 숫자와 만의 자리의 숫자의 곱이 홀수이려면 만의 자리와 일의 자리에 모두 홀수가 와야 하므로 ${}_2\Pi_2$
 나머지 세 개의 자리에 올 수 있는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3$
 따라서 구하는 자연수의 개수는
 ${}_2\Pi_2 \times {}_4\Pi_3 = 2^2 \times 4^3 = 256$

16 답 ④

갑, 을 2명이 같은 도시에서 내리므로 한 사람으로 생각하면 3명의 승객이 B, C, D 도시에 내리는 경우이므로 B, C, D 3개 중 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$

17 답 ①

각 자리의 숫자를 각각 a, b, c, d, e 라 하면
 $a \times b \times c \times d \times e = 1000 = 2^3 \times 5^3$ 이므로
 a, b, c, d, e 5개 중에서 3개는 5이고, 나머지 2개는 1과 8 또는 2와 4이어야 한다.

(i) 각 자리의 숫자가 5, 5, 5, 1, 8인 경우
 5, 5, 5, 1, 8을 일렬로 나열하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

(ii) 각 자리의 숫자가 5, 5, 5, 2, 4인 경우
 5, 5, 5, 2, 4를 일렬로 나열하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
 $20 + 20 = 40$

18 답 18

짝수를 모두 짝수 번째 자리에 나열하는 경우는 홀수도 홀수 번째 자리에 나열되므로 다음과 같이 나열하면 된다.

$$\textcircled{\text{홀}} \textcircled{\text{짝}} \textcircled{\text{홀}} \textcircled{\text{짝}} \textcircled{\text{홀}} \textcircled{\text{짝}} \textcircled{\text{홀}}$$

(i) 3, 3, 7의 네 개의 숫자를 홀수 번째 자리에 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

(ii) 4, 4, 8의 세 개의 숫자를 짝수 번째 자리에 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(i), (ii)의 경우가 동시에 일어나므로
 구하는 자연수의 개수는 $6 \times 3 = 18$

19 답 ⑤

L, N, U, E의 순서가 정해져있으므로 모두 □로 보고 나열한 후 □자리에 L, N, U, E를 순서대로 나열하면 된다.

따라서 LANGUAGE에서 □A□G□AG□를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{4!2!2!} = 420$$

05 중복조합 ~

06 이항정리와 이항계수의 성질

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 176

20 15 21 136 22 35

23 풀이 참조 24 풀이 참조

25 $k=680, n+r=20$

20 [답] 15

순서를 고려하지 않고 중복을 허용하므로
중복조합을 이용하면 구하는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

21 [답] 136

방정식 $x+y+z=15$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 에 대하여 순서쌍 (x, y, z) 은 $(15, 0, 0), (14, 1, 0), \dots$ 이다. 이때, $x=14, y=1, z=0$ 은 서로 다른 문자 x, y, z 에서 x 를 14개, y 를 1개, z 를 0개 택하는 경우로 생각할 수 있으므로 서로 다른 세 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 모두 15개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3H_{15} &= {}_{3+15-1}C_{15} = {}_{17}C_{15} = {}_{17}C_2 \\ &= \frac{17 \times 16}{2} = 136 \end{aligned}$$

22 [답] 35

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 를 만족시키는

함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는 공역 X 의 서로 다른 4개의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

23 [답] 풀이 참조

이항정리를 이용하여 다항식을 전개하자.

자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 \\ &\quad + \dots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \dots + {}_nC_n b^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad (2x+y)^5 &= {}_5C_0 (2x)^5 + {}_5C_1 (2x)^4 y + {}_5C_2 (2x)^3 y^2 \\ &\quad + {}_5C_3 (2x)^2 y^3 + {}_5C_4 (2x) y^4 + {}_5C_5 y^5 \\ &= 32x^5 + 80x^4 y \\ &\quad + 80x^3 y^2 + 40x^2 y^3 + 10xy^4 + y^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (x-y)^4 &= {}_4C_0 x^4 + {}_4C_1 x^3(-y) + {}_4C_2 x^2(-y)^2 \\ &\quad + {}_4C_3 x(-y)^3 + {}_4C_4 (-y)^4 \\ &= x^4 - 4x^3 y + 6x^2 y^2 - 4xy^3 + y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 &= {}_5C_0 x^5 + {}_5C_1 x^4 \left(\frac{1}{x}\right) \\ &\quad + {}_5C_2 x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}_5C_3 x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 \\ &\quad + {}_5C_4 x \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}_5C_5 \left(\frac{1}{x}\right)^5 \\ &= x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \end{aligned}$$

24 [답] 풀이 참조

다항식의 전개식에서 일반항을 구하자.

(1) $(x+1)^9$ 의 전개식의 일반항은

$${}_9C_r x^{9-r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, 9)$$

(2) $(2x-3y)^4$ 의 전개식의 일반항은

$$\begin{aligned} &{}_4C_r (2x)^{4-r} (-3y)^r \\ &= {}_4C_r 2^{4-r} x^{4-r} (-3)^r y^r \\ &= {}_4C_r 2^{4-r} (-3)^r x^{4-r} y^r \\ &\quad (\text{단, } r=0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

(3) $(2-x)^n$ 의 전개식의 일반항은

$$\begin{aligned} &{}_nC_r 2^{n-r} (-x)^r \\ &= {}_nC_r (-1)^r 2^{n-r} x^r \\ &\quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

25 $k=680, n+r=20$

${}_{n+1}C_r = {}_nC_{r-1} + {}_nC_r$ 를 이용하여

2개의 항끼리 간단히 묶으면

$${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{16}C_2$$

$$= ({}_3C_3 + {}_3C_2) + {}_4C_2 + \cdots + {}_{16}C_2$$

$$= ({}_4C_3 + {}_4C_2) + \cdots + {}_{16}C_2$$

$$= {}_{16}C_3 + {}_{16}C_2$$

$$= {}_{17}C_3$$

$$= \frac{17 \times 16 \times 15}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 680$$

따라서 $k=680$ 이고,

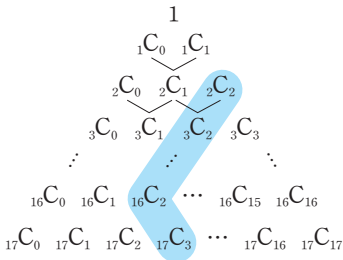
$n=17, r=3$ 이므로

$$n+r=20$$

[다른 풀이]

파스칼의 삼각형의 하키 스틱 패턴에 의하여

${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{16}C_2 = {}_{17}C_3$ 인 것을 쉽게 알 수 있다.



종합 연습 문제 정답

문제편 p. 180

26 ①

27 ③

28 36

29 810

30 ②

31 210

32 11

33 11

26 ①

6개의 사탕을 4명에게 나누어 주는 경우의 수는 중복조합의 수 ${}_4H_6$ 과 같으므로

$${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 84$$

A, B, C, D 4명에게 모두 적어도 한 개의 사탕을 나누어 주는 경우의 수는 6개의 사탕 중 A, B, C, D 4명에게 먼저 사탕을 각각 1개씩 나누어 준 후 남은 2개의 사탕을 모두 4명에게 나누어 주는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2$$

$$= \frac{5 \times 4}{2}$$

$$= 10$$

따라서 한 개도 받지 못하는 사람이 생기는 경우의 수는 $84 - 10 = 74$

27 ③

 택한 4장의 카드에 적혀 있는 수가 모두 같은 수일 수 있다.

서로 다른 3개의 카드에서 4개를 택하는 경우의 수는 3, 4, 5의 세 수에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2$$

$$= \frac{6 \times 5}{2}$$

$$= 15$$

이 중에서 합이 16 이상인 경우는 3355,

3445, 3455, 3555, 4444, 4445, 4455,

4555, 5555의 9가지이므로

구하는 경우의 수는 $15 - 9 = 6$

[다른 풀이]

합이 12인 경우는 3333으로 1가지
 합이 13인 경우는 3334로 1가지
 합이 14인 경우는 3344, 3335로 2가지
 합이 15인 경우는 3345, 3444로 2가지
 따라서 구하는 경우의 수는
 $1+1+2+2=6$

28 답 36

$(a, b, c) \longleftrightarrow \overbrace{xx \cdots x}^{a\text{개}} \overbrace{yy \cdots y}^{b\text{개}} \overbrace{zz \cdots z}^{c\text{개}}$
 즉, 순서쌍 (a, b, c) 는 x, y, z 를 중복해서
 각각 a, b, c 개를 뽑는 것과 일대일 대응이다.
 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른
 x, y, z 에서 7개를 택하는 중복조합이므로
 ${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$ (가지)

29 답 810

이항정리에 의하여 $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^5$ 의 전개식의
 일반항은

$$\begin{aligned} & {}_5C_r (2x)^{5-r} \left(-\frac{3}{x}\right)^r \\ &= {}_5C_r 2^{5-r} (-3)^r x^{5-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r \\ & 5-2r = -3, 2r = 8 \\ & \therefore r = 4 \\ & \text{따라서 } \frac{1}{x^3} \text{의 이항계수는} \\ & {}_5C_4 \times 2^{5-4} (-3)^4 = 5 \times 2 \times 81 = 810 \end{aligned}$$

30 답 2

$$\begin{aligned} & \log_2({}_{15}C_0 + {}_{19}C_2 + {}_{19}C_4 + \cdots + {}_{19}C_{18}) \text{에서} \\ & \underline{{}_{19}C_0 + {}_{19}C_2 + {}_{19}C_4 + \cdots + {}_{19}C_{18}} \\ &= 2^{19-1} = 2^{18} \text{이므로 } \rightarrow {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots = 2^{n-1} \\ & \log_2({}_{15}C_0 + {}_{19}C_2 + {}_{19}C_4 + \cdots + {}_{19}C_{18}) \\ &= \log_2 2^{18} = 18 \end{aligned}$$

31 답 210

$$\begin{aligned} & (1+x^2) + (1+x^2)^2 + \cdots + (1+x^2)^{20} \text{의 각} \\ & \text{각의 항에서 } x^2 \text{의 계수만을 뽑아보면} \\ & \quad \rightarrow (1+x^2)^n \text{의 계수의 일반항은 } {}_nC_r 1^{n-r} (x^2)^r = {}_nC_r x^{2r} \\ & \quad \quad \quad 2r=2 \quad \therefore r=1 \\ & \quad \text{따라서 } (1+x^2)^n \text{의 } x^2 \text{의 계수는 } {}_nC_1 \text{이다.} \\ & {}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_{20}C_1 \\ &= {}_{20}C_2 = \frac{20 \times 21}{2} \\ &= 210 \end{aligned}$$

32 답 11

$$\begin{aligned} & (1+x)^n \text{의 전개식에서 } x^3 \text{항은 } {}_nC_3 x^3 \text{이므로} \\ & x^3 \text{의 계수는} \\ & {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 165 \quad \rightarrow 3 \times 5 \times 11 \\ & n(n-1)(n-2) \\ &= 3 \times 5 \times 11 \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{=9} = 11 \times 10 \times 9 \\ & \text{따라서 구하는 자연수 } n \text{의 값은 11이다.} \end{aligned}$$

33 답 11

$$\begin{aligned} & {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n \\ & \text{이므로} \\ & {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - {}_nC_0 \\ & \quad \quad \quad = 2^n - 1 \\ & \text{이고, } 2000 < 2^n - 1 < 3000 \text{에서} \\ & n = 10 \text{이면} \\ & 2^{10} - 1 = 1023 \\ & n = 11 \text{이면} \\ & 2^{11} - 1 = 2047 \\ & n = 12 \text{이면} \\ & 2^{12} - 1 = 4095 \\ & \text{따라서 구하는 자연수 } n \text{의 값은 11이다.} \end{aligned}$$

II. 확률

07 확률의 뜻 ~ 09 확률의 덧셈정리

핵심 개념 문제

정답

문제편 p. 182

01 풀이 참조 02 $\frac{3}{14}$ 03 3

04 $\frac{1}{35}$ 05 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{1}{8}$

06 $\frac{\pi}{25}$ 07 $P(A \cap B)$ 08 0

09 (1) 0.6 (2) 0.1

01 답 풀이 참조

- (1) {1, 2, 3, 4, 5, 6}
 (2) {1, 3, 5}
 (3) {2, 3, 5}
 (4) {1, 2, 3, 5}
 (5) {3, 5}

02 답 $\frac{3}{14}$

$$\frac{15(\text{만 대})}{70(\text{만 대})} = \frac{3}{14}$$

분모는 자동차 총 대수이고, 분자는 A 회사의 자동차 대수이다.

03 답 3

15번에 한 번 꼴로 2개 모두 흰 공이므로 10개 중 2개를 꺼낼 때, 2개 모두 흰 공일 통계적 확률은 $\frac{1}{15}$ 이다.

10개 중에 흰 공이 x 개 들어 있다고 하면 2개를 꺼낼 때 모두 흰 공일 수학적 확률은

$$\frac{{}_x C_2}{{}_{10} C_2} \text{이다.}$$

$$\frac{{}_x C_2}{{}_{10} C_2} = \frac{x(x-1)}{10 \times 9} = \frac{1}{15},$$

$$x(x-1) = \frac{1}{15} \times 10 \times 9 = 3 \times 2$$

$$\therefore x = 3$$

04 답 $\frac{1}{35}$

8명의 학생이 원탁에 앉는 경우의 수는 $(8-1)! = 7!$

남학생 4명과 여학생 4명이 번갈아 앉으려면 남, 여, 남, 여, 남, 여, 남 순서로 앉으면 된다.

먼저 남학생을 앉히면 $(4-1)! = 3!$

남은 사이사이 4자리에 여학생을 앉히면 4!

이므로 이때의 경우의 수는 $3! \times 4!$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

05 답 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{1}{8}$

집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 원소의 개수가 4이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^4 = 16$

(1) 집합 A 의 부분집합의 원소의 개수가 2개 이려면 4개의 원소 중 서로 다른 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_4 C_2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(2) 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 1, 4를 반드시 원소로 갖고, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{4-2-1} = 2$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

06 답 $\frac{\pi}{25}$

전체 판의 넓이 : $5 \times 5 = 25$

원의 넓이 : $\pi \times 1^2 = \pi$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{\pi}{25}$$

07 답 $P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

08 0

$$P(A \cup B) = 0$$

09 (1) 0.6 (2) 0.1

$$\begin{aligned} (1) P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.4 + 0.5 - 0.3 = 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.4 + 0.5 - P(A \cap B) = 0.8 \\ \text{이므로 } P(A \cap B) &= 0.1 \end{aligned}$$

종합 연습 문제

정답

문제편 p. 188

10 (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{4}{15}$ 11 $\frac{2}{15}$

12 $\frac{1}{3}$ 13 ④ 14 ①

15 ⑤ 16 ⑤

10 (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{4}{15}$

6장의 카드가 들어있는 주머니에서 임의로
2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

- (1) 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 수의 합이
4의 배수가 되는 경우는 두 수의 합이
4, 8, 12가 될 때이다.

	2	4	4	6	6	6
2						
4	6					
4	6	8				
6	8	10	10			
6	8	10	10	12		
6	8	10	10	12	12	

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{15}$

- (2) 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 수가 서로
같은 경우 ○를 하면 다음 표와 같다.

	2	4	4	6	6	6
2						
4						
4		○				
6						
6				○		
6				○	○	

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$

11 $\frac{2}{15}$

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!2!} = 180$$

- (i) 양 끝에 P가 오는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

- (ii) 양 끝에 E가 오는 경우도 마찬가지로
12

- (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$12 \times 2 = 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{180} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

12 $\frac{1}{3}$

흰 공이 적어도 2개가 포함될 사건을 A라
하면 A^C 은 흰 공이 없거나 1개 포함될 사건
이다.

$$\begin{aligned} P(A^C) &= \frac{{}_7C_4}{{}_{10}C_4} + \frac{{}_7C_3 \times {}_3C_1}{{}_{10}C_4} \\ &= \frac{35 + 35 \times 3}{210} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^C)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

13 답 ④

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

이므로

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{42}$$

14 답 ①

1부터 30까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는

30장의 카드 중 3의 배수는 3, 6, 9, ..., 30

이므로 확률은 $\frac{10}{30}$

4의 배수는 4, 8, ..., 28이므로 확률은 $\frac{7}{30}$

3의 배수이면서 4의 배수는 12, 24이므로

확률은 $\frac{2}{30}$

따라서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{10}{30} + \frac{7}{30} - \frac{2}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

15 답 ⑤

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 으로의 함수의 개수는 $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$ 이다. 이때, 모든 함수

값의 곱이 짝수일 사건을 A 라 하면 A^c 은 모든 함수값의 곱이 홀수가 되는 사건이다.

여사건의 확률을 구하는 것이 더 간단하므로
여사건의 확률을 구하자.

정의역의 원소 1, 2, 3, 4가 공역의 홀수인

원소 1, 3, 5에 각각 대응되어야 하므로 그

경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

$$\text{즉, } P(A^c) = \frac{3^4}{6^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

16 답 ⑤

이 학급 35명의 학생 중에서 임의로 택한

1명이 남학생인 사건을 A , 언어 B 를 제2의

국어로 택하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{20}{35}, P(B) = \frac{17}{35}$$

한편, 학급 학생 35명 중 임의로 택한 1명이

남학생이면서 언어 B 를 제2외국어로 택하는

사건은 $A \cap B$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{9}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{20}{35} + \frac{17}{35} - \frac{9}{35}$$

$$= \frac{28}{35} = \frac{4}{5}$$

10 조건부확률과 확률의 곱셈정리 ~

12 독립시행의 확률

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 190

$$17 \text{ (1) } \frac{1}{2} \text{ (2) } \frac{11}{20} \text{ (3) } \frac{3}{10}$$

$$18 \frac{3}{10}, \frac{3}{5} \quad 19 \frac{3}{10}, \frac{6}{11}$$

$$20 A와 C, B와 C \quad 21 0.72$$

$$22 \neg, \perp, \sqsubset$$

$$23 \text{ (1) } \frac{1}{2} \text{ (2) } {}_5C_1 \text{ (3) } {}_5C_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$24 \text{ (1) } {}_5C_2 \text{ (2) } {}_5C_2, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}$$

$$25 \frac{781}{1024}$$

$$17 \text{ 답 (1) } \frac{1}{2} \text{ (2) } \frac{11}{20}$$

$$\text{(3) } \frac{3}{10}$$

봉사활동에 참가한 60명 중 여자는 30명, 한국인은 33명, 여자이면서 한국인인 사람은 18명이므로 여자인 사건을 A , 한국인인 사건을 B 라 하면

$$\begin{aligned}(1) P(A) &= \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \\(2) P(B) &= \frac{33}{60} = \frac{11}{20} \\(3) P(A \cap B) &= \frac{18}{60} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

18 **답** $\frac{3}{10}, \frac{3}{5}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

19 **답** $\frac{3}{10}, \frac{6}{11}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{11}{20}} = \frac{6}{11}$$

20 **답** A 와 C , B 와 C

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = 0, P(B \cap C) = \frac{1}{6},$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

(i) $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로
 A 와 B 는 종속

(ii) $P(B \cap C) = \frac{1}{6} = P(B)P(C)$ 이므로
 B 와 C 는 독립 $\hookrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 만 확인한다.

(iii) $P(A \cap C) = \frac{1}{6} = P(A)P(C)$ 이므로
 A 와 C 는 독립

21 **답** 0.72

국어가 90점이 넘는 사건과 수학이 90점이 넘는 사건은 독립이므로

$$0.8 \times 0.9 = 0.72$$

22 **답** $\neg, \neg, \neg$

두 사건 A, B 가 독립이면 두 사건 A 와 B^c , A^c 과 B , A^c 과 B^c 도 각각 서로 독립이므로 $\neg, \neg, \neg$ 모두 독립이다.

23 **답** (1) $\frac{1}{2}$ (2) ${}_5C_1$

$$(3) {}_5C_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$(1) P(A) = \frac{1}{2}$$

(2) 5회 시행 중에 사건 A 가 1번 일어나는 경우의 수는 ${}_5C_1$ 이다.

(3) 5회 시행 중에 사건 A 가 1번 일어나는 확률은 ${}_5C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$ 이다.

24 **답** (1) ${}_5C_2$ (2) ${}_5C_2, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}$

(1) 5회 시행 중에 사건 A 가 2번 일어나는 경우의 수는 ${}_5C_2$ 이다.

(2) 5회 시행 중에 사건 A 가 2번 일어나는 확률은 ${}_5C_2 \times \left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3$ 이다.

25 **답** $\frac{781}{1024}$

안타를 한 번도 치지 못하는 사건을 A 라 하면

$$P(A) = {}_5C_0 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{1024}$$

따라서 적어도 안타를 1회 이상 칠 확률은

$$1 - \frac{243}{1024} = \frac{781}{1024}$$

26 $\frac{1}{3}$

27 $\frac{9}{37}$

28 $\frac{2}{3}$

29 $\frac{379}{2187}$

30 $\frac{21}{50}$

31 ⑤

32 ②

33 $\frac{98}{125}$

26 $\frac{1}{3}$

A : 갑이 당첨제비를 뽑을 사건

B : 을이 당첨제비를 뽑지 못할 사건

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{63}{90} \\ &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{7}{30}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

27 $\frac{9}{37}$

(i) 우산을 잃어버렸을 확률 :

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{37}{64}$$

(ii) 우산을 문방구에서 잃어버렸을 확률 :

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{구하는 확률}) &= \frac{((ii) \text{의 확률})}{((i) \text{의 확률})} \\ &= \frac{\frac{9}{64}}{\frac{37}{64}} = \frac{9}{37} \end{aligned}$$

28 $\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$P(A \cap B) = 0 \text{이고,}$$

확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

이때, $P(A) = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup B) - P(A) \\ &= \frac{7}{12} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{3}$$

한편, 두 사건 A, C가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ &= \frac{1}{4}P(C) = \frac{1}{12} \\ \therefore P(C) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(B) + P(C) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

29 $\frac{379}{2187}$

(i) 승원이가 연달아 네 번을 이길 경우 :

$${}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4}$$

(ii) 네 게임 중 3번을 이기고, 마지막에 이기는 경우 :

$${}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3^5}$$

(iii) 다섯 게임 중 3번을 이기고, 마지막에 이

기는 경우 :

$${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{40}{3^6}$$

(iv) 여섯 게임 중 3번을 이기고, 마지막에 이

기는 경우 :

$${}_6C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{160}{3^7}$$

$$\therefore (\text{구하는 확률}) = \frac{1}{3^4} + \frac{8}{3^5} + \frac{40}{3^6} + \frac{160}{3^7}$$

$$= \frac{379}{2187}$$

30 답 21/50

A가 자유투를 성공하는 사건을 A, B가 자유투를 성공하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A \cap B)$ 이다.

$$P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{7}{10} \text{이고,}$$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{7}{10}$$

$$= \frac{21}{50}$$

31 답 ⑤

2 또는 3의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 나머지 눈

이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다. 주사위를 4번 던져

A지점에서 출발하여 P지점에 도달하려면 오른쪽으로 2칸, 위로 2칸을 이동하면 되므로 구하는 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

32 답 ②

4개의 문제를 임의로 답했을 때, 얻을 수 있는 점수는 다음과 같다.

