



형상기억 공식집

[정답 및 해설]

차례

[수학 I]

I. 지수함수와 로그함수	2
II. 삼각함수	13
III. 수열	22

[수학 II]

I. 함수의 극한과 연속	30
II. 미분	35
III. 적분	47

[확률과 통계]

I. 여러 가지 순열	58
II. 확률	64
III. 통계	70

수능 수학 개념과 공식이 머릿속에 통째로 기억된다!

수학 I

I. 지수함수와 로그함수

01 거듭제곱과 제곱근 ~

08 상용로그의 응용

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 10

01 $\perp, \square$	02 1	
03 풀이 참조	04 ②	05 ①
06 풀이 참조	07 ③	08 ②
09 ④	10 ①	
11 (1) $x=8$ (2) $y=9$	12 $\frac{26}{5}$	
13 ④	14 ⑤	15 ③
16 ④	17 ①	18 $\frac{5}{6}$
19 (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\bigcirc$ (4) $\times$		
20 (1) 1 (2) 2 (3) -1	21 ②	
22 ④	23 ④	24 ⑤

01 답 $\perp, \square$

ㄱ. 0의 제곱근은 0 하나이고, 음수의 제곱근은 없다.

ㄴ. 5의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$ 로 2개이다.

ㄷ. 제곱근 4는 2이다.

ㄹ. -9는 음수이므로 제곱근은 없다.

ㅁ. $\sqrt{16}=4$ 이므로 $\sqrt{16}$ 의 제곱근은 ± 2 이다.

02 답 1

$0 < -a < 1, 0 < a+1 < 1$ 이므로

(주어진 식) $= (-a) + (a+1) = 1$

03 답 (1) a^7 (2) x^{15}

(3) a^6b^3 (4) x^5

(5) $\frac{81a^{20}}{b^8}$ (6) $8x^5y^3$

$$(1) a^4 \times a^3 = a^{4+3} = a^7$$

$$(2) (x^3)^5 = x^{3 \times 5} = x^{15}$$

$$(3) (a^2b)^3 = a^{2 \times 3} \times b^3 = a^6b^3$$

$$(4) x^8 \div x^3 = x^{8-3} = x^5$$

$$(5) \left(\frac{3a^5}{b^2}\right)^4 = \frac{3^4 a^{5 \times 4}}{b^{2 \times 4}} = \frac{81a^{20}}{b^8}$$

$$(6) (4xy)^2 \times (x^2y)^3 \div 2x^3y^2$$

$$= \frac{16x^2y^2 \times x^6y^3}{2x^3y^2} = \frac{16x^8y^5}{2x^3y^2}$$

$$= 8 \times \frac{x^8}{x^3} \times \frac{y^5}{y^2} = 8x^5y^3$$

04 답 ②

ㄱ. 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}=2$ (참)

ㄴ. -16의 네제곱근은 없다. (거짓)

ㄷ. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[6]{8}$ (참) 네제곱해서 -16이 되는 실수는 없다. (단, 허수는 존재)

ㄹ. $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ (거짓)

05 답 ①

$$\left\{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{4}{9}} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{3 \times \frac{3}{2}}\right\}^{\frac{4}{9}} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{9}{2}}\right\}^{\frac{4}{9}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{9}{2} \times \frac{4}{9}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

06 답 (1) 5 (2) 2

(3) $5^5\sqrt{3}$ (4) $2^3\sqrt{2}$

$$(1) \sqrt[3]{25} \times \sqrt{5} = \sqrt[3]{25 \times 5} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$(2) \sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$(3) \sqrt[5]{729} + 2^5\sqrt{3} = \sqrt[5]{3^6} + 2^5\sqrt{3}$$

$$= 3^5\sqrt{3} + 2^5\sqrt{3}$$

$$= 5^5\sqrt{3}$$

$$(4) \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^7} - \sqrt[3]{2^4}$$

$$= \sqrt[3]{2^6} \times \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2}$$

$$= 4^3\sqrt{2} - 2^3\sqrt{2}$$

$$= 2^3\sqrt{2}$$

07 답 ③ $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$
이차방정식 $x^2-2x-6=0$ 의 근과 계수의
관계에 의하여 $\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-6$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore 2^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

08 답 ②

$$a+a^{-1} = \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - 2 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} = 3^2 - 2 = 7$$

$$a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^3 - 3 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} \times \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 3^3 - 3 \times 3 = 18$$

$$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 2}{a + a^{-1} + 3} = \frac{20}{10} = 2$$

09 답 ④

$$13^x = 9 \text{에서 } 13^x = 3^2$$

$$\therefore 13 = 3^{\frac{2}{x}} \cdots \textcircled{1}$$

$$117^y = 27 \text{에서 } 117^y = 3^3$$

$$\therefore 117 = 3^{\frac{3}{y}} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } 3^{\frac{2}{x}} \div 3^{\frac{3}{y}} = \frac{13}{117}$$

$$3^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} = \frac{1}{9} = 3^{-2} \quad \therefore \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -2$$

10 답 ①

밑과 진수 조건에 의하여

$$x-2 > 0, x-2 \neq 1 \quad \therefore x > 2, x \neq 3 \cdots \textcircled{1}$$

$$-x^2 + 8x - 12 > 0, x^2 - 8x + 12 < 0$$

$$(x-2)(x-6) < 0 \quad \therefore 2 < x < 6 \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 모두 만족시키는 정수 x 의 값은 4, 5이므로 이들의 합은 9이다.

11 답 (1) $x=8$ (2) $y=9$

$$(1) \log_{\frac{1}{2}} x = -3 \quad \therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

$$(2) \log_y \sqrt{3} = \frac{1}{4} \text{에서 } \sqrt{3} = y^{\frac{1}{4}} \quad \therefore y = (\sqrt{3})^4 = 9$$

12 답 $\frac{26}{5}$

$$a = \log_3 5 \text{에서 } 3^a = 5$$

$$\therefore 3^a + 3^{-a} = 3^a + \frac{1}{3^a} = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$$

13 답 ④

$$\begin{aligned} \log_3 \sqrt{2} - 2 \log_3 \frac{1}{3} - \log_3 \sqrt{6} \\ &= \frac{1}{2} \log_3 2 - 2 \times (-1) - \frac{1}{2} \log_3 6 \\ &= \frac{1}{2} (\log_3 2 - \log_3 6) + 2 = \log_3 \sqrt{\frac{2}{6}} = \log_3 \sqrt{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{3} + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

14 답 ⑤

$$\begin{aligned} \log_{10} 36 &= \log_{10} 6^2 = 2 \log_{10} 6 \\ &= 2(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 2(a+b) \\ &= 2 \log_a M N = \log_a M + \log_a N \end{aligned}$$

15 답 ③

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 \frac{5}{4} + \cdots + \log_2 \frac{64}{63} \\ &= \log_2 \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{64}{63} \right) \\ &= \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \end{aligned}$$

16 답 ④

$$\begin{aligned} 2^x &= 3 \text{에서 } x = \log_2 3 \\ 3^y &= 8 \text{에서 } y = \log_3 8 = \log_3 2^3 = 3 \log_3 2 \\ \therefore xy &= \log_2 3 \times 3 \log_3 2 = 3 \end{aligned}$$

17 ① 로그의 합은 진수의 곱셈,
로그의 차는 진수의 나눗셈

$$\begin{aligned} \log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 40 \\ &= \log_2 \left(10 \times 12 \times \frac{1}{40} \right) = \log_2 3 \\ \therefore \frac{2^{\log_2 3}}{a^{\log_2 b} = b^{\log_2 a}} &= 3^{\log_2 2} = 3 \end{aligned}$$

18 $\frac{5}{6}$

$$\begin{aligned} &(\log_3 5 + \log_{27} 25)(\log_5 9 - \log_{25} 27) \\ &= \left(\log_3 5 + \frac{2}{3} \log_3 5 \right) \left(2 \log_5 3 - \frac{3}{2} \log_5 3 \right) \\ &= \frac{5}{3} \log_3 5 \times \frac{1}{2} \log_5 3 \\ &= \frac{5}{6} \log_3 5 \times \log_5 3 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

19 (1) × (2) ×
(3) ○ (4) ×

20 (1) 1 (2) 2
(3) -1

$$\begin{aligned} (1) \log 2 + \log 5 &= \log 10 = 1 \\ (2) \log \frac{25}{4} + \log 16 &= \log \left(\frac{25}{4} \times 16 \right) = \log (25 \times 4) \\ &= \log 100 = 2 \\ (3) \log \frac{2}{25} - \log \frac{4}{5} &= \log \left(\frac{2}{25} \times \frac{5}{4} \right) = \log \frac{1}{10} = -1 \end{aligned}$$

21 ②

$$\begin{aligned} \log_5 108 &= \frac{\log 108}{\log 5} = \frac{\log (2^2 \times 3^3)}{1 - \log 2} \\ &= \frac{2 \log 2 + 3 \log 3}{1 - \log 2} \\ &= \frac{2a + 3b}{1 - a} \end{aligned}$$

22 ④

$$\begin{aligned} \log 5^{30} &= 30 \log 5 = 30 \log \frac{10}{2} \\ &= 30(\log 10 - \log 2) \\ &= 30(1 - 0.3010) \\ &= 20.97 \end{aligned}$$

$\log 5^{30}$ 의 정수 부분이 20이므로 5^{30} 은 21자리 수이다.

23 ④

$$\begin{aligned} &\log x^2 + \log^3 \sqrt{x} \\ &= 2 \log x + \frac{1}{3} \log x = \frac{7}{3} \log x \\ &= \frac{7}{3} \times (-1.3893) = -3.2417 \\ &= -4 + 0.7583 \\ &\text{따라서 } n = -4, a = 0.7583 \text{이므로} \\ &n - a = -4.7583 \end{aligned}$$

24 ⑤

$$\begin{aligned} &10 < x < 100 \text{이므로} \\ &\log 10 < \log x < \log 100 \\ &\therefore 1 < \log x < 2 \cdots \text{㉠} \\ &\log x \text{의 소수 부분과 } \log x^3 \text{의 소수 부분이} \\ &\text{같으므로} \\ &\log x^3 - \log x = (\text{정수}) \text{에서} \\ &2 \log x = n (n \text{은 정수}) \text{이라 하면} \\ &\log x = \frac{n}{2} \\ &\text{㉠에 의하여 } 1 < \frac{n}{2} < 2 \text{이므로 } 2 < n < 4 \end{aligned}$$

n 이 정수이므로

$$\begin{aligned} n &= 3 \text{이고 } \log x = \frac{3}{2} \\ \therefore x &= 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10} \end{aligned}$$

종합 연습 문제

정답

문제편 p. 26

25 5

26 14

27 ④

28 ②

29 ②

30 1

31 6

32 ⑤

25 답 5

$$\sqrt[3]{a^4} = \sqrt{a^3 \sqrt{a^k}} \text{에서}$$

우변을 정리하면

$$\sqrt{a^3 \sqrt{a^k}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{3+k}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{3+k}{3}}} \text{이므로}$$

$$a^4 = \sqrt{a^{3+k}} \quad \rightarrow k > 0 \text{일 때 } k^a \sqrt{a} = \sqrt[k^a]{k^a a}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } a^8 = a^{3+k}$$

$$\therefore k = 5 \quad \rightarrow \text{지수를 비교하면 } 8 = 3 + k$$

26 답 14

$$2^x = a \text{에서 } 2 = a^{\frac{1}{x}} \cdots \textcircled{1}$$

$$7^y = a \text{에서 } 7 = a^{\frac{1}{y}} \cdots \textcircled{2}$$

$$14^z = a \text{에서 } 14 = a^{\frac{1}{z}} \cdots \textcircled{3}$$

① × ② × ③을 하면

$$2 \times 7 \times 14 = a^{\frac{1}{x}} \times a^{\frac{1}{y}} \times a^{\frac{1}{z}}$$

$$a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 14^2, \quad a^2 = 14^2$$

$$\therefore a = 14 \quad (\because a > 0)$$

27 답 ④

이차방정식 $x^2 - 8x + 5 = 0$ 에서

$$\alpha + \beta = 8, \quad \alpha\beta = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_5(\alpha + 2) + 2\log_{25}(\beta + 2) \\ &= \log_5(\alpha + 2) + \log_5(\beta + 2) \\ &= \log_5(\alpha + 2)(\beta + 2) \\ &= \log_5\{\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4\} \\ &= \log_5(5 + 2 \times 8 + 4) \\ &= \log_5 25 = \log_5 5^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

28 답 ②

$$99 \leq \log A^{20} < 100 \text{이므로 } 4.95 \leq \log A < 5$$

$$-5 < -\log A \leq -4.95$$

$$-5 < \log \frac{1}{A} \leq -4.95$$

$$-5 < \log \frac{1}{A} \leq -5 + 0.05$$

따라서 $\log \frac{1}{A}$ 의 정수 부분은 -5 이므로 $\frac{1}{A}$ 은 소수점 아래 5째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

29 답 ②

$$(i) x^4 = y^6 \text{에서 } y = (x^4)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{2}{3}} \text{이므로}$$

$$A = \log_x y = \log_x x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_x x = \frac{2}{3}$$

$$(ii) y^6 = z^{10} \text{에서 } z = (y^6)^{\frac{1}{10}} = y^{\frac{3}{5}} \text{이므로}$$

$$B = \log_y z = \log_y y^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \log_y y = \frac{3}{5}$$

$$(iii) z^{10} = x^4 \text{에서 } x = (z^{10})^{\frac{1}{4}} = z^{\frac{5}{2}} \text{이므로}$$

$$C = \log_z x = \log_z z^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log_z z = \frac{5}{2}$$

(i)~(iii)에 의하여

$$A = \frac{2}{3} = \frac{20}{30}, \quad B = \frac{3}{5} = \frac{18}{30}, \quad C = \frac{5}{2} = \frac{75}{30}$$

이므로 $B < A < C$

30 답 1

로그의 성질에 의하여 $\log_a a^n = \frac{n}{m}$ 임을 이용한다. (단, $a > 0, a \neq 1$)

$$\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \frac{2}{2} \log_2 3 = \log_2 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &(\log_{48} 2)(\log_2 6 + 2^{\log_2 9}) \\ &= (\log_{48} 2)(\log_2 6 + 2^{\log_2 3}) \\ &= (\log_{48} 2)(\log_2 6 + 3^{\log_2 2}) \\ &= (\log_{48} 2)(\log_2 6 + 3) \\ &= (\log_{48} 2)(\log_2 6 + \log_2 8) \\ &= (\log_{48} 2)(\log_2 48) \\ &= (\log_{48} 2) \left(\frac{1}{\log_{48} 2} \right) = 1 \end{aligned}$$

31 [답] 6

이차방정식 $x^2 - 15x + 5 = 0$ 의 두 근이 $\log a, \log b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log a + \log b = 15$$

$$(\log a)(\log b) = 5$$

따라서 구하는 값은

$$\log_{\sqrt{a}} 10 - \log_b 0.01$$

$$= \log_{a^{\frac{1}{2}}} 10 - \log_b 10^{-2}$$

$$= \frac{2\log_a 10 + 2\log_b 10}{2}$$

로그의 밑의 변환 공식 $\log_a 10 = \frac{1}{\log a}$ 을 이용한다.

$$= 2 \left(\frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log b} \right)$$

$$= 2 \times \frac{\log a + \log b}{(\log a)(\log b)}$$

$$= 2 \times \frac{15}{5} = 6$$

32 [답] ⑤

상용로그표에서

$$\log 1.33 = 0.1239, \log 1.01 = 0.0043$$

이므로

로그의 성질 $\log MN = \log M + \log N$ 을 이용한다. (단, $M > 0, N > 0$)

$$\log(13.3 \times 10.1)$$

$$= \log(1.33 \times 1.01 \times 10^2)$$

$$= \log 1.33 + \log 1.01 + \log 10^2$$

$$= 0.1239 + 0.0043 + 2$$

$$= 2.1282$$

09 지수함수와 그 그래프 ~

17 지수함수와 로그함수의 응용

핵심 개념 문제 [정답]

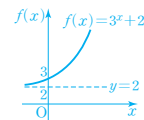
문제편 p. 28

- | | | |
|---|--------------------------|------|
| 33 ③ | 34 ④ | 35 ③ |
| 36 4 | 37 ② | |
| 38 풀이 참조 | | |
| 39 (1) $x=1$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$ | | |
| 40 ⑤ | 41 풀이 참조 | 42 ③ |
| 43 ① | 44 ③ | 45 ② |
| 46 풀이 참조 | | |
| 47 최댓값 : 6, 최솟값 : 4 | 48 -8 | |
| 49 ③ | 50 $x = -3$ 또는 $x = 6$ | |
| 51 ② | 52 ③ | |
| 53 (1) $x \geq 1$ (2) $2 < x \leq 4$ (3) $2 < x \leq 3$ | | |
| 54 ② | 55 81 | 56 8 |
| 57 ③ | 58 $\frac{1}{4} < x < 2$ | |

33 [답] ③

- I. $x=0$ 을 대입하면
- $$f(0) = 3^0 + 2 = 1 + 2 = 3 \quad \leftarrow (가)$$
- II. 점근선의 방정식은 $y = 2 \quad \leftarrow (나)$
- III. 함수 $y = 3^x + 2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = 3^x$ 이 된다. $\leftarrow (다)$
- 따라서 $a=3, b=2, c=-2$ 이므로
- $$a+b+c=3 \text{이다.}$$

$f(x) = 3^x + 2$ 의 그래프의 개형을 그리면



34 [답] ④

함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=3^{x+1}+4$

이때, 함수 $y=3^{x+1}+4$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=-3^{x+1}-4 \quad \therefore a=-3, b=-4$$

$$\therefore a+b=-3+(-4)=-7$$

35 [답] ③

$$y=4^x \times 3^{1-x}=4^x \times 3 \times 3^{-x}=3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^x$$

이므로 주어진 함수는 증가함수이다.

$\frac{4}{3} > 1$ 이니까 증가함수이다.

따라서 $x=-1$ 일 때 최솟값 $m=\frac{9}{4}$,

$x=1$ 일 때 최댓값 $M=4$ 를 갖는다.

$$\therefore M-m=\frac{7}{4}$$

36 [답] 4

$y=4 \times 3^x - 9^x$ 에서 $3^x=t (t>0)$ 로 치환하면 $y=4t-t^2 (t>0)$

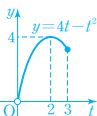
또한, $x \leq 1$ 이므로 $0 < t \leq 3$

$$y=4t-t^2$$

$$=-(t^2-4t+4)+4$$

$$=-(t-2)^2+4$$

따라서 $t=2$ 일 때, 최댓값 4 를 갖는다.



37 [답] ②

$a > 1$ 이므로 함수 $y=a^{x+2}$ 은 증가함수이다.

즉, $f(x)=a^{x+2}$ 이라 하면 $x=-4$ 일 때,

함수 $f(x)$ 는 최솟값을 가지므로

$$f(-4)=\frac{1}{16}$$

$$f(-4)=a^{-2}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{16}, a^2=16$$

$$\therefore a=4 (\because a > 1)$$

38 [답] (1) $x=2$ (2) $x=-1$

$$(3) x=\frac{1}{3}$$

$$(4) x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

$$(1) 2^{x+3}=2^5 \text{에서 } x+3=5$$

$$\therefore x=2$$

$$(2) 3^{-(3x-1)}=3^4 \text{에서 } -3x+1=4$$

$$\therefore x=-1$$

$$(3) 5^{x-3}=5^{-2(x+1)} \text{에서 } x-3=-2x-2$$

$$3x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{3}$$

$$(4) 2^{2-2x}=2^{2(x^2-5)} \text{에서 } 2-2x=2x^2-10$$

$$x^2+x-6=0, (x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

39 [답] (1) $x=1$

$$(2) x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$$(1) 2^x + \frac{4}{2^x} = 4 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 4 \times 2^x + 4 = 0$$

이때, $2^x=t (t>0)$ 로 치환하면

$$t^2 - 4t + 4 = 0, (t-2)^2 = 0$$

$$\therefore t=2$$

$$\text{즉, } 2^x=2 \text{이므로 } x=1$$

$$(2) \frac{27}{3^x} + 3^x = 12 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 = 0$$

이때, $3^x=t (t>0)$ 로 치환하면

$$t^2 - 12t + 27 = 0, (t-3)(t-9) = 0$$

$$\therefore t=3 \text{ 또는 } t=9$$

$$t=3^x=3 \text{이면 } x=1$$

$$t=3^x=9=3^2 \text{이면 } x=2$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

40 [답] ⑤

$2^{2x-1} - 2^{x+2} + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자.

$$\frac{1}{2} \times (2^x)^2 - 4 \times 2^x + 5 = 0$$

$2^x + X (X > 0)$ 라 하면 $X^2 - 8X + 10 = 0$

이 이차방정식의 두 근은 $2^a, 2^b$ 이다.

두 근의 곱 $2^a \times 2^b = 10$ 이므로 $2^{a+b} = 10$

$\therefore a+b = \log_2 10$ 지수의 합을 구하므로 2^a 과 2^b 의 곱을 구한다.

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ 임을 이용한다.

41 **답** (1) $x \geq 3$ (2) $x > 2$
(3) $x > -2$ (4) $0 \leq x \leq 1$

(1) $3^x \geq 3^3$ 에서 $x \geq 3$

(2) $2^{2x} > 2^4$ 에서 $2x > 4 \quad \therefore x > 2$

(3) $3^{-(2x-1)} < 3^5$ 에서 $-2x+1 < 5$

$\therefore x > -2$

(4) $\left(\frac{5}{4}\right)^{x^2+2} \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{-(x-2)}$ 에서

$x^2+2 \leq x+2, x^2-x \leq 0$

$x(x-1) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq x \leq 1$

42 **답** ③

$9^{x^2+x} \leq 3^{3x+1}$ 에서 $3^{2x^2+2x} \leq 3^{3x+1}$

$2x^2+2x < 3x+1, 2x^2-x-1 \leq 0$

밑=3>1이니까 부등호
방향은 그대로!

$(2x+1)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

따라서 $a = -\frac{1}{2}, b = 1$ 이므로 $a+b = \frac{1}{2}$

43 **답** ①

$(5^x)^2 - 6 \times 5^x + 5 < 0$ 에서 $5^x = X (X > 0)$

로 치환하며

$X^2 - 6X + 5 < 0, (X-1)(X-5) < 0$

$1 < X < 5, 1 < 5^x < 5 \quad \therefore 0 < x < 1$

$5^0 < 5^x < 5^1$

44 **답** ③

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_2(4x-8) = \log_2 4(x-2)$

$= \log_2 4 + \log_2(x-2)$

$= \log_2(x-2) + 2$

$\therefore a=2, b=2 \quad \therefore ab=4$

45 **답** ②

$y = \log_2(x-1) + 2$ 에서

$y-2 = \log_2(x-1)$

$x-1 = 2^{y-2}$

$\therefore x = 2^{y-2} + 1$ $N = \log_a M \Leftrightarrow M = a^N$

즉, 역함수는 $y = 2^{x-2} + 1$ 이므로

$p = -2, q = 1$ 위 식에서 x 와 y 를 바꾸면 역함수이다.

$\therefore p+q = -1$

46 **답** (1) $1, \log_4 9, 2\log_2 3$

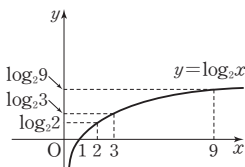
(2) $\log_{\frac{1}{3}} 8, \log_3 25, \log_3 7$

(1) 주어진 로그의 밑을 모두 2로 바꾸면

$1 = \log_2 2,$

$2\log_2 3 = \log_2 9,$

$\log_4 9 = \log_2 3^2 = \log_2 3$



따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

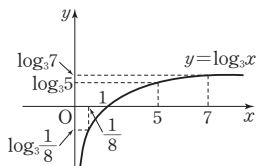
$1, \log_4 9, 2\log_2 3$

(2) 주어진 로그의 밑을 모두 3으로 바꾸면

$\log_3 7,$

$\log_{\frac{1}{3}} 8 = -\log_3 8 = \log_3 \frac{1}{8},$

$\log_9 25 = \log_3 5^2 = \log_3 5$



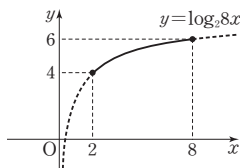
따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

$\log_{\frac{1}{3}} 8, \log_9 25, \log_3 7$

47 답 최댓값 : 6, 최솟값 : 4

$2 \leq x \leq 8$ 에서 함수 $y = \log_2 8x$,

즉 $y = 3 + \log_2 x$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $\log_2 8x$ 는

$x=2$ 일 때 최솟값 $\log_2 2 + 3 = 4$,

$x=8$ 일 때 최댓값 $\log_2 8 + 3 = 6$ 을 갖는다.

48 답 -8

$$y = 4(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4$$

$$= 4(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x \text{에서}$$

$\log_2 x = t$ 라 하면

$$1 \leq x \leq 4 \quad \therefore 0 \leq t \leq 2$$

$$y = 4t^2 - 4t = 4t^2 - 4t + 1 - 1$$

$$= (2t-1)^2 - 1 \quad (0 \leq t \leq 2)$$

$$t = \frac{1}{2} \text{일 때 최솟값 } m = -1,$$

$t=2$ 일 때 최댓값 $M=8$ 을 갖는다.

$$\therefore Mm = -8$$

49 답 ③

$$x^2 - 2x + 9 = (x-1)^2 + 8 > 0 \text{이므로}$$

로그의 진수의 조건을 만족시킨다.

즉, x 의 값에 관계없이 (진수) > 0 이고 x 의 값의 범위가 주어지지 않았으므로 정의역은 모든 실수이다.

함수 $y = f(x) = \log_a(x^2 - 2x + 9)$ 에서

$$x^2 - 2x + 9 = (x-1)^2 + 8 \geq 8 \quad \text{①}$$

이때, $a > 1$ 이면 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 알 수 없고, $0 < a < 1$ 이면 진수 $x^2 - 2x + 9$ 가 최솟값을 가질 때의 함수값 $f(x)$ 가 최대가 된다.

①에서 진수의 최솟값은 8이므로

$$\log_a 8 = -3, \quad a^{-3} = 8$$

$$a^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

50 답 $x = -3$ 또는 $x = 6$

$$\log_2(x^2 - 3x - 10) = 3 \text{에서}$$

$$x^2 - 3x - 10 = 2^3$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0, \quad \log_a x = b \Rightarrow x = a^b$$

$$(x+3)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 6$$

51 답 ②

로그의 진수의 조건에 의하여

$$x+1 > 0, \quad x+4 > 0 \text{이므로}$$

$$x > -1 \quad \text{①}$$

$$\log_2(x+1) - \log_4(x+4) = 1 \text{에서}$$

$$\log_2(x+1) - \frac{1}{2} \log_2(x+4) = 1 \text{이고,}$$

$$2\log_2(x+1) - \log_2(x+4) = 2$$

$$\therefore \log_2 \frac{(x+1)^2}{x+4} = 2$$

$$\frac{(x+1)^2}{x+4} = 4, \quad (x+1)^2 = 4(x+4)$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0, \quad (x+3)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 5$$

그런데 $x = -3$ 은 진수 조건($\because$ ①)을 만족

시키지 않으므로 $x = 5$

52 답 ③

$$(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x - 12 = 0 \text{의 두 근을}$$

α, β 라 하자.

$$\log_2 x = t \text{로 치환하면 } t^2 - 5t - 12 = 0 \text{의}$$

두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이다. 즉,

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 5 \text{이므로 } \log_2 \alpha\beta = 5$$

$$\therefore \alpha\beta = 2^5 = 32$$

$t = \log_2 x$ 이므로 $t^2 - 5t - 12 = 0$ 의 두 근의 형태는 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이다.

53 [답] (1) $x \geq 1$

(2) $2 < x \leq 4$

(3) $2 < x \leq 3$

(1) $\log_3(x+1) \leq \log_3 2x$ 에서 $x+1 \leq 2x$

$\therefore x \geq 1 \dots \textcircled{1}$

이때, 진수 조건에서 $x > -1$ 이고 $x > 0$

이므로 $x > 0 \dots \textcircled{2}$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $x \geq 1$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq -1$ 에서

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x-2} \leq \log_{\frac{1}{2}} 2$

$\frac{x}{x-2} \geq 2, x \geq 2(x-2)$ $0 < (\text{밑}) = \frac{1}{2} < 1$ 이니까 부등호 방향은 반대로!

$\therefore x \leq 4 \dots \textcircled{1}$ $x-2$ 는 진수이므로 양수이다. 양변에 곱해도 부등호 방향을 그대로!

또한 진수 조건에서 $x > 0$ 이고 $x > 2$ 이므로 $x > 2 \dots \textcircled{2}$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $2 < x \leq 4$

(3) $\frac{1}{2} \log_3(5-x) \geq \frac{1}{2} \log_3 2 + \log_3(x-2)$
에서 $5-x \geq 2(x-2)^2, 2x^2-7x+3 \leq 0$
 $(2x-1)(x-3) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \dots \textcircled{1}$

이때, 진수 조건에서 $x < 5$ 이고 $x > 2$ 이므로 $2 < x < 5 \dots \textcircled{2}$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $2 < x \leq 3$

54 [답] ②

$\log_3(x^2-6x) \leq \log_3 27$ 에서

$x^2-6x-27 \leq 0, (x+3)(x-9) \leq 0$

$\therefore -3 \leq x \leq 9$

이때, 진수 조건에서 $x^2-6x > 0$,

즉 $x < 0$ 또는 $x > 6$ 이므로 구하는 부등식의 해는 $-3 \leq x < 0$ 또는 $6 < x \leq 9$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은 $-3, -2, -1, 7, 8, 9$ 로 6개이다.

55 [답] 81

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 3 < 0$ 에서 $\log_3 x = X$ 로 치환하면

$X^2 - 2X - 3 < 0, (X+1)(X-3) < 0$

$\therefore -1 < X < 3$

즉, $\frac{1}{3} < x < 27$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = 27$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = 81$

56 [답] 8

$x^{x^2+x} = x^{4(2x-3)}$

(i) 밑이 1인 경우, 즉 $x=1$ 일 때

(좌변) : $1^2 = 1$

(우변) : $1^{-4} = 1$

(ii) 밑이 1이 아닌 경우, 즉 $x \neq 1$ 일 때

$x^2+x=8x-12,$

$x^2-7x+12=0, (x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에 의하여

(모든 해의 합) = $1+3+4=8$

57 [답] ③

$x^{\log_3 x} = \frac{81}{x^3}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하

면 $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81 - \log_3 x^3$

$(\log_3 x)^2 + 3 \log_3 x - 4 = 0$

$\log_3 x = t$ 로 치환하면 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 에서

$(t-1)(t+4) = 0$ 이므로

$t=1$ 또는 $t=-4$

$\therefore \log_3 x = 1$ 또는 $\log_3 x = -4$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{1}{81}$

58 **답** $\frac{1}{4} < x < 2$

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \frac{1}{4}x$ 에서 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 로그를

취하면

$$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}x + \log_{\frac{1}{2}} x$$

↗ $0 < (\text{밑}) = \frac{1}{2} < 1$ 이므로 부등호 방향은 반대로!

$$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0$$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 치환하면

$$t^2 - t - 2 < 0$$

$$(t+1)(t-2) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4} < x < 2$$

↗ $0 < (\text{밑}) = \frac{1}{2} < 1$ 이니까 부등호 방향은 모두 반대로!

종합 연습 문제

정답

문제편 p. 46

59 ②

60 ④

61 4

62 ②

63 ①

64 16

65 ④

66 ④

59 **답** ②

$f(a) = 5^a = 4$, $f(b) = 5^b = 10$ 에서

$$5^{2b} = (5^b)^2 = 10^2 = 100$$

따라서 $5^{2b-a} = \frac{5^{2b}}{5^a} = \frac{100}{4} = 25 = 5^2$ 이므로

$$2b - a = 2$$

60 **답** ④

함수 $y = 4^x + 4^{-x} + 2^{1+x} - 2^{1-x} - 3$ 에서

$$y = 4^x + 4^{-x} + 2(2^x - 2^{-x}) - 3$$

$2^x - 2^{-x} = t$ (단, t 는 실수) ... ㉠라 하면

$$4^x + 4^{-x} = (2^x - 2^{-x})^2 + 2$$

$$= t^2 + 2$$

이므로 주어진 함수는

$$y = 4^x + 4^{-x} + 2(2^x - 2^{-x}) - 3$$

$$= (t^2 + 2) + 2t - 3$$

$$= t^2 + 2t - 1$$

$$= (t+1)^2 - 2$$

따라서 $t = -1$ 에서 최솟값 -2 를 가진다.

61 **답** 4

로그함수 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 y 축에 대하

여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \log_5(-x)$$

이 그래프를 x 축과 y 축의 방향으로 각각

m , n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_5\{-(x-m)\} + n$$

$$= \log_5(-x+m) + n$$

이 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \log_5(-1+m) + n$$

$$= \log_5(m-1) + n \cdots \text{㉠}$$

또한, 점 $(-3, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \log_5(3+m) + n \cdots \text{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$-1 = \log_5(m-1) - \log_5(3+m)$$

$$-1 = \log_5 \frac{m-1}{3+m}$$

로그의 정의에 의하여

$$\frac{m-1}{3+m} = \frac{1}{5}, \quad 5m-5=3+m, \quad 4m=8$$

$$\therefore m=2$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$3 = \log_5 5 + n$$

$$3 = 1 + n$$

$$\therefore n=2$$

따라서 구하는 값은

$$m+n=2+2=4$$

62 답②

로그의 진수의 조건에 의하여

$$x-1>0, 7-x>0 \text{ 이므로}$$

$$1<x<7 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{9}}(7-x) \text{ 에서}$$

$$\log_{\frac{1}{9}}(x-1)^2 \geq \log_{\frac{1}{9}}(7-x) \text{ 이고,}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$(x-1)^2 \leq 7-x$$

$$x^2-x-6 \leq 0$$

$$(x+2)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 3 \cdots \textcircled{2}$$

따라서 ①, ②에 의하여 $1 < x \leq 3$ 이므로

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은

2, 3으로 2개이다.

63 답①

$$y = \log_2 \frac{x}{4} \times \log_2 \frac{x}{64}$$

$$= (\log_2 x - \log_2 4)(\log_2 x - \log_2 64)$$

$$= (\log_2 x - 2)(\log_2 x - 6)$$

$$= (\log_2 x)^2 - 8\log_2 x + 12$$

$\log_2 x = t$ 로 치환하면

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 64 \text{ 에서}$$

밑이 2인 로그를 취하면

$$-1 \leq t \leq 6$$

이때, 주어진 함수는

$$y = t^2 - 8t + 12 = (t-4)^2 - 4 \text{ 이므로}$$

$$-1 \leq t \leq 6 \text{ 에서 함수 } y = (t-4)^2 - 4 \text{ 는}$$

$t = -1$ 일 때 최댓값 $M = 21$ 을 갖고,

$t = 4$ 일 때 최솟값 $m = -4$ 를 갖는다.

$$\therefore M - m = 21 - (-4) = 25$$

64 답 16

$$10 \log \frac{B}{A} = -6 \text{ 에서}$$

$$\log \frac{B}{A} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{B}{A} = 10^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{10^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\left(10^{\frac{3}{10}}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

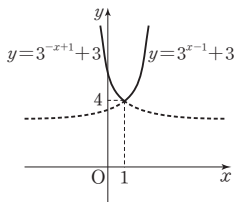
$$64k = 64 \times \frac{1}{4} = 16 \text{ 이다.}$$

65 답④

$x < 1$ 일 때 $y = 3^{-x+1} + 3$ 이고,

$x \geq 1$ 일 때 $y = 3^{x-1} + 3$ 이므로

함수 $y = 3^{|x-1|} + 3$ 의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $y = 3^{-x+1} + 3$, $y = 3^{x-1} + 3$ 의 그래

프의 교점의 좌표는 $(1, 4)$ 이므로 함수

$y = 3^{|x-1|} + 3$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만

나지 않으려면 a 의 값의 범위는 $a < 4$ 이어야 한다.