맞힌 문제의 개수	0	1	2	3	4
얻은 점수	-16	-6	4	14	24

얻은 점수가 8점 이상인 경우는 3문제를 맞히는 경우와 4문제를 맞히는 경우이다.

따라서 구하는 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

33 답 98/125

신제품을 구입한 세 사람 중 적어도 한 명이 구입한 신제품에 사은품이 들어 있을 사건을 A라 하면

세 사람의 신제품에 모두 사은품이 들어 있지 않는 사건은 A^c 이다.

$$\text{즉, } P(A^c) = {}_3C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \text{이므로}$$

사은품이 들어 있을 확률이 40%이므로 사은품이 들어 있지

않을 확률은 60%, 즉 $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

여사건의 확률에 의하여 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - {}_3C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$= \frac{98}{125}$$

Ⅲ. 통계

13 이산확률변수와 확률질량함수 ~ 17 정규분포

핵심 개념 문제

정답

문제편 p. 198

01 풀이 참조 02 $\frac{23}{36}$ 03 $\frac{15}{8}$

04 풀이 참조 05 풀이 참조

06 풀이 참조 07 풀이 참조

08 풀이 참조 09 $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}$

10 2, 1, $\frac{1}{2}$ 11 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{16}$

12 (1) 0, 1 (2) 3, 2 (3) 11, 4

13 풀이 참조 14 풀이 참조

01 [답] 풀이 참조

확률변수 X 가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이고 각 값을 가질 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_4C_3 \times {}_3C_0}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_2 \times {}_3C_1}{{}_7C_3} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_1 \times {}_3C_2}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_4C_0 \times {}_3C_3}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

02 [답] $\frac{23}{36}$

(i) 두 눈의 합이 4 : (1, 3), (2, 2), (3, 1)

(ii) 두 눈의 합이 5 : (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

(iii) 두 눈의 합이 6 : (1, 5), (2, 4), (3, 3),

(4, 2), (5, 1)

(iv) 두 눈의 합이 7 : (1, 6), (2, 5), (3, 4),

(4, 3), (5, 2), (6, 1)

(v) 두 눈의 합이 8 : (2, 6), (3, 5), (4, 4),

(5, 3), (6, 2)

(i)~(v)에 의하여 구하는 확률은

$$P(4 \leq X \leq 8) = \frac{3+4+5+6+5}{36} = \frac{23}{36}$$

03 [답] $\frac{15}{8}$

확률분포의 성질에 의해 모든 확률의 합은

$$1 \text{ 이므로 } b=1, a=\frac{3}{8}$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = c \quad \therefore c = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b+c = \frac{15}{8}$$

04 [답] 풀이 참조

$V(X)$

$$= E((X-m)^2)$$

$$= \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{9 \times 1 + 1 \times 3 + 1 \times 3 + 9 \times 1}{32} = \frac{3}{4}$$

이고, 확률변수 X 의 표준편차는

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이다.}$$

05 [답] 풀이 참조

$$(1) E(2X-5) = 2 \times E(X) - 5$$

$$= 2 \times 10 - 5 = 15$$

$$(2) E(-3X+2) = -3 \times E(X) + 2$$

$$= -3 \times 10 + 2$$

$$= -28$$

06 답 풀이 참조

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(-2X-4) \\ &= (-2)^2 \times V(X) = 4 \times 6 \\ &= 24 \\ \sigma(Y) &= \sigma(-2X-4) \\ &= |-2| \times \sigma(X) = 2 \times \sqrt{6} \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

07 답 풀이 참조

1ST 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 는 0, 1, 2, 3 중에서 어느 하나의 값을 가지는 확률변수이다.

2ND 한 번의 시행에서 2 이하의 눈이 나오는 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 독립시행의 확률에 의하여 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \begin{cases} {}_3C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 & (x=0) \\ {}_3C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} & (x=1, 2) \\ {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 & (x=3) \end{cases} \end{aligned}$$

3RD 따라서 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(3, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르고, 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X)$	${}_3C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^3$	${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2$	${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)$	${}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3$	1

08 답 풀이 참조

	X	$E(X)$	$V(X)$	$\sigma(X)$
(1)	$B\left(4, \frac{1}{2}\right)$	2	1	1
(2)	$B\left(60, \frac{1}{3}\right)$	20	$\frac{40}{3}$	$\frac{2\sqrt{30}}{3}$
(3)	$B\left(180, \frac{1}{6}\right)$	30	25	5

09 답 $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}$

$P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$ 의 값은 확률밀도함수

$y = \frac{1}{5}$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

10 답 2, 1, $\frac{1}{2}$

$P(1 \leq X \leq 2)$ 의 값은 확률밀도함수

$y = \frac{1}{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$)의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

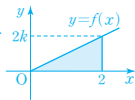
$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 2) &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이다.

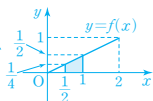
11 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{16}$

(1) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 2 \times 2k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (2) P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$



12 **답** (1) 0, 1 (2) 3, 2
(3) 11, 4

	정규분포	평균	표준편차
(1)	$N(0, 1^2)$	0	1
(2)	$N(3, 2^2)$	3	2
(3)	$N(11, 4^2)$	11	4

13 **답** 풀이 참조

평균	$E(X_1) < E(X_2) < E(X_3)$
표준편차	$\sigma(X_1) > \sigma(X_2) > \sigma(X_3)$

14 **답** 풀이 참조

평균	$E(X_1) = E(X_2) < E(X_3)$
표준편차	$\sigma(X_1) = \sigma(X_3) < \sigma(X_2)$

종합 연습 문제 **정답** 문제편 p. 208

- 15 $\frac{9}{25}$ 16 110
17 평균 : 500, 표준편차 : $5\sqrt{19}$
18 23 19 ①
20 0.8185 21 ④ 22 5

15 **답** $\frac{9}{25}$

X	0	1	2	합계
$P(X)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X) = \frac{6}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} = 1 \text{ 이므로}$$

$$V(X) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$\hookrightarrow V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

16 **답** 110

X	-20	-40	300	-80	-100	600	합계
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = \frac{1}{6}(-20 - 40 + 300 - 80 - 100 + 600) = 110$$

17 **답** 평균 : 500, 표준편차 : $5\sqrt{19}$

확률변수 X 가 이항분포 $B(10000, \frac{1}{20})$ 을 따르므로

$$E(X) = np = 10000 \times \frac{1}{20} = 500$$

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{npq} = \sqrt{10000 \times \frac{1}{20} \times \frac{19}{20}} \\ \sigma(X) &= \sqrt{475} = 5\sqrt{19} \end{aligned}$$

18 **답** 23

3개의 동전을 한 번 던졌을 때, 2개는 앞면, 1개는 뒷면이 나올 확률 p 는

$$p = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

이므로 X 는 이항분포 $B(16, \frac{3}{8})$ 을 따른다.

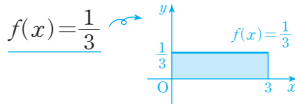
$$E(X) = np = 16 \times \frac{3}{8} = 6$$

$$\therefore E(4X - 1) = 4E(X) - 1 = 23$$

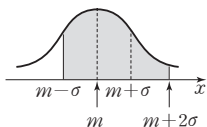
$\hookrightarrow E(aX + b) = aE(X) + b$

19 **답** ①

$x(0 \leq x \leq 3)$ 분에 지하철이 올 확률은 일정하고 확률의 전체는 1이므로 확률밀도함수



20 0.8185



확률변수 X 가 정규분포 $N(5, 4)$ 를 따르므로 $m=5, \sigma=2$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore P(3 \leq X \leq 9) &= P(5-2 \leq X \leq 5+2 \times 2) \\ &= P(m-\sigma \leq X \leq m+2\sigma) \\ &= P(m \leq X \leq m+\sigma) \\ &\quad + P(m \leq X \leq m+2\sigma) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

21 ④

이차방정식 $12x^2 - 11x + 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 로 놓으면 ($0 < \alpha < \beta$)

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{11}{12}, \alpha\beta = \frac{1}{12} \text{이므로} \\ \beta - \alpha &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{\left(\frac{11}{12}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{121}{144} - \frac{48}{144}} \\ &= \frac{\sqrt{73}}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(1 < X \leq 3) &= P(X \leq 3) - P(X \leq 1) \\ &= \beta - \alpha \\ &= \frac{\sqrt{73}}{12} \end{aligned}$$

22 5

$P(-3 \leq X \leq a)$ 의 값은 확률밀도함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$$P(-3 \leq X \leq a) = 1$$

$$P(-3 \leq X \leq a) = \frac{1}{2} \times (a+3) \times b = 1$$

$$ab + 3b = 2 \dots \textcircled{1}$$

$P\left(\frac{a}{3} \leq X \leq a\right)$ 의 값은 확률밀도함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=\frac{a}{3}$ 로

둘러싸인 부분의 넓이로 $\frac{b}{8}$ 이므로

$$P\left(\frac{a}{3} \leq X \leq a\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(a - \frac{a}{3}\right) \times \frac{2}{3}b = \frac{b}{8}$$

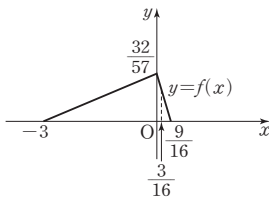
$$a - \frac{a}{3} = \frac{3}{8}, \frac{2}{3}a = \frac{3}{8} \quad \begin{array}{l} \text{↙} \\ 0 \leq x \leq a \text{에서} \\ \text{함수 } y=f(x) \text{는} \\ y = -\frac{b}{a}x + b \end{array}$$

$$\therefore a = \frac{9}{16} \quad \begin{array}{l} \text{이때, } x = \frac{a}{3} \text{이면 } y = \frac{2}{3}b \end{array}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{9}{16}b + 3b = 2 \quad \therefore b = \frac{32}{57}$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(\frac{a}{3} \leq X \leq a\right) &= \frac{b}{8} = \frac{1}{8} \times \frac{32}{57} \\ &= \frac{4}{57} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$



$$p = P\left(0 \leq X \leq \frac{a}{3}\right)$$

$$= P\left(0 \leq X \leq a\right) - P\left(\frac{a}{3} \leq X \leq a\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} \times \frac{32}{57} - \frac{4}{57} (\because \textcircled{2})$$

$$= \frac{9-4}{57} = \frac{5}{57}$$

$$\therefore 57p = 57 \times \frac{5}{57} = 5$$

18 표준정규분포 ~ 21 모평균의 추정

핵심 개념 문제 **정답**

문제편 p. 210

23 2, 1, 0, 1359

24 1.96, 0.95

25 1, 0.8413 **26** 풀이 참조

27 풀이 참조 **28** 풀이 참조

29 풀이 참조 **30** $\frac{11}{32}$

31 풀이 참조 **32** 풀이 참조

33 풀이 참조 **34** 풀이 참조

23 **답** 2, 1, 0.1359

$$\begin{aligned} P(1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359 \end{aligned}$$

24 **답** 1.96, 0.95

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 1.96) \\ &= P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1.96) \\ &= 2 \times 0.4750 = 0.95 \end{aligned}$$

25 **답** 1, 0.8413

$$\begin{aligned} P(Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.3413 = 0.8413 \end{aligned}$$

26 **답** 풀이 참조

$Z = \frac{X-3}{4}$ 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 5) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.3830 \end{aligned}$$

27 **답** 풀이 참조

	이항분포 $B(n, p)$	평균 m	표준 편차 σ	정규분포 $N(m, \sigma^2)$
(1)	$B(12, \frac{1}{3})$	4	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$N(4, \frac{2\sqrt{6}}{3}^2)$
(2)	$B(48, \frac{1}{2})$	24	$2\sqrt{3}$	$N(24, 2\sqrt{3}^2)$
(3)	$B(400, \frac{1}{2})$	200	10	$N(200, 10^2)$

28 **답** 풀이 참조

1ST 확률변수 X 가 이항분포 $B(400, \frac{1}{2})$

을 따르므로 X 의 평균 m 과 표준편차 σ 는
 $m = 400 \times \frac{1}{2} = 200$,

$$\sigma = \sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 10 \text{ 이다.}$$

2ND 400은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$ 을 따른다. 따라서 $Z = \frac{X-200}{10}$ 은 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(180 \leq X \leq 210) \\ &= P\left(\frac{180-200}{10} \leq \frac{X-200}{10} \leq \frac{210-200}{10}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4772 + 0.3413 \\ &= 0.8185 \end{aligned}$$

29 **답** 풀이 참조

(X_1, X_2, X_3)	(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 1)	(2, 1, 1)
$\bar{X}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
(X_1, X_2, X_3)	(1, 2, 2)	(2, 1, 2)	(2, 2, 1)	(2, 2, 2)
$\bar{X}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	2

30 [답] $\frac{11}{32}$

4개의 카드 중에서 1개를 꺼낼 때, 카드에 적혀 있는 숫자를 확률변수 X 라 하면

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{2}{4} = \frac{9}{4}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{2}{4} = \frac{23}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{23}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{2} = \frac{11}{32}$$

31 [답] 풀이 참조

- (1) 통계 조사에서 조사의 대상이 되는 집단 전체를 **모집단**이라 하고, 조사를 하기 위해 모집단에서 뽑은 일부분을 **표본**이라 한다.
- (2) 모집단에서 표본을 뽑는 것을 추출이라 하고, 표본을 선택할 때 모집단에서 선택한 표본의 각 대상이 표본에 포함될 확률이 모두 같도록 추출하는 방법을 **임의추출**이라 한다.
- (3) 통계 조사에서 모집단 전체를 조사하는 것을 **전수조사**라 하고, 모집단에서 뽑은 표본을 조사하는 것을 **표본조사**라 한다.

32 [답] 풀이 참조

$$100 - 2.58 \times \frac{20}{\sqrt{100}} \leq m$$

$$\leq 100 + 2.58 \times \frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$\text{이때, } 2.58 \times \frac{20}{\sqrt{100}} = 2.58 \times 2 = 5.16 \text{이므로}$$

$$100 - 5.16 \leq m \leq 100 + 5.16$$

$$\Rightarrow 94.84 \leq m \leq 105.16$$

33 [답] 풀이 참조

$$2.58 \times \frac{10}{\sqrt{400}} = 2.58 \times \frac{1}{2} = 1.29 \text{이므로}$$

$$100 - 1.29 \leq m \leq 100 + 1.29$$

$$\Rightarrow 98.71 \leq m \leq 101.29$$

34 [답] 풀이 참조

$$2.58 \times \frac{13}{\sqrt{169}} = 2.58 \times 1 = 2.58 \text{이므로}$$

$$100 - 2.58 \leq m \leq 100 + 2.58$$

$$97.42 \leq m \leq 102.58$$

종합 연습 문제 [정답]

문제편 p. 218

35 67.3 %

36 0.0668

37 0.4772

38 0.1587

39 ③

40 31.29

41 ⑤

42 10

35 [답] 67.3 %

$$P(164 \leq X \leq 174)$$

$$= P\left(\frac{164-170}{5} \leq Z \leq \frac{174-170}{5}\right)$$

$$= P\left(-\frac{6}{5} \leq Z \leq \frac{4}{5}\right) \quad \begin{array}{l} \text{↗} Z = \frac{X-170}{5} \text{으로} \\ \text{표준화한다.} \end{array}$$

$$= P(-1.2 \leq Z \leq 0.8)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.8) + P(0 \leq Z \leq 1.2)$$

$$= 0.288 + 0.385 = 0.673$$

따라서 구하는 확률은 전체의 67.3 %이다.

36 [답] 0.0668

$$P(X \geq 18)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{18-12}{4}\right) = P(Z \geq 1.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332$$

$$= 0.0668$$



37 답 0.4772

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ 을 따르

므로 정규분포 $N(30, 5^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(20 \leq X \leq 30) &\xrightarrow{\sigma} P\left(\frac{20-30}{5} \leq Z \leq \frac{30-30}{5}\right) \text{을 이용한다.} \\ &= P\left(-2 \leq Z \leq 0\right) = P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.4772\end{aligned}$$

38 답 0.1587

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{10}\right)$ 을 따

르므로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X \geq 46) &= P\left(Z \geq \frac{46-40}{6}\right) \\ &= P(Z \geq 1) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 \\ &= 0.1587\end{aligned}$$

39 답 ③

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{X}) &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{4} \\ \sqrt{n} &\geq 8 \quad \therefore n \geq 64 \quad \xrightarrow{\sigma=2} N(5, 4) = N(5, 2^2) \text{에서} \\ &\text{따라서 } n \text{의 최소값은 } 64 \text{이다.}\end{aligned}$$

40 답 31.29

모평균을 m , 표본평균을 $\bar{X}$ 라 할 때, 신뢰도 99%로 모평균 m 을 추정하면

$$\begin{aligned}\bar{X} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq m \leq \bar{X} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{이다.} \\ 30 - 2.58 \times \frac{5}{10} &\leq m \leq 30 + 2.58 \times \frac{5}{10} \\ 28.71 &\leq m \leq 31.29 \quad \xrightarrow{n=100, \bar{X}=30, \sigma=5} \text{이다.} \\ \text{따라서 } m \text{의 최댓값은 } 31.29 \text{이다.}\end{aligned}$$

41 답 ⑤

모표준편차를 σ , 표본의 크기를 n ,

일정한 신뢰도의 신뢰계수를 k 라 하면

신뢰구간의 길이는 $2 \times k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2$ 이고,

표본의 크기 $n=25$ 이므로 $k\sigma=5 \cdots \textcircled{1}$ 이다.

신뢰구간의 길이를 1로 하려면

$$2 \times k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1$$

$$\sqrt{n} = 10 (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore n = 100$$

42 답 10

모표준편차가 σ 인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\bar{x}$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

주어진 조건에서 $n=400$ 이므로 이 표본의 평균을 $\bar{x}$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\bar{x} - 0.129\sigma \leq m \leq \bar{x} + 0.129\sigma$$

따라서 $a = \bar{x} - 0.129\sigma$, $b = \bar{x} + 0.129\sigma$ 에서

$$b - a = 2 \times 0.129\sigma = 0.258\sigma \text{이므로}$$

$$0.258\sigma = 2.58, \sigma = \frac{2.58}{0.258}$$

$$\therefore \sigma = 10$$

미적분

I. 수열의 극한

01 수열의 수렴 · 발산과 극한의 성질 ~ 08 등비급수의 활용

핵심 개념 문제

정답

문제편 p. 222

01 (1) 수렴, 0 (2) 수렴, 1 (3) 발산

02 (1) 11 (2) 33 03 11

04 (1) $-\infty$ (2) 0 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\log 3$

05 (1) ∞ (2) 0 06 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$

07 ② 08 ②

09 (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 발산

(4) 수렴, 0

10 수렴, 0 11 $\frac{1}{3} < x \leq 1$

12 (1) 수렴, $\frac{3}{4}$ (2) 발산

13 (1) 2 (2) $\frac{5}{12}$ 14 ①

15 ② 16 (1) 3 (2) 11

17 (1) 수렴, 4 (2) 발산 (3) 수렴, 2

(4) 수렴, $\frac{3}{5}$

18 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 1 09 ⑤

20 (1) $\frac{23}{99}$ (2) $\frac{142}{99}$ (3) $\frac{23}{90}$

21 4π 22 $\frac{36}{5}$

01 [답] (1) 수렴, 0 (2) 수렴, 1 (3) 발산

- (1) n 이 한없이 커질 때, $\frac{1}{n}$ 의 값은 한없이 0에 가까워지므로 주어진 수열은 수렴하고 그 극한값은 0이다.

(2) n 의 값이 한없이 커질 때, $\frac{n+2}{n+1}$ 의 값은

한없이 1에 가까워지므로 주어진 수열은 수렴하고 그 극한값은 1이다.

(3) n 의 값이 한없이 커질 때, $1 - (-1)^n$ 의 값은 2, 0, 2, 0, ...이다. 즉, 주어진 수열은 진동하므로 발산한다.

02 [답] (1) 11 (2) 33

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3b_n) &= 2\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 3\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 2 \times 4 + 3 \times 1 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 1)(b_n + 2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n b_n + 6a_n - b_n - 2) \\ &= 3 \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + 6\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \\ &= 3 \times 4 \times 1 + 6 \times 4 - 1 - 2 = 33 \end{aligned}$$

03 [답] 11

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \alpha + \beta = 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \beta = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \alpha^2 + \beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \times (-1) \\ &= 11 \end{aligned}$$

미적분

04 [답] (1) $-\infty$ (2) 0 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\log 3$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-n^3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n^2}{1+\frac{1}{n}} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2-n^2) = -\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-n^3}{n+1} = -\infty$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2+2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{0+0}{1+0+0} = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+n^2}{4n^3+3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{2+0}{4+0+0} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \{\log(n^2-2n+1) - \log(3n^2-3n+1)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n^2-2n+1}{3n^2-3n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \log \frac{1-0+0}{3-0+0} = \log \frac{1}{3} = -\log 3$$

05 [답] (1) ∞ (2) 0

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \infty \times 1 = \infty$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$$

06 [답] (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \times \left(1+\frac{1}{n}\right) \left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{9n^2+1}-\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{9n^2+1}-\sqrt{n})(\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{n})}{9n^2-n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \times \left(\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

07 [답] ②

$$\frac{2n^2+1}{n^2+n} < a_n < \frac{2n^2+n+3}{n^2-n} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+n} = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n+3}{n^2-n} = 2 \text{이므로}$$

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

08 [답] ②

$$3n^2-2 \leq (9n^2-2n)a_n \leq 3n^2+2n-1 \text{의}$$

각 변을 $9n^2-2n$ 으로 나누면 자연수 n 에 대하여 $9n^2-2n > 0$ 이다.

$$\frac{3n^2-2}{9n^2-2n} \leq a_n \leq \frac{3n^2+2n-1}{9n^2-2n}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2}{9n^2-2n} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n-1}{9n^2-2n} = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$$

09 [답] (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 발산
(4) 수렴, 0

- (1) 수열 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이고 $-1 < \frac{1}{2} \leq 1$ 이므로 이 수열은 0으로 수렴한다.
- (2) 수열 $\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\right\}$ 은 공비가 $\frac{4}{3}$ 인 등비수열이고 $\frac{4}{3} > 1$ 이므로 이 수열은 발산한다.
- (3) 수열 $\{(-1.5)^n\}$ 은 공비가 -1.5 인 등비수열이고 $-1.5 < -1$ 이므로 이 수열은 발산(진동)한다.
- (4) 수열 $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ 은 공비가 $-\frac{2}{3}$ 인 등비수열이고 $-1 < -\frac{2}{3} \leq 1$ 이므로 이 수열은 0으로 수렴한다.