66 답④

$9^x = 3^{2x} = 4$ 이므로 주어진 식의 분모, 분자

에 각각 3^x 를 곱하면

$$\frac{3^{3x} - 3^{-3x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{3^{4x} - 3^{-2x}}{3^{2x} + 1} = \frac{16 - \frac{1}{4}}{4 + 1} = \frac{63}{20}$$

II. 삼각함수

18 호도법과 부채꼴의 넓이 ~ 29 사인함수를 이용한 삼각형의 넓이

핵심 개념 문제 **정답**

문제편 p. 48

01 ③

02 (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{3}{4}\pi$ (3) 45° (4) 120°

03 ②

04 (1) $\overline{BC}, \overline{AD}$ (2) $\overline{AB}, \overline{AD}$
(3) $\overline{BC}, \overline{AE}$

05 $\sin A = \frac{12}{13}, \cos A = \frac{5}{13},$
 $\tan A = \frac{12}{5}$

06 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan B = \frac{\sqrt{2}}{2}$

07 $\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$
 $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

08 $-\frac{8}{15}$ 09 ④ 10 ①

11 ③ 12 ⑤ 13 ③

14 ② 15 4

16 풀이 참조 17 ① 18 ③

19 풀이 참조 20 ⑤ 21 ⑤

22 풀이 참조

23 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

24 ⑤ 25 ③ 26 360°

27 풀이 참조 28 ② 29 ②

30 ④ 31 ② 32 ①

33 ④ 34 ③ 35 ③

36 $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{7}$

01 **답** ③

①, ②, ④, ⑤는 동경이 모두 제3사분면에 위치한다. $\rightarrow$ ② -150° , ④ 600°

③ $480^\circ = 360^\circ + 120^\circ$: 제2사분면

02 **답** (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{3}{4}\pi$
(3) 45° (4) 120°

(1) $30^\circ = 30 \times 1^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

(2) $135^\circ = 135 \times 1^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$

(3) $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$

(4) $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$

03 **답** ②

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면

$6\pi = \frac{1}{2}r^2 \times \frac{4}{3}\pi$
 $\therefore r = 3$ ($\because r > 0$) $\rightarrow S = \frac{1}{2}r^2\theta$

$l = r\theta = 3 \times \frac{1}{3}\pi = \pi$ 이므로

구하는 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r + l = 2 \times 3 + \pi = 4\pi + 6$

$\rightarrow$ 둘레의 길이이므로 (반지름의 길이) $\times 2$ 도 더해 주어야 한다.

04 **답** (1) $\overline{BC}, \overline{AD}$ (2) $\overline{AB}, \overline{AD}$
(3) $\overline{BC}, \overline{AE}$

(1) $\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$

(2) $\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$

(3) $\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$

05 $\square$ $\sin A = \frac{12}{13}, \cos A = \frac{5}{13},$

$$\tan A = \frac{12}{5}$$

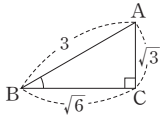
$$\overline{BC} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm})$$

$$\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{12}{13},$$

$$\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5}{13},$$

$$\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{5}$$

06 $\square$ $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan B = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{빗변} = \sqrt{3} \text{으로 생각하자}$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

07 $\square$ $\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\theta = \frac{7}{6}\pi$ 를 나타내는 동경과 중심이 원점이고

반지름의 길이가 1인 원에 대하여 동경과 원

이 만나는 점을 P라 하면

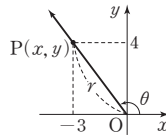
점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$\therefore \sin \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos \theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

08 $\square$ $-\frac{8}{15}$



$\cos \theta = -\frac{3}{5} = \frac{x}{r}$ 에서 $r=5, x=-3$
 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$
 빗변의 길이는 양수이므로 $x < 0$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \sin \theta + \tan \theta = \frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{15}$$

09 $\square$ ④

$\sin \theta \cos \theta < 0$ 이므로 제2사분면 또는 제4사분면이고,
 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 또는 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$

$\sin \theta \tan \theta > 0$ 이므로 제1사분면 또는 제3사분면이다.
 $\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$

따라서 이를 동시에 만족시키는 각 θ 를 나타내는 동경은 제4사분면에 존재한다.

10 $\square$ ① $\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ 에서
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = 0$$

11 $\square$ ③

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + (1 + \sin \theta)^2}{(1 + \sin \theta) \cos \theta}$$

$$= \frac{2 + 2\sin \theta}{(1 + \sin \theta) \cos \theta}$$

$$= \frac{2(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta) \cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta}$$

12 [답] ⑤

$$\frac{\sin \theta}{\tan \theta} + \frac{\tan \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta \text{는 제 1사분면의 각이므로 } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} (\because \textcircled{1})$$

13 [답] ③

$$\cos \left(\frac{3}{2}\pi - \theta \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = -\sin \theta$$

이므로

(주어진 식)

$$= \cos \theta - \cos \theta - \sin \theta - (-\sin \theta) = 0$$

14 [답] ②

$$\cos(3\pi - \theta) \xrightarrow{\text{↺ } \cos(2\pi + (\pi - \theta)) = \cos(\pi - \theta)} = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta,$$

$$\sin \left(\frac{5}{2}\pi + \theta \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \cos \theta$$

$$\text{이므로 } \xrightarrow{\text{↺ } \sin \left\{ 2\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right\} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)}$$

(주어진 식)

$$= \frac{\cos \theta \times (-\cos \theta)}{-\cos \theta} + \frac{\cos \theta \times (-\sin \theta)}{\sin \theta}$$

$$= \cos \theta - \cos \theta = 0$$

15 [답] 4

$$\sin \frac{21}{4}\pi = \sin \left(4\pi + \frac{5}{4}\pi \right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{9}{4}\pi = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \frac{11}{4}\pi = \tan \left(2\pi + \frac{3}{4}\pi \right)$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}}$$

$$= -1$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\sin \frac{21}{4}\pi + \cos \frac{9}{4}\pi + \tan \frac{11}{4}\pi}{\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right)} = \frac{-1}{-\frac{1}{4}} = 4$$

16 [답] 풀이 참조

(1) 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 $\xrightarrow{\text{↺ } 2\pi \text{를 } x \text{의 계수로 나눈다.}}$
 최댓값은 $|-2| + 1 = 3$,
 최솟값은 $-|-2| + 1 = -1$

(2) 주기는 $\frac{2\pi}{3}$
 $\xrightarrow{\text{↺ } 2\pi \text{를 } x \text{의 계수로 나눈다.}}$
 최댓값은 $|3| - 1 = 2$,
 최솟값은 $-|3| - 1 = -4$

17 [답] ①

함수 $f(x) = a \sin bx + c$ 에서 $a > 0$ 이므로

$$\text{최댓값은 } a + c = 4 \dots \textcircled{1},$$

$$\text{최솟값은 } -a + c = -2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하면 } a = 3, c = 1$$

$b > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$

$$\text{즉, } \frac{2\pi}{b} = 4\pi \text{에서 } b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore abc = 3 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

18 답 ③

함수 $y=f(x)$ 에 대하여
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 에서
 $f(x) = -2\sin^2 x + 2\cos x + 1$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 를 이용한다.

$$= 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$$

이때, $\cos x = t$ 로 치환하면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$f(t) = 2t^2 + 2t - 1 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

$$m = -\frac{3}{2}, M = 3 \text{이므로 } M+m = \frac{3}{2}$$

$\hookrightarrow f(-\frac{1}{2})$ $\hookrightarrow f(1)$

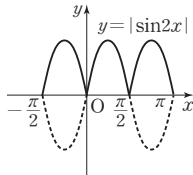
19 답 풀이 참조

최대 · 최소는 없고, (주기) $= \frac{\pi}{4} = 4\pi$

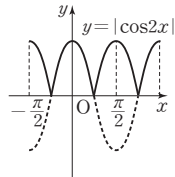
$\hookrightarrow \pi$ 를 x 의 계수로 나눈다.

20 답 ⑤

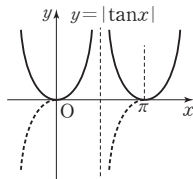
ㄱ. 주기 $\frac{\pi}{2}$



ㄴ. 주기 $\frac{\pi}{2}$



ㄷ. 주기 π



ㄹ. (주기) $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

21 답 ⑤

$f(x) = a \tan bx + c$ 에서 주기는 $\frac{\pi}{|b|} = 4$

이때, $b > 0$ 이므로 $b = \frac{\pi}{4}$

$$f(5) = a \tan \frac{5}{4}\pi + c = a + c = -6 \cdots \textcircled{7}$$

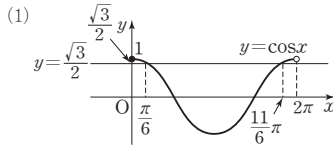
$$f(-1) = a \tan \left(-\frac{\pi}{4}\right) + c = -a + c = 2 \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하면

$$a = -4, c = -2$$

$$\therefore abc = (-4) \times \frac{\pi}{4} \times (-2) = 2\pi$$

22 답 풀이 참조

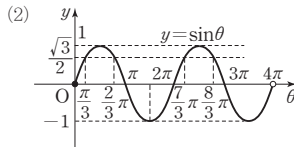


$0 \leq x < 2\pi$ 에서

함수 $y = \cos x$ 의 그래프와

직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

그림에서 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$



$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $0 \leq 2x < 4\pi$ 이고

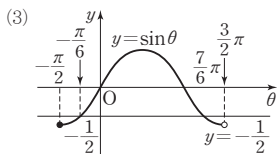
$2x = \theta$ 라 하면

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{3}\pi$$

또는 $\theta = \frac{8}{3}\pi$ $\hookrightarrow \theta$ 의 범위 내에서 모두 찾는다.

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi$$

$$\text{또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$



$$x - \frac{\pi}{2} = \theta \text{라 하면}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{2} < \frac{3}{2}\pi \text{이고}$$

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \text{에서}$$

$$2\sin\theta + 1 = 0$$

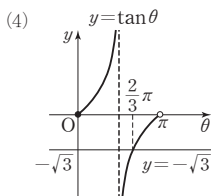
$$\therefore \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{6}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 해는

$$x = \theta + \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$



$$\frac{x}{2} = \theta \text{라 하면}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } 0 \leq \frac{x}{2} < \pi \text{이므로}$$

$$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 0 \text{에서}$$

$$\tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 해는

$$x = 2\theta \text{이므로 } x = \frac{4}{3}\pi$$

23 답 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

$$2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$$

$$\cos x = t \text{로 치환하면}$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$2t^2 - 5t - 3 = 0, (t-3)(2t+1) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2} (\because t \neq 3) \quad \leftarrow -1 \leq t \leq 1 \text{의 범위에 포함되지는 확인하자!}$$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

24 답 ⑤

$$\cos^2 x - \sin x = 1 \text{에서}$$

$$(1 - \sin^2 x) - \sin x = 1$$

$$\sin x(\sin x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = -1$$

$$(i) \sin x = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2\pi$$

$$(ii) \sin x = -1 \text{에서 } x = \frac{3}{2}\pi$$

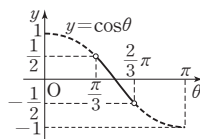
(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근

$$\text{의 합은 } 0 + 2\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{2}\pi \text{이므로}$$

$$p = 2, q = 7$$

$$\therefore p + q = 9$$

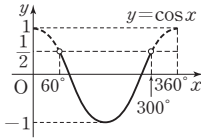
25 답 ③



그래프에서 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi$
 $\leftarrow y = \cos\theta$ 의 그래프를 그리고 $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$ 인 범위를 찾는다.

$$\therefore b - a = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

26 [답] 360°



$$2\sin^2 x > 3\cos x \text{에서}$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$$

$\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

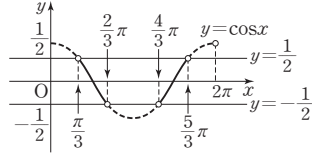
$$2t^2 + 3t - 2 = (2t - 1)(t + 2) < 0$$

$$\therefore t < \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} \text{↖} -1 \leq t \leq 1 \text{이므로 } t+2 > 0 \\ \therefore 2t-1 < 0 \end{matrix}$$

즉, 그림에서 $\cos x < \frac{1}{2}$ 을 만족시키는

x 의 값의 범위는 $60^\circ < x < 300^\circ$ 이므로

$$a+b=360^\circ$$



$$\text{따라서 } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{또는 } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$$

28 [답] ②

$\angle C = 45^\circ$ 이고 사인법칙에서

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ} = 2R \text{이므로}$$

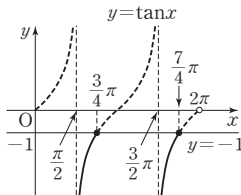
$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{10\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 2R,$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \overline{BC} = 20 = 2R$$

$$\therefore \overline{BC} = 10\sqrt{3}, R = 10$$

27 [답] 풀이 참조

- (1) $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = -1$ 을 그리면 그림과 같다.



따라서 $\tan x \leq -1$ 에서

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{4}$$

- (2) $4\cos^2 x - 1 < 0$ 에서

$$(2\cos x + 1)(2\cos x - 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$$

즉, $0 \leq x < 2\pi$ 에서

함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 두 직선

$$y = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} \text{은 그림과 같다.}$$

- (2) $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 70$ 이고
 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$ 이므로

$$\angle A = \pi \times \frac{1}{12}, \angle B = \pi \times \frac{3}{12}, \angle C = \pi \times \frac{7}{12}$$

$$\angle A = \frac{\pi}{6}, \angle B = \frac{\pi}{4}, \angle C = \frac{7\pi}{12} \text{이므로}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\overline{CA}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \times 1 = 2$$

$$\overline{BC} = 2\sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

$$\overline{CA} = 2\sin \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BC} = 1, \overline{CA} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

30 [답] ④

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

즉, 주어진 등식에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} + c \times \frac{c}{2R} = b \times \frac{b}{2R} \text{에서}$$

$$a^2 + c^2 = b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

31 답 ②

$\overline{AB}=a$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= 8^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \times 8 \times 4\sqrt{3} \times \cos 30^\circ \\ &= 64 + 48 - 96 \\ &= 16 \end{aligned}$$

이때, $a > 0$ 이므로 $a=4$

32 답 ①

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 라 하면

코사인법칙의 활용에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 3 \times 4} \\ &= -\frac{11}{24} \end{aligned}$$

33 답 ④

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를

R 라 하면 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ 사인법칙에 의하여

$3\sin A = 3\sin B = 2\sin C$ 에서

$$\frac{3a}{2R} = \frac{3b}{2R} = \frac{2c}{2R} \text{이므로 } 3a = 3b = 2c$$

양변을 6으로 나누고

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \quad (k > 0) \text{라 하면}$$

$$a=2k, b=2k, c=3k$$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{4k^2 + 9k^2 - 4k^2}{2 \times 2k \times 3k} \\ &= \frac{9k^2}{12k^2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

34 답 ③

$$3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin A \text{에서}$$

$$\sin A = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{4} \quad (\because A \text{는 예각})$$

35 답 ③

$\angle BAD = \angle ADC = 30^\circ$ 이므로

$\angle BAC = 60^\circ$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin 60^\circ = 8\sqrt{3}$$

이때, 선분 AD의 길이를 x 라 하면

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 30^\circ = x$$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2} \times x \times 8 \times \sin 30^\circ = 2x$$

한편, $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$8\sqrt{3} = x + 2x, 3x = 8\sqrt{3}$$

$$\therefore x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

따라서 선분 AD의 길이는 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 이다.

36 답 $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{7}$

$\triangle ABD$ 에서 $\overline{BD}=x$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} x^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ &= 4 + 9 - 6 = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \sqrt{7} \quad (\because x > 0)$$

$\therefore \square ABCD$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 60^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{7} \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{7}$$

37 ①

38 ④

39 5

40 ①

41 ②

42 ①

43 ④

44 ③

37 [답] ①

$5\sin\theta + 12\cos\theta = 0$ 에서

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{12}{5},$$

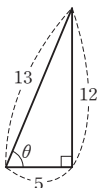
$$\text{즉 } \tan\theta = -\frac{12}{5}$$

이때, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\sin\theta > 0, \cos\theta < 0$$

$$\therefore \sin\theta + \cos\theta$$

$$= \frac{12}{13} - \frac{5}{13} = \frac{7}{13}$$



38 [답] ④

삼각함수의 성질에 의하여

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \text{이므로}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

$$\therefore \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

$$= 1$$

39 [답] 5

주어진 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $|a| + c$,

최솟값은 $-|a| + c$ 이므로

$$|a| + c - (-|a| + c) = 4 \text{에서}$$

$$2|a| = 4, |a| = 2$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$

조건 (나)에서 주기는 π 이므로

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi, |b| = 2 \quad \therefore b = 2 (\because b > 0)$$

즉, 함수 $f(x) = 2\cos 2x + c$ 는

점 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 을 지나므로

$$2\cos \frac{2}{3}\pi + c = 0, -1 + c = 0$$

$$\therefore c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 5$$

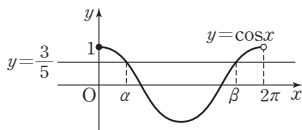
40 [답] ①

방정식 $5\cos x = 3$ 에서 $\cos x = \frac{3}{5}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 코사인함수 $y = \cos x$ 의

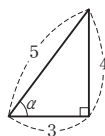
그래프와 직선 $y = \frac{3}{5}$ 의 두 교점의 x 좌표가

각각 α, β ($\alpha < \beta$)이므로 그림으로 나타내면 다음과 같다.



삼각함수의 대칭성에 의하여 $\beta = 2\pi - \alpha$

이므로



$$\sin(\alpha + 2\beta) = \sin(\alpha + 2(2\pi - \alpha))$$

$$= \sin(4\pi - \alpha)$$

$$= -\sin \alpha$$

$$= -\frac{4}{5}$$

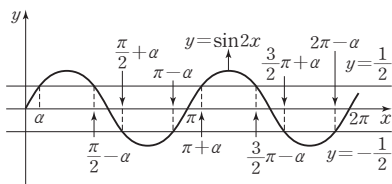
41 [답] ②

$\cos(\pi \sin 2x) = 0$ 에서 $\pi \sin 2x = t$ 로 치환

하면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-\pi \leq t \leq \pi$ 이다.

$\cos t = 0$ 을 만족시키는 t 의 값은

$t = -\frac{\pi}{2}$ 또는 $t = \frac{\pi}{2}$ 이다.



(i) $t = \frac{\pi}{2}$, 즉 $\pi \sin 2x = \frac{\pi}{2}$ 일 때,

$\sin 2x = \frac{1}{2}$ 이므로 x 의 값의 합은

$$\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (\pi + \alpha) + \left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = 3\pi$$

(ii) $t = -\frac{\pi}{2}$, 즉 $\pi \sin 2x = -\frac{\pi}{2}$ 일 때,

$\sin 2x = -\frac{1}{2}$ 이므로 x 의 값의 합은

$$\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + (\pi - \alpha) + \left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + (2\pi + \alpha) = 5\pi$$

(i), (ii)에 의하여 x 의 값의 합은

$$3\pi + 5\pi = 8\pi$$

42 답 ①

$\cos^2 \theta - 2\sin \theta - 9 + a \leq 0$ 에서

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta + 8 - a \geq 0$$

$\sin \theta = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 치환하면

$$t^2 + 2t + 8 - a \geq 0$$

$f(t) = t^2 + 2t + 8 - a$ 로 놓으면

$$f(t) = (t+1)^2 + 7 - a$$

이때, $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면 $f(t)$ 의 최솟값은 0보다 커야 한다.

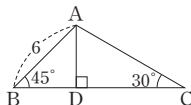
즉, 함수 $f(t)$ 는 $t = -1$ 일 때, 최솟값을 가지므로 $f(-1) = 7 - a \geq 0 \quad \therefore a \leq 7$

따라서 주어진 부등식을 항상 성립하도록 하는 자연수 a 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 7개이다.

43 답 ④

사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}$

$$\therefore \overline{AC} = 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \quad \left(\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$



꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \overline{BD} + \overline{CD} \\ &= 6\cos 45^\circ + 6\sqrt{2}\cos 30^\circ \\ &= 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6} \\ &= 3(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \end{aligned} \quad \left(\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

44 답 ③

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CA}^2 &= 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 60^\circ \\ &= 25 + 64 - 40 = 49 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{CA} = 7$$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times (8+5+7) \times r \end{aligned}$$

$$10r = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore r = \sqrt{3}$$

Ⅲ. 수열

30 등차수열과 등차중항 ~

34 수열의 합과 일반항 사이의 관계

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 74

01 15	02 ③	03 ④
04 ⑤	05 ③	06 ③
07 ⑤	08 512	09 ⑤
10 ④	11 1533	
12 1248000원		
13 $a_1=0, a_n=4n-5$ (단, $n \geq 2$)		
14 ①	15 ⑤	

01 답 15

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라

하면 일반항은 $a_n = a + (n-1)d$

$$a_3 = a + 2d = 7 \cdots ㉠$$

$$a_4 + a_6 = 2a + 8d = 22 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡를 연립하면 $a=3, d=2$

따라서 $a_n = 2n + 1$ 이므로 $a_7 = 15$

02 답 ③

등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

일반항은 $a_n = a + (n-1)d$

$$a_4 = a + 3d = 25 \cdots ㉠$$

$$a_{12} = a + 11d = -7 \cdots ㉡$$

㉠-㉡을 하면

$$8d = -32$$

$$\therefore d = -4, a = 37 (\because ㉠)$$

$$a_n = -4n + 41 \text{ 이고, } \rightarrow a + 3 \times (-4) = 25$$

$$-4n + 41 < 0 \text{ 이면 } n > 10, \cdots$$

따라서 제 11 항부터 음의 값을 가진다.

03 답 ④

$-13, a, b, c, 15$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다고 하므로 a, b, c 도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

따라서 b 는 a 와 c 의 등차중항이다.

$$\text{즉, } 2b = a + c \text{에서}$$

$$a + b + c = 2b + b = 3b \cdots ㉠$$

항을 하나씩 건너뛰어도 그 순서대로 등차수열을 이룬다.

또한, b 는 -13 과 15 의 등차중항이므로

$$2b = -13 + 15 = 2 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a + b + c = 3 (\because ㉠)$$

04 답 ⑤

6의 배수는 $6, 12, 18, \cdots$ 이므로 첫째항이

6이고 공차가 6인 등차수열이다.

이 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 6 + (n-1) \times 6 = 6n$$

제 n 항이 150 이하라 하면 $6n \leq 150$ 이므로

$$n \leq 25$$

따라서 구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 25 항까지의 합과 같으므로

$$\frac{25 \{2 \times 6 + (25-1) \times 6\}}{2} = 25 \times 78$$

$$= 1950$$

[다른 풀이]

$$150 = 6 \times 25 \text{ 이므로}$$

150 이하의 자연수 중 6의 배수의 합은

$$S_{25} = \frac{25 \times (6 + 150)}{2} = 25 \times 78$$

$$= 1950$$

05 답 ③

$$a=1 \text{ 이고 } S_{10} = \frac{10(2+9d)}{2} = 100$$

$$2+9d=20 \quad \therefore d=2 \rightarrow S_n = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$$

따라서 첫째항부터 제 20 항까지의 합 S_{20} 은

$$S_{20} = \frac{20(2+19 \times 2)}{2} = 400$$

06 답 ③

주어진 수열의 첫째항은 21이고, 제 n 항을
마지막항으로 보면 $a_n = -2n + 23$ 에
 $n=1$ 을 대입한다.

$$S_n = \frac{n(21-2n+23)}{2} = -n^2 + 22n$$

$$= -(n-11)^2 + 121$$

따라서 $n=11$ 일 때, S_n 이 최대가 된다.

[다른 풀이]

처음으로 음의 값을 갖는 항 이전까지의 합
이 최대가 된다.

$$a_n = -2n + 23 < 0 \text{ 이라 하면 } n > 11.5$$

따라서 첫째항부터 제 11항까지의 합이 최대
가 된다.

07 답 ⑤

첫째항이 a 이고, 공비가 r 인 등비수열의 일
반항 $a_n = ar^{n-1}$ 에서

$$a_3 = ar^2 = 18 \cdots \text{㉠}, a_5 = ar^4 = 162 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠} \div \text{㉡} \text{을 하면 } r^2 = 9 \text{ 이므로 } r = 3$$

$$\text{㉠에 } r=3 \text{을 대입하면 } a=2 \quad \leftarrow \text{각 항이 양의 실수니까 } r=-3 \text{은 안 된다.}$$

따라서 주어진 등비수열의 일반항

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

08 답 512

첫째항이 $a=4$ 인 등비수열의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_5 a_6}{a_3 a_4} = \frac{ar^4 \times ar^5}{ar^2 \times ar^3} = 16 \text{ 이므로}$$

$$r^4 = 16 \text{에서 } r=2 \text{ (}\because r>0\text{)}$$

$$\therefore a_8 = ar^7 = 4 \times 2^7 = 2^2 \times 2^7 = 512$$

09 답 ⑤

6, a , b 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a = 6 + b \cdots \text{㉠}$$

a , b , 2가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$b^2 = 2a \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$b^2 = 6 + b, b^2 - b - 6 = 0$$

$$(b+2)(b-3) = 0$$

$$\therefore b = -2 \text{ 또는 } b = 3$$

$$b=3 \text{을 ㉠에 대입하면 } a = \frac{9}{2}$$

$b=-2$ 는 양수라는 조건에 맞지 않으므로 제외한다.

$$\therefore a+b = \frac{15}{2}$$

10 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_4 = a_1 r^3 = 9r^3 = -\frac{1}{3} \text{에서 } r^3 = -\frac{1}{27}$$

$$\text{이때, } r \text{는 실수이므로 } r = -\frac{1}{3}$$

따라서 첫째항이 9이고 공비가 $-\frac{1}{3}$ 인

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 8항까지의
합 S_8 은

$$S_8 = \frac{9 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^8 \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{27}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^8 \right\}$$

11 답 1533

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} \xrightarrow{\text{㉠}} S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = (r^3+1)S_3 = 189$$

$$\xrightarrow{\text{㉡}} \frac{a(r^3+1)(r^3-1)}{r-1} \text{로 인수분해하고,}$$

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} \text{을 이용한다.}$$

$$21(r^3+1) = 189, r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2$$

$$S_9 = \frac{a\{(r^3)^3-1^3\}}{r-1}$$

$$= \frac{a(r^3-1)(r^6+r^3+1)}{r-1}$$

$$= (r^6+r^3+1)S_3$$

$$\therefore S_9 = 21(r^6+r^3+1)$$

$$= 21(64+8+1) = 1533$$

$$\xrightarrow{\text{㉢}} r^3=8 \text{이므로}$$

12 [답] 1248000원

연이율 r , 1년마다 복리로 매년 초에 a 원씩
적립하였을 때, n 년 후의 원리합계 S 는

$$S = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{이므로}$$

$$S = \frac{10^5 \times 1.04 \times (1.04^{10} - 1)}{0.04} \\ = 10^5 \times 1.04 \times 12 = 1248000 \text{ (원)}$$

13 [답] $a_1=0, a_n=4n-5$ (단, $n \geq 2$)

$S_n = 2n^2 - 3n + 1$ 에서 S_n 의 식에 n 대신 $n-1$ 을
대입한다.

$$S_{n-1} = 2(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 \\ = 2n^2 - 7n + 6$$

$n \geq 2$ 에서 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = 2n^2 - 3n + 1 - (2n^2 - 7n + 6) \\ = 4n - 5$$

$$a_1 = S_1 = 2 - 3 + 1 = 0$$

따라서 수열의 일반항은

$$a_1 = 0, a_n = 4n - 5 \text{ (단, } n \geq 2)$$

14 [답] ①

$$S_n = 2^n - 1 \text{에서 } S_{n-1} = 2^{n-1} - 1$$

$n \geq 2$ 에서 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1) \\ = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} \text{ (단, } n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 = 2 - 1 = 1 \text{이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2^{n-1}$$

15 [답] ⑤

$$S_n = n^2 + 2n + 3 \text{에서}$$

$$S_{n-1} = (n-1)^2 + 2(n-1) + 3 = n^2 + 2$$

$n \geq 2$ 에서 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = n^2 + 2n + 3 - (n^2 + 2) = 2n + 1$$

$$a_1 = S_1 = 1 + 2 + 3 = 6 \text{이므로 주어진 수열}$$

$\{a_n\}$ 의 일반항을 구하자.

$$a_1 = 6, a_n = 2n + 1 (n \geq 2)$$

$$\therefore a_{18} = 2 \times 18 + 1 = 37$$

종합 연습 문제 [정답]

문제편 p. 84

16 ⑤

17 ④

18 ②

19 ②

20 ②

21 ③

22 ②

23 ②

16 [답] ⑤

조건 (가)에서 등차중항에 의하여

$$2b = a + 18 \quad \therefore a = 2b - 18 \cdots \text{㉠}$$

조건 (나)에서 등비중항에 의하여

$$a^2 = 3b \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(2b - 18)^2 = 3b$

$$4b^2 - 75b + 324 = 0,$$

$$(b-12)(4b-27)=0 \rightarrow \text{조립제법을 이용하면}$$

$$\therefore b=12 \text{ 또는 } b=\frac{27}{4}$$

12	4	-75	324
		48	-324
4	-27		0

$$\text{㉠에 의하여 } \begin{cases} a = -\frac{9}{2} \\ b = \frac{27}{4} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \end{cases}$$

이때, $a > 0$ 이어야 하므로 $a = 6, b = 12$

$$\therefore a + b = 18$$

17 [답] ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 = a_1 + 3d = -97 \text{에서}$$

$$-106 + 3d = -97$$

$$3d = 9 \quad \therefore d = 3$$

한편,

$$a_m = a_1 + (m-1)d$$

$$= -106 + (m-1) \times 3 = 3m - 109$$

이므로 $a_m > 0$ 에서

$$3m - 109 > 0 \quad \therefore m > 36. \times \times \times$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 37이다.

18 [답] ②

$$a_4 = a_1 + 3d = 3 + 3d$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 3 + 6d$$

$$a_4 : a_7 = 5 : 9 \text{에서 } 9a_4 = 5a_7$$

$$9(3 + 3d) = 5(3 + 6d)$$

$$27 + 27d = 15 + 30d$$

$$3d = 12 \quad \therefore d = 4$$

19 [답] ②

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 각각 1, 3
이므로

$$a_{n+1} - a_n = 1, b_{n+1} - b_n = 3$$

$a_n + b_n = c_n$ 이라 하면

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 등차수열이면 $\{a_n + b_n\}$ 도 등차수열이다.

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n)$$

$$= (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n)$$

$$= 1 + 3 = 4$$

이므로 수열 $\{c_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다.

$$c_1 = a_1 + b_1 = 4 \text{이므로}$$

$$c_{10} = c_1 + 9 \times 4 = 4 + 36 = 40$$

20 [답] ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_k = a \times 5^{k-1} = 5^8 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{2k+3} = a \times 5^{2k+2} = 5^{16} \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$\frac{a \times 5^{2k+2}}{a \times 5^{k-1}} = \frac{5^{16}}{5^8}, 5^{k+3} = 5^8$$

따라서 $k+3=8$ 에서 $k=5$

21 [답] ③

$$S_n = 5^{n-1} + k \text{이므로 } a_1 = S_1 = 1 + k,$$

$$S_2 = 5 + k \text{이므로}$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (5 + k) - (1 + k) = 4$$

$$S_3 = 5^2 + k = 25 + k \text{이므로}$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = (25 + k) - (5 + k) = 20$$

따라서 세 수 a_1 , a_2 , a_3 이 이 순서대로 등비
수열을 이루므로

$$a_2^2 = a_1 \times a_3, \text{ 즉 } 4^2 = (1 + k) \times 20$$

$$4 = 5k + 5 \quad \therefore k = -\frac{1}{5}$$

22 [답] ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r (r 는 실수)라 하면

$$a_4 + a_5 + a_6 = a_1 r^3 + a_2 r^3 + a_3 r^3$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) r^3$$

$$\text{이므로 } 81 = 3r^3 \text{에서 } r^3 = 27$$

r 는 실수이므로 $r = 3$

$$\therefore a_3 + a_4 + a_5 = a_1 r^2 + a_2 r^2 + a_3 r^2$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) r^2$$

$$= 3 \times 3^2 = 27$$

23 [답] ②

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 이 공비가 2인 등비수열이므로

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} \times 2 = \frac{2}{a_1}$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1} = \frac{3}{a_1} \text{이므로}$$

$$\frac{3}{a_1} = \frac{1}{2} \text{에서 } a_1 = 6$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{a_4} = \frac{1}{a_1} \times 2^3 = \frac{1}{6} \times 8 = \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$a_4 = \frac{3}{4}$$

[다른 풀이]

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 공비가 2인 등비수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(이하 동일)

35 합이 기호 Σ 의 성질 ~

39 수학적 귀납법

핵심 개념 문제

정답

문제편 p. 86

- 24 0 25 239 26 ④
 27 ④ 28 ② 29 605
 30 ③ 31 ③ 32 ④
 33 ⑤ 34 $\frac{728}{81}$ 35 ①
 36 (가) $n=2$ (나) $1+h$
 (다) $1+(k+1)h$
 37 (가) 1 (나) $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
 (다) $2k^2+7k+6$

24 답 0

$$\sum_{i=1}^{10} b_i = \sum_{k=1}^{10} b_k \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k$$

$$= 2 \times 10 - 20 = 0$$

25 답 239

$$\sum_{k=1}^5 (3^k - 2^{k+1}) = \sum_{k=1}^5 3^k - \sum_{k=1}^5 2^{k+1} \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^5 3^k = \frac{3(3^5 - 1)}{3 - 1} = 363$$

$$\sum_{k=1}^5 2^{k+1} = \frac{4(2^5 - 1)}{2 - 1} = 124$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 (3^k - 2^{k+1}) = 363 - 124$$

$$= 239$$

26 답 ④

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15}$$

$$= \frac{15(2 \times 3 + 14 \times 3)}{2}$$

$$= 360$$

$$\sum_{k=1}^{15} a_{k+1} = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{16}$$

$$= \sum_{k=1}^{16} a_k - a_1$$

$$= \frac{16(2 \times 3 + 15 \times 3)}{2} - 3$$

$$= 405$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15} (a_k + a_{k+1}) = 360 + 405 = 765$$