10 [답] 수렴, 0

분모, 분자를 각각 3^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{3^n}} = \frac{2 \times 0}{1 + 0} = 0$$

11 [답] $\frac{1}{3} < x \leq 1$

수열 $\{(3x-2)^n\}$ 은 공비가 $3x-2$ 인 등비수열이므로 이 수열이 수렴하려면 수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하려면 $-1 < 3x-2 \leq 1$ 에서 $-1 < r \leq 1$

$1 < 3x \leq 3$

$\therefore \frac{1}{3} < x \leq 1$

12 [답] (1) 수렴, $\frac{3}{4}$ (2) 발산

- (1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 에서 첫째항부터

제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \xrightarrow{\text{분모를 유리화한다.}} \frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고 그 합은 $\frac{3}{4}$ 이다.

- (2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 에서 첫째항부터

제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

13 (1) 2 (2) $\frac{5}{12}$

(1) 주어진 급수의 일반항은

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\xrightarrow{\text{1+2+3+\cdots+n}} \frac{1}{\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

이고 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2$

따라서 주어진 급수의 합은 2이다.

(2) 주어진 급수의 일반항은

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right)$$

이고 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{5}{12}$$

따라서 주어진 급수의 합은 $\frac{5}{12}$ 이다.

14 ①

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n \text{ 이므로}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n 2k = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

15 ②

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0 \text{ 이므로}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$ 은 발산한다.

$$\neg. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 은

수렴한다.

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2 \neq 0 \text{ 이므로 급수}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} \text{은 발산한다.}$$

16 **답** (1) 3 (2) 11

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\
 &= 2 \times 3 + 3 \times (-1) = 3 \\
 (2) \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\
 &= 3 \times 3 - 2 \times (-1) \\
 &= 11
 \end{aligned}$$

17 **답** (1) 수렴, 4 (2) 발산 (3) 수렴, 2

(4) 수렴, $\frac{3}{5}$

(1) 급수 $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots$ 의 공비
 는 $\frac{3}{4}$ 이고 $-1 < \frac{3}{4} < 1$ 이므로 이 등비급
 수는 수렴하고 그 합은 $\frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4$ 이다.

(2) 급수 $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \dots$ 의 공비는
 $-\frac{3}{2}$ 이고 $-\frac{3}{2} < -1$ 이므로 이 등비급수
 는 발산한다.

(3) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 의 공비는 $\frac{1}{2}$ 이고
 $-1 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 이 등비급수는 수렴
 한다. 이때, 이 등비급수의 첫째항이 1이
 므로 그 합은 $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ 이다.

(4) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 의 공비는 $-\frac{2}{3}$ 이고
 $-1 < -\frac{2}{3} < 1$ 이므로 이 등비급수는 수
 령한다. 이때, 이 등비급수의 첫째항이 1
 이므로 그 합은 $\frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}$ 이다.

18 **답** (1) $\frac{3}{2}$ (2) 1

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
 &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \\
 (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{9}{4}\right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{9}{4}\right)^n \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \left(\frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow a^n b^n = (ab)^n\right) \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 1
 \end{aligned}$$

19 **답** ⑤

(i) 등비수열 $\{(2x-1)^n\}$ 의 공비는 $2x-1$
 이므로 이 수열이 수렴하기 위한 실수
 x 의 값의 범위는 $-1 < 2x-1 \leq 1$ 에서
 $0 < 2x \leq 2$
 $\therefore 0 < x \leq 1 \dots \textcircled{7}$

(ii) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (5x-5)^n$ 의 공비는 $5x-5$
 이므로 이 급수가 수렴하기 위한 실수
 x 의 값의 범위는 $-1 < 5x-5 < 1$ 에서
 $4 < 5x < 6$
 $\therefore \frac{4}{5} < x < \frac{6}{5} \dots \textcircled{8}$

따라서 등비수열 $\{(2x-1)^n\}$ 과 등비급수
 $\sum_{n=1}^{\infty} (5x-5)^n$ 이 모두 수렴하기 위한 실수
 x 의 값의 범위는 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에 의하여 $\frac{4}{5} < x \leq 1$
 이다.

20 **답** (1) $\frac{23}{99}$ (2) $\frac{142}{99}$ (3) $\frac{23}{90}$

(1) $0.\dot{2}\dot{3} = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \dots$
 $= \frac{0.23}{1 - 0.01} = \frac{0.23}{0.99} = \frac{23}{99}$

(2) $1.\dot{4}\dot{3}$

$$= 1 + (0.43 + 0.0043 + 0.000043 + \cdots)$$

$$= 1 + \frac{0.43}{1-0.01} = 1 + \frac{0.43}{0.99} = \frac{142}{99}$$

(3) $0.2\dot{5}$

$$= 0.2 + (0.05 + 0.005 + 0.0005 + \cdots)$$

$$= 0.2 + \frac{0.05}{1-0.1} = 0.2 + \frac{0.05}{0.9} = \frac{23}{90}$$

21 4π

원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면

$$r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = \frac{1}{4}, \dots$$

이때, 원 C_n 의 둘레의 길이가 l_n 이므로

$$l_1 = 2\pi r_1 = 2\pi \times 1 = 2\pi$$

$$l_2 = 2\pi r_2 = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi$$

$$l_3 = 2\pi r_3 = 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\pi$$

⋮

따라서 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 2π 이고 공비가

$\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 $l_n = 2\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\pi \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 4\pi$$

22 $\frac{36}{5}$

$$\overline{A_1B} = \frac{2}{3} \times \overline{AB} = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \text{이므로}$$

$$S_1 = \overline{A_1B}^2 = 4$$

$$\overline{A_2B} = \frac{2}{3} \times \overline{A_1B} = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$S_2 = \overline{A_2B}^2 = \frac{16}{9}$$

$$\overline{A_3B} = \frac{2}{3} \times \overline{A_2B} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9} \text{이므로}$$

$$S_3 = \overline{A_3B}^2 = \frac{64}{81}$$

⋮

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공비가

$\frac{4}{9}$ 인 등비수열이므로 $S_n = 4 \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = 4 \times \frac{1}{1-\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{36}{5}$$

종합 연습 문제

문제편 p. 238

23 ② 24 $-\frac{5}{6}$ 25 1

26 ③ 27 -1 28 3

29 $\frac{7}{4}$ 30 ②

23 ②

① $\left\{\frac{3n+1}{n^2}\right\}: 4, \frac{7}{4}, \frac{10}{9}, \frac{13}{16}, \frac{16}{25}, \frac{19}{36},$

$$\frac{22}{49}, \dots \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n^2} = 0$$

따라서 수열 $\left\{\frac{3n+1}{n^2}\right\}$ 은 0으로 수렴한다.

② $\{5-3n\}: 2, -1, -4, -7, -10, -13,$
 $\dots \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (5-3n) = -\infty$

따라서 수열 $\{5-3n\}$ 은 발산한다.

③ $\left\{\frac{1}{3n-2}\right\}: 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}, \dots$

$$\text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-2} = 0$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{3n-2}\right\}$ 은 0으로 수렴한다.

④ $\left\{2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}: \frac{5}{3}, \frac{19}{9}, \frac{53}{27}, \frac{163}{81},$

$$\frac{485}{243}, \dots \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 2$$

따라서 수열 $\left\{2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ 은 2로 수렴한다.

$$\textcircled{5} \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}: -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \textcircled{\text{이므로}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

따라서 수열 $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ 은 0으로 수렴한다.

24 **답** $-\frac{5}{6}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3b_n}{a_n b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3b_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n} \\ &= \frac{2\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 3\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{2 \times (-2) + 3 \times 3}{-2 \times 3} \\ &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

25 **답** 1

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n}{n^2 + 2n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{4 + 0}{1 + 0 - 0} = 4 \\ b &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n} - 2n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + n} - 2n)(\sqrt{4n^2 + n} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 + 0} + 2} = \frac{1}{4} \\ \therefore ab &= 4 \times \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

26 **답** ③

$\sqrt{9n^2 - n} < (n+1)a_n < \sqrt{9n^2 + 2n}$ 의 각 변을 $n+1$ 로 나누면 $\frac{n+1 > 0}{\text{모든 자연수 } n \text{에 대하여}}$

$$\frac{\sqrt{9n^2 - n}}{n+1} < a_n < \frac{\sqrt{9n^2 + 2n}}{n+1}$$

$$\textcircled{\text{이때}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 2n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{2}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = 3 \textcircled{\text{이므로}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

27 **답** -1

(i) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 2}{r^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{r^n}}{1 + \frac{2}{r^n}} = 1$$

(ii) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 2}{r^n + 2} = -1$$

(iii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 2}{r^n + 2} = -\frac{1}{3}$$

(iv) $r = -1$ 일 때, 수열 $\{r^n\}$ 은 진동하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 2}{r^n + 2} \text{는 발산한다.}$$

(i)~(iv)에 의하여 $r = -1$ 일 때, 주어진 수열은 발산한다.

28 **답** 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2) = 1 \textcircled{\text{이므로}} \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2) = 0$$

이때, $b_n = 3a_n - 2$ 라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이고

$$a_n = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3} \textcircled{\text{이므로}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 4}{6a_n - 2} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 4)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (6a_n - 2)} \\
 &= \frac{3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 4}{6 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 2} \\
 &= \frac{3 \times \frac{2}{3} + 4}{6 \times \frac{2}{3} - 2} = 3
 \end{aligned}$$

29 7/4

$$\begin{aligned}
 a &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^n + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \\
 &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{-\frac{1}{3}}{1 - (-\frac{1}{3})} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \sum_{n=1}^{\infty} (11 \times 100^{-n} - 10^{-n}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 11 \times \left(\frac{1}{100} \right)^n - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right\} \\
 &= 11 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n \\
 &= 11 \times \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} - \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\
 &= \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore a + b = \frac{7}{4} + 0 = \frac{7}{4}$$

30 2

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 $\overline{A_1B_1} = a$ 이고,
점 A_2 가 선분 A_1B_1 을 1 : 3으로 내분하는
점이므로

$$\overline{A_1A_2} = \frac{1}{4} \times \overline{A_1B_1} = \frac{1}{4}a$$

또, 점 D_2 가 선분 D_1A_1 을 1 : 3으로 내분하
는 점이므로

$$\overline{A_1D_2} = \frac{3}{4} \times \overline{D_1A_1} = \frac{3}{4}a$$

직각삼각형 $A_1A_2D_2$ 에서 피타고라스 정리
에 의하여

$$\begin{aligned}
 \overline{A_2D_2} &= \sqrt{\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1D_2}^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + \frac{9}{16}a^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a
 \end{aligned}$$

이므로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이는
 $\frac{\sqrt{10}}{4}a$ 이다.

따라서 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$
의 대응변의 비가 $a : \frac{\sqrt{10}}{4}a = 1 : \frac{\sqrt{10}}{4}$ 이므로

넓이의 비는

$$1^2 : \left(\frac{\sqrt{10}}{4} \right)^2 = 1 : \frac{5}{8} \text{이다.}$$

 대응변의 비가 $a : b$ 인 두 도형의 넓이의
비는 $a^2 : b^2$ 이다.

즉, 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $S_1 = a^2$ 이고 공비
가 $\frac{5}{8}$ 인 등비수열이므로

$$S_n = a^2 \times \left(\frac{5}{8} \right)^{n-1}$$

이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{32}{3}$ 이므로

$$a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{8} \right)^{n-1} = \frac{32}{3} \text{에서}$$

$$a^2 \times \frac{1}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{32}{3} \cdot \frac{8}{3} a^2 = \frac{32}{3}, a^2 = 4$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$

II. 미분법

09 지수함수와 로그함수의 극한 ~

14 삼각함수의 미분법

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 240

- 01 (1) 수렴, 1 (2) 발산 (3) 수렴, 1
(4) 발산

- 02 ② 03 ②

- 04 (1) e^3 (2) $\frac{1}{e}$ (3) $e^{\frac{2}{3}}$ (4) $\frac{1}{e}$

- 05 (1) 4 (2) $\frac{1}{2}$ (3) -3 (4) $\ln 6$

- 06 (1) 2 (2) $\frac{3}{\ln 2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{2} \ln 3$

- 07 (1) $y' = 4^x \ln 4 + e^x$

- (2) $y' = xe^x(2+x)$

- (3) $y' = 2x + \frac{1}{x}$

- (4) $y' = 2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3}$

- 08 ④ 09 ⑤ 10 ③

- 11 (1) $\frac{63}{65}$ (2) $-\frac{16}{65}$ (3) $-\frac{63}{16}$

- 12 (1) $-\frac{39\sqrt{3}}{98}$ (2) $\frac{74}{98}$ (3) $-\frac{39\sqrt{3}}{71}$

- 13 (1) 0 (2) 0 (3) $-\sqrt{3}$

- 14 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\sqrt{2}$ 15 (1) 3 (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$

- 16 (1) $y' = \sin x(2\cos x - 3)$

- (2) $y' = e^x(\sin x + \cos x)$

- 17 ② 18 ②

- 01 [답] (1) 수렴, 1 (2) 발산 (3) 수렴, 1
(4) 발산

- (1) 분모, 분자를 2^x 으로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

따라서 주어진 극한은 수렴하고 극한값은 1이다.

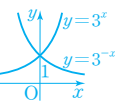
$$(2) \lim_{x \rightarrow 0+} (3^x + 3^{-x}) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (3^x - 3^{-x}) = 1 - 1 = 0$$

이때, $x > 0$ 에서 $3^x > 3^{-x}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = \infty \text{이다.}$$

즉, 주어진 극한은 발산한다.



$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} [\log_2(2x+1) - \log_2 x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{2x+1}{x} = \log_2 2 = 1$$

따라서 주어진 극한은 수렴하고 극한값은 1이다.

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1+} (x+3) = 4, \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2 x = 0$$

이때, $x > 1$ 에서 $\log_2 x > 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x+3}{\log_2 x} = \infty \text{이다.}$$

즉, 주어진 극한은 발산한다.

02 [답] ②

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 3^{x+1}}{3^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x} = \frac{0-3}{1+0}$$

분모, 분자를 각각 3^x으로 나눈다. = -3

03 [답] ②

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2(8x^2 - 9x + 10) - \log_2(4x^2 + 5x - 6)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{8x^2 - 9x + 10}{4x^2 + 5x - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{8 - \frac{9}{x} + \frac{10}{x^2}}{4 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}}$$

$$= \log_2 \frac{8-0+0}{4+0-0} = \log_2 2 = 1$$

미적분

04 (1) e^3 (2) $\frac{1}{e}$ (3) $e^{\frac{2}{3}}$ (4) $\frac{1}{e}$

(1) $3x=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이고

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{t} \circ \text{므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{3}{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^3 = e^3$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^{-1} \\ = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(3) $\frac{1}{3x} = t$ 라 하면 $x \rightarrow \infty$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이고

$$x = \frac{1}{3t} \circ \text{므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{2}{3t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

(4) $-\frac{1}{x} = t$ 라 하면 $x \rightarrow \infty$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이고

$$x = -\frac{1}{t} \circ \text{므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{-1}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

05 (1) 4 (2) $\frac{1}{2}$ (3) -3 (4) $\ln 6$

$$(1) \ln e^4 = 4 \ln e = 4$$

$$(2) \ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

$$(3) \ln \frac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3 \ln e = -3$$

$$(4) \frac{1}{\log_2 e} + \frac{1}{\log_3 e} = \frac{1}{\frac{\ln e}{\ln 2}} + \frac{1}{\frac{\ln e}{\ln 3}} \\ \xrightarrow{\log_a b = \frac{\log_a b}{\log_a a}} = \ln 2 + \ln 3$$

$$\xrightarrow{\log_a b + \log_a c = \log_a bc} = \ln (2 \times 3) = \ln 6$$

06 (1) 2 (2) $\frac{3}{\ln 2}$ (3) $\frac{2}{3}$

$$(4) \frac{1}{2} \ln 3$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times 2 \\ = 1 \times 2 = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+3x)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+3x)}{3x} \times 3 \\ = \frac{1}{\ln 2} \times 3 = \frac{3}{\ln 2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{2}{3} \\ = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \times \frac{1}{2} \\ = \ln 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln 3$$

07 (1) $y' = 4^x \ln 4 + e^x$

$$(2) y' = x e^x (2+x)$$

$$(3) y' = 2x + \frac{1}{x}$$

$$(4) y' = 2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3}$$

$$(1) y = 2^{2x} + e^x = 4^x + e^x \text{에서}$$

$$y' = 4^x \ln 4 + e^x \quad \xrightarrow{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

$$(2) y = x^2 e^x \text{에서 곱의 미분법에 의하여}$$

$$y' = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (2+x)$$

$$(3) y = x^2 + \ln 3x = x^2 + \ln x + \ln 3 \text{에서}$$

$$y' = 2x + \frac{1}{x}$$

$$(4) y = x^2 \log_3 x \text{에서 곱의 미분법에 의하여}$$

$$y' = 2x \log_3 x + x^2 \times \frac{1}{x \ln 3}$$

$$= 2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3}$$

08 답 ④

$y=3x+e^x$ 에서 $y'=3+e^x \dots \ominus$ 이므로

곡선 $y=3x+e^x$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의

접선의 기울기는 $\ominus$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$\rightarrow$ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의
접선의 기울기는 $f'(a)$

$$y'=3+e^0=3+1=4$$

09 답 ⑤

$y=3x+2\ln x$ 에서 $y'=3+\frac{2}{x} \dots \ominus$ 이므로

곡선 $y=3x+2\ln x$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의

접선의 기울기는 $\ominus$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$y'=3+\frac{2}{1}=5$$

10 답 ③

$$\begin{aligned} \tan \theta + \cot \theta &= \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \quad \left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \end{aligned}$$

11 답 ① $\frac{63}{65}$ ② $-\frac{16}{65}$ ③ $-\frac{63}{16}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \beta > 0$ 이므로

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4},$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{63}{65}$$

$$(2) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{12}{13}$$

$$= -\frac{16}{65}$$

$$(3) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{12}{5}}$$

$$= -\frac{63}{16}$$

[다른 풀이]

$$(3) (1), (2)에 의하여 \sin(\alpha + \beta) = \frac{63}{65},$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{16}{65} \text{ 이므로}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\frac{63}{65}}{-\frac{16}{65}} = -\frac{63}{16}$$

12 답 ① $-\frac{39\sqrt{3}}{98}$ ② $\frac{71}{98}$ ③ $-\frac{39\sqrt{3}}{71}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \beta > 0$ 이므로

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{121}{196}} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{12},$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{11}{14}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = \frac{11\sqrt{3}}{15}$$

$$(1) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{1}{7} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} - \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{11}{14}$$

$$= -\frac{39\sqrt{3}}{98}$$

$$(2) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} + \frac{1}{7} \times \frac{11}{14}$$

$$= \frac{71}{98}$$

$$(3) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{11\sqrt{3}}{15}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{11\sqrt{3}}{15}}$$

$$= -\frac{39\sqrt{3}}{71}$$

[다른 풀이]

(3) (1), (2)에 의하여

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{-\frac{39\sqrt{3}}{98}}{\frac{71}{98}}$$

$$= -\frac{39\sqrt{3}}{71}$$

$$13 \quad \text{답} (1) 0 \quad (2) 0 \quad (3) -\sqrt{3}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 2x = \sin \left(2 \times \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \sin \pi = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos 3x = \cos \left(3 \times \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \tan 2x = \tan \left(2 \times \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \tan \frac{2}{3}\pi$$

$$= -\sqrt{3}$$

$$14 \quad \text{답} (1) \frac{1}{2} \quad (2) \sqrt{2}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \xrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{에서}} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos x - \sin x} \xrightarrow{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x (\cos x - \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$$

$$15 \quad \text{답} (1) 3 \quad (2) \frac{2}{3} \quad (3) \frac{1}{2}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \times 3 \right)$$

$$= 1 \times 3 = 3$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 2x}{2x} \times 2}{\frac{\sin 3x}{3x} \times 3}$$

$$= \frac{1 \times 2}{1 \times 3} = \frac{2}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x + \tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{1 + \frac{\tan 3x}{x}}$$

분모, 분자를 각각 x로 나눈다.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2}{1 + \frac{\tan 3x}{3x} \times 3}$$

$$= \frac{1 \times 2}{1 + 1 \times 3} = \frac{1}{2}$$

16 **답** (1) $y' = \sin x(2\cos x - 3)$
(2) $y' = e^x(\sin x + \cos x)$

$$\begin{aligned} (1) y &= \sin^2 x + 3\cos x \\ &= \sin x \times \sin x + 3\cos x \\ \text{이므로 곱의 미분법을 이용하면} \\ y' &= \cos x \sin x + \sin x \cos x - 3\sin x \\ &= 2\sin x \cos x - 3\sin x \\ &= \sin x(2\cos x - 3) \\ (2) y &= e^x \sin x \text{에서 곱의 미분법을 이용하면} \\ y' &= e^x \sin x + e^x \cos x = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= e^x(\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

17 **답** ②

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \sin x + \cos x \text{에서} \\ f'(x) &= 2x \sin x + x^2 \cos x - \sin x \text{이므로} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 \times \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \pi - 1 \end{aligned}$$

18 **답** ②

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-2h} \times (-2) \right\} \\ &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times (-2) = -2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \dots \text{㉠} \\ \text{이때, } f(x) &= x^2 \cos x \text{에서} \\ f'(x) &= 2x \cos x - x^2 \sin x \text{이므로} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 \times \frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times \sin \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi^2}{4} \\ \text{따라서 ㉠에 의하여 구하는 극한값은} \\ -2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2 \times \left(-\frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 252

19 ③	20 ⑤	21 2
22 ①	23 40	24 ③
25 ④	26 ①	

19 **답** ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{2x-1} + 4^x}{3^{2x} + 4^{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9^x \times \frac{1}{3} + 4^x}{9^x + 4^{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^x}{1 + \left(\frac{4}{9}\right)^x \times 4} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

20 **답** ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - e^{x-1}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 - (e^{x-1} - 1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 2 \end{aligned}$$

21 **답** 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - e^x}{\ln(1 + bx)} &= -1 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때,} \\ (\text{분모}) \rightarrow 0 \text{이므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이어야 한다.} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (a - e^x) &= 0 \text{에서 } a - 1 = 0 \\ \text{즉, } a &= 1 \text{이고 이것을 주어진 식에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\ln(1 + bx)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^x - 1}{\frac{x}{bx}} \times \frac{1}{\ln(1 + bx)^{\frac{1}{x}}} \right\} \\ &= -1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + bx)^{\frac{1}{bx} \times b}} \\ &= -\frac{1}{b} = -1 \quad \therefore b = 1 \\ \therefore a + b &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

22 답 ①

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로
 $f(0)=\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 가 성립해야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore a &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x}-1}{3x(e^x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{6x}-1}{6x} \times \frac{2}{e^x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x}-1}{6x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x+1} \\ &= 1 \times \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

23 답 40

주어진 함수

$$f(x) = \begin{cases} ae^{3x} + b & (x < 0) \\ \ln(60x+1) & (x \geq 0) \end{cases} \text{ 이 } x=0 \text{ 이}$$

외의 점에서는 항상 미분가능하므로 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$ 에서 미분가능해야 한다.