27 답 ④

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 10 \times 11 = \sum_{k=1}^{10} k(k+1)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10} k(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k)$$

$$= \frac{10(10+1)(20+1)}{6} + \frac{10(10+1)}{2}$$

$$= 440$$

28 답 ②

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n \text{에서}$$

$$n=1 \text{일 때, } a_1 = 1 + 3 = 4$$

$$n \geq 2 \text{일 때,}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= n^2 + 3n - (n-1)^2 - 3(n-1)$$

$$= 2n + 2$$

$$\text{이때, } a_1 = 4 = 2 \times 1 = 2 \text{이므로}$$

$$a_n = 2n + 2 (n \geq 1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 ka_k = \sum_{k=1}^5 (2k^2 - 2k)$$

$$= 2 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 2 \times \frac{5 \times 6}{2}$$

$$= 110 - 30$$

$$= 80$$

29 **답** 605

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^l (k+l) \right\} \quad \leftarrow \text{여기서 문자 } l \text{ 은 변수가 아니므로 상수 취급한다.} \\
 &= \sum_{l=1}^{10} \left\{ \frac{l(l+1)}{2} + l^2 \right\} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{10} (3l^2 + l) \\
 &= \frac{1}{2} \left(3 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} \right) \\
 &= 605
 \end{aligned}$$

30 **답** ③

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} \quad \leftarrow \text{첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열} \\
 &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right) \quad \leftarrow \text{첫째항이 5이고 공차가 4인 등차수열} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{77} - \frac{1}{81} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{81} \right) = \frac{20}{81}
 \end{aligned}$$

31 **답** ③

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^8 \frac{2}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \\
 & \quad + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{58}{45} = \frac{q}{p} \\
 \text{따라서 } p &= 45, q = 58 \text{ 이므로 } p+q = 103
 \end{aligned}$$

32 **답** ④

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \quad \leftarrow \text{분모를 유리화하면} \\
 &= \sum_{k=1}^{80} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\
 &= \sum_{k=1}^{80} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - k - 1} = \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \quad \leftarrow \text{3} \\
 &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) \\
 &= \sqrt{81} - 1 = 8
 \end{aligned}$$

33 **답** ⑤

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= a_n - 3, \quad a_{n+1} - a_n = -3 \text{ 이므로 수열} \\
 & \text{의 귀납적 정의에 의하여 이 수열은 공차가} \\
 & -3 \text{ 인 등차수열이다.} \\
 \text{또한, 첫째항 } a_1 &= 3 \text{ 이므로} \\
 a_{10} &= 3 + 9 \times (-3) = -24 \\
 & \quad \leftarrow a_n = a_1 + (n-1)d
 \end{aligned}$$

34 **답** $\frac{728}{81}$

$$\begin{aligned}
 a_{n+1}^2 &= a_n \times a_{n+2} \text{ 에서 수열 } \{a_n\} \text{ 은 등비수열} \\
 \text{이고, } \frac{a_2}{a_1} &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ 이므로 등비수열 } \{a_n\} \text{ 의} \\
 \text{공비는 } \frac{1}{3} \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{수열 } \{a_n\} \text{ 의 일반항은 } a_n &= 6 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \\
 \therefore \sum_{k=1}^6 a_k &= \sum_{k=1}^6 \left\{ 6 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} \\
 &= \frac{6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= 9 \left(1 - \frac{1}{729} \right) = \frac{728}{81}
 \end{aligned}$$

35 **답** ①

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= 2a_n + 1 \text{ 에서 } n \text{ 대신에 } 1, 2, 3, \dots \text{ 을} \\
 & \text{차례로 대입하면} \\
 a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \\
 a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 \\
 a_4 &= 2a_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15 \\
 a_5 &= 2a_4 + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31 \\
 \therefore a_6 &= 2a_5 + 1 = 2 \times 31 + 1 = 63
 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}
 (a_{n+1} + 1) &= 2(a_n + 1) \text{ 이므로} \\
 \text{수열 } \{a_n + 1\} & \text{ 은 공비가 2인 등비수열이다.} \\
 \text{즉, } a_6 + 1 &= (a_1 + 1) \times 2^5 = 64 \text{ 이므로} \\
 a_6 &= 63 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

36 **답** (가) $n=2$, (나) $1+h$,
(다) $1+(k+1)h$

(i) $n=2$ 일 때, $(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h$
($\because h^2>0$)

(ii) $n=k$ 일 때,
 $(1+h)^k>1+kh$ 가 성립한다고 가정하
자.

양변에 $1+h$ 를 곱하면
 $(1+h)^{k+1}>(1+kh)(1+h)$
 $=1+(k+1)h+kh^2$
 $>1+(k+1)h$ ($\because kh^2>0$)

(i), (ii)에 의하여 $h>0$ 일 때,
 $n\geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여
 $(1+h)^n>1+nh$ 가 성립한다.

37 **답** (가) 1,
(나) $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$,
(다) $2k^2+7k+6$

(i) $n=1$ 일 때,
(좌변)=(우변)=1이므로 주어진 등식
은 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고
가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

이 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이
성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
이 성립한다.

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 96

38 ⑤	39 ②	40 ⑤
41 (1) $n=14$	(2) $n=7$	42 ④
43 ①	44 ②	

38 **답** ⑤

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라
하면

$$\sum_{k=1}^5 a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$$

$$= (a_1 + d) + (a_3 + d) + (a_5 + d)$$

$$+ (a_7 + d) + (a_9 + d)$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) + 5d$$

$$= \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} + 5d$$

$$= 25 + 5d$$

이므로 $25 + 5d = 45$ 에서 $d = 4$

한편, $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} + \sum_{k=1}^5 a_{2k}$

$$= 25 + 45 = 70$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10(2a + 9 \times 4)}{2} = 10a + 180$$

이므로 $10a + 180 = 70$ 에서 $a = -11$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15} a_k = \frac{15(2 \times (-11) + 14 \times 4)}{2}$$

$$= 255$$

39 답 ②

첫째항은 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{\sum_{k=1}^n a_k} &= \frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}}{\frac{a(1-r^n)}{1-r}} \\ &= \frac{\frac{a(1+r^n)(1-r^n)}{1-r}}{\frac{a(1-r^n)}{1-r}} \\ &= 1+r^n=4 \\ \therefore r^n &= 3 \cdots \textcircled{1} \\ \therefore \frac{\sum_{k=1}^{8n} a_k}{\sum_{k=1}^{4n} a_k} &= \frac{S_{8n}}{S_{4n}} = \frac{\frac{a(1-r^{8n})}{1-r}}{\frac{a(1-r^{4n})}{1-r}} \\ &= \frac{\frac{a(1+r^{4n})(1-r^{4n})}{1-r}}{\frac{a(1-r^{4n})}{1-r}} \\ &= 1+r^{4n}=1+(r^n)^4 \\ &= 1+3^4 (\because \textcircled{1}) \\ &= 82 \end{aligned}$$

40 답 ⑤

$a_1=1$ 이웃하는 두 항 사이의 관계식에서 n 대신에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하여 규칙을 찾는다.

$$a_2+a_1=3 \times (-1) = -3 \text{에서 } a_2=-4$$

$$a_3+a_2=3 \times (-1)^2 = 3 \text{에서 } a_3=7$$

$$a_4+a_3=3 \times (-1)^3 = -3 \text{에서 } a_4=-10$$

$\vdots$

따라서 n 이 홀수이면 $a_n > 0$, n 이 짝수이면 $a_n < 0$ 이므로 $a_{10} < 0$, $a_{12} < 0$ 이다.

또, 각 항의 절댓값으로 이루어진 수열

$\{|a_n|\}$ 은 1, 4, 7, 10, ...이므로

첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이다.

$$|a_{10}| = 1 + 9 \times 3 = 28$$

$$|a_{12}| = 1 + 11 \times 3 = 34$$

$$\therefore a_{10} = -28, a_{12} = -34$$

$$\therefore a_{10} + a_{12} = -62$$

41 답 (1) $n=14$ (2) $n=7$

$$(1) \sum_{k=1}^{n+1} (k+2) = 150 \text{에서}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2(n+1) = 150$$

$$n^2 + 7n - 294 = 0, (n+21)(n-14) = 0$$

$$\therefore n = 14 (\because n > 0)$$

$$(2) \sum_{k=3}^n 3k^2 = 405 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^n 3k^2 - \sum_{k=1}^2 3k^2 = 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 - 12$$

$$= 405$$

$$n(n+1)(2n+1) = 840$$

$$n(n+1)(2n+1) = 7 \times 8 \times 15$$

$$\therefore n = 7$$

42 답 ④

이차방정식 $x^2 - nx + n = 0$ 에서 근과 계수

의 관계에 의하여 $\alpha_n + \beta_n = n$, $\alpha_n \beta_n = n$

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n = n^2 - 2n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{10} (n^2 - 2n)$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 2 \times \frac{10 \times 11}{2}$$

$$= 385 - 110 = 275$$

43 답 ①

첫째항이 -1 이고 공차가 3인 등차수열

$\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = -1 + (n-1) \times 3 = 3n - 4$$

$$\therefore \sum_{k=1}^6 a_k(a_k - 2)$$

$$= \sum_{k=1}^6 (3k-4)(3k-6)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^6 (k-2)(3k-4)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^6 (3k^2 - 10k + 8)$$

$$= 9 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 30 \times \frac{6 \times 7}{2} + 3 \times 48$$

$$= 819 - 630 + 144 = 333$$

44 답②

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, k^3-k 가 6의 배수라 가정하면

$$\begin{aligned} & (k+1)^3 - (k+1) \\ &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \end{aligned}$$

이때, $k^3-k=(k-1)k(k+1)$ 은 연속된 세 자연수의 곱으로 6의 배수이고, $k^2+k=k(k+1)$ 은 연속된 두 자연수의 곱으로 2의 배수이므로 k^3-k , $3(k^2+k)$ 는 모두 6의 배수이다.

따라서 $f(k)=k^3-k$, $g(k)=k^2+k$, $p=2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(p)+g(p) &= f(2)+g(2) \\ &= (2^3-2)+(2^2+2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

수학 II

I. 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한 ~

05 최대, 최소 정리와 사잇값의 정리

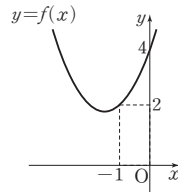
핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 100

- 01 (1) 2 (2) 2 (3) $-\infty$ (4) ∞
 02 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) 0 (4) 2
 03 ③ 04 ④ 05 ③
 06 (1) 1 (2) 3 07 1 08 ④
 09 ① 10 ⑤ 11 ㄱ, ㄴ
 12 (1) 최댓값 : 10, 최솟값 : 1
 (2) 최댓값 : 5, 최솟값 : 1
 13 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조
 14 $-6 < a < 6$

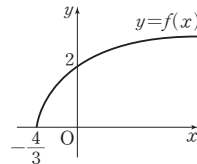
01 답 (1) 2 (2) 2 (3) $-\infty$ (4) ∞

(1) $f(x)=x^2+3x+4$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



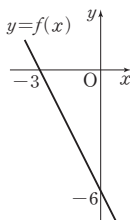
$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 4) = 2$$

(2) $f(x)=\sqrt{3x+4}$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



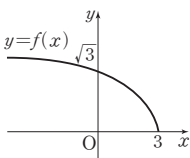
$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3x+4} = \sqrt{4} = 2$$

- (3) $f(x) = -2x - 6$ 이라 하면 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 6) = -\infty$$

- (4) $f(x) = \sqrt{-x+3}$ 이라 하면 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x+3} = \infty$$

02 답 (1) ∞ (2) $-\infty$

(3) 0 (4) 2

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ (상수) 0 꼴

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ (상수) 0 꼴

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+2} = 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$

03 답 ③

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + f(0) + \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -1 + 0 + 1 = 0$$

04 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

05 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} &\quad \text{분모를 유리화한다.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+7}+3) \\ &= 3+3=6 \end{aligned}$$

06 답 (1) 1 (2) 3

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 1} \{2f(x) - g(x)\} \\ &= 2\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ &= 2 \times 3 - 5 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5f(x)}{g(x)} &= \frac{5\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \\ &= \frac{5 \times 3}{5} \\ &= 3 \end{aligned}$$

07 답 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + a}{x - 1} &\text{가 수렴하고} \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) &= 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + a) &= 0 \\ 1 - 2 + a &= 0 \\ \therefore a &= 1 \end{aligned}$$

08 답 ④

극한값이 존재하고, $x \rightarrow 2$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+a} - b) = 0 \text{에서}$$

$$b = \sqrt{2+a} \cdots \textcircled{1}$$

주어진 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{2+a}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{2+a})(\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a})}{(x-2)(\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a}} = \frac{1}{2\sqrt{2+a}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$2\sqrt{2+a} = 4 \text{에서 } a = 2$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } b = 2$$

$$\therefore ab = 4$$

09 답 ①

최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = 0$ 인 삼차

함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx \cdots \textcircled{1}$

(단, a, b 는 상수)라 하자.

이때, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 6$ 을 만족시키므로

$f(-1) = 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } -1 + a - b = 0 \text{에서 } b = a - 1 \cdots \textcircled{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + (a-1)x \\ &= x(x+1)(x+a-1) \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} x(x+a-1) \\ &= (-1) \times (a-2) = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -4, b = -5 (\because \textcircled{2})$$

따라서 $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$ 이므로

$$f(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 - 5 \times 2 = -18$$

10 답 ⑤

$x = -2$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 가 $x = a$
에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \xrightarrow{\text{연속}} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + b}{x + 2} = 5$$

$x \rightarrow -2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + ax + b) = 0, \quad 4 - 2a + b = 0$$

$$\therefore b = 2a - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + 2a - 4}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (x+a-2) = a - 4 = 5$$

$$\therefore a = 9, b = 14 \quad \therefore a + b = 23$$

$$\xrightarrow{\text{연속}} b = 2a - 4 = 18 - 4 = 14$$

11 답 ㄱ, ㄴ

두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 - 2$ 는 다
항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } 3f(x) - 2g(x) &= 3(x+3) - 2(x^2-2) \\ &= -2x^2 + 3x + 13 \end{aligned}$$

이므로 함수 $3f(x) - 2g(x)$ 는 모든 실
수 x 에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)g(x) = (x+3)(x^2-2)$ 이므로 함
수 $f(x)g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속
이다.

$$\text{ㄷ. } \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2-2}{x+3} \text{에서 } x+3=0,$$

즉 $x = -3$ 에서 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 정의되지
않으므로 $x = -3$ 에서 불연속이다.

ㄹ. 함수 $2g(x) = 2(x^2-2)$ 는 연속함수이

지만 함수 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+3}{x^2-2}$ 에서 $x = \sqrt{2}$

또는 $x = -\sqrt{2}$ 일 때, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 정

의되지 않는다.

따라서 $x = \pm\sqrt{2}$ 에서 함수

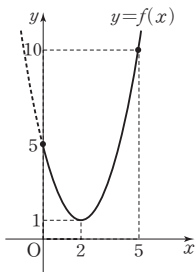
$$2g(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \text{는 불연속이다.}$$

따라서 모든 실수 x 에서 연속인 함수는
ㄱ, ㄴ이다.

12 [답] (1) 최댓값 : 10, 최솟값 : 1

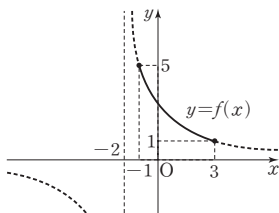
(2) 최댓값 : 5, 최솟값 : 1

- (1) 닫힌구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 5]$ 에서 연속이다.



따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(0)=5$, $f(2)=1$, $f(5)=10$ 이므로 최댓값은 10, 최솟값은 1이다.

- (2) 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이다.



따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(-1)=5$, $f(3)=1$ 이므로 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.

13 [답] (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

- (1) $f(x)=2x^3+3x-4$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고
 $f(0)=-4<0$, $f(1)=1>0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에서 하나 존재하므로 방정식 $f(x)=0$ 이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

- (2) $g(x)=\frac{3}{x}-2x+1$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고
 $g(1)=2>0$, $g(2)=-\frac{3}{2}<0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

14 [답] $-6 < a < 6$

$f(x)=x^2-5x+a$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

이때, 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(-1)=1+5+a=a+6$$

$$f(2)=4-10+a=a-6$$

$f(-1)f(2)<0$ 이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 실수 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재하므로

$$f(-1)f(2)=(a+6)(a-6)<0$$

$$\therefore -6 < a < 6$$

15 ②

16 2

17 ③

18 64

19 5

20 ③

21 ①

22 15

15 [답] ②

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^3}{2x^3 - 1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + t^3}{-2t^3 - 1} \quad \text{($x = -t$로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$일 때 $t \rightarrow \infty$)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{t}}{-2 - \frac{1}{t^3}} \\ &= \frac{1+0}{-2-0} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

16 [답] 2

극한값 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 가 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \text{ 이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (5x + a) = a - 5$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} (-x - 4) \\ &= 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a - 5 = -3 \text{에서 } a = 2$$

17 [답] ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - f(x)}{3x + 2f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - \frac{f(x)}{x}}{3 + 2 \times \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{8-3}{3+6} = \frac{5}{9} = \frac{q}{p} \\ \therefore p + q &= 9 + 5 = 14 \end{aligned}$$

18 [답] 64

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 10}{f(x)} = \frac{1}{2} \text{에서 } f(x) \text{는 } x^2 \text{의}$$

계수가 2인 이차함수이어야 한다.