① (i) $x=0$ 에서 연속
 (ii) $x=0$ 에서 좌미분계수 = 우미분계수

(i) $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \text{가 성립}$$

해야 한다.

$$f(0) = 0 \text{ 이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln(60x+1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (ae^{3x} + b) = a + b$$

$$\text{이므로 } a + b = 0 \dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=0$ 에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 한다.

이때, $f(x)$ 의 $x=0$ 에서의 좌미분계수는

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{ae^{3x} + b - a - b}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{a(e^{3x} - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \left\{ \frac{a(e^{3x} - 1)}{3x} \times 3 \right\} = 3a$$

또, $f(x)$ 의 $x=0$ 에서의 우미분계수는

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(60x+1) - \ln 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\ln(60x+1)}{60x} \times 60 \right\} = 60 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 3a = 60 \text{에서 } a = 20 \dots \textcircled{2}$$

따라서 ①, ②에 의하여 $a = 20$, $b = -20$

이므로

$$a - b = 20 - (-20) = 40$$

24 답 ③

두 직선 $y = -3x + 7$, $y = 2x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1 , θ_2 라 하면

$$\tan \theta_1 = -3, \tan \theta_2 = 2$$

또, 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \tan \theta &= | \tan(\theta_1 - \theta_2) | \\ &= \left| \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \right| \\ &= \left| \frac{-3 - 2}{1 + (-3) \times 2} \right| = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

25 답 ④

$$x - \frac{\pi}{2} = t \text{라 하면 } x = \frac{\pi}{2} + t \text{이고}$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2x - \pi)^2}{2(1 - \sin x)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^2}{2(1 - \cos t)} \quad \left(\begin{array}{l} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \\ = \cos t \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1 + \cos t)}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sin^2 t} \times \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \cos t)$$

$$= 2 \times 1^2 \times (1 + 1) = 4$$

26 답 ①

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} - 2h\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} - 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f\left(\frac{\pi}{4} - 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{-2h} \times (-2) \right\} \\ &= -2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉠ 때, } f(x) &= \sin^2 x - \cos^2 x \\ &= \sin x \sin x - \cos x \cos x \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \sin x + \sin x \cos x \\ &\quad + \sin x \cos x + \cos x \sin x \\ &= 4 \sin x \cos x \end{aligned}$$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에 의하여

$$\begin{aligned} -2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= (-2) \times 4 \times \sin \frac{\pi}{4} \times \cos \frac{\pi}{4} \\ &= (-2) \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -4 \end{aligned}$$

15 함수의 몫의 미분법 ~

19 이계도함수

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 254

미적분

27 (1) $y' = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}$

(2) $y' = \frac{-2x^2+6x-3}{x^4}$

(3) $y' = \sec^2 x + 2\csc^2 x$

28 ⑤ 29 ①

30 (1) $y' = 3(2x^3+x-5)^2(6x^2+1)$

(2) $y' = 2\sin(-2x+1)$

(3) $y' = -\frac{3}{x^4}$ (4) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$

31 ② 32 1

33 (1) $-t$ (2) $\frac{t^2-1}{3t^2}$ 34 ②

35 (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (단, $y \neq 0$)

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{1-x}$ (단, $x \neq 1$)

(3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4e^x+3y}{3x}$ (단, $x \neq 0$)

(4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{y}$ (단, $y \neq 0$)

36 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2}$ (단, $y \neq 0$)

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y+2}$

37 ②

38 (1) $y'' = 2\sin^2 x - 2\cos^2 x$

(2) $y'' = 2e^x \cos x$

39 ①

27 답 (1) $y' = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}$

(2) $y' = \frac{-2x^2+6x-3}{x^4}$

(3) $y' = \sec^2 x + 2\csc^2 x$

(1) $y = \frac{1}{x^2-2}$ 에서 $y' = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}$

$$(2) y = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x^3} \text{에서}$$

$$y' = \frac{(3x^2 + 4x - 3) \times x^3 - (x^3 + 2x^2 - 3x + 1) \times 3x^2}{x^6}$$

$$\quad \quad \quad \hookrightarrow \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 6x - 3}{x^4}$$

$$(3) y = \tan x - 2\cot x \text{에서}$$

$$y' = \sec^2 x + 2\csc^2 x$$

[다른 풀이]

$$(2) y = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x^3}$$

$$= 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$= 1 + 2x^{-1} - 3x^{-2} + x^{-3} \text{에서}$$

$$y' = -2x^{-2} + 6x^{-3} - 3x^{-4}$$

$$= \frac{-2x^2 + 6x - 3}{x^4}$$

28 [답] ⑤

$$f(x) = x^2 \tan x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x \tan x + x^2 \sec^2 x \text{ 이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\pi}{3} \times \tan \frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sec^2 \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{4}{9}\pi^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

29 [답] ①

$$f(x) = \frac{2x+3}{3x+1} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{2 \times (3x+1) - (2x+3) \times 3}{(3x+1)^2}$$

$$= -\frac{7}{(3x+1)^2}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의
접선의 기울기는 $f'(2) = -\frac{7}{7^2} = -\frac{1}{7}$ 이다.

30 [답] (1) $y' = 3(2x^3 + x - 5)^2(6x^2 + 1)$

$$(2) y' = 2\sin(-2x+1)$$

$$(3) y' = -\frac{3}{x^4}$$

$$(4) y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$$

$$(1) y = (2x^3 + x - 5)^3 \text{에서}$$

$$y' = 3(2x^3 + x - 5)^2(6x^2 + 1)$$

$$(2) y = \cos(-2x+1) \text{에서}$$

$$y' = -\sin(-2x+1) \times (-2)$$

$$= 2\sin(-2x+1)$$

$$(3) y = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \text{에서}$$

$$y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$(4) y = \sqrt{x^2-2} = (x^2-2)^{\frac{1}{2}} \text{에서}$$

$$y' = \frac{1}{2}(x^2-2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}$$

31 [답] ②

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} - x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x - 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수는 $f'(0) = -1$

32 [답] 1 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 를

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$$

↖ 이용할 수 있도록 식을 변형

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3) + f(3) - f(3-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$\quad \quad \quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} \times (-1)$$

$$= f'(3) + f'(3) = 2f'(3) \cdots \textcircled{1}$$

이때, $f(x) = \sqrt{x-2}$ 에서 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$$\quad \quad \quad \hookrightarrow = (x-2)^{-\frac{1}{2}}$$

따라서 구하는 극한값은 ㉠에 의하여

$$2f'(3) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3-2}} = 1$$

33 [답] (1) $-t$ (2) $\frac{t^2-1}{3t^2}$

(1) $x=2t+1, y=-t^2+1$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = -2t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2t}{2} = -t$$

(2) $x=3t, y=t+\frac{1}{t}$ 에서

$$\frac{1}{t} \rightarrow \left(\frac{1}{t}\right)' = (t^{-1})' = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3, \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{3} = \frac{t^2-1}{3t^2}$$

34 [답] ㉡

$x=t^3-2t, y=3t^3+6t^2$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2-2, \frac{dy}{dt} = 9t^2+12t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{9t^2+12t}{3t^2-2} \dots \textcircled{1}$$

따라서 주어진 함수의 $t=1$ 에서의 미분계수

는 ㉠에 $t=1$ 을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9 \times 1^2 + 12 \times 1}{3 \times 1^2 - 2} = 21$$

35 [답] (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (단, $y \neq 0$)

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{1-x} \text{ (단, } x \neq 1)$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = -\frac{4e^x+3y}{3x} \text{ (단, } x \neq 0)$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{y} \text{ (단, } y \neq 0)$$

(1) $x^2+y^2-2=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분

$$\text{하면 } 2x+2y\frac{dy}{dx}=0, 2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ (단, } y \neq 0)$$

(2) $xy+2x-y=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미

$$\text{분하면 } y+x\frac{dy}{dx}+2-\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x-1)\frac{dy}{dx} = -(y+2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{1-x} \text{ (단, } x \neq 1)$$

(3) $4e^x+3xy=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분

$$\text{하면 } 4e^x+3y+3x\frac{dy}{dx}=0$$

$$3x\frac{dy}{dx} = -4e^x-3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{4e^x+3y}{3x} \text{ (단, } x \neq 0)$$

(4) $2\sin x+y^2=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미

$$\text{분하면 } 2\cos x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2\cos x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{y} \text{ (단, } y \neq 0)$$

36 [답] (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2}$ (단, $y \neq 0$)

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y+2}$$

(1) $x=y^3$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2} \text{ (단, } y \neq 0)$$

(2) $x=e^y+2y$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = e^y+2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y+2}$$

37 답 ②

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = a \text{라 하면 } \cos a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

한편, $f'(x) = -\sin x$ 에서

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

38 답 (1) $y'' = 2\sin^2 x - 2\cos^2 x$

$$(2) y'' = 2e^x \cos x$$

(1) $y = \cos^2 x$ 에서

$$\begin{aligned} y' &= 2\cos x \times (-\sin x) \\ &= -2\sin x \cos x \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -2\cos x \times \cos x \\ &\quad - 2\sin x \times (-\sin x) \\ &= 2\sin^2 x - 2\cos^2 x \end{aligned}$$

(2) $y = e^x \sin x$ 에서

$$\begin{aligned} y' &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ &= e^x (\sin x + \cos x) \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= e^x (\sin x + \cos x) \\ &\quad + e^x (\cos x - \sin x) \\ &= 2e^x \cos x \end{aligned}$$

39 답 ①

$$f(x) = 2xe^{ax-b} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{ax-b} + 2x \times e^{ax-b} \times a \\ &= 2(ax+1)e^{ax-b} \text{이므로} \end{aligned}$$

$$f'(0) = 2e^{-b} = 2e^2 \quad \therefore b = -2$$

$$\text{즉, } f'(x) = 2(ax+1)e^{ax+2} \text{이고}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2ae^{ax+2} + 2(ax+1)e^{ax+2} \times a \\ &= 2a(ax+2)e^{ax+2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f''(0) = 4ae^2 = 4e^2 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore ab = -2$$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 264

40 ②

41 20

42 ⑤

43 ②

44 ②

45 ⑤

46 ③

47 ③

40 답 ②

$$f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \dots \text{㉠}$$

$$\text{한편, } f(x) = \frac{x^2-1}{e^x} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2xe^x - (x^2-1)e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{-x^2 + 2x + 1}{e^x} \end{aligned}$$

따라서 구하는 극한값은 ㉠에 의하여

$$f'(1) = \frac{-1 + 2 + 1}{e} = \frac{2}{e}$$

41 답 20

$$f(x) = 10e^{\tan x - 1} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10e^{\tan x - 1} \times (\tan x - 1)' \\ &= 10e^{\tan x - 1} \times \sec^2 x \\ &= 10e^{\tan x - 1} \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{10e^{\tan x - 1}}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{10e^{\tan \frac{\pi}{4} - 1}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{10e^{1-1}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 20$$

42 답 ⑤

$$f(x) = -\ln(2\cos x) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(2\cos x)'}{2\cos x} = -\frac{-2\sin x}{2\cos x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \end{aligned}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

43 답 ②

$$x = 2t + 2, y = t^3 + 10t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 10$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+10}{2}$ 이므로

$t=1$ 을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$$

44 답 ②

$y^3 + x^2y + x - 1 = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$(3y^2 + x^2) \frac{dy}{dx} = -(2xy + 1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+1}{3y^2+x^2} \quad (\text{단, } 3y^2+x^2 \neq 0)$$

이때, 주어진 곡선 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $x=1, y=0$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의

값이므로 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1} = -1$

45 답 ⑤

$f(x) = x + e^x$ 에서 $f'(x) = 1 + e^x \dots \text{㉠}$

이때, $f(x+1)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$g(f(x+1)) = x$ ↖서로 역함수 관계인 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(g(x)) = x$

위 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x+1))f'(x+1) = 1$$

$$\therefore g'(f(x+1)) = \frac{1}{f'(x+1)} \dots \text{㉡}$$

한편, $f(x+1) = x+1 + e^{x+1} = 1$ 에서

$$x + e^{x+1} = 0$$

$$\therefore x = -1$$

즉, $f(0) = 1$ 이므로 $x = -1$ 을 ㉡에 대입하

면 ㉠에 의하여

$$g'(f(0)) = g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

46 답 ③

$g(2) = a$ 라 하면 $f(a) = 2$ 이므로

$$4^a - 2^a = 2 \text{에서}$$

$$2^{2a} - 2^a - 2 = 0, (2^a + 1)(2^a - 2) = 0$$

$$\therefore 2^a = 2 \quad (\because 2^a > 0) \Rightarrow a = 1$$

즉, $g(2) = 1$ 이므로 $h(x) = \ln g(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln g(x)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln g(x) - \ln g(2)}{x-2} \quad (\because \ln g(2) = 0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x-2}$$

$$= h'(2) = \frac{g'(2)}{g(2)}$$

$$= g'(2) \quad (\because g(2) = 1) \dots \text{㉠}$$

이때, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ 이고

$$f'(x) = 4^x \ln 4 - 2^x \ln 2$$

$$= (2 \times 4^x - 2^x) \ln 2$$

에서 ㉠에 의하여 구하는 극한값은

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6 \ln 2}$$

47 답 ③

$y = e^{ax} \cos x$ 에서

$$y' = e^{ax} \times a \times \cos x + e^{ax} \times (-\sin x)$$

$$= e^{ax} (a \cos x - \sin x)$$

$$y'' = e^{ax} \times a \times (a \cos x - \sin x)$$

$$+ e^{ax} (-a \sin x - \cos x)$$

$$= e^{ax} (a^2 \cos x - \cos x - 2a \sin x)$$

그런데 모든 실수 x 에 대하여

↖ x 에 대한 항등식

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \text{이 성립하므로}$$

$$e^{ax} (a^2 \cos x - \cos x - 2a \sin x)$$

$$- 2e^{ax} (a \cos x - \sin x) + 2e^{ax} \cos x = 0$$

에서

$$e^{ax} \{ (a-1)^2 \cos x - 2(a-1) \sin x \} = 0$$

$$e^{ax} (a-1) \{ (a-1) \cos x - 2 \sin x \} = 0$$

$$\therefore a = 1$$

20 접선의 방정식 ~ 23 속도와 가속도

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 266

48 $y=x$ 48 $y=e^2x-3$

50 $y=e^3x-2e^3$

51 (1) 극댓값 : -1

(2) 극댓값 : $\frac{4}{e^2}$, 극솟값 : 0

52 (1) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$ (2) $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

53 풀이 참조 54 2

55 ⑤ 56 풀이 참조

57 (1) (5, 10t-2) (2) (0, 10)

58 속력 : $\frac{\sqrt{7}}{2}$, 가속도의 크기 : $\frac{7}{2}$

59 $t=\frac{3}{2}$, 속력 : 2

48 [답] $y=x$

$f(x)=\sin x$ 라 하면 $f'(x)=\cos x$
따라서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서
의 접선의 기울기는 $f'(0)=\cos 0=1$ 이므로
구하는 접선의 방정식은
 $y-0=f'(0)(x-0)$ 에서 $y=x$ 이다.

49 [답] $y=e^2x-3$

$f(x)=\ln x$ 라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

이때, 점점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 접선의
기울기가 e^2 이므로

$f'(t)=e^2$ 에서 $\frac{1}{t}=e^2 \quad \therefore t=\frac{1}{e^2}$

즉, 점점의 좌표는 $\left(\frac{1}{e^2}, -2\right)$ 이므로 구하는
접선의 방정식은 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln \frac{1}{e^2}=-2$

$y-(-2)=e^2\left(x-\frac{1}{e^2}\right)$ 에서 $y=e^2x-3$

50 [답] $y=e^3x-2e^3$

$f(x)=e^x$ 이라 하면 $f'(x)=e^x$
이때, 점점의 좌표를 (t, e^t) 이라 하면 접선
의 기울기는 $f'(t)=e^t$ 이므로 접선의 방정
식은 $y-e^t=e^t(x-t)$ 에서
 $y=e^tx+e^t(1-t) \cdots \textcircled{1}$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로 $x=2$,
 $y=0$ 을 대입하면 $0=2e^t+e^t(1-t)$ 에서
 $e^t(3-t)=0 \quad \therefore t=3 (\because e^t>0)$
따라서 $t=3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 점 $(2, 0)$ 에
서 곡선 $y=f(x)$ 에 그 접선의 방정식은
 $y=e^3x-2e^3$

51 [답] (1) 극댓값 : -1

(2) 극댓값 : $\frac{4}{e^2}$, 극솟값 : 0

(1) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 에서
 $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$
즉, $f'(x)=0$ 에서 $x=0 \quad \therefore f'(0)=0$
 $f''(x)$
 $=-\frac{2(x^2-1)^2-2x \times 2(x^2-1) \times 2x}{(x^2-1)^4}$
 $=-\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$
이고 $f''(0)=-2<0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는
 $x=0$ 에서 극댓값 $f(0)=-1$ 을 갖는다.

(2) $f(x)=x^2e^x$ 에서
 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$
즉, $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
 $\therefore f'(-2)=0, f'(0)=0$
 $f''(x)=(x+2)e^x+xe^x+x(x+2)e^x$
 $=(x^2+4x+2)e^x$

이고 $f''(-2)=-\frac{2}{e^2}<0$,

$f''(0)=2>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=-2$ 에서 극댓값 $f(-2)=\frac{4}{e^2}$, $x=0$

에서 극솟값 $f(0)=0$ 을 갖는다.

52 **답** (1) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$

(2) $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

(1) $f(x) = x^3 + x^2$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2x, f''(x) = 6x + 2$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } 6x + 2 = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{3}$$

이때, $x < -\frac{1}{3}$ 일 때 $f''(x) < 0$ 이고

$x > -\frac{1}{3}$ 일 때 $f''(x) > 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{3}$ 에서 변곡점을 갖

는다. 한편, $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$

이므로 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표는

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$ 이다.

(2) $f(x) = x^2 \ln x$ 에서

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x}$$

$$= 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \times \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } 2 \ln x + 3 = 0,$$

$$2 \ln x = -3, \ln x = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore x = e^{-\frac{3}{2}}$$

이때, $x < e^{-\frac{3}{2}}$ 일 때 $f''(x) < 0$ 이고

$x > e^{-\frac{3}{2}}$ 일 때 $f''(x) > 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = e^{-\frac{3}{2}}$ 에서 변곡점을 갖는

다. 한편, $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2e^3}$ 이므로 곡선

$y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표는

$\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$ 이다.

53 **답** 풀이 참조

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 에서 $x^2 + 1 \geq 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{이고 } f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

이고 $f''(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

따라서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	변곡점	$\searrow$	극소	$\nearrow$	변곡점	$\nearrow$

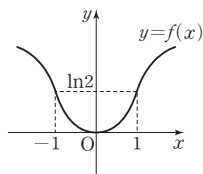
또, $f(1) = \ln 2$,

$f(-1) = \ln 2$,

$f(0) = 0$ 이므로

곡선 $y = f(x)$ 는

그림과 같다.



54 **답** 2

$$e^x - 2 = x \text{에서 } e^x - x - 2 = 0$$

$$f(x) = e^x - x - 2 \text{라 하면 } f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때, $f(0) = -1$ 이

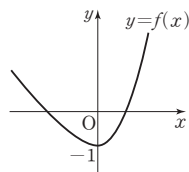
므로 함수 $y = f(x)$

의 그래프는 그림과

같다. 즉, 함수

$y = f(x)$ 의 그래프

가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



55 ⑤

$x - \ln x = k$ 에서 $f(x) = x - \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

이때, $f'(x) = 0$ 에서 $1 - \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x = 1$

따라서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

또, $f(1) = 1$ 이므로

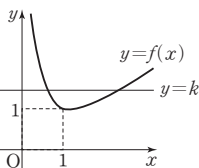
로 함수 $y = f(x)$

의 그래프의 개형

은 그림과 같다.

따라서 주어진 방

정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 직선 $y = k$ 가 그림과 같이 그려져야 하므로 상수 k 의 값의 범위는 $k > 1$



56 풀이 참조

$x \ln x + 1 \geq x$ 에서 $x \ln x - x + 1 \geq 0$

$f(x) = x \ln x - x + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이면서 최솟값 $f(1) = 0$ 을 가지므로 $x > 0$ 에서

$f(x) = x \ln x - x + 1 \geq 0$ 이 성립한다.

따라서 $x > 0$ 에서 $x \ln x + 1 \geq x$ 가 성립한다.

57 (1) $(5, 10t - 2)$ (2) $(0, 10)$

(1) $x = 5t, y = 5t^2 - 2t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 5, \frac{dy}{dt} = 10t - 2 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

따라서 시간 t 에서의 점 P의 속도는

$$(5, 10t - 2)$$

(2) $\textcircled{1}$ 에서 $\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = 10$

따라서 시간 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(0, 10)$$

58 속력 : $\frac{\sqrt{7}}{2}$, 가속도의 크기 : $\frac{7}{2}$

$x = \sin 2t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t, \frac{d^2x}{dt^2} = -4\sin 2t$$

$y = \cos t$ 에서

$$\frac{dy}{dt} = -\sin t, \frac{d^2y}{dt^2} = -\cos t$$

따라서 점 P의 시간 $t = \frac{\pi}{3}$ 일 때의 속력과

가속도의 크기를 각각 v, a 라 하면

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(2\cos \frac{2}{3}\pi\right)^2 + \left(-\sin \frac{\pi}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \\ a &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-4\sin \frac{2}{3}\pi\right)^2 + \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

59 $t = \frac{3}{2}$, 속력 : 2

$x = 2t + 3, y = 3t - t^2$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 3 - 2t$$

따라서 점 P의 시각 t 에서의 속력을 v 라 하면

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{2^2 + (3-2t)^2}$$

$$= \sqrt{4t^2 - 12t + 13} = \sqrt{4\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 4}$$

따라서 점 P의 속력이 최소가 될 때의 시각은 $t = \frac{3}{2}$ 이고 그때의 속력은 $\sqrt{4} = 2$ 이다.

종합 연습 문제 **정답**

문제편 p. 274

60 4

61 ②

62 ②

63 ①

64 ④

65 ①

66 ③

67 ⑤

60 **답** 4

$f(x) = e^{\sqrt{4x}}$ 에서

$$f'(x) = e^{\sqrt{4x}} \times (\sqrt{4x})' = e^{\sqrt{4x}} \times \frac{1}{2\sqrt{4x}} \times 4$$

$$= \frac{e^{\sqrt{4x}}}{\sqrt{x}} \quad \left((\sqrt{4x})' = \left((4x)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \times (4x)^{-\frac{1}{2}} \times 4 \right)$$

따라서 점 $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{e^{\sqrt{4 \times \frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2e$$

한편, $f\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\sqrt{4 \times \frac{1}{4}}} = e^0 = 1$ 이므로

점 $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ 에서의

접선의 방정식은

$$y = 2e\left(x - \frac{1}{4}\right) + 1 = 2ex - \frac{1}{2}e + 1 \text{이다.}$$

따라서 $a = 2e$, $b = \frac{1}{2}e$ 이므로

$$\frac{a}{b} = \frac{2e}{\frac{1}{2}e} = 4$$

61 **답** ②

$y = 2\ln x$ 에서 $y' = \frac{2}{x}$ 이므로 접점을

$(t, 2\ln t)$ 라 하면 접선의 기울기는 $\frac{2}{t}$ 이다.

즉, 접선의 방정식은

$$y = \frac{2}{t}(x - t) + 2\ln t \cdots \textcircled{1}$$

이 접선이 원점을 지나므로 $\textcircled{1}$ 에

$x = 0, y = 0$ 을 대입하면 $-2 + 2\ln t = 0$ 에

서 $2\ln t = 2, \ln t = 1 \quad \therefore t = e$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = \frac{2}{e}(x - e) + 2\ln e = \frac{2}{e}x - 2$$

62 **답** ②

$x = 2\cos t$ 에서 $\frac{dx}{dt} = -2\sin t$

$y = 2\sin t$ 에서 $\frac{dy}{dt} = 2\cos t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos t}{-2\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$= -\frac{1}{\tan t}$$

따라서 $t = \frac{\pi}{6}$ 에 대응되는 점에서의 접선의

기울기는

$$-\frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$$

한편, $t = \frac{\pi}{6}$ 일 때,

$$x = 2\cos \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$y = 2\sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{이므로}$$

$t = \frac{\pi}{6}$ 에 대응되는 곡선 위의 점의 좌표는

$(\sqrt{3}, 1)$ 이다.

즉, 곡선 위의 점 $(\sqrt{3}, 1)$ 에서의 접선의 기울

기는 $-\sqrt{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) \quad \therefore y = -\sqrt{3}x + 4$$

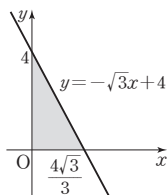
따라서 접선이 x 축, y 축과 만나는 점 A, B의 좌표는 각각

$$A\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right),$$

$B(0, 4)$ 이므로

$\triangle OAB$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 4 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$



63 답 ①

함수 $y=e^{f(x)}$ 의 도함수는 $y'=e^{f(x)} \times f'(x)$

$f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$ 에서

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x}{2}}$$

$$f''(x) = -e^{-\frac{x}{2}} + x^2e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= (x^2 - 1)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= (x-1)(x+1)e^{-\frac{x}{2}}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때, $x=-1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌고 $x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 에서 변곡점을 갖는다.

따라서 $a=-1$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=-1$ 이므로 $a+b=0$

64 답 ④

$$e^x = kx \text{에서 } \frac{e^x}{x} = k$$

$f(x) = \frac{e^x}{x}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

이때, $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 이므로 함수

$f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때, $f(1)=e$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0,$$

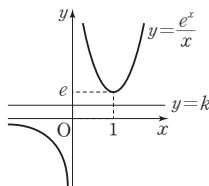
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty,$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그

래프는 그림과 같다.

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖지 않으려면 직선 $y=k$ 는 그림과 같아야 하므로 상수 k 의 값의 범위는 $0 \leq k < e$ 이다.



65 답 ①

$e^x - e \ln x + m > 0$ 에서

$f(x) = e^x - e \ln x + m$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$$

이때, $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최솟값 $f(1)=e+m$ 을 갖고, $x>0$ 에서 $f(x)>0$ 이 항상 성립하려면 $e+m>0$ 이어야 하므로 $m>-e$ 이다.

66 답 ③

$\sin 2x + 2\cos x \leq a$ 에서

$f(x) = \sin 2x + 2\cos x$ 라 하면

$$f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

$$= 2(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x$$

$$= -2(\sin x + 1)(2\sin x - 1)$$

이때, $f'(x)=0$ 에서 $\sin x = -1$ 또는
 $\sin x = \frac{1}{2}$ 이므로 $x = \frac{\pi}{6}$ ($\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)

즉, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소
 소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

따라서 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극대이면서 최대이므로 함수

$f(x)$ 의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

즉, $f(x) \leq a$ 가 성립하기 위해서는

$a \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이어야 하므로 실수 a 의 최솟값은

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

67 답 ⑤

$x=3t, y=-2t^2+4t$ 에서

$$\frac{dx}{dt}=3, \frac{dy}{dt}=-4t+4$$

즉, 시각 t 에서의 점 P의 속력을 v 라 하면

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-4t+4)^2} = \sqrt{16t^2 - 32t + 25} \\ &= \sqrt{16(t-1)^2 + 9} \end{aligned}$$

따라서 점 P의 속력이 최소가 될 때의 시각
 은 $t=1$ 일 때이므로 이때의 점 P의 좌표는
 $x=3 \times 1=3, y=-2 \times 1^2+4 \times 1=2$ 에서
 $(3, 2)$ 이다.

III. 적분법

24 $y=x^n$ (n 은 실수의 부정적분 ~

31 정적분의 치환적분법과 부분적분법

미적분

핵심 개념 문제 **정답**

문제편 p. 276

01 (1) $-\frac{1}{3}x^{-3}+C$ (2) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

(3) $-\frac{1}{3}\ln|x|+C$

02 (1) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + C$

(2) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 6x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C$

03 $F(x) = x^3 - \ln|x| - 2x^{-1} + 4$

04 (1) $e^{x+4}+C$ (2) $e^{x-3} + \frac{1}{4}x^4 + C$

(3) $e^{x+2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

(4) $\frac{3^{2x}}{2\ln 3} + \frac{2^x}{2\ln 2} + C$

05 (1) $-3\cos x - 2\sin x + C$

(2) $2\sin x + 3\cot x + C$

(3) $x - \sin x + C$

(4) $-\cos x + \cot x + C$

06 ②

07 (1) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 6\ln|x+1| + C$

(2) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

(3) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-3)^5}{(x-1)^3}\right| + C$

08 ①

09 (1) $\frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C$

(2) $\frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$

(3) $-\ln|1-x^2| + C$

(4) $\frac{1}{6}(2x+1)\sqrt{2x+1} - \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$

10 (1) $-\csc x - \sin x + C$

(2) $\ln |\ln x| + C$

11 ①

12 (1) $-x \cos x + \sin x + C$

(2) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

(3) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

13 1

14 (1) 2 (2) $e^2 - \frac{1}{e^2}$ (3) 2 (4) 2

15 ③

16 ②

17 0

18 ①

19 ③

20 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{\pi}{4}$

21 (1) $2\ln 2 - \frac{3}{4}$ (2) $-\frac{1}{2}$ 22 ③

01 $\int \left(-\frac{1}{3}x^{-3} + C \right)$

(2) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(3) $-\frac{1}{3}\ln|x| + C$

(1) $\int x^{-4} dx = -\frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + C$
 $= -\frac{1}{3}x^{-3} + C$
 (단, C 는 적분상수)

(2) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx$
 $= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$
 $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ (단, C 는 적분상수)

(3) $\int \left(-\frac{1}{3x} \right) dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx$
 $= -\frac{1}{3} \ln|x| + C$
 (단, C 는 적분상수)

02 $\int \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + C \right)$

(2) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 6x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C$

(1) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) dx$
 $= \int (x - \sqrt{x} - 2) dx$
 $= \int x dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int 2 dx$
 $= \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + C$
 (단, C 는 적분상수)
 (2) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx = \int \frac{(a+b)^3}{x} dx = \int \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{x} dx$
 $= \int \frac{x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} - 1}{x} dx$
 $= \int \left(\sqrt{x} - 3 + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) dx$
 $= \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int 3 dx + \int 3x^{-\frac{1}{2}} dx - \int x^{-1} dx$
 $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 6x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C$

03 $F(x) = x^3 - \ln|x| - 2x^{-1} + 4$

$F(x) = \int \frac{3x^4 - x + 2}{x^2} dx$
 $= \int \left(3x^2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx$
 $= \int 3x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x^2} dx$
 $= x^3 - \ln|x| - 2x^{-1} + C$
 (단, C 는 적분상수)

이때, $F(1) = 3$ 에서 $1 - 0 - 2 + C = 3$

$\therefore C = 4$

$\therefore F(x) = x^3 - \ln|x| - 2x^{-1} + 4$

04 (1) $e^{x+4} + C$

$$(2) e^{x-3} + \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$(3) e^{x+2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$(4) \frac{3^{2x}}{2\ln 3} + \frac{2^x}{2\ln 2} + C$$

$$\begin{aligned} (1) \int e^{x+4} dx &= \int (e^x \times e^4) dx \\ &= e^4 \int e^x dx \\ &= e^4 \times e^x + C \\ &= e^{x+4} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int (e^{x-3} + x^3) dx &= \int (e^x \times e^{-3}) dx + \int x^3 dx \\ &= e^{-3} \int e^x dx + \int x^3 dx \\ &= e^{-3} \times e^x + \frac{1}{4}x^4 + C \\ &= e^{x-3} + \frac{1}{4}x^4 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int (e^{x+2} + 3^x) dx &= \int (e^x \times e^2) dx + \int 3^x dx \\ &= e^2 \int e^x dx + \int 3^x dx \\ &= e^2 \times e^x + \frac{3^x}{\ln 3} + C \\ &= e^{x+2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int (3^{2x} + 2^{x-1}) dx &= \int 9^x dx + \int (2^x \times 2^{-1}) dx \\ &= \int 9^x dx + 2^{-1} \int 2^x dx \\ &= \frac{9^x}{\ln 9} + 2^{-1} \times \frac{2^x}{\ln 2} + C \\ &= \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{2^x}{2\ln 2} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

05 (1) $-3\cos x - 2\sin x + C$

$$(2) 2\sin x + 3\cot x + C$$

$$(3) x - \sin x + C$$

$$(4) -\cos x + \cot x + C$$

$$\begin{aligned} (1) \int (3\sin x - 2\cos x) dx &= 3 \int \sin x dx - 2 \int \cos x dx \\ &= -3\cos x - 2\sin x + C \\ &\quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int (2\cos x - 3\csc^2 x) dx &= 2 \int \cos x - 3 \int \csc^2 x \\ &= 2\sin x + 3\cot x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx \\ &= \int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 + \cos x} dx \\ &= \int (1 - \cos x) dx = x - \sin x + C \\ &\quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{\sin^3 x - 1}{\sin^2 x} dx &= \int (\sin x - \csc^2 x) dx \\ &= -\cos x + \cot x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

06 ②

$$f'(x) = e^x - \sin x \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (e^x - \sin x) dx \\ &= e^x + \cos x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때, $f(0) = 2$ 이므로

$$f(0) = 1 + 1 + C = 2$$

$$\therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = e^x + \cos x$ 이므로

$$f(\pi) = e^\pi + \cos \pi = e^\pi - 1$$

07 **답** (1) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 6\ln|x+1| + C$

(2) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

(3) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-3)^5}{(x-1)^3}\right| + C$

(1) $\int \frac{x^2-2x+3}{x+1} dx$
 $= \int \left(x-3 + \frac{6}{x+1}\right) dx$
 $= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6\ln|x+1| + C$
 (단, C 는 적분상수)

(2) $\int \frac{1}{x^2-4} dx \xrightarrow{\text{부분분수}} \int \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx$
 $= \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$
 $= \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + C$
 $= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$ (단, C 는 적분상수)

(3) 두 상수 a, b 에 대하여

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$$

로 놓고 우변을 통분하면

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-3)} = \frac{(a+b)x - (3a+b)}{(x-1)(x-3)}$$

이것은 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=1, 3a+b=-2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{5}{2}$

$\therefore \int \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} dx$
 $= -\frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x-3} dx$
 $= -\frac{3}{2} \ln|x-1| + \frac{5}{2} \ln|x-3| + C$
 $= \frac{1}{2} \ln|x-3|^5 - \frac{1}{2} \ln|x-1|^3 + C$
 $= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-3|^5}{|x-1|^3}\right| + C$
 $= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{(x-3)^5}{(x-1)^3}\right| + C$
 (단, C 는 적분상수)

08 **답** ①

$$\frac{5}{x^2-3x-4} = \frac{5}{(x+1)(x-4)}$$

$$= \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \quad \text{이므로}$$

$\int \frac{5}{x^2-3x-4} dx$
 $= \int \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right) dx$
 $= \ln|x-4| - \ln|x+1| + C$
 $= \ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right| + C$ (단, C 는 적분상수)
 따라서 $a=-4, b=1$ 이므로 $a+b=-3$

09 **답** (1) $\frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C$

(2) $\frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$

(3) $-\ln|1-x^2| + C$

(4) $\frac{1}{6}(2x+1)\sqrt{2x+1}$
 $-\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$

(1) $\int 2x(x^2+1)^3 dx$ 에서 $x^2+1=t$ 라 하면
 $2xdx=dt$ 이므로
 $\int 2x(x^2+1)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C$
 $= \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C$
 (단, C 는 적분상수)

(2) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$ 에서 $x^3+1=t$ 라 하면
 $3x^2 dx = dt$, 즉 $x^2 dx = \frac{1}{3} dt$ 이므로
 $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \int \frac{1}{3t} dt$
 $= \frac{1}{3} \ln|t| + C$
 $= \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + C$
 (단, C 는 적분상수)

$$\begin{aligned}
 (3) \int \frac{2x}{1-x^2} dx & \text{에서 } 1-x^2=t \text{라 하면} \\
 -2xdx &= dt \text{에서 } 2xdx = -dt \text{이므로} \\
 \int \frac{2x}{1-x^2} dx &= \int \left(-\frac{1}{t}\right) dt \\
 &= -\ln|t| + C \\
 &= -\ln|1-x^2| + C \\
 & \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx & \text{에서 } \sqrt{2x+1}=t \text{라 하면} \\
 2x+1 &= t^2 \text{에서 } x = \frac{t^2-1}{2} \text{이고} \\
 dx &= t dt \text{이므로} \\
 \int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx &= \int \frac{t^2-1}{2} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) + C \\
 &= \frac{1}{6} (2x+1) \sqrt{2x+1} - \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C \\
 & \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

10 (1) $-\csc x - \sin x + C$
(2) $\ln|\ln x| + C$

$$\begin{aligned}
 (1) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{(1-\sin^2 x) \cos x}{\sin^2 x} dx \\
 \text{에서 } \sin x &= t \text{라 하면} \\
 \cos x dx &= dt \text{이므로} \\
 \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{(1-t^2) \cos x}{\sin^2 x} dx \\
 &= \int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt \\
 &= -\frac{1}{t} - t + C \\
 &= -\csc x - \sin x + C \\
 & \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int \frac{1}{x \ln x} dx & \text{에서 } \ln x = t \text{라 하면} \\
 \frac{1}{x} dx &= dt \text{이므로} \\
 \int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C \\
 &= \ln|\ln x| + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

11 ①

$$\begin{aligned}
 \int (1-\sin x)^3 \cos x dx & \text{에서 } 1-\sin x = t \\
 \text{라 하면 } -\cos x dx &= dt, \\
 \text{즉 } \cos x dx &= -dt \text{이므로} \\
 f(x) &= \int (1-\sin x)^3 \cos x dx \\
 &= -\int t^3 dt = -\frac{1}{4} t^4 + C \\
 &= -\frac{1}{4} (1-\sin x)^4 + C \\
 & \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{이때, } f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \text{에서} \\
 -\frac{1}{4} \left(1-\sin \frac{\pi}{2}\right)^4 + C &= 0 \\
 \therefore C &= 0 \\
 \text{따라서 } f(x) &= -\frac{1}{4} (1-\sin x)^4 \text{이므로} \\
 f(\pi) &= -\frac{1}{4} (1-\sin \pi)^4 = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

12 (1) $-x \cos x + \sin x + C$
(2) $\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$
(3) $-e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C$

$$\begin{aligned}
 (1) \int x \sin x dx & \\
 \text{↻ } f(x)=x, g'(x)=\sin x & \\
 = x \times (-\cos x) - \int \{1 \times (-\cos x)\} dx & \\
 = -x \cos x + \sin x + C & \\
 & \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int x \ln x dx & \xrightarrow{f'(x)=x, g(x)=\ln x} \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \\
 & \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int x^2 e^{-x} dx & \xrightarrow{f(x)=x^2, g'(x)=e^{-x}} \\
 &= -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx \\
 & \xrightarrow{f(x)=2x, g'(x)=e^{-x}} \\
 &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + \int 2 e^{-x} dx \\
 &= -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C \\
 & \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

13 [답] 1

$f'(x) = \ln x$ 의 양변을 x 에 대하여 부정적분하면

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int \ln x dx \xrightarrow{f'(x)=1, g(x)=\ln x} \\
 &= x \ln x - \int \left(x \times \frac{1}{x}\right) dx \\
 &= x \ln x - x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

이때, $f(1) = 0$ 이므로

$$f(1) = \ln 1 - 1 + C = 0 \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = x \ln x - x + 1$ 이므로

$$f(e) = e \ln e - e + 1 = 1$$

14 [답] (1) 2 (2) $e^2 - \frac{1}{e^2}$ (3) 2 (4) 2

$$(1) \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2$$

적분 구간이 $[1, e^2]$ 이므로
절댓값을 씌워주지 않아도 된다.

$$\begin{aligned}
 (2) \int_0^2 (e^x + e^{-x}) dx &= \left[e^x - e^{-x} \right]_0^2 \\
 &= e^2 - e^{-2} - (e^0 - e^0) \\
 &= e^2 - \frac{1}{e^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x) dx &= \left[\sin x - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left(\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) - (\sin 0 - \cos 0) \\
 &= (1 - 0) - (0 - 1) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x + \cos x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
 &= \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} \right) + \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\
 &= 0 + 1 - (-1) = 2
 \end{aligned}$$

15 [답] ③

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 1} dx \\
 &= \int_0^1 \sqrt{(e^x + 1)^2} dx \\
 &= \int_0^1 (e^x + 1) dx \quad (\because e^x + 1 > 0) \\
 &= \left[e^x + x \right]_0^1 = e + 1 - 1 = e
 \end{aligned}$$

16 [답] ②

$$\begin{aligned}
 &\int_0^4 |\sqrt{x} - 1| dx \quad \begin{array}{c} y \\ \swarrow \searrow \\ O \quad 1 \\ \swarrow \searrow \\ x \end{array} \quad \begin{array}{c} y = \sqrt{x} - 1 \\ \text{ } \end{array} \\
 &= \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - 1) dx \\
 &= \left[x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x \right]_1^4 \\
 &= \left(1 - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{16}{3} - 4 \right) - \left(\frac{2}{3} - 1 \right) = 2
 \end{aligned}$$

17 [답] 0

$f(x) = e^x - e^{-x}$ 라 하면

$$f(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x)$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore \int_{-2}^2 (e^x - e^{-x}) dx = 0$$

18 [답] ①

함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= 0 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) \\ &= -2(1 - 0) = -2 \end{aligned}$$

19 [답] ③

함수 $y = x^2$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 (x^2 + \sin 2x) dx \\ &= \int_{-2}^2 x^2 dx + \int_{-2}^2 \sin 2x dx \\ &= 2 \int_0^2 x^2 dx + 0 = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times 2^3 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

20 [답] (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{\pi}{4}$

(1) $\cos x = t$ 라 하면 $-\sin x dx = dt$ 에서

$\sin x dx = -dt$ 이고 $x=0$ 일 때

$t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx \\ &= \int_1^0 (-t^3) dt = \int_0^1 t^3 dt \\ &= \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2) $x = 2 \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 라 하면

$dx = 2 \cos \theta d\theta$ 이고

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$

이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

21 [답] (1) $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$ (2) $-\frac{1}{2}$

(1) $\int_1^2 x \ln x dx$ $\xrightarrow{\text{부분적분}} f'(x)=x, g(x)=\ln x$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x dx$$

$$= 2 \ln 2 - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$ $\xrightarrow{\text{부분적분}} f(x)=x, g'(x)=\cos 2x$

$$= \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx$$

$$= - \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2}$$

22 [답] ③

$\sin x = t$ 라 하면 $\cos x dx = dt$ 이고

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx \\ &= \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (e^t + t^2) dt \\ &= \left[e^t + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = e - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

23 ⑤

24 ③

25 ①

26 ⑤

27 ④

28 2

29 1

23 답 ⑤

$$\begin{aligned} & \int \tan^2 x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \tan x - x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

24 답 ③

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx \\ &= \int \left(\frac{3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int 3(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx \\ &= 3 \left\{ \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right\} + C \\ &= 2(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

(단, C 는 적분상수)