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + ax + b}{x+2} = 8 \dots \text{㉠}$$

이때, $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0$ 이고

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2}$ 의 극한값이 0이 아니므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + ax + b) = 0$$

즉, $8 - 2a + b = 0$ 이므로

$$b = 2a - 8 \dots \text{㉡}$$

㉠에 ㉡을 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + ax + 2a - 8}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} (2x + a - 4) \quad \text{($x = -2$로 놓으면)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (2x + a - 4) \quad \left| \begin{array}{r|l} 2 & a-4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$= a - 8 = 8$$

$$\therefore a = 16, b = 24 \quad (\because \text{㉡})$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 16x + 24$ 이므로

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \times 2^2 + 16 \times 2 + 24 \\ &= 64 \end{aligned}$$

19 [답] 5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{x} \right) = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{4}{x} \right) = 5 \text{이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

20 [답] ③

극한값이 존재하고, $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0 \text{에서}$$

$$1 + a + b = 0$$

주어진 식에 $b = -a - 1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1+a) \\ &= a+2=5 \end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=-4$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 25 \text{이다.} \quad \rightarrow 1+a+b=0 \text{에서 } b=-4$$

21 답 ①

$$f(x)g(x) = \begin{cases} (-x+4)(2x+k) & (x \leq 3) \\ (3x-1)(2x+k) & (x > 3) \end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 연속이라면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) \\ &= f(3)g(3) \end{aligned}$$

$$\text{에서 } (9-1)(6+k) = (-3+4)(6+k)$$

$$7(6+k) = 0 \quad \therefore k = -6$$

22 답 15

방정식 $f(x)=0$ 이 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가지며 이 실근이 열린구간 $(-1, 3)$ 에 존재하기 위해서는 사잇값의 정리에 의하여 $f(-1)f(3) < 0$

$$f(-1) = -1 - 4 - 2 + k = k - 7$$

$$f(3) = 27 - 36 + 6 + k = k - 3$$

즉, $f(-1)f(3) < 0$ 에서

$$(k-3)(k-7) < 0$$

$$\therefore 3 < k < 7$$

따라서 정수 k 의 값은 4, 5, 6이므로

모든 정수 k 의 값의 합은

$$4+5+6=15$$

II. 미분

06 평균변화율 ~

07 미분계수와 미분가능성

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 112

01 ③

02 ②

03 (1) -3 (2) -1 (3) 82 04 ②

05 ④

06 (1) -3 (2) -3 (3) 10

01 답 ③

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4^2 - 1^2}{4 - 1} = \frac{15}{3} = 5$$

(y의 변화량)
(x의 변화량)

02 답 ②

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} \\ &= f(a+1) - f(a) \\ &= (a+1)^2 + 3(a+1) - (a^2 + 3a) \\ &= 2a + 4 \end{aligned}$$

(y의 변화량)
(x의 변화량)

즉, $2a+4=2$ 에서 $a=-1$

03 답 (1) -3 (2) -1

(3) 82

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-8 - 1}{3} = -3$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{-1 - 0}{1} = -1$$

$$(3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(8) - f(2)}{8 - 2} = \frac{500 - 8}{6} = 82$$

04 답 ②

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} & \quad \text{같은 게 들어가야 한다.} \\ &= \lim_{2h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(1) = 4 \quad \text{같은 게 들어가야 한다.} \end{aligned}$$

05 답 ④

$f(1) = -1$ 이므로 주어진 식은

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) + 1}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^2 - 1} \times \frac{x^3 - 1}{x^3 - 1} \right\} \quad \leftarrow f(1) = -1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \right\} \quad \leftarrow \text{분모, 분자에 각각 } x^3 - 1 \text{을 곱한다.} \\ &= f'(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= f'(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2} f'(1) = 3 \quad \leftarrow x=1 \text{을 대입한다.} \end{aligned}$$

06 답 (1) -3 (2) -3 (3) 10

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 와 같다.

$$\begin{aligned} (1) f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-3(1+\Delta x) + 4\} - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(-1+\Delta x)^2 + (-1+\Delta x) - 1\} - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2\Delta x - 3) = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(2+\Delta x)^3 - 2(2+\Delta x) + 4\} - 8}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3 + 6(\Delta x)^2 + 10\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{(\Delta x)^2 + 6\Delta x + 10\} = 10 \end{aligned}$$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 116

07 ①	08 -3	09 ②
10 1	11 8	12 ②
13 ②	14 5	

07 답 ①

x 의 값이 2에서 $2+h$ 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} &= \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4 \end{aligned}$$

$h+4=10$ 이므로

$h=6$

08 답 -3

직선 AB의 기울기는 x 의 값이 3에서 6까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = 3, \frac{f(6)}{3} = 3$$

$\therefore f(6) = 9$

$f(0) = f(6)$ 이므로 x 의 값이 0에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} &= \frac{f(3) - f(6)}{3 - 0} \\ &= -\frac{9}{3} = -3 \end{aligned}$$

09 답 ②

x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

또, 함수 $f(x)$ 의 $x=c$ 에서의 미분계수는 $f'(c)=1$ 이다.

$$\begin{aligned}
 & f'(c) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(c+h)^2 - 3(c+h)\} - (c^2 - 3c)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2ch - 3h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2c - 3) = 2c - 3 \\
 &2c - 3 = 1, 2c = 4 \quad \therefore c = 2
 \end{aligned}$$

10 1

$\frac{1}{n}$ 은 h 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때, $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f(1) \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{f(1+h) - f(1)\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(1+h)^2 - (1+h) + 3\} - 3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 1) = 1
 \end{aligned}$$

11 8

$f(1) = 1, f'(1) = 4$ 이므로

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - 1}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x^2) - f(1)\}(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \times (x+1) \\
 &= 2f'(1) = 2 \times 4 = 8
 \end{aligned}$$

12 ②

- ㄱ. $x=a$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$ 인 점에서의 접선의 기울기보다 크므로
 $f'(a) > f'(b)$ (거짓)
- ㄴ. $a \leq x \leq b$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하므로

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a) + f(b)}{2} \text{ (거짓)}$$

- ㄷ. $x=b$ 인 점에서의 접선의 기울기는 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로

$$f'(b) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ (참)}$$

- ㄹ. $x=a, x=b, x=\frac{a+b}{2}$ 인 점에서의 각
 각의 접선의 기울기를 비교하면 $x=a$ 인
 점에서의 접선의 기울기가 가장 크고
 $x=b$ 인 점에서의 접선의 기울기가 가장
 작으므로

$$f'(a) > f'\left(\frac{a+b}{2}\right) > f'(b) \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

13 ②

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h-2) - 0}{h}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

- ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는

$x=2$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1
 \end{aligned}$$

이므로 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

- ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = k(2) = 4$ 이므로 $k(x)$ 는

$x=2$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(2+h) - k(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 - 4h + 4) - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h - 4) = -4 \end{aligned}$$

이므로 $k(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.
따라서 $x=2$ 에서 연속이지만 미분가능하
지 않은 함수는 ㄴ이다.

14 답 5

함수 $y=f(x)$ 는 $x=0$, $x=2$ 인 점에서 불
연속이므로 $m=2$

또한, $x=-1$, $x=0$, $x=2$ 에서 미분가능
하지 않으므로 $n=3 \quad \therefore m+n=5$

08 도함수의 정의 ~

09 다항함수의 미분법

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 118

15 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=1$

(3) $f'(x)=2x$

16 (1) $y'=0$ (2) $y'=0$

(3) $y'=4x^3$ (4) $y'=6x^5$

17 (1) $f'(x)=12x^2-6x$, $f'(3)=90$

(2) $f'(x)=3x^2-2$, $f'(3)=25$

18 (1) $y'=-\frac{2}{3}x+2$ (2) $y'=4x^3-6x^2+4$

(3) $y'=48x^3-18x^2$ (4) $y'=3x^2-7$

19 (1) -4 (2) 2 20 31

15 답 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=1$

(3) $f'(x)=2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

(1) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6-6}{h} = 0$$

(2) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h+1 - (x+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

(3) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

16 답 (1) $y'=0$ (2) $y'=0$

(3) $y'=4x^3$ (4) $y'=6x^5$

(1) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

(2) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 - (-4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

(3) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2 - x^2\} \times \{(x+h)^2 + x^2\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2xh + h^2) \{(x+h)^2 + x^2\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \{(x+h)^2 + x^2\}$$

$$= 2x \times 2x^2 = 4x^3$$

$$\begin{aligned}
 (4) y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^6 - x^6}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^3 - x^3\} \times \{(x+h)^3 + x^3\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2h + 3xh^2 + h^3) \{(x+h)^3 + x^3\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \{(x+h)^3 + x^3\} \\
 &= 3x^2 \times 2x^3 = 6x^5
 \end{aligned}$$

17  (1) $f'(x) = 12x^2 - 6x$,

$$f'(3) = 90$$

(2) $f'(x) = 3x^2 - 2$,

$$f'(3) = 25$$

(1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x$ 이므로
 $f(x+h) = 4(x+h)^3 - 3(x+h)^2 + 2(x+h)$
 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x+h) - f(x) &= (12x^2 - 6x)h + (12x - 3)h^2 + 4h^3 \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(12x^2 - 6x)h + (12x - 3)h^2 + 4h^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \{12x^2 - 6x + (12x - 3)h + 4h^2\} \\
 &= 12x^2 - 6x \\
 \therefore f'(x) &= 12x^2 - 6x, f'(3) = 90
 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^3 - 2x$ 이므로
 $f(x+h) = (x+h)^3 - 2(x+h)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x+h) - f(x) &= (3x^2 - 2)h + 3xh^2 + h^3 \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2 - 2)h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 - 2 + 3xh + h^2) \\
 &= 3x^2 - 2 \\
 \therefore f'(x) &= 3x^2 - 2, f'(3) = 25
 \end{aligned}$$

18  (1) $y' = -\frac{2}{3}x + 2$

(2) $y' = 4x^3 - 6x^2 + 4$

(3) $y' = 48x^3 - 18x^2$

(4) $y' = 3x^2 - 7$

(1) $y' = \left(-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1\right)' = -\frac{2}{3}x + 2$

(2) $y' = (x^4 - 2x^3 + 4x + 4)'$
 $= 4x^3 - 6x^2 + 4$

(3) $y' = (3x^3)' \times (4x - 2) + 3x^3 \times (4x - 2)'$
 $= 9x^2(4x - 2) + 3x^3 \times 4$
 $= 36x^3 - 18x^2 + 12x^3 = 48x^3 - 18x^2$

(4) $y' = (x - 1)'(x - 2)(x + 3)$
 $+ (x - 1)(x - 2)'(x + 3)$
 $+ (x - 1)(x - 2)(x + 3)'$
 $= (x - 2)(x + 3) + (x - 1)(x + 3)$
 $+ (x - 1)(x - 2)$
 $= 3x^2 - 7$

19  (1) -4 (2) 2

(1) $f'(x) = 4x - 4$ 이므로 $f'(0) = -4$

(2) $f'(x) = (x^2 - 2x)' \times (3x - 1)$
 $+ (x^2 - 2x) \times (3x - 1)'$
 $= (2x - 2)(3x - 1)$
 $+ (x^2 - 2x) \times 3$
 $= 6x^2 - 8x + 2 + 3x^2 - 6x$
 $= 9x^2 - 14x + 2$

이므로 $f'(0) = 2$

20  31

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (5x + 2)' \times (2x^2 - x + 1) \\
 &\quad + (5x + 2) \times (2x^2 - x + 1)' \\
 &= 5 \times (2x^2 - x + 1) \\
 &\quad + (5x + 2) \times (4x - 1) \\
 &= 10x^2 - 5x + 5 + 20x^2 + 3x - 2 \\
 &= 30x^2 - 2x + 3
 \end{aligned}$$

이므로 $f'(1) = 30 - 2 + 3 = 31$

21 ②

22 ④

23 10

24 1

25 $\frac{5}{3}$

26 8

27 $a=5, b=1$

28 ①

21 답 ②

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는 $x=1$ 에서의 미분계수와 같다.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - 2 \times 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4) = 4 \end{aligned}$$

22 답 ④

$f(0+0) = f(0)f(0)$ 에서 $\{f(0)\}^2 = f(0)$

$\therefore f(0) = 1$ $\leftarrow \begin{matrix} f(0)\{f(0)-1\}=0 \text{에서} \\ f(x) > 0 \text{이므로 } f(0)=1 \text{이다.} \end{matrix}$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} \\ &= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} \quad \leftarrow f(0)=1 \\ &\quad \leftarrow f(x) \text{는 변수 } h \text{가 없으므로 } \lim \text{의 영향을 받지 않는다.} \\ &= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= f'(0) f(x) \end{aligned}$$

23 답 10

$f(x) = x^2 + ax + b$ 에서

$f(1) = 1 + a + b = 1$ 이므로

$a + b = 0 \cdots \text{㉠}$

$f'(x) = 2x + a$ 이므로

$f'(2) = a + 4 = -1$

$\therefore a = -5$

이를 ㉠에 대입하면 $b = 5$

$\therefore b - a = 10$

24 답 1

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - 1}{x + 1} = 3$ 에서

$\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow -1} \{g(x) - 1\} = g(-1) - 1 = 0$

$\therefore g(-1) = 1$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} \\ &= g'(-1) = 3 \end{aligned}$$

$f(x) = x^2 g(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x) = 2x \times g(x) + x^2 \times g'(x)$ 이므로

$f'(-1) = -2 \times g(-1) + 1 \times g'(-1)$

$$= -2 \times 1 + 1 \times 3 = 1$$

25 답 $\frac{5}{3}$

$f(x) = (x^2 + 2)g(x)$ 에서

$f'(x) = 2x \times g(x) + (x^2 + 2) \times g'(x)$

$f'(1) = 11, g(1) = 3$ 이므로

$f'(1) = 2g(1) + 3g'(1)$

$$= 2 \times 3 + 3g'(1) = 11$$

$$\therefore g'(1) = \frac{5}{3}$$

26 답 8

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 2}{x - 3}, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 2}{x - 3} = -2$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) + 2\} = 0, \lim_{x \rightarrow 3} \{g(x) - 2\} = 0$

이므로

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$

$\therefore f(3) = -2, g(3) = 2 \cdots \text{㉠}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 2}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = 2$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 2}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = g'(3) = -2 \\
 &\therefore f'(3) = 2, g'(3) = -2 \dots \textcircled{A} \\
 &h(x) = f(x)g(x) \text{라 하면} \\
 &h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{이므로} \\
 &\textcircled{A}, \textcircled{A} \text{에 의하여} \\
 &h'(3) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3) \\
 &= 2 \times 2 + (-2) \times (-2) \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

27 [답] $a=5, b=1$

다항식 $x^6 - 6x + a$ 가 $(x-b)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^6 - 6x + a = (x-b)^2 Q(x) \dots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A}$ 에 $x=b$ 를 대입하면

$$b^6 - 6b + a = 0 \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 6x^5 - 6 &= 2(x-b)Q(x) \\
 &+ (x-b)^2 Q'(x) \dots \textcircled{C}
 \end{aligned}$$

$\textcircled{C}$ 에 $x=b$ 를 대입하면

$$6b^5 - 6 = 0, b^5 = 1$$

$$\therefore b = 1 (\because b \text{가 실수이므로})$$

이를 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$1 - 6 + a = 0$$

$$\therefore a = 5$$

$$\therefore a = 5, b = 1$$

28 [답] ①

함수 $f(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, \frac{15}{4})$ 를 지나

므로 $f(-1) = \frac{15}{4}$ 이고, $x = -1$ 에서의 접선

$$l \text{의 기울기가 } \frac{5}{4} \text{이므로 } f'(-1) = \frac{5}{4}$$

$g(x) = (x^2 - x + 2)^2 f(x)$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하자.

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \{(x^2 - x + 2)^2\}' f(x) \\
 &\quad + (x^2 - x + 2)^2 f'(x) \\
 &= 2(x^2 - x + 2) \times (2x - 1) \times f(x) \\
 &\quad + (x^2 - x + 2)^2 \times f'(x) \\
 \therefore g'(-1) &= 2 \times 4 \times (-3) \times f(-1) \\
 &\quad + 16 \times f'(-1) \\
 &= -90 + 20 = -70
 \end{aligned}$$

10 다항함수의 접선의 방정식 ~

16 속도와 가속도

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 124

29 풀이 참조 30 $y = 3x$

31 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{31}{4}$

32 (1) 존재한다. (2) 존재하지 않는다.

33 2 34 $\frac{1}{2}$

35 풀이 참조 36 풀이 참조

37 풀이 참조

38 (1) -7, -2, 3 (2) -4, 1, 5

39 극댓값 : 1, 극솟값 : -3

40 (1) 최댓값 : 2, 최솟값 : $-\frac{2}{3}$

(2) 최댓값 : 2, 최솟값 : -1

(3) 최댓값 : 2, 최솟값 : 0

(4) 최댓값 : 3, 최솟값 : $-\frac{2}{3}$

(5) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1

41 9

42 (1) 3, 3 (2) 4, 4 (3) 3, 3

43 ② 44 풀이 참조

45 풀이 참조

29 **[답]** 풀이 참조

$$f(x) = x^2 + 3 \text{ 이라 하면 } f'(x) = 2x$$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의기울기는 $f'(1) = 2$

따라서 곡선 $y=x^2+3$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서
의 접선의 방정식은 $y-4=2(x-1)$

30 **답** $y=3x$

$$\frac{y'}{y} = 2x - 1 = 3 \quad \therefore x = 2$$

$x=2$ 일 때, $y=6$ 이므로 구하는 접선은 점 $(2, 6)$ 을 지나고 기울기가 3인 직선이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3x$ 이다.

31 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{31}{4}$

$f(x)=x^2-2x+4$ 에서 $f'(x)=2x-2$ 이므로 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=2 \times 3 - 2 = 4$ 이다.

따라서 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선에 수직인

직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{4}$ 이고

$$f(3) = 3^2 - 2 \times 3 + 4 = 7 \circ \text{므로}$$

구하는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{4}(x-3) + 7 = -\frac{1}{4}x + \frac{31}{4}$$

32. **답** (1) 존재한다.

(2) 존재하지 않는다.

(1) 함수 $y=f(x)$ 는 다항함수이므로 닫힌구
간 $[-2, 4]$ 에서 연속이고 열린구간
 $(-2, 4)$ 에서 미분가능하다.