이때, $f(0)=4$ 이므로 $2+C=4 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=2(x+1)^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+2$ 이므로

$$f(1)=2(1+1)^{\frac{3}{2}}-2 \times 1^{\frac{3}{2}}+2=4\sqrt{2}$$

25 답 ①

$$\begin{aligned} f'(x) + g'(x) &= e^x \text{의 양변을 부정적분하면} \\ \int \{f'(x) + g'(x)\} dx &= \int e^x dx \text{에서} \\ f(x) + g(x) &= e^x + C_1 \end{aligned}$$

(단, C_1 은 적분상수) ... ㉠

또, $f'(x) - g'(x) = e^{-x}$ 의 양변을 부정적분하면

$$\begin{aligned} \int \{f'(x) - g'(x)\} dx &= \int e^{-x} dx \\ f(x) - g(x) &= -e^{-x} + C_2 \end{aligned}$$

(단, C_2 는 적분상수) ... ㉡

이때, $f(0)=g(0)=1$ 이므로 $x=0$ 을 ㉠,

㉡의 양변에 각각 대입하면

$$f(0) + g(0) = e^0 + C_1 = 2 \quad \therefore C_1 = 1$$

$$f(0) - g(0) = -e^0 + C_2 = 0 \quad \therefore C_2 = 1$$

$$\therefore f(x) + g(x) = e^x + 1,$$

$$f(x) - g(x) = -e^{-x} + 1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x} + 2}{2}, \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\therefore f(1) + g(-1)$$

$$= \frac{e - e^{-1} + 2}{2} + \frac{e^{-1} + e}{2} = e + 1$$

26 답 ⑤

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에
서의 접선의 기울기가 xe^x 이므로

$$f'(x) = xe^x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \quad \text{f(x)=x, g(x)=e^x라} \\ &= \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx \quad \text{하고 부분적분법을 적용} \\ &= xe^x - e^x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$f(0) = -1 \text{에서 } -1 = -1 + C \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = xe^x - e^x$ 이므로

$$f(3) = 3e^3 - e^3 = 2e^3$$

27 답 ④

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{2x+1}{x^2} dx &= \int_1^e \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \left[2\ln|x| - \frac{1}{x} \right]_1^e \\ &= 3 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

28 답 2

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx \quad \dots \quad \text{㉠} \end{aligned}$$

$\int_{-1}^0 f(x)dx$ 에서 $x=-t$ 라 하면
 $dx=-dt$ 이고 $x=-1$ 일 때 $t=1$, $x=0$
 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 f(x)dx &= \int_1^0 f(-t)(-dt) \\ &= \int_0^1 f(-t)dt \\ &= \int_0^1 f(-x)dx \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

①을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(-x)dx \\ &= \int_0^1 \{f(x) + f(-x)\}dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 1)dx \\ &= \left[x^3 + x \right]_0^1 = 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

29 [답] 1

$f'(x)=e^x, g(x)=\sin x$ 라 하고
 부분적분법을 적용

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \\ &= \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\ &= \left[e^{\frac{\pi}{2}} \right] - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

①에서

$f'(x)=e^x, g(x)=\cos x$ 라 하고
 부분적분법을 적용

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$\begin{aligned}&= \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \\ &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -1 + A\end{aligned}$$

이것을 ①에 대입하면

$$A = e^{\frac{\pi}{2}} - (-1 + A) = \left[e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right] - A \text{에서}$$

$$2A = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \quad \therefore A = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$$

따라서 $f(x)=e^x \cos x$, $a=e^{\frac{\pi}{2}}$, $b=e^{\frac{\pi}{2}}+1$

이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - a + b = 0 - e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} + 1 = 1$$

32 정적분과 급수 ~

34 점이 움직인 거리와 곡선의 길이

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 294

30 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{15}{4}$

31 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $2\ln 2 - 1$ (3) $\frac{2}{\pi}$

32 4

33 ④

34 ②

35 ⑤

36 $\frac{15}{2}$

37 ②

30 [답] (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{15}{4}$

(1) $\frac{k}{n} = x$ 라 하면 $\frac{1}{n} = dx$ 이고 적분구간은
 $[0, 1]$ 이 되므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \frac{1}{n} &= \int_0^1 x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(2) $1 + \frac{k}{n} = x$ 라 하면 $\frac{1}{n} = dx$ 이고

적분구간은 $[1, 2]$ 가 되므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^3 \frac{1}{n} &= \int_1^2 x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^2 = \frac{15}{4}\end{aligned}$$

31 [답] (1) $\frac{1}{5}$ (2) $2\ln 2 - 1$ (3) $\frac{2}{\pi}$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} (1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4 \frac{1}{n} \cdots \textcircled{1}$$

이때, $\frac{k}{n} = x$ 라 하면 $\frac{1}{n} = dx$ 이고

적분구간은 $[0, 1]$ 이 되므로 구하는 극한
 값은 ①에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4 \frac{1}{n} &= \int_0^1 x^4 dx \\ &= \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \cdots \textcircled{1}$$

이때, $1 + \frac{k}{n} = x$ 라 하면 $\frac{1}{n} = dx$ 이고

적분구간은 $[1, 2]$ 가 되므로 구하는 극한값은 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

$$= \int_1^2 \ln x dx \quad \text{↪ } f'(x)=1, g(x)=\ln x \text{라 하고 부분적분법을 적용}$$

$$= \left[x \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(x \times \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= 2 \ln 2 - \int_1^2 1 dx$$

$$= 2 \ln 2 - \left[x \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} \pi \cdots \textcircled{1}$$

이때, $\frac{k}{n} = x$ 라 하면 $\frac{1}{n} = dx$ 이고

적분구간은 $[0, 1]$ 이 되므로 구하는 극한값은 $\textcircled{1}$ 에 의하여

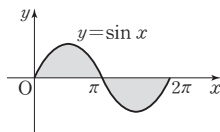
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} \pi$$

$$= \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

32 [답] 4

곡선 $y = \sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$ 는 그림과 같으므로 구하는 부분의 넓이는 그림의 어두운 부분의 넓이다.



따라서 구하는 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} |\sin x| dx \\ &\quad \text{↪ 함수 } y = \sin x \text{의 그래프는 점 } (n\pi, 0) (n \text{은 정수}) \text{에 대하여 대칭이므로} \\ &= \int_0^{\pi} \sin x dx + 2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \\ &= \left[-\cos x \right]_0^{\pi} + \left[\cos x \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= 4 \end{aligned}$$

33 [답] ④

두 곡선의 교점의 x 좌표는 방정

$$\text{식 } \frac{1}{8}x^2 = \sqrt{x} \text{의}$$

실근과 같으므로

양변을 제곱하여 정리하면

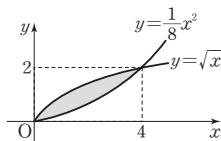
$$x^4 - 64x = 0$$

$$x(x-4)(x^2+4x+16) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{8}x^2 \right) dx \\ &= \int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{24}x^3 \right]_0^4 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$



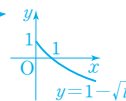
34 [답] ②

가득 채운 물의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^8 3\sqrt{x} dx = 3 \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^8 \\ &= 32\sqrt{2} \end{aligned}$$

35 [답] ⑤

점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$\begin{aligned}
 s &= \int_1^4 |v(t)| dt = \int_1^4 \frac{|1-\sqrt{t}|}{2} dt \\
 &= \int_1^4 (\sqrt{t}-1) dt \\
 &= \int_1^4 (t^{\frac{1}{2}}-1) dt \\
 &= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-t \right]_1^4 = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$


36 [답] $\frac{15}{2}$

$$x = t - \frac{t^2}{2} \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 1 - t$$

$$y = \frac{4}{3}t\sqrt{t} = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 2t^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t}$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \int_0^3 \sqrt{(1-t)^2 + (2\sqrt{t})^2} dt \\
 &= \int_0^3 \sqrt{t^2 + 2t + 1} dt = \int_0^3 \sqrt{(t+1)^2} dt \\
 &= \int_0^3 (t+1) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + t \right]_0^3 = \frac{15}{2}
 \end{aligned}$$

0 ≤ t ≤ 3에서 t+1 > 0

37 [답] ②

$x = e^t \cos t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

$y = e^t \sin t$ 에서

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

따라서 주어진 곡선의 길이를 l이라 하면

$$\begin{aligned}
 l &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{2e^t} dt = \left[\sqrt{2e^t} \right]_0^1 = \sqrt{2}(e-1)
 \end{aligned}$$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 300

38 ②	39 ③	40 ③
41 ②	42 4	43 3
44 64	45 31	

38 [답] ②

$$1 + \frac{(e-1)k}{n} = x \text{라 하면}$$

$$\frac{e-1}{n} = dx, \text{ 적분구간은 } [1, e] \text{가 되므로}$$

$$\begin{aligned}
 g(a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 1 + \frac{(e-1)k}{n} \right\} \\
 &\quad f\left(1 + \frac{(e-1)k}{n}\right)
 \end{aligned}$$

$$= \int_1^e x f(x) dx = \int_1^e x (a \ln x - 1) dx$$

$$= a \int_1^e x \ln x dx - \int_1^e x dx \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{이때, } \int_1^e x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \cdots \textcircled{2}$$

이고

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x \ln x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e \\
 &\quad \text{f'(x)=x, g(x)=ln x라 하고 부분적분법 이용} - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} \right) dx
 \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} \right)$$

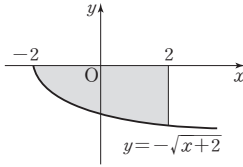
$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \cdots \textcircled{3}$$

②, ③을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 g(a) &= a \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{(a-2)e^2 + (a+2)}{4}
 \end{aligned}$$

따라서 유리수 a에 대하여 g(a)의 값이 유리수가 되려면 a-2=0이어야 하므로 a=2

39 [답] ③



곡선 $y = -\sqrt{x+2}$ 와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분은 그림의 어두운 부분과 같으므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 |-\sqrt{x+2}| dx \\ &= \int_{-2}^2 \sqrt{x+2} dx = \int_{-2}^2 (x+2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

40 [답] ③

구하는 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{에서 두 곡선 } y = \sin x, \\ &\quad y = \cos x \text{의 교점은 } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{이다.} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \left[\sin x + \cos x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &\quad + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

41 [답] ②

곡선 $y=f(x)$ 는 곡선 $y=e^{-x}$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
 $f(x)=1-e^{-x}$ 에서 $f'(x)=e^{-x}$ 이므로
 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned} 1-e^{-x} &= e^{-x}, 2e^{-x}=1, e^{-x}=\frac{1}{2}, -x=\ln \frac{1}{2} \\ \therefore x &= \ln 2 \end{aligned}$$

따라서 두 곡선

$y=f(x)$ 와 $y=f'(x)$
 및 y 축으로 둘러싸인
 부분은 그림의 어두운
 부분과 같으므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\ln 2} \{e^{-x} - (1-e^{-x})\} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} (2e^{-x} - 1) dx = \left[-2e^{-x} - x \right]_0^{\ln 2} \\ &= \ln \frac{e}{2} \end{aligned}$$

42 [답] 4

입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $2\sqrt{x \sin x}$ 인 정삼각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (2\sqrt{x \sin x})^2 = 4x \sin x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \sin x dx \\ &\quad \begin{matrix} f(x)=4x, g'(x)=\sin x \text{라 하면} \\ f'(x)=4, g(x)=-\cos x \end{matrix} \\ &= \left[-4x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-4 \cos x) dx \\ &= 0 + \left[4 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

43 [답] 3

점 P 의 좌표를 $\left(x, \frac{1}{x+1}\right) (0 \leq x \leq 1)$ 이라

하면 $\overline{PH} = \frac{1}{x+1}$ 이므로 선분 PH 를 한 변

으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{PH}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{x+1} \right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4(x+1)^2} \end{aligned}$$

한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

따라서 구하는 부피 V 는

$$V = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4(x+1)^2} dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore 64V^2 = 64 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{8} \right)^2 = 3$$

44 [답] 64

y 좌표가 0이 될 때는 $\frac{1}{2}t^2 - 4t = 0$ 에서

$t(t-8) = 0$ 이므로 $t = 0$ 또는 $t = 8$

$\therefore a = 8$

$x = \frac{8}{3}t\sqrt{t}$, $y = \frac{1}{2}t^2 - 4t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 4\sqrt{t}, \frac{dy}{dt} = t - 4 \text{이므로}$$

$t = 0$ 부터 $t = a = 8$ 까지 점 P 가 움직인 거리를 s 라 하면

$$s = \int_0^8 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^8 \sqrt{(4\sqrt{t})^2 + (t-4)^2} dt$$

$$= \int_0^8 \sqrt{t^2 + 8t + 16} dt = \int_0^8 \sqrt{(t+4)^2} dt$$

$$= \int_0^8 (t+4) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + 4t \right]_0^8 = 64$$

45 [답] 31

$y = \frac{1}{6}(4x-1)^{\frac{3}{2}}$ 에서

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \times (4x-1)^{\frac{1}{2}} \times 4 = (4x-1)^{\frac{1}{2}}$$

이때, 구하는 곡선의 길이를 l 이라 하면

$$l = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + \{(4x-1)^{\frac{1}{2}}\}^2} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{4x} dx = \int_1^4 2\sqrt{x} dx$$

$$= 2 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{28}{3}$$

따라서 $p = 3$, $q = 28$ 이므로 $p + q = 31$

기하

I. 이차곡선

01 포물선의 방정식 ~

07 쌍곡선의 점선의 방정식

기하

핵심 개념 문제 [정답]

문제편 p. 304

01 (1) $y^2 = 8x$ (2) $y^2 = -12x$

(3) $x^2 = 16y$ (4) $x^2 = -20y$

02 (1) 초점 : $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, 준선 : $x = -\frac{1}{4}$

(2) 초점 : $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 준선 : $x = \frac{1}{2}$

(3) 초점 : $\left(0, \frac{3}{4}\right)$, 준선 : $y = -\frac{3}{4}$

(4) 초점 : $(0, -1)$, 준선 : $y = 1$

03 $y^2 = 12x$

04 (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ (2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

(3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ (4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

05 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(3) 풀이 참조 (4) 풀이 참조

06 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

07 (1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ (2) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

(3) $\frac{x^2}{3} - y^2 = -1$ (4) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = -1$

08 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(3) 풀이 참조 (4) 풀이 참조

09 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

10 (1) 한 점에서 만난다.

(2) 만나지 않는다.

(3) 두 점에서 만난다.

11 (1) $k < 2$ (2) $k = 2$ (3) $k > 2$

12 $y = x + 2$ 13 $y = -\frac{1}{2}x - 2$

$$14 \ y = -3x - 1 \text{ 또는 } y = x + 3$$

$$15 \ y = 2x + 3\sqrt{2}$$

$$16 \ y = x + 3$$

$$17 \ y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, \ x = 2$$

$$18 \ y = x + 3\sqrt{2} \quad 19 \ y = x - 1$$

$$20 \ y = -x + 1 \text{ 또는 } y = -3x + 5$$

01 [답] (1) $y^2 = 8x$ (2) $y^2 = -12x$

$$(3) \ x^2 = 16y \quad (4) \ x^2 = -20y$$

$$(1) \ y^2 = 4px \text{에서 } p = 2 \text{이므로 } y^2 = 8x$$

$$(2) \ y^2 = 4px \text{에서 } p = -3 \text{이므로 } y^2 = -12x$$

$$(3) \ x^2 = 4py \text{에서 } p = 4 \text{이므로 } x^2 = 16y$$

$$(4) \ x^2 = 4py \text{에서 } p = -5 \text{이므로 } x^2 = -20y$$

02 [답] (1) 초점: $(\frac{1}{4}, 0)$, 준선: $x = -\frac{1}{4}$

$$(2) \text{ 초점: } (-\frac{1}{2}, 0), \text{ 준선: } x = \frac{1}{2}$$

$$(3) \text{ 초점: } (0, \frac{3}{4}), \text{ 준선: } y = -\frac{3}{4}$$

$$(4) \text{ 초점: } (0, -1), \text{ 준선: } y = 1$$

$$(1) \ y^2 = x = 4 \times \frac{1}{4} \times x \text{이므로 } p = \frac{1}{4}$$

따라서 초점의 좌표는 $(\frac{1}{4}, 0)$ 이고 준선

의 방정식은 $x = -\frac{1}{4}$ 이다.

$$(2) \ y^2 = -2x = 4 \times (-\frac{1}{2}) \times x \text{이므로}$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

따라서 초점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 이고 준

선의 방정식은 $x = \frac{1}{2}$ 이다.

$$(3) \ x^2 = 3y = 4 \times \frac{3}{4} \times y \text{이므로 } p = \frac{3}{4}$$

따라서 초점의 좌표는 $(0, \frac{3}{4})$ 이고 준선

의 방정식은 $y = -\frac{3}{4}$ 이다.

$$(4) \ x^2 = -4y = 4 \times (-1) \times y \text{이므로}$$

$$p = -1$$

따라서 초점의 좌표는 $(0, -1)$ 이고 준선의 방정식은 $y = 1$ 이다.

03 [답] $y^2 = 12x$

꼭짓점이 원점이고 초점이 x 축 위에 있는 포물선의 방정식을 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$)라 하자.

이때, 이 포물선이 점 $(3, 6)$ 을 지나므로 $x = 3, y = 6$ 을 대입하면 $6^2 = 4p \times 3$ 에서 $12p = 36$

$$\therefore p = 3$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4 \times 3 \times x = 12x \text{이다.}$$

04 [답] (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

$$(2) \ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

$$(3) \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$(4) \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(1) 두 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의 방정

$$\text{식을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{이라 하면}$$

두 초점으로부터의 거리의 합이 6이므로

$$2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

또, 두 초점이 $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 이므

$$\text{로 } 2^2 = 3^2 - b^2 \quad \therefore b^2 = 5$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

(2) 두 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의 방정

$$\text{식을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{이라 하면}$$

두 초점으로부터의 거리의 합이 8이므로

$$2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

또, 두 초점이 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이므

$$\text{로 } 3^2=4^2-b^2 \quad \therefore b^2=7$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

- (3) 두 초점이 y 축 위에 있으므로 타원의 방정

$$\text{식을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0) \text{이라 하면}$$

두 초점으로부터의 거리의 합이 10이므로

$$\text{로 } 2b=10 \quad \therefore b=5$$

또, 두 초점이 $F(0, 4), F'(0, -4)$ 이므로

$$\text{로 } 4^2=5^2-a^2 \quad \therefore a^2=9$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

- (4) 두 초점이 y 축 위에 있으므로 타원의 방정

$$\text{식을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0) \text{이라 하면}$$

두 초점으로부터의 거리의 합이 8이므로

$$2b=8 \quad \therefore b=4$$

또, 두 초점이 $F(0, \sqrt{7}), F'(0, -\sqrt{7})$ 이므로

$$(\sqrt{7})^2=4^2-a^2 \quad \therefore a^2=9$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

05 [답] (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(3) 풀이 참조 (4) 풀이 참조

- (1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $a^2=25, b^2=16$ 이므로

$a=5, b=4$ 이다. 즉, 장축의 길이는

$2a=10$, 단축의 길이는 $2b=8$ 이다.

이때, 이 타원의 초점의 좌표를 양수 c 에 대하여 $(c, 0), (-c, 0)$ 이라 하면

$$c^2=a^2-b^2=25-16=9 \quad \therefore c=3$$

따라서 초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$ 이다.

- (2) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 에서 $a^2=100, b^2=36$ 이

므로 $a=10, b=6$ 이다.

즉, 장축의 길이는 $2a=20$, 단축의 길이는 $2b=12$ 이다. 이때, 이 타원의 초점의 좌표를 양수 c 에 대하여 $(c, 0), (-c, 0)$ 이라 하면

$$c^2=a^2-b^2=100-36=64 \quad \therefore c=8$$

따라서 초점의 좌표는 $(8, 0), (-8, 0)$ 이다.

- (3) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ 에서 $a^2=4, b^2=36$ 이므로

$a=2, b=6$ 이다. 즉, 장축의 길이는

$2b=12$, 단축의 길이는 $2a=4$ 이다.

이때, 이 타원의 초점의 좌표를 양수 c 에 대하여 $(0, c), (0, -c)$ 라 하면

$$c^2=b^2-a^2=36-4=32 \quad \therefore c=4\sqrt{2}$$

따라서 초점의 좌표는

$(0, 4\sqrt{2}), (0, -4\sqrt{2})$ 이다.

- (4) $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{36} = 1$ 에서 $a^2=11, b^2=36$ 이므로

$a=\sqrt{11}, b=6$ 이다.

즉, 장축의 길이는 $2b=12$, 단축의 길이는 $2a=2\sqrt{11}$ 이다.

이때, 이 타원의 초점의 좌표를 양수 c 에 대하여 $(0, c), (0, -c)$ 라 하면

$$c^2=b^2-a^2=36-11=25 \quad \therefore c=5$$

따라서 초점의 좌표는 $(0, 5), (0, -5)$

이다.

06 [답] $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

중심이 원점인 타원의 초점이 x 축 위에 있으

므로 이 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(a > b > 0)$ 이라 하면 장축의 길이가 6, 단

축의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $2a=6, 2b=4\sqrt{2}$ 에

서 $a=3, b=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \text{이다.}$$

07 **답** (1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

(2) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

(3) $\frac{x^2}{3} - y^2 = -1$

(4) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = -1$

(1) 두 초점이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의

방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이라 하면

두 초점으로부터의 거리의 차가 4이므로

$$2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

또, 두 초점이 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이므로

$$3^2 = 2^2 + b^2 \quad \therefore b^2 = 5$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \text{이다.}$$

(2) 두 초점이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의

방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이라 하면

두 초점으로부터의 거리의 차가 10이므로

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5$$

또, 두 초점이 $F(6, 0), F'(-6, 0)$ 이므로

$$6^2 = 5^2 + b^2 \quad \therefore b^2 = 11$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1 \text{이다.}$$

(3) 두 초점이 y 축 위에 있으므로 쌍곡선의

방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 이라 하면

두 초점으로부터의 거리의 차가 2이므로

$$2b = 2 \quad \therefore b = 1$$

또, 두 초점이 $F(0, 2), F'(0, -2)$ 이므로

$$2^2 = a^2 + 1^2 \quad \therefore a^2 = 3$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = -1 \text{이다.}$$

(4) 두 초점이 y 축 위에 있으므로 쌍곡선의

방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 이라 하면

두 초점으로부터의 거리의 차가 6이므로

$$2b = 6 \quad \therefore b = 3$$

또, 두 초점이 $F(0, 4), F'(0, -4)$ 이므로

$$4^2 = a^2 + 3^2 \quad \therefore a^2 = 7$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = -1 \text{이다.}$$

08 **답** (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(3) 풀이 참조 (4) 풀이 참조

(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $a^2 = 4, b^2 = 4$ 이므로

$a = 2, b = 2$ 이다. 즉, 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{2}{2}x = \pm x \text{이고 주축의 길이는}$$

$2a = 4$ 이다. 이때, 쌍곡선의 초점의 좌표

를 양수 c 에 대하여 $(c, 0), (-c, 0)$ 이라 하면

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 4 = 8 \quad \therefore c = 2\sqrt{2}$$

따라서 초점의 좌표는

$$(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0) \text{이다.}$$

(2) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$ 에서 $a^2 = 25, b^2 = 11$ 이므로

$a = 5, b = \sqrt{11}$ 이다. 즉, 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{11}}{5}x \text{이고 주축의 길이는}$$

$2a = 10$ 이다. 이때, 쌍곡선의 초점의 좌

표를 양수 c 에 대하여 $(c, 0), (-c, 0)$

이라 하면

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 11 = 36 \quad \therefore c = 6$$

따라서 초점의 좌표는 $(6, 0), (-6, 0)$

이다.