$f(0)=f(4)$ 이므로 롤의 정리를 만족시키는 실수 c 가 -2 와 4 사이에 적어도 하나 존재한다.

(2) 함수 $y=|x+1|$ 의 경우

닫힌구간 $[-2, 4]$ 에 속하는 서로 다른 실수 c_1, c_2 에 대하여 $f(c_1)=f(c_2)$ 라 하더라도 열린구간 $(-2, 4)$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 λ 의 정리의 조건을 만족시키지 않으므로 실수 c 가 -2 와 4 사이에 존재하지 않는다.

33 **답** 2

함수 $f(x) = x^2 - 4x - 5$ 는 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 4)$ 에서 미분가능하다. 이때, $f(0) = f(4) = -5$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 을 만족시키는 실수 c 가 열린구간 $(0, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-4$ 에서

$$f'(c) = 2c - 4 = 0$$

$$\therefore c=2$$

34 답 $\frac{1}{2}$

함수 $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)(-1<c<2)$$

인 실수 c 가 적어도 하나 존재한다.

○따라서, $f'(x) = -2x + 3$ ○므로

$$\frac{6-0}{2-(-1)} = -2c+3$$

$$2 = -2c + 3$$

$$\therefore c = \frac{1}{2}$$

35 **답** 풀이 참조

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1) \circ | \text{고}$$
$$f'(x)=0\text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 **증가** 하고,
 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 **감소** 하며, 구간 $(1, \infty)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 **증가** 한다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$

36 [답] 풀이 참조

다항함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 2$ (a 는 실수)가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a \geq 0 \text{ 이어야 한다.}$$

이차방정식 $3x^2 + 2ax + a = 0$ 의 판별식을

$$D \text{ 라 하면 } \frac{D}{4} = a^2 - 3a \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 3$$

따라서 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$0 \leq a \leq 3$$

37 [답] 풀이 참조

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{13}{3}$	$\searrow$	-17	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서

$$\text{극대 이고 극댓값은 } \frac{13}{3}.$$

$x = 3$ 에서 **극소** 이고 극솟값은 -17

38 [답] (1) $-7, -2, 3$

$$(2) -4, 1, 5$$

(1) $a = -7, a = -2, a = 3$ 을 각각 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq f(a)$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대가 되므로 극대가 되는 x 의 값은 $-7, -2, 3$ 이다.

(2) $a = -4, a = 1, a = 5$ 를 각각 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(a) \leq f(x)$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소가 되므로 극소가 되는 x 의 값은 $-4, 1, 5$ 이다.

39 [답] 극댓값 : 1, 극솟값 : -3

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$= 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$= 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

증가와 감소를 나타낸 표에 의하여 극댓값은

$$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 - 3 = 1,$$

극솟값은

$$f(3) = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 - 3 = -3$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

40 [답] (1) 최댓값 : 2, 최솟값 : $-\frac{2}{3}$

$$(2) \text{ 최댓값 : 2, 최솟값 : } -1$$

$$(3) \text{ 최댓값 : 2, 최솟값 : 0}$$

$$(4) \text{ 최댓값 : 3, 최솟값 : } -\frac{2}{3}$$

$$(5) \text{ 최댓값 : 3, 최솟값 : } -1$$

(1) 닫힌구간 $\left[-\frac{1}{3}, 2\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2이고, 최솟값은 $-\frac{2}{3}$ 이다.

(2) 닫힌구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2이고, 최솟값은 -1이다.

(3) 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2이고, 최솟값은 0이다.

(4) 닫힌구간 $\left[-2, -\frac{1}{3}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 3이고, 최솟값은 $-\frac{2}{3}$ 이다.

(5) 닫힌구간 $[-4, 5]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 3이고, 최솟값은 -1이다.

41 답 9

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 18x - 12 \\ &= -6(x^2 - 3x + 2) \\ &= -6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$
 보통 $f'(x)=0$ 인 x 중에서 극대·극소가 된다.

구간 $[0, 3]$ 에서 극솟값은
 $f(1) = -3$, $f(1) = -2 \times 1^3 + 9 \times 1^2 - 12 \times 1 + 2 = -3$

극댓값은 $f(2) = -2$
 $f(2) = -2 \times 2^3 + 9 \times 2^2 - 12 \times 2 + 2 = -2$

또한, 구간 양 끝에서의 함수값은 $f(0)=2$,
 $f(3) = -7$, $f(3) = -2 \times 3^3 + 9 \times 3^2 - 12 \times 3 + 2 = -7$

따라서 최댓값 $M=2$, 최솟값 $m=-7$ 이므로
 $M-m=2-(-7)=9$

42 답 (1) 3, 3 (2) 4, 4 (3) 3, 3

(1) 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수는 3이므로 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(2) 사차함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수는 4이므로 방정식 $g(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

(3) 이차함수 $y=h(x)$ 와 삼차함수 $y=i(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 3이므로 방정식 $h(x)=i(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

43 답 ②

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-k$ 라 놓으면
 $f'(x)=6(x+2)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because x>0$)
 따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이고 최소이다.
 $f(1)=2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 12 \times 1 - k = -7-k$
 이때, 최솟값은 $f(1)=-7-k$ 인데 최솟값이 0 이상이어야 하므로 $-7-k \geq 0$ 에서 $k \leq -7$ 이다.
 따라서 상수 k 의 최댓값은 -7이다.

44 답 풀이 참조

속도 $v(t)$ $=f'(t)$	점 P가 양의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위	점 P가 음의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위	점 P가 운동 방향을 바꾼 시간 t
(1) $-2t+3$	$0 < t < \frac{3}{2}$	$t > \frac{3}{2}$	$t = \frac{3}{2}$
(2) $-2t+8$	$0 < t < 4$	$t > 4$	$t = 4$
(3) $9t^2+18t-27$	$t > 1$	$0 < t < 1$	$t = 1$
(4) $3t^2-12t$	$t > 4$	$0 < t < 4$	$t = 4$

(1) 점 P의 위치 $f(t)=-t^2+3t-4$ 에 대하여
 $f'(t)=-2t+3>0$ 이면 $t<\frac{3}{2}$ 이므로 점 P가 양의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $0 < t < \frac{3}{2}$ 이고, 음의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $t > \frac{3}{2}$ 이고, 운동 방향을 바꾼 시간은 $t=\frac{3}{2}$ 이다.

- (2) 점 P의 위치 $f(t) = -t^2 + 8t + 12$ 에 대하여 $f'(t) = -2t + 8 > 0$ 이면 $t < 4$ 이므로 점 P가 양의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $0 < t < 4$ 이고, 음의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $t > 4$ 이고, 운동 방향을 바꾼 시각은 $t = 4$ 이다.

- (3) 점 P의 위치 $f(t) = 3t^3 + 9t^2 - 27t$ 에 대하여 $f'(t) = 9t^2 + 18t - 27$

$$= 9(t-1)(t+3) > 0$$

이면 $t > 1$ 이므로 점 P가 양의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $t > 1$ 이고, 음의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $0 < t < 1$ 이고, 운동 방향을 바꾼 시각은 $t = 1$ 이다.

- (4) 점 P의 위치 $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9$ 에 대하여 $f'(t) = 3t^2 - 12t = 3t(t-4) > 0$ 이면 $t > 4$ 이므로 점 P가 양의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $t > 4$ 이고, 음의 방향으로 움직일 때의 시간 t 의 범위는 $0 < t < 4$ 이고, 운동 방향을 바꾼 시각은 $t = 4$ 이다.

45 [답 풀이 참조]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 위치 x 가 $x = -6t^2 + 36t$ 에서

점 P의 속도 v 는 $v = \frac{dx}{dt} = -12t + 36$

점 P의 가속도 a 는 $a = \frac{dv}{dt} = -12$

- (1) $t=1$ 에서의 점 P의 위치 : 30

시간 t 에 대한 위치 $x = -6t^2 + 36t$ 에 $t=1$ 을 대입하면 $x=30$

- (2) $t=2$ 에서의 점 P의 속도 : 12

시간 t 에 대한 속도 $v = -12t + 36$ 에 $t=2$ 를 대입하면 $v=12$

- (3) $t=3$ 에서의 점 P의 가속도 : -12

- (4) 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각 :

$$t = 3$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -12t + 36 = 0$$

$$\therefore t = 3$$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 138

46 ④

47 ③

48 $-\frac{4}{3}$

49 ④

50 $\frac{24}{5}$

51 ③

52 $-4 < a < 0$

53 ④

46 [답 ④]

곡선 $y = x^3$ 에서 $y' = 3x^2$ $y = x^n$ 일 때, $y' = nx^{n-1}$

접점을 (t, t^3) 이라 하면 접선의 기울기는 $y' = 3t^2$ 기울기가 m 이고 한 점 (a, b) 를 지나
는 직선의 방정식은 $y - b = m(x - a)$

따라서 접선의 방정식은 $y - t^3 = 3t^2(x - t)$

이 접선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2 - t^3 = 3t^2(0 - t) \text{에서}$$

$$t^3 = 1 \quad \therefore t = 1 \quad \text{에서 } t \text{는 실수이다.}$$

따라서 점 $(1, 1)$ 을 지나고 기울기가 3인 접선의 방정식은 $y = 3x - 2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 13$$

47 [답 ③]

$f(x) = x^3 - 2ax^2 + ax$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 4ax + a$$

$y = x^n$ 일 때, $y' = nx^{n-1}$
모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 방정식 $3x^2 - 4ax + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을
 D 라 하면 $D = b^2 - 4ac$

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 3a = a(4a - 3) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{3}{4}$$

따라서 상수 a 의 최솟값은 0이다.

48 답 $-\frac{4}{3}$

함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c) \text{인 실수 } c \text{가 } -2 \text{와}$$

2 사이에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=12x^2-2 \text{이므로}$$

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=12c^2-2 \quad (-2 < c < 2)$$

$$\text{에서 } \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{31-(-25)}{4}=\frac{56}{4}=14$$

$$12c^2-2=14, \quad c^2=\frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } c=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } c=\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

모든 실수 c 의 값의 곱은

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{4}{3}$$

49 답 ④

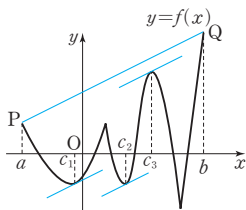
$x=a$ 인 곡선 위의 점을 P,

$x=b$ 인 곡선 위의 점을 Q라 하면

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 직선 PQ의 기울기이므로

$f'(c)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 $x=c$ 에서의 접선의 기울기이고 c 는 접점의 x 좌표이다.

따라서 그림과 같이 직선 PQ의 기울기와 같은 접선의 기울기를 갖는 접점은 $x=c_1$, $x=c_2$, $x=c_3$ 의 3개이므로 c 의 개수는 3이다.



50 답 $\frac{24}{5}$

곡선을 $y=f(x)$ 라 하면 $f'(x)=\frac{2}{5}x$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{5}t^2)$ 이라 하면 접선의

기울기는 $f'(t)=\frac{2}{5}t$ 이므로

접선의 방정식은 $y-\frac{1}{5}t^2=\frac{1}{5}t(x-t)$

이 접선이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$-3-\frac{1}{5}t^2=-\frac{2}{5}t, \quad t^2=15$$

$$t=\sqrt{15} \text{ 또는 } t=-\sqrt{15}$$

따라서 접선의 기울기는

$$f'(\sqrt{15})=\frac{2\sqrt{15}}{5} \text{ 또는}$$

$$f'(-\sqrt{15})=-\frac{2\sqrt{15}}{5} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} m_1^2+m_2^2 &= \left(\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)^2 \\ &= \frac{24}{5} \end{aligned}$$

51 답 ③

함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$ 에서

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$, $x=4$ 에서 극값을 가지므로

이차방정식 $-3x^2+2ax+b=0$ 의 두 근이 2, 4이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+4=-\frac{2a}{-3}=\frac{2}{3}a, \quad \frac{2}{3}a=6$$

$$\therefore a=9$$

$$2 \times 4 = -\frac{b}{3}, \quad -\frac{b}{3}=8$$

$$\therefore b=-24$$

$$\therefore a+b=-15$$

52 **답** $-4 < a < 0$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 극댓값 $f(1)=4$, 극솟값 $f(3)=0$ 이

므로 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-a$ 가

서로 다른 세 점에서 만나려면 $-4 < a < 0$

따라서 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 개의 실근을 갖기 위해서는 $f(x)$ 가 a, b 에서 극값을 가질 때 $f(a)f(b) < 0$ 이어야 한다.
 $-4 < a < 0$

53 **답** ④

위치 x 가 $x=x(t)$ 일 때,

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$= 6t^2 - 30t + 24$$

$$= 6(t-1)(t-4)$$

$$= 0 \quad \text{운동 방향을 바꿀 때는 속도가 음에서 양, 또는 양에서 음으로 바뀐다는 뜻이므로 } v(t)=0 \text{일 때를 의미한다.}$$

에서 $t=1$ 또는 $t=4$

속도 v 가 $v=v(t)$ 일 때,

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 30 \text{이므로 점 P가 처음}$$

으로 운동 방향을 바꾸는 순간 $t=1$ 일 때, 점

P의 가속도는

$$a(1) = -18$$

III. 적분

17 부정적분의 정의 ~

18 부정적분의 계산

핵심 개념 문제 **정답**

문제편 p. 140

01 풀이 참조 02 풀이 참조

03 (1) $x^4 + \frac{5}{3}x^3 + C$

(2) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

04 (1) $\frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $2\theta + C$

05 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - \frac{22}{3}$

01 **답** 풀이 참조

(1) $(3x)' = 3$ 이므로 $3x$ 의 도함수는 3 ,

$3x$ 는 3 의 한 부정적분

(2) $(2x^2 - 2)' = 4x$ 이므로 $2x^2 - 2$ 의 도함수는

$4x$, $2x^2 - 2$ 는 $4x$ 의 한 부정적분

(3) $(4x^3 + 2x - 1)' = 12x^2 + 2$ 이므로

$4x^3 + 2x - 1$ 의 도함수는 $12x^2 + 2$,

$4x^3 + 2x - 1$ 은 $12x^2 + 2$ 의 한 부정적분

02 **답** 풀이 참조

(1) $(7x)' = 7$ 이므로 $\int 7 dx = 7x + C$

(2) $(x^2)' = 2x$ 이므로 $\int 2x dx = x^2 + C$

(3) $(x^3)' = 3x^2$ 이므로

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

(4) $(4x^3)' = 12x^2$ 이므로

$$\int 12x^2 dx = 4x^3 + C$$

03  (1) $x^4 + \frac{5}{3}x^3 + C$

(2) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

$$\begin{aligned} (1) & \int (4x^3 + 5x^2) dx \\ &= 4 \int x^3 dx + 5 \int x^2 dx \\ &= 4 \left(\frac{1}{4} x^4 + C_1 \right) + 5 \left(\frac{1}{3} x^3 + C_2 \right) \end{aligned}$$

$$= x^4 + \frac{5}{3} x^3 + 4C_1 + 5C_2$$

이때, C_1, C_2 는 모두 임의의 상수이므로

$C = 4C_1 + 5C_2$ 라 하면

$$\int (4x^3 + 5x^2) dx = x^4 + \frac{5}{3} x^3 + C$$

$$\begin{aligned} (2) & \int (x+1)(x-2) dx \\ &= \int x^2 dx - \int x dx - \int 2 dx \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 + C_1 \right) - \left(\frac{1}{2} x^2 + C_2 \right) - (2x + C_3) \\ &= \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 2x + C_1 - C_2 - C_3 \end{aligned}$$

이때, C_1, C_2, C_3 은 모두 임의의 상수이

므로 $C = C_1 - C_2 - C_3$ 이라 하면

$$\begin{aligned} & \int (x+1)(x-2) dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 2x + C \end{aligned}$$

04  (1) $\frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $2\theta + C$

$$\begin{aligned} (1) & \int \frac{x^3}{x-2} dx - \int \frac{2x^2}{x-2} dx \\ &= \int \frac{x^3 - 2x^2}{x-2} dx \\ &= \int \frac{x^2(x-2)}{x-2} dx \\ &= \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C \end{aligned}$$

(단, C 는 적분상수)

$$\begin{aligned} (2) & \int (\sin \theta + \cos \theta)^2 d\theta \\ & \quad + \int (\sin \theta - \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int (1 + 2\sin \theta \cos \theta) d\theta \\ & \quad + \int (1 - 2\sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= \int 2d\theta = 2\theta + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

05  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - \frac{22}{3}$

$$f'(x) = x^2 + 4x + 3 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int (x^2 + 4x + 3) dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 + 2x^2 + 3x + C$$

(단, C 는 적분상수)

$$f(1) = -2 \text{ 이므로 } \frac{1}{3} + 2 + 3 + C = -2$$

$$\therefore C = -\frac{22}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3} x^3 + 2x^2 + 3x - \frac{22}{3}$$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 144

06 ⑤

07 ①

08 12

09 ⑤

10 ④

11 ⑤

12 6

13 8

06  ⑤

$$\textcircled{1} \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' = x \quad \therefore \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\textcircled{2} (2x^3)' = 6x^2 \quad \therefore \int 6x^2 dx = 2x^3 + C$$

$$\textcircled{3} \left(\frac{1}{4} x^4 \right)' = x^3 \quad \therefore \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C$$

$$\textcircled{4} (6x)' = 6 \quad \therefore \int 6 dx = 6x + C$$

$$\textcircled{5} x' = 1 \quad \therefore \int 1 dx = x + C$$

07 [답] ①

$$f(x) = \int (1-3x^2) dx \text{에서}$$

$$f'(x) = 1-3x^2 \text{이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$$

$$= 1 - 12$$

$$= -11$$

08 [답] 12

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $9x^2-3x+2$ 이므로

$$f'(x) = 9x^2 - 3x + 2$$

$$\therefore f(x) = \int (9x^2 - 3x + 2) dx$$

$$= 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

(단, C 는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$f(-1) = -3 - \frac{3}{2} - 2 + C = 2$$

$$\therefore C = \frac{17}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{17}{2} \text{이므로}$$

$$f(1) = 12$$

09 [답] ⑤

주어진 그래프로부터

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & (x \geq 0) \\ -x+2 & (x < 0) \end{cases}$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$f(x) = \int (-x+2) dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + C_1$$

(단, C_1 는 적분상수)

$$f(-2) = 5 \text{에서 } -2 - 4 + C_1 = 5$$

$$\text{이므로 } C_1 = 11$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 11$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$f(x) = \int 2dx = 2x + C_2$$

(단, C_2 는 적분상수)

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \text{에서}$$

$$C_2 = 11 \quad \therefore f(x) = 2x + 11$$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 11 & (x \geq 0) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 11 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{이므로 } f(2) = 15$$

10 [답] ④

$$f'(x) = (x+3)(x-5) \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 2x - 15) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x + C$$

(단, C 는 적분상수)

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 5$ 이므로
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값 15를 갖고, $x = 5$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f(-3) = 15 \text{에서 } -9 - 9 + 45 + C = 15$$

$$\therefore C = -12$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x - 12 \text{이므로}$$

$f(x)$ 의 극솟값은

$$f(5) = \frac{125}{3} - 112 = -\frac{211}{3}$$

11 답 ⑤

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+xy^2+x^2y$$

에 $x=0, y=0$ 을 각각 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \text{에서 } f(0)=0$$

$$\begin{aligned} \text{이때, } f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \end{aligned}$$

이므로 임의의 실수 x 에 대한 도함수는

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+xh+hx^2+x^2h-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + x + xh + x^2 \right\} \\ &= f'(0) + x + x^2 \\ &= x^2 + x \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 + x) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

(단, C 는 적분상수)

한편, $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore f(1) = \frac{5}{6}$$

12 답 6

삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 갖고,

그 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$x=-1$ 에서도 극값을 갖고 $f(0)=0$ 이다.