(3) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = -1$ 에서 $a^2 = 12, b^2 = 4$ 이므로

$a = 2\sqrt{2}, b = 2$ 이다. 즉, 점근선의 방

$$\text{정식은 } y = \pm \frac{2}{2\sqrt{2}}x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x \text{이고 주축}$$

의 길이는 $2b = 4$ 이다. 이때, 쌍곡선의 초

점의 좌표를 양수 c 에 대하여 $(0, c),$

$(0, -c)$ 라 하면

$$c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16 \quad \therefore c = 4$$

따라서 초점의 좌표는 $(0, 4)$, $(0, -4)$ 이다.

$$(4) \frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{36} = -1 \text{에서 } a^2 = 13, b^2 = 36 \text{이}$$

므로 $a = \sqrt{13}$, $b = 6$ 이다. 즉, 점근선의

$$\text{방정식은 } y = \pm \frac{6}{\sqrt{13}}x = \pm \frac{6\sqrt{13}}{13}x \text{이고}$$

주축의 길이는 $2b = 12$ 이다. 이때, 쌍곡선의 초점의 좌표를 양수 c 에 대하여

$(0, c)$, $(0, -c)$ 라 하면

$$c^2 = a^2 + b^2 = 13 + 36 = 49 \quad \therefore c = 7$$

따라서 초점의 좌표는 $(0, 7)$, $(0, -7)$ 이다.

09 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

두 초점이 x 축 위에 있으므로 이 쌍곡선의

방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이라 하면 점근선의

 쌍곡선의 방정식에서 점근선은 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 이다.

방정식이 $y = \pm \sqrt{2}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \pm \sqrt{2} \quad \therefore b = \pm \sqrt{2}a \quad \cdots \text{㉠}$$

이때, 두 초점이 $F(\sqrt{3}, 0)$, $F'(-\sqrt{3}, 0)$

이므로

$$(\sqrt{3})^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^2 + 2a^2 = 3, 3a^2 = 3 \quad \therefore a^2 = 1$$

㉠에 의하여 $b^2 = 2$ 이므로 구하는 쌍곡선의

방정식은 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 이다.

10 (1) 한 점에서 만난다.

(2) 만나지 않는다.

(3) 두 점에서 만난다.

$$x - y + 3 = 0 \text{에서 } y = x + 3 \quad \cdots \text{㉠}$$

(1) $y^2 = 12x$ 에 ㉠을 대입하면

$$(x+3)^2 = 12x \text{에서 } x^2 + 6x + 9 = 12x$$

$$\therefore x^2 - 6x + 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 9 = 0$$

따라서 주어진 직선과 포물선 $y^2 = 12x$ 는 한 점에서 만난다.

$$(2) \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \text{ 즉 } x^2 + 4y^2 = 4 \text{에 } \text{㉠을 대입}$$

하면 $x^2 + 4(x+3)^2 = 4$ 에서

$$x^2 + 4(x^2 + 6x + 9) = 4$$

$$\therefore 5x^2 + 24x + 32 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 12^2 - 5 \times 32 = -16 < 0$$

따라서 주어진 직선과 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

은 만나지 않는다.

$$(3) x^2 - \frac{y^2}{2} = 1, \text{ 즉 } 2x^2 - y^2 = 2 \text{에 } \text{㉠을 대입}$$

하면 $2x^2 - (x+3)^2 = 2$ 에서

$$2x^2 - (x^2 + 6x + 9) = 2$$

$$\therefore x^2 - 6x - 11 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - (-11) = 20 > 0$$

따라서 주어진 직선과 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

은 서로 다른 두 점에서 만난다.

11 (1) $k < 2$ (2) $k = 2$ (3) $k > 2$

$y = x + k$ 를 $y^2 = 8x$ 에 대입하면

$$(x+k)^2 = 8x \text{에서 } x^2 + 2kx + k^2 = 8x$$

$$\therefore x^2 + 2(k-4)x + k^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-4)^2 - k^2 = -8k + 16$$

(1) 포물선과 직선이 두 점에서 만나려면

$$D > 0 \text{이어야 하므로 } -8k + 16 > 0 \text{에서}$$

$$8k < 16 \quad \therefore k < 2$$

- (2) 포물선과 직선이 접하려면 $D=0$ 이어야
 하므로 $-8k+16=0$ 에서 $8k=16$
 $\therefore k=2$
- (3) 포물선과 직선이 두 점에서 만나려면
 $D<0$ 이어야 하므로 $-8k+16<0$ 에서
 $8k>16 \quad \therefore k>2$

12 답 $y=x+2$

포물선 $y^2=8x=4 \times 2x$ 에 접하고 기울기가
 1인 직선의 방정식은 $y=1 \times x + \frac{2}{1}=x+2$
 이다. 포물선 $y^2=4px$ 에 접하고 기울기가 m 인
 점선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$

13 답 $y=-\frac{1}{2}x-2$

포물선 $y^2=4x=4 \times 1 \times x$ 위의 점 $(4, -4)$
 에서의 점선의 방정식은
 $y \times (-4) = 2 \times 1 \times (x+4)$ 에서
포물선 $y^2=4px$ 위의 점 (x_1, y_1)
 에서의 점선의 방정식은
 $y_1 y = 2p(x+x_1)$
 $-4y=2x+8 \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x-2$

14 답 $y=-3x-1$ 또는 $y=x+3$

점 $(-1, 2)$ 에서 포물선 $y^2=12x=4 \times 3x$
 에 그은 점선의 기울기를 m 이라 하면 점선
 의 방정식은

$$y=mx+\frac{3}{m} \cdots \textcircled{A}$$

이때, 이 점선이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로
 $x=-1, y=2$ 를 대입하면 $2=-m+\frac{3}{m}$
 에서 $m^2+2m-3=0$
 $(m+3)(m-1)=0$
 $\therefore m=-3$ 또는 $m=1$
 이것을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면 $y=-3x-1$ 또는
 $y=x+3$ 이다.

15 답 $y=2x \pm 3\sqrt{2}$

직선 $y=2x+1$ 에 평행한 직선의 기울기는
 2이므로 구하는 점선의 방정식은
 $y=2x \pm \sqrt{3 \times 2^2 + 6} = 2x \pm \sqrt{18}$
 $= 2x \pm 3\sqrt{2}$ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고
 기울기가 m 인 점선의 방정식은
 $y=mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$

16 답 $y=x+3$

타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 $(-2, 1)$ 에서의
 점선의 방정식은 $\frac{(-2) \times x}{6} + \frac{1 \times y}{3} = 1$
 에서 $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 1$
 $-x+y=3 \quad \therefore y=x+3$

17 답 $y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ 또는 $x=2$

구하는 점선의 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라
 하면 점선의 방정식은

$$4x_1x+3y_1y=16 \cdots \textcircled{A}$$

이때, 이 점선이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로
 $x=2, y=4$ 를 대입하면

$$8x_1+12y_1=16 \quad \therefore 2x_1+3y_1=4 \cdots \textcircled{B}$$

한편, 점 (x_1, y_1) 은 타원 $4x^2+3y^2=16$ 위
 의 점이므로

$$4x_1^2+3y_1^2=16 \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=0 \end{cases}$$

따라서 구하는 점선의 방정식은 $\textcircled{A}$ 에 의하여
 $-4x+6y=16$ 또는 $8x=16$ 에서

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3} \text{ 또는 } x=2 \text{이다.}$$

18 답 $y = x \pm 3\sqrt{2}$

직선 $y = x - 1$ 에 평행한 직선의 기울기는 1
이므로 구하는 접선의 방정식은
 $y = x \pm \sqrt{24 \times 1^2 - 6} = x \pm \sqrt{18} = x \pm 3\sqrt{2}$

19 답 $y = x - 1$

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $(3, 2)$ 에서의
접선의 방정식은 $\frac{3x}{3} - \frac{2y}{2} = 1$ 에서
 $x - y = 1 \quad \therefore y = x - 1$

20 답 $y = -x + 1$ 또는 $y = -3x + 5$

구하는 접선의 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라
하면 접선의 방정식은

$$2x_1x - 3y_1y = 6 \cdots \textcircled{1}$$

이때, 이 접선이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로
 $x = 2, y = -1$ 을 대입하면

$$4x_1 + 3y_1 = 6 \cdots \textcircled{2}$$

한편, 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $2x^2 - 3y^2 = 6$

위의 점이므로 $2x_1^2 - 3y_1^2 = 6 \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x_1 = \frac{9}{5} \\ y_1 = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$6x + 6y = 6 \text{ 또는 } \frac{18}{5}x + \frac{6}{5}y = 6 \text{에서}$$

$$y = -x + 1 \text{ 또는 } y = -3x + 5 \text{이다.}$$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 318

21 ①

22 ④

23 9

24 ⑤

25 3

26 ①

27 ④

28 ④

기하

21 답 ①

$y^2 + 6y + 4x + 5 = 0$ 에서

$$y^2 + 6y + 9 = -4x - 5 + 9$$

포물선 $y^2 = 4px$ 를
 x 축, y 축으로 각각

$$(y+3)^2 = -4(x-1)$$

m, n 만큼 평행이동하면
 $(y-n)^2 = 4p(x-m)$

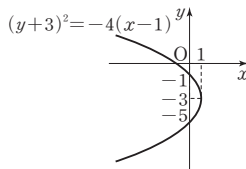
즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = -4x$ 를 x

축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3

만큼 평행이동한 것이고 y 절편은 $-1, -5$

이므로 그림과 같이 제 1사분면을 지나지 않

는다.



22 답 ④

포물선 $y^2 = 4x = 4 \times 1 \times x$ 의 초점 F의 좌표
는 $(1, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -1$ 이
다.

이때, 두 선분 AP,

BQ의 연장선이 준

선 $x = -1$ 과 만나

는 점을 각각 P',

Q'이라 하면

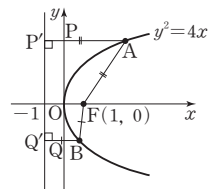
$$\overline{AF} + \overline{BF}$$

$$= \overline{P'A} + \overline{Q'B}$$

$$= (\overline{P'P} + \overline{PA}) + (\overline{Q'Q} + \overline{QB})$$

$$\text{에서 } 5 = (1 + \overline{PA}) + \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \overline{PA} = \frac{5}{2}$$



23 답 9

양수 c 에 대하여 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초

점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ 이라 하면

$$c^2 = 9 - 5 = 4 \quad \therefore c = 2$$

따라서 두 점 $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$ 은

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 초점이다.

한편, 타원 위의 임의의 점 P 에 대하여

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 2 \times 3 = 6 \text{이고 } \overline{PA} > 0, \overline{PB} > 0$$

이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$6 = \overline{PA} + \overline{PB} \geq 2\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}$$

양변을 제곱하면 $36 \geq 4 \times \overline{PA} \times \overline{PB}$ 에서

$$\overline{PA} \times \overline{PB} \leq 9$$

따라서 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 의 최댓값은 9이다.

24 답 ⑤

양수 c 에 대하여 타원 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ 의 두 초

점 F , F' 의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ 이

라 하면 $c^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$$\therefore c = 3 \Rightarrow \overline{FF'} = 2c = 6$$

한편, 두 삼각형 $PF'H$, PHF 의 밑변을 각각

$\overline{F'H}$, $\overline{HF}$ 라 하면 높이가 $\overline{PH}$ 로 같고 이 두

삼각형의 넓이의 비가 2 : 1이므로

$$\overline{F'H} : \overline{HF} = 2 : 1$$

$$\therefore \overline{F'H} = 6 \times \frac{2}{3} = 4, \overline{HF} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

이때, 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 10 \text{이므로}$$

$$\overline{PF} = t (t > 0) \text{라 하면 } \overline{PF'} = 10 - t$$

직각삼각형 PHF' 에서

$$\overline{PH}^2 = \overline{PF'}^2 - \overline{F'H}^2 = (10 - t)^2 - 4^2 \dots \textcircled{1}$$

직각삼각형 PHF 에서

$$\overline{PH}^2 = \overline{PF}^2 - \overline{HF}^2 = t^2 - 2^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } (10 - t)^2 - 4^2 = t^2 - 2^2$$

$$100 - 20t + t^2 - 16 = t^2 - 4, 20t = 88$$

$$\therefore t = \frac{22}{5} \Rightarrow \overline{PF} = \frac{22}{5}$$

25 답 3

쌍곡선 $4x^2 - 5y^2 + 10y - 25 = 0$ 에서

$$4x^2 - 5(y - 1)^2 = 20$$

$$\therefore \frac{x^2}{5} - \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

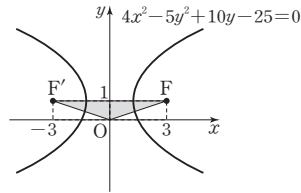
즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 을

y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, 양수 c 에 대하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

의 두 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ 이라

하면 $c^2 = 5 + 4 = 9$ 이므로



두 초점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$ 이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$(3, 1)$, $(-3, 1)$ 이다.

$$\therefore \triangle OFF' = \frac{1}{2} \times 6 \times 1 = 3$$

26 답 ①

쌍곡선 $x^2 - a^2y^2 = a^2 (a > 0)$,

즉 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{1}{a}x \text{이다.}$$

이때, 한 점근선이 x 축의 양의 방향과 이루

는 각의 크기가 60° 이므로 한 점근선의 기울

기는

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{1}{a} (\because a > 0)$$

$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

27 답 ④

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \text{에서 } x^2 + 3y^2 = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \text{에서 } 3x^2 + y^2 = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } x^2 = \frac{3}{4}, y^2 = \frac{3}{4}$$

따라서 두 타원 E, F 의 제 1사분면 위의 교

점의 좌표는 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로 이 점에서의

타원 E 의 접선의 방정식은

→ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의

접선의 방정식은 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}y = 3 \text{에서}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{이고 타원 } F \text{의 접선의 방}$$

$$\text{정식은 } 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 3 \text{에서}$$

$$y = -3x + 2\sqrt{3} \text{이다.}$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$-\frac{1}{3} \times (-3) = 1 \text{이다.}$$

28 답 ④

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 의 기울기가 1인 쌍곡선

의 접선의 방정식은

$$y = x + -\sqrt{3 \times 1^2 - 1} = x + -\sqrt{2}$$

이때, 두 접선 $y = x + \sqrt{2}$ 와 $y = x - \sqrt{2}$ 사이

의 거리는 한 직선 위의 임의의 점에서 다른

직선까지의 거리와 같으므로

직선 $y = x + \sqrt{2}$ 위의 점 $(0, \sqrt{2})$ 에서 직선

$x - y - \sqrt{2} = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|0 - \sqrt{2} - \sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 2$$

II. 평면벡터

08 벡터의 덧셈과 뺄셈 ~

14 직선과 원의 방정식

기하

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 320

01 (1) 1 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

02 (1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$
(3) $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ (4) $\vec{0}$

03 (1) $3\vec{a} + 4\vec{b}$ (2) $3\vec{a} - 8\vec{b} + 7\vec{c}$

04 ③ 05 ② 06 ③

07 (1) $(-8, -1)$ (2) $(2, 7)$ (3) $\sqrt{82}$

08 (1) $(-5, -3)$ (2) $\sqrt{34}$
(3) $(7, -2)$ (4) $\sqrt{53}$

09 (1) $3\sqrt{3}$ (2) 3 (3) 0 (4) $-3\sqrt{2}$

10 ③ 11 (1) -21 (2) 22

12 ① 13 ③

14 (1) 45 (2) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ 15 (1) 6 (2) $-\frac{2}{3}$

16 ⑤ 17 ②

18 (1) $x - 2 = \frac{y - 3}{2}$

(2) $\frac{x - 1}{2} = -\frac{y - 2}{3}$ 또는

$$\frac{x - 3}{2} = -\frac{y + 1}{3}$$

(3) $2x + 3y - 7 = 0$

19 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

20 풀이 참조

01 답 (1) 1 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

(1) $|\vec{AB}| = |\vec{AB}| = 1$

(2) $|\vec{AE}| = |\vec{AE}| = |\vec{AC}| \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

(3) $|\vec{AD}| = |\vec{AD}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad |\overrightarrow{BE}| &= \overline{BE} \\
 &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AE} \times \cos 60^\circ} \\
 &= \sqrt{1 + \frac{1}{9} - 2 \times 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{3}
 \end{aligned}$$

02  (1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$
 (3) $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ (4) $\vec{0}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE} = \vec{b},$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} = \vec{c} \text{ 이므로}$$

$$(1) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \overrightarrow{EB} &= -\overrightarrow{BE} = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}) \\
 &= -(-\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}) \\
 &= (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{b}) = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} \\
 (4) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} \\
 &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} \\
 &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AA} \\
 &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

03  (1) $3\vec{a} + 4\vec{b}$ (2) $3\vec{a} - 8\vec{b} + 7\vec{c}$

$$\begin{aligned}
 (1) 2(\vec{3a} - \vec{b}) - 3(\vec{a} - 2\vec{b}) &= 6\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{a} + 6\vec{b} \\
 &= (6-3)\vec{a} + (-2+6)\vec{b} = 3\vec{a} + 4\vec{b} \\
 (2) 2(\vec{3a} - \vec{b} + 2\vec{c}) - 3(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) &= 6\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} - 3\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{c} \\
 &= (6-3)\vec{a} + (-2-6)\vec{b} + (4+3)\vec{c} \\
 &= 3\vec{a} - 8\vec{b} + 7\vec{c}
 \end{aligned}$$

04  ③

$$-2\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{x} = 2(\vec{x} + 3\vec{a}) \text{ 에서}$$

$$-2\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{x} = 2\vec{x} + 6\vec{a}$$

$$4\vec{x} = -8\vec{a} + 4\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$$

$$\text{따라서 } p = -2, q = 1 \text{ 이므로}$$

$$q - p = 1 - (-2) = 3$$

05  ②

두 벡터 $\vec{a} + 2\vec{b}$, $2k\vec{a} - 8\vec{b}$ 가 서로 평행하므

로 0이 아닌 실수 t 에 대하여

$$2k\vec{a} - 8\vec{b} = t(\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$\therefore 2k\vec{a} - 8\vec{b} = t\vec{a} + 2t\vec{b}$$

따라서 $2k = t$, $-8 = 2t$ 에서 $t = -4$ 이므로

$$k = t \times \frac{1}{2} = -4 \times \frac{1}{2} = -2$$

06  ③

두 벡터 $\vec{a} = (k+1, 3)$, $\vec{b} = (2, 2l-k)$ 가

서로 같으므로

$$k+1 = 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$3 = 2l - k \cdots \textcircled{2}$$

①에서 $k = 1$ 이고 이를 ②에 대입하면

$$3 = 2l - 1, 2l = 4$$

$$\therefore l = 2$$

$$\therefore k + l = 1 + 2 = 3$$

07  (1) $(-8, -1)$ (2) $(2, 7)$

$$(3) \sqrt{82}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \vec{a} - 3(\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c} \\
 &= (4, -1) - 3(3, -2) - 3(1, 2) \\
 &= (4, -1) + (-9, 6) + (-3, -6) \\
 &= (4-9-3, -1+6-6) \\
 &= (-8, -1) \\
 (2) 2(\vec{a} - 3\vec{c}) + 3(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}) &= 2\vec{a} - 6\vec{c} + 3\vec{a} - 6\vec{b} + 6\vec{c} \\
 &= 5\vec{a} - 6\vec{b} \\
 &= 5(4, -1) - 6(3, -2) \\
 &= (20, -5) + (-18, 12) \\
 &= (20-18, -5+12) \\
 &= (2, 7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} &= (4, -1) - 2(3, -2) + 3(1, 2) \\
 &= (4, -1) + (-6, 4) + (3, 6) \\
 &= (4 - 6 + 3, -1 + 4 + 6) \\
 &= (1, 9)
 \end{aligned}$$

따라서 벡터 $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ 의 크기는

$$|\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 9^2} = \sqrt{82}$$

08 **답** (1) $(-5, -3)$ (2) $\sqrt{34}$

(3) $(7, -2)$ (4) $\sqrt{53}$

$$\begin{aligned}
 (1) \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
 &= (-2, -1) - (3, 2) \\
 &= (-5, -3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) |\overrightarrow{AB}| &= |(-5, -3)| \\
 &= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} \\
 &= \sqrt{34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\
 &= (5, -3) - (-2, -1) \\
 &= (7, -2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) |\overrightarrow{BC}| &= |(7, -2)| \\
 &= \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}
 \end{aligned}$$

09 **답** (1) $3\sqrt{3}$ (2) 3 (3) 0 (4) $-3\sqrt{2}$

(1) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 30° 이

므로

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ \\
 &= 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

(2) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 60° 이

므로

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\
 &= 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3
 \end{aligned}$$

(3) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 90° 이

므로

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ \\
 &= 3 \times 2 \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

(4) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 150°

이므로

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos (180^\circ - 150^\circ) \\
 &= -3 \times 2 \times \cos 30^\circ \\
 &= -6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

10 **답** ③

정육각형 ABCDEF의 한 변의 길이가 6이

므로 $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{CB}| = 6$ 이다.

이때, 정육각형의 한 내각의 크기는 120° 이

므로 두 벡터 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}$ 가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} &= |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{CB}| \cos 60^\circ \\
 &= 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 18
 \end{aligned}$$

11 **답** (1) -21 (2) 22

$$\begin{aligned}
 (1) \vec{a} \cdot \vec{b} &= (3, 5) \cdot (-2, -3) \\
 &= 3 \times (-2) + 5 \times (-3) \\
 &= -6 - 15 = -21
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \vec{a} + \vec{b} &= (3, 5) + (-2, -3) = (1, 2) \\
 \vec{a} - \vec{b} &= (3, 5) - (-2, -3) = (5, 8) \text{ 이므로}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= (1, 2) \cdot (5, 8) \\
 &= 1 \times 5 + 2 \times 8 \\
 &= 6 + 16 = 22
 \end{aligned}$$

12 **답** ①

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ 이고 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= 2|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 \\
 &= 2 \times 2^2 + 3 - 3 \times 3^2 \\
 &= -16
 \end{aligned}$$

13 [답] ③

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}| &= 2\sqrt{3} \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 12 \\ \text{이때, } |\vec{a}| &= 2, |\vec{b}| = 4 \text{이므로} \\ 2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4^2 &= 12, 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= 4 \\ \therefore |2\vec{a}+\vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4 \times 2^2 + 4 \times 4 + 4^2 = 48 \end{aligned}$$

14 [답] (1) 45 (2) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

(1) 두 벡터 $\vec{a} = (2, 0)$, $\vec{b} = (1, 1)$ 이 이루는 각의 크기가 k° 이므로

$$\begin{aligned} \cos k^\circ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2 \times 1 + 0 \times 1}{\sqrt{2^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

따라서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기는 45° 이므로 $k = 45$ 이다.

(2) $\cos \theta$

$$\begin{aligned} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1 \times (-4) + 3 \times 2}{\sqrt{1^2 + 3^2} \sqrt{(-4)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

15 [답] (1) 6 (2) $-\frac{2}{3}$

(1) $\vec{a} \perp \vec{b}$ 이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 에서

$$\begin{aligned} 3 \times (-2) + 1 \times k &= 0 - 6 + k = 0 \\ \therefore k &= 6 \end{aligned}$$

(2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$ 에서

$$\begin{aligned} 3 \times (-2) + 1 \times k &= \pm \sqrt{3^2 + 1^2} \sqrt{(-2)^2 + k^2} \\ -6 + k &= \pm \sqrt{10} \sqrt{4 + k^2} \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$9k^2 + 12k + 4 = 0, (3k + 2)^2 = 0$$

$$\therefore k = -\frac{2}{3}$$

16 [답] ⑤

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} \text{이므로 } \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \text{에서} \\ x \times 2 + y \times (-1) &= 0 \\ 2x - y &= 0 \quad \therefore y = 2x \cdots \textcircled{1} \\ |\vec{a}| = 5 \text{에서 } \sqrt{x^2 + y^2} &= 5 \\ \therefore x^2 + y^2 &= 25 \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면} \\ x^2 + 4x^2 &= 25, 5x^2 = 25, x^2 = 5 \\ \therefore x &= \sqrt{5} \text{ 또는 } x = -\sqrt{5} \\ \text{즉, } \textcircled{1} \text{에 의하여} \\ \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = 2\sqrt{5} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ y = -2\sqrt{5} \end{cases} \text{이므로} \\ xy &= 10 \end{aligned}$$

17 [답] ②

$$\begin{aligned} \vec{a} \parallel \vec{b} \text{이므로 } 0 \text{이 아닌 상수 } t \text{에 대하여} \\ \vec{a} = t\vec{b} \text{에서} \\ (x+2, -1) &= t(-3, x-1) \\ \therefore -3t &= x+2 \cdots \textcircled{1}, \\ t(x-1) &= -1 \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \text{에서 } t &= -\frac{x+2}{3} \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면} \\ -\frac{(x+2)(x-1)}{3} &= -1 \text{에서} \\ (x+2)(x-1) &= 3 \\ \therefore x^2 + x - 5 &= 0 \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

따라서 구하는 x 의 값은 이차방정식 $\textcircled{3}$ 의 실근이므로 구하는 모든 x 의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -1 이다.

18 [답] (1) $x-2 = \frac{y-3}{2}$

$$\begin{aligned} (2) \frac{x-1}{2} &= -\frac{y-2}{3} \\ \text{또는 } \frac{x-3}{2} &= -\frac{y+1}{3} \\ (3) 2x + 3y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

- (1) 점 (2, 3)을 지나고 벡터 $\vec{u}=(1, 2)$ 에
평행한 직선의 방정식은 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}$

$$\text{에서 } x-2=\frac{y-3}{2}$$

- (2) 구하는 직선의 방향벡터는

$$\vec{BA}=(3, -1)-(1, 2)=(2, -3)\text{이므로 구하는 직선의 방정식은}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}\text{에서 } \frac{x-1}{2}=-\frac{y-2}{3}$$

$$\text{또는 } \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-3}\text{에서}$$

$$\frac{x-3}{2}=-\frac{y+1}{3}$$

- (3) 점 $(-1, 3)$ 을 지나고 벡터 $\vec{n}=(2, 3)$ 에
수직인 직선의 방정식은
 $2\{x-(-1)\}+3\{y-3\}=0$ 에서
 $2x+3y-7=0$

19 [답] $(x+1)^2+(y-2)^2=16$

점 $A(-1, 2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길
이가 4인 원 위의 점 $P(x, y)$ 에 대하여 두
점 A, P 의 위치벡터가 각각 $\vec{a}, \vec{p}$ 이므로
 $|\vec{p}-\vec{a}|=4$ 에서 양변을 제곱하면
 $(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{a})=4^2$ 이고
 $\vec{p}-\vec{a}=(x+1, y-2)$ 이므로
 $(x+1, y-2) \cdot (x+1, y-2)=16$
 $\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=16$

20 [답] 풀이 참조

$$|\vec{p}-\vec{a}|=5\text{에서 } |\vec{p}-\vec{a}|^2=25\text{이므로}$$

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{a})=25$$

한편, 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{p}-\vec{a}=(x-3, y-1)\text{이므로}$$

$$(x-3, y-1) \cdot (x-3, y-1)=25\text{에서}$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=25$$

따라서 점 P 는 중심이 $(3, 1)$ 이고 반지름의
길이가 5인 원 위의 점이다.

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 334

21 ③

22 -3

23 ③

24 2

25 ②

26 ⑤

27 ②

28 ①

21 [답] ③

$$\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| &= |\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AC}| \\ &= |\vec{AC}+\vec{AC}|=2|\vec{AC}| \\ &= 2\sqrt{AB^2+BC^2} \\ &= 2\sqrt{1^2+1^2}=2\sqrt{2} \end{aligned}$$

22 [답] -3

세 점 A, B, C 가 한 직선 위에 있으려면
 $\vec{AC}=t\vec{AB} \dots \text{㉠}$ 을 만족시키는 0이 아닌
실수 t 가 존재해야 한다. 이때,
 $\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}, \vec{OC}=\vec{m}\vec{a}+4\vec{b}$ 이므로
 $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a} \dots \text{㉡}$
 $\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(\vec{m}\vec{a}+4\vec{b})-\vec{a}$
 $= (m-1)\vec{a}+4\vec{b} \dots \text{㉢}$
 ㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면
 $(m-1)\vec{a}+4\vec{b}=t(\vec{b}-\vec{a})$
 $\therefore (m-1)\vec{a}+4\vec{b}=-4\vec{a}+t\vec{b}$
한편, 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로
평행하지 않으므로 $m-1=-t, 4=t$
 $\therefore m=-t+1=-3$

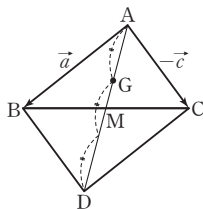
23 [답] ③

그림과 같이 꼭짓
점 B, C 를 각각 지
나고 선분 $AB,$
 AC 에 평행한 선
분이 만나는 점을
 D 라 하면

$$\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{a}+(-\vec{c})$$

$$\therefore \vec{AG}=\frac{1}{3}\vec{AD}=\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{c})$$

무계중심 G 는 꼭짓점으로부터
중선을 2:1로 내분한다.



24 답 2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x, 2\sqrt{3}) \cdot (1, 0)$$

$$= x \times 1 + 2\sqrt{3} \times 0 = x \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2 + 12},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = \sqrt{x^2 + 12} \times 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 12}}{2} \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \text{이므로 } x = \frac{\sqrt{x^2 + 12}}{2} \text{에서}$$

$$2x = \sqrt{x^2 + 12}, \quad 4x^2 = x^2 + 12, \quad 3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4 \quad \therefore x = 2 (\because x > 0)$$

25 답 2

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(a, a^2), (b, b^2)$

이라 하면

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = ab + a^2b^2$$

이때, $ab = t$ 라 하면

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = t + t^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

따라서 t 는 임의의 실수이므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 는

$$t = -\frac{1}{2} \text{일 때, 최솟값 } -\frac{1}{4} \text{을 갖는다.}$$

26 답 5

$\sqrt{3}|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$3|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 \text{에서}$$

$$3(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = -8\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= -8|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

이때, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 이므로

$$4|\vec{a}|^2 = -8|\vec{a}|^2 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

따라서 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기는

$\theta = 120^\circ$ 이다.

27 답 2

$$4\vec{a} - \vec{b} = 4(1, 2) - (x, -1) = (4-x, 9)$$

$$\vec{a} - 3\vec{b} = (1, 2) - 3(x, -1) = (1-3x, 5)$$

이때, 두 벡터 $4\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b}$ 가 서로 평행하

므로 0이 아닌 실수 k 에 대하여

$$4\vec{a} - \vec{b} = k(\vec{a} - 3\vec{b}) \text{에서}$$

$$(4-x, 9) = k(1-3x, 5)$$

즉, $9 = 5k$ 에서 $k = \frac{9}{5}$ 이므로

$4-x = k(1-3x)$ 에 대입하면

$$4-x = \frac{9}{5}(1-3x), \quad \frac{22}{5}x = -\frac{11}{5}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

28 답 1

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}$$

$$= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP})$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OP}$$

$$= (1, 2) + (5, 0) + 2(-1, 3) - 4(x, y)$$

$$= (4-4x, 8-4y)$$

이때, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}$ 의 크기가 4이므로

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}| = 4 \text{에서}$$

$$\sqrt{(4-4x)^2 + (8-4y)^2} = 4$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$16(1-x)^2 + 16(2-y)^2 = 16$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

점 P는 중심이 (1, 2)이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

05 답 ④

단면인 타원의 장축의 길이는

$$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\text{이므로 타원과 밑면이 이루는}$$

$$\text{각의 크기를 } \theta \text{라 하면 } \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

이때, 단면의 타원의 넓이를 S 라 하고 밑면의 넓이를 S' 이라 하면 $S'=S\cos \theta$ 에서

$$S = \frac{S'}{\cos \theta} = \frac{\pi}{\frac{2}{\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{13}}{2}\pi$$

06 답 ④

$$\overline{AB} = \sqrt{(2a-0)^2 + (-1-1)^2 + (0-2)^2} \\ = \sqrt{4a^2+8}$$

$$\overline{BC} \\ = \sqrt{\{0-(-1)\}^2 + (1-2)^2 + \{2-(a+1)\}^2} \\ = \sqrt{a^2-2a+3}$$

이때, $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 에서

$$\sqrt{4a^2+8} = 2\sqrt{a^2-2a+3}$$

양변을 제곱하면

$$4a^2+8=4a^2-8a+12, 8a=4$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

07 답 ③

yz 평면 위의 점의 x 좌표는 0이므로 점 P의

좌표를 $(0, y, z)$ 라 하면 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 에서

$$(0-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2$$

$$= (0-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2$$

$$1+y^2+z^2-2z+1=4+y^2+z^2, 2z=-2$$

$$\therefore z = -1$$

또, $\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$ 에서

$$(0-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2$$

$$= \{0-(-1)\}^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$$

$$2y = -4z+9=13 \quad \therefore y = \frac{13}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(0, \frac{13}{2}, -1)$ 이다.

08 답 ⑤

점 A(1, 2, 3)을 y 축에 대하여 대칭이동한

점 B의 좌표는 $(-1, 2, -3)$ 이고 $\rightarrow x$ 좌표, z 좌표의 부호를 바꿈

점 B $(-1, 2, -3)$ 을 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는 $(-1, -2, -3)$ 이므로 $\rightarrow y$ 좌표의 부호를 바꿈

$$a+b+c = (-1)+(-2)+(-3) = -6$$

09 답 ⑤

두 점 A(1, 2, 3), B(-1, 2, 5)에 대하여

선분 AB를 1:2로 내분하는 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-1) + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 2 + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 5 + 2 \times 3}{1+2} \right)$$

$$\text{에서 } \left(\frac{1}{3}, 2, \frac{11}{3} \right)$$

또, C(4, -2, 3), D(2, 0, 3)에 대하여

선분 CD를 2:1로 외분하는 점 N의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 - 1 \times 4}{2-1}, \frac{2 \times 0 - 1 \times (-2)}{2-1}, \frac{2 \times 3 - 1 \times 3}{2-1} \right)$$

에서 $(0, 2, 3)$

$$\therefore \overline{MN}$$

$$= \sqrt{\left(0-\frac{1}{3}\right)^2 + (2-2)^2 + \left(3-\frac{11}{3}\right)^2} \\ = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

10 답 4

두 점 A(2, -1, 3), B(3, 2, -1)에 대하여

선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점 P의

좌표는

$$\left(\frac{3m+2n}{m+n}, \frac{2m-n}{m+n}, \frac{-m+3n}{m+n} \right) \text{이고}$$

점 P가 xy 평면 위의 점이므로 점 P의 z 좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{-m+3n}{m+n} = 0 \text{에서 } m=3n \quad \begin{matrix} \rightarrow m=3n \text{에서} \\ m:n=3:1 \end{matrix}$$

이때, m, n 은 서로소인 자연수이므로

$$m=3, n=1$$

$$\therefore m+n=3+1=4$$

11 답 11

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{2+4+0}{3}, \frac{6+3+3}{3}, \frac{1+2+15}{3} \right).$$

즉 (2, 4, 6)이다.

이때, 선분 DG를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 7}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times (-3)}{2+1} \right)$$

에서 (3, 5, 3)이다.

$$\therefore a+b+c=3+5+3=11$$

12 답 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$

구하는 구의 반지름의 길이를 r 라 하면

중심이 C(1, -2, 3)이므로 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + \{y - (-2)\}^2 + (z-3)^2 = r^2$$

에서

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = r^2$$

이 구가 점 P(3, 1, 2)를 지나므로

$$(3-1)^2 + (1+2)^2 + (2-3)^2 = r^2$$

$$r^2=14$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14 \text{이다.}$$

13 답 $k < -4$ 또는 $k > 3$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2ky + 6z - k + 22 = 0$$

에서

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2ky + k^2 + z^2 + 6z + 9$$

$$= k^2 + k - 12$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-k)^2 + (z+3)^2$$

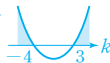
$$= k^2 + k - 12$$

이 방정식이 구의 방정식이 되려면

$$k^2 + k - 12 > 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } (k+4)(k-3) > 0 \text{에서}$$

$$k < -4 \text{ 또는 } k > 3$$



14 답 $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$

yz 평면에 접하는 구의 반지름의 길이는 구의

중심인 점 C(-1, 2, 4)의 x 좌표의 절댓값

과 같으므로 구하는 구의 반지름의 길이는 1

이다.

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 1 \text{이다.}$$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 346

15 6

16 ③

17 32

18 108

19 ④

20 ⑤

21 6

22 ②

15 답 6

(i) 두 직선 FG와 CE는 꼬인 위치에 있으므로 평면을 결정하지 못한다.

(ii) 세 점 A, B, H는 한 평면을 결정한다.

(iii) 직선 FG와 세 점 A, B, H는 각각 한 평면을 결정하고 이때 결정되는 세 평면은 모두 다르다.

(iv) 직선 CE와 세 점 A, B, H는 각각 한 평면을 결정하지만 평면 BCE와 평면 HCE는 같은 평면이므로 이때 결정되는 평면은 2개이다.

(i)~(iv)에 의하여 구하는 평면의 개수는

$$1+3+2=6 \text{이다.}$$

16 답 ③

선분 DH는 밑면 EFGH에 수직이고
 $\overline{DI} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여
 $\overline{HI} \perp \overline{EG}$

이때, 직각삼각형 EFG에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{EG} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{이고}$$

직각삼각형 HEG의 넓이에 의하여

$$\frac{1}{2} \times \overline{HE} \times \overline{HG}$$

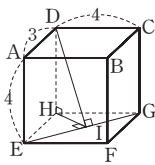
$$= \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{HI}$$

$$\therefore \overline{HI} = \frac{12}{5}$$

또한, $\overline{DH} \perp \overline{HI}$ 이므로 직각삼각형 DHI에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{DI} = \sqrt{\overline{HI}^2 + \overline{DH}^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 4^2} = \frac{4\sqrt{34}}{5}$$



17 답 32

그림과 같이 점 A에서
 밑면 EBCD에 내린
 수선의 발을 H라 하면
 네 삼각형 ABC,
 ACD, ADE, AEB

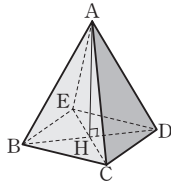
의 평면 BCDE 위로의 정사영이 각각 네
 삼각형 HBC, HCD, HDE, HEB이고 각
 정사영의 넓이를 S_1, S_2, S_3, S_4 라 하면

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \square BCDE = 4 \times 4 = 16$$

따라서 사각뿔 A-BCDE의 옆넓이를 S라
 하면

$$S \cos 60^\circ = \square BCDE \text{이므로 } \frac{1}{2}S = 16$$

$$\therefore S = 32$$



18 답 108

평면 ABC와 평면 BEG가 이루는 예각의
 크기를 θ 라 하면 평면 EFG와 평면 BEG가
 이루는 예각의 크기도 θ 이다. 즉, 두 선분
 EG와 FH의 교점을 I라 하면 두 점 B와 F
 에서 선분 EG에 내린 수선의 발이 I이므로
 $\angle BIF = \theta$ 이다. 삼수선의 정리에 의하여

이때, 직각삼각형 BIF에서

$$\overline{FI} = \frac{1}{2} \overline{FH} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{BI} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{FI}^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{6}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{FI}}{\overline{BI}} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{한편, } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18 \text{이므로}$$

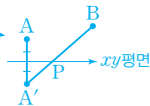
$$S = \triangle ABC \times \cos \theta = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore S^2 = (6\sqrt{3})^2 = 108$$

19 답 ④

점 A를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을
 A' 이라 하면 점 A' 의 좌표는 $(1, 1, -2)$ 이
 다. 이때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은
 $\overline{A'P} + \overline{BP}$ 의 최솟값인 선분 $\overline{A'B}$ 의 길이와
 같다.

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(1-4)^2 + (1-5)^2 + (-2-6)^2} \\ &= \sqrt{89} \end{aligned}$$



20 답 ⑤

점 A(2, 3, 4)와 x 축에 대하여 대칭인 점 P의 좌표는 (2, -3, -4) y 좌표, z 좌표 부호 반대

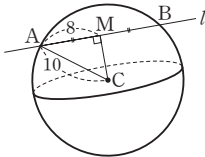
점 A(2, 3, 4)와 yz 평면에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는 (-2, 3, 4) x 좌표 부호 반대

따라서 선분 PQ를 2:1로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-2) - 1 \times 2}{2-1}, \frac{2 \times 3 - 1 \times (-3)}{2-1}, \frac{2 \times 4 - 1 \times (-4)}{2-1} \right)$$

에서 (-6, 9, 12)이다.

21 답 6



$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 6y - 8z - 50 = 0$ 에서
 $(x-5)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 100$ 이므로
 이 구의 중심을 C, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\overline{AC} = 10, \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 8$$

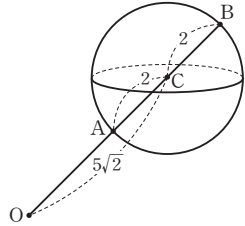
이때, 삼각형 ACM은 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

따라서 구의 중심에서 직선 l 까지의 거리는 6이다.

22 답 ②

그림과 같이 원 점과 구의 중심 C를 이은 선분의 연장선이 구와 만나는 두 점을 A, B라 하면 두



선분 OA, OB의 길이가 각각 구 위의 점에서 원점에 이르는 거리의 최솟값과 최댓값이다.

이때, 구의 중심 C의 좌표는 (3, 4, 5)이고

$$\overline{OC} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

따라서 구의 반지름의 길이가 2이므로

$$m = \overline{OA} = \overline{OC} - \overline{AC} = 5\sqrt{2} - 2$$

$$M = \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{BC} = 5\sqrt{2} + 2$$

$$\therefore M - m = (5\sqrt{2} + 2) - (5\sqrt{2} - 2) = 4$$

수능 1등급을 위한 절대평가 키워드 시리즈



절대평가 키워드 독해 - 절대평가, 1등급을 완성한다!



구문독해 (20일 완성)

- 기본 구문 유형 마스터
- 쉽고 빠른 문장 해석 비법
- 학습한 구문이 적용된 독해 필수 유형 문제



유형독해 (20일 완성)

- 독해 유형 전략 마스터
- 독해 원리와 해법 적용
- 정답과 오답을 가려내는 단서 찾기 훈련



1등급 독해 (24일 완성)

- 고난도 3점 유형 마스터
- 고난도 유형만의 풀이전략과 실전 연습문제
- 매력적인 오답의 원리 이해와 해결 전략



절대평가 키워드 듣기 35회 모의고사 - 연습을 실천처럼!!



| 절대평가 듣기 실전 모의고사 35회 |

- Step 1** 절대평가 수능 유형 정복 - 유형 강화 모의고사 5회
- Step 2** 새수능 난이도 분석 - 적중 실전 모의고사 25회
- Step 3** 고난도 문제 집중 훈련 - 1등급 모의고사 5회
- Step 4** 기본 실력 상승 연습 - Dictation / 어휘 Review Test



절대평가 문법 기본 - 내신 + 수능 기본 문법 25일 완성



| 절대평가 문법 기본 |

- Step 1** 고등 필수 영문법 개념 단계별 정리
 - Step 2** 문법 이해와 적용 - 유형별 적용 훈련 코스
(Grammar Check-up, 단원 종합 문제, 수능 어법 유형 Master, 실전 테스트)
 - Step 3** 문법 학습을 바탕으로 한 1등급 독해 실력 상승
- * 독해의 기본 문법을 단계별로 정리해서 완벽한 독해력을 완성한다.