즉, $f'(1)=f'(-1)=0$ 이므로

$f'(x)=a(x+1)(x-1)$ ($a \neq 0$)이라 하면

$$f(x) = \int f'(x) dx = a \int (x^2 - 1) dx$$

$$= a \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) + C$$

(단, C 는 적분상수)

이때, $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x) = ax \left(\frac{1}{3}x^2 - 1 \right) = \frac{a}{3}x(x^2 - 3)$$

$f(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$ 또는

$$x=-\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 + b^2 + c^2 &= 0 + (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

13 답 8

$$\frac{d}{dx} \left\{ f(x) + \int xf(x) dx \right\} = x^3 + x \text{에서}$$

$$f'(x) + xf(x) = x^3 + x \cdots \textcircled{1}$$

다항함수 $f(x)$ 의 최고차항의 차수를 n 이라

하면 좌변의 차수는 $n+1$, 우변의 차수는

3이므로

$$n+1=3 \quad \therefore n=2$$

함수 $f(x)$ 는 이차함수이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0)$$

라 하면 $f'(x) = 2ax + b$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2ax + b + x(ax^2 + bx + c) = x^3 + x$$

$$ax^3 + bx^2 + (2a+c)x + b = x^3 + x \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 은 x 에 대한 항등식이므로

$$a=1, b=0, 2a+c=1$$

즉, $a=1, b=0, c=-1$

$$\therefore f(x) = x^2 - 1 \quad \therefore f(3) = 8$$

19 정적분의 정의 ~

21 정적분으로 표시된 함수

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 146

14 풀이 참조

15 (1) 10 (2) $\frac{7}{3}$ (3) 4

16 풀이 참조 17 풀이 참조 18 ③

19 풀이 참조 20 ③

14 **답** 풀이 참조

$$(1) \int_0^1 \frac{2}{3} x dx = \left[\frac{1}{3} x^2 \right]_0^1 \\ = \frac{1}{3} \times 1^2 - \frac{1}{3} \times 0^2 = \frac{1}{3}$$

$$(2) \int_1^3 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 26$$

15 **답** (1) 10 (2) $\frac{7}{3}$ (3) 4

$$(1) \int_0^2 (3x^2 + 1) dx = \left[x^3 + x \right]_0^2 \\ = (2^3 + 2) - 0 = 10$$

$$(2) \int_1^2 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$(3) \int_1^3 2 dx = \left[2x \right]_1^3 = 2 \times 3 - 2 \times 1 = 4$$

16 **답** 풀이 참조

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

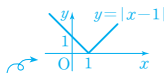
$$(1) \int_0^1 (x^2 - x) dx \\ = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx \\ = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$(2) \int_0^1 (3x^2 + 2x) dx \\ = 3 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 x dx \\ = 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

17 **답** 풀이 참조

$$\int_0^1 (x+3) dx + \int_1^5 (x+3) dx \\ = \int_0^5 (x+3) dx \\ = \left[\frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_0^5 = \frac{1}{2} \times 25 + 15 = \frac{55}{2}$$

$$(2) \int_{-3}^1 (x^2 - 4x) dx + \int_1^2 (x^2 - 4x) dx \\ = \int_{-3}^2 (x^2 - 4x) dx \\ = \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 \right]_{-3}^2 \\ = \frac{8}{3} - 8 - (-9 - 18) = \frac{65}{3}$$

18 **답** ③

$0 \leq x \leq 1$ 일 때, $|x-1| = -x+1$

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, $|x-1| = x-1$

$$\therefore \int_0^4 |x-1| dx \\ = \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^4 (x-1) dx \\ = \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^4 \\ = 5$$

19 **답** 풀이 참조

$$(1) \frac{d}{dx} \int_1^x t dt \\ = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) \\ = x - 0 = x$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_2^x (3t-2) dt \\ = \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{2} t^2 - 2t \right]_2^x \\ = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{3}{2} x^2 - 2x - (6-4) \right\} \\ = 3x - 2 - 0 \\ = 3x - 2$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{-1}^x (4t^2 - 2t + 1) dt \\ = \frac{d}{dx} \left[\frac{4}{3} t^3 - t^2 + t \right]_{-1}^x \\ = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{4}{3} x^3 - x^2 + x - \left(-\frac{4}{3} - 1 - 1 \right) \right\} \\ = 4x^2 - 2x + 1 - 0 \\ = 4x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \frac{d}{dx} \int_4^x (t^4 - 4t^2 + 4) dt \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{5} t^5 - \frac{4}{3} t^3 + 4t \right]_4^x \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{4}{3} x^3 + 4x \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{4^5}{5} - \frac{4^4}{3} + 16 \right) \right] \\
 &= x^4 - 4x^2 + 4 - 0 = x^4 - 4x^2 + 4
 \end{aligned}$$

20 [답] ③

$$\int_1^x f(t) dt = x^3 + x^2 + ax \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 + 2x + a$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + 1 + a \quad \therefore a = -2 \quad \leftarrow \int_1^1 f(t) dt = 0$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

$$\therefore f(2) = 12 + 4 - 2 = 14$$

종합 연습 문제

정답

문제편 p. 152

21 ②

22 ④

23 ⑤

24 $-\frac{1}{4}$

25 $\frac{1}{2}$

26 ①

27 $\frac{17}{2}$

28 22

21 [답] ②

(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 (x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\
 &= \int_1^3 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_1^3
 \end{aligned}$$

$$= (9 - 9) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3}$$

22 [답] ④

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & (x \leq 2) \\ 3x + 4 & (x > 2) \end{cases} \text{에 대하여}$$

정적분의 정의를 이용하자.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^3 f(x) dx \\
 &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\
 &= \int_0^2 (3x^2 - 2) dx + \int_2^3 (3x + 4) dx \\
 &= \left[x^3 - 2x \right]_0^2 + \left[\frac{3}{2} x^2 + 4x \right]_2^3 \\
 &= 8 - 4 + \left\{ \frac{27}{2} + 12 - (6 + 8) \right\} = \frac{31}{2}
 \end{aligned}$$

23 [답] ⑤

$$|x - k| = \begin{cases} -x + k & (x \leq k) \\ x - k & (x > k) \end{cases} \text{이므로}$$

$$x|x - k| = \begin{cases} -x^2 + kx & (x \leq k) \\ x^2 - kx & (x > k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-2}^1 x|x - k| dx \\
 &= \int_{-2}^k (-x^2 + kx) dx + \int_k^1 (x^2 - kx) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{k}{2} x^2 \right]_{-2}^k + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{k}{2} x^2 \right]_k^1 \\
 &= \frac{1}{3} k^3 - \frac{5}{2} k - \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

$$f(k) = \frac{1}{3} k^3 - \frac{5}{2} k - \frac{7}{3} \quad (-2 \leq k \leq 2)$$

이라 하면

$$f'(k) = k^2 - \frac{5}{2} = 0 \text{에서}$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$-2 \leq k \leq 2$ 에서 함수 $f(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(k)$ 는 $k = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 일 때,

극소이면서 최소가 된다.

24 $-\frac{1}{4}$

$\int_0^1 f(t)dt = a$ (a 는 상수) $\cdots$ ㉠라 하면

$$f(x) = x^2 - 3x + 3a \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 f(t)dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 - 3t + 3a)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3at \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3a$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3a = a \text{에서 } 2a = \frac{7}{6}$$

$$\therefore a = \frac{7}{12}$$

따라서 $f(x) = x^2 - 3x + \frac{7}{4}$ 이므로

$$f(1) = -\frac{1}{4}$$

25 $\frac{1}{2}$

주어진 식 $\int_1^x f(t)dt = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4ax$ 에

$x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)dt = 1 - \frac{3}{2} + 4a = 0, \quad 4a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}$$

$a = \frac{1}{8}$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \text{이고 이 식의}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} \int_1^x f(t)dt = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(0) = \frac{1}{2}$$

26 ①

$\int (3t^3 + 2t - 5)dt = F(t) \cdots$ ㉠라 하면

$$\int_4^x (3t^3 + 2t - 5)dt = [F(t)]_4^x$$

$$= F(x) - F(4)$$

이고, ㉠에서 $F'(t) = 3t^3 + 2t - 5$ 이므로

$$F'(4) = 192 + 8 - 5 = 195$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-4} \int_4^x (3t^3 + 2t - 5)dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{F(x) - F(4)}{x - 4}$$

$$= F'(4)$$

$$= 195$$

27 $\frac{17}{2}$

조건 (가)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + bx + c) = c = 0$$

$$\therefore f(x) = ax^2 + bx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (ax + b) = b = -1$$

$$\therefore f(x) = ax^2 - x$$

조건 (나)에서

$$\int_0^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^2 (ax^2 - x)dx = \left[\frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}a - 2 = 5$$

$$\frac{8}{3}a = 7$$

$$\therefore a = \frac{21}{8}$$

따라서 $f(x) = ax^2 + bx = \frac{21}{8}x^2 - x$ 이므로

$$f(2) = \frac{17}{2}$$

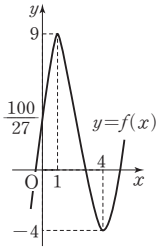
28 22

삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 9를 가지므로 $f'(1)=0, f(1)=9$

삼차함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 극솟값 -4 를 가지므로 $f'(4)=0, f(4)=-4$

또한, $f(0)=\frac{100}{27}$ 이므로 삼차함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$0 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 $f'(x) \geq 0$

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 $f'(x) \leq 0$

$$\therefore \int_0^4 |f'(x)| dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 f'(x) dx - \int_1^4 f'(x) dx \\ &= [f(x)]_0^1 - [f(x)]_1^4 \quad \begin{array}{l} \text{↗} f'(x) \geq 0 (0 \leq x \leq 1) \text{이므로} \\ \text{↘} f'(x) \leq 0 (1 \leq x \leq 4) \text{이므로} \end{array} \\ &= \{f(1) - f(0)\} - \{f(4) - f(1)\} \\ &= 2f(1) - f(0) - f(4) \\ &= 2 \times 9 - 0 - (-4) \\ &= 22 \end{aligned}$$

22 곡선과 좌표축 사이의 넓이 ~

24 속도와 위치

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 154

29 (1) 1 (2) 6, $-x^2+6x$

30 풀이 참조 31 풀이 참조 32 ④

33 (1) 1, $3t^2-6t$ (2) 3, $3t^2-6t$

34 (1) 1, $|t^2+6t|$ (2) 3, 8, $|t^2+6t|$

29 (1) 1

(2) 6, $-x^2+6x$

(1) 곡선 $y=-x^2+6x$ 과 x 축 및 두 직선 $x=1, x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^4 (-x^2+6x) dx$$

(2) 곡선 $y=-x^2+6x$ 과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^6 (-x^2+6x) dx$$

30 풀이 참조

(1) 곡선 $y=x^3-x$ ($0 \leq x \leq 1$)와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |x^3-x| dx \\ &= \int_0^1 (x-x^3) dx \end{aligned}$$

(2) 곡선 $y=x^3-x$ ($-1 \leq x \leq 0$)와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^0 |x^3-x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3-x) dx \end{aligned}$$

(3) 곡선 $y=x^3-x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 |x^3-x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3-x) dx + \int_0^1 (x-x^3) dx \end{aligned}$$

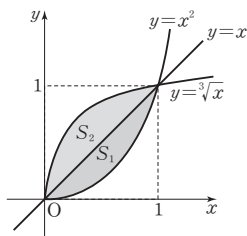
31 **답 풀이 참조**

곡선 $y=x^2-2$ 와 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^2 \{2 - (x^2 - 2)\} dx \\ = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3}$$

32 **답 ④**

그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 과 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=\sqrt[3]{x}$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하자.



$$S_1 = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$y=\sqrt[3]{x}$ 에서 $x=y^3$ 이므로 S_2 는 곡선 $x=y^3$ 과 직선 $x=y$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$S_2 = \int_0^1 (y - y^3) dy = \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^1 \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 넓이는 $S_1 + S_2 = \frac{5}{12}$

33 **답 (1) 1, $3t^2-6t$**

(2) 3, $3t^2-6t$

(1) $t=2$ 에서의 점 P의 위치 x 는

$$x = 1 + \int_0^2 (3t^2 - 6t) dt$$

(2) $t=0$, $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (3t^2 - 6t) dt$$

34 **답 (1) 1, $|t^2+6t|$**

(2) 3, 8, $|t^2+6t|$

(1) $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 실제로 움직인

$$\text{거리} = \int_0^1 (|t^2 + 6t|) dt$$

(2) $t=3$, $t=8$ 까지 점 P가 실제로 움직인

$$\text{거리} = \int_3^8 (|t^2 + 6t|) dt$$

종합 연습 문제 **정답**

문제편 p. 160

35 풀이 참조	36 ⑤	37 4
38 ②	39 ①	40 ②
41 ①	42 $\frac{16}{45}$	

35 **답 풀이 참조**

두 곡선 $y=x^2+2x$, $y=-3x^2-2x+8$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^1 \{-3x^2 - 2x + 8 - (x^2 + 2x)\} dx \\ = \int_{-2}^1 (-4x^2 - 4x + 8) dx = 18$$

36 **답 ⑤**

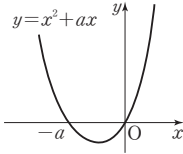
곡선 $x=y^2-16$ 과 y 축의 교점의 y 좌표는 $y^2-16=0$ 에서 $(y+4)(y-4)=0$ 이므로 $y=-4$ 또는 $y=4$

닫힌구간 $[-4, 4]$ 에서 $y^2-16 \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-4}^4 |y^2 - 16| dy = \int_{-4}^4 (-y^2 + 16) dy \\ = 2 \int_0^4 (-y^2 + 16) dy \\ = 2 \left[-\frac{1}{3}y^3 + 16y \right]_0^4 \\ = \frac{256}{3}$$

37 4

곡선 $y=x^2+ax(a>0)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2+ax=0$ 에서 $x(x+a)=0$ 이므로 $x=0$ 또는 $x=-a$
 $a>0$ 이므로 곡선 $y=x^2+ax$ 는 그림과 같다.



곡선 $y=x^2+ax$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^0 |x^2+ax| dx \\ &= \int_{-a}^0 (-x^2-ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_{-a}^0 \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^3 = \frac{1}{6}a^3 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6}a^3 = \frac{32}{3}, a^3 = 64$$

$$(a-4)(a^2+4a+16)=0$$

$$\therefore a=4$$

38 ②

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 그림에서 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=12$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $y=12$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

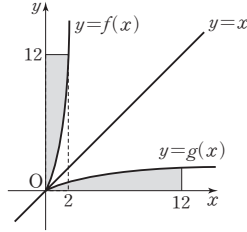
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=12$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3+2x=12$ 에서

↪ 조립제법에 의해

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 2 & -12 & \\ & & 2 & 4 & 12 & \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 0 & \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+2x+6)=0 \text{ 이므로 } x=2$$

구하는 넓이는 x 축, y 축과 두 직선 $x=2$, $y=12$ 로 둘러싸인 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것과 같으므로 구하는 넓이를 S 라 하면



$$\begin{aligned} S &= 2 \times 12 - \int_0^2 (x^3+2x) dx \\ &= 24 - \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_0^2 \\ &= 24 - 8 \\ &= 16 \end{aligned}$$

39 ①

$$\begin{aligned} y &= |x^2-3x| \\ &= \begin{cases} x^2-3x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ -x^2+3x & (0 < x < 3) \end{cases} \end{aligned}$$

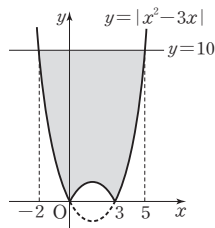
이므로 곡선 $y=|x^2-3x|$ 와 직선 $y=10$ 의 교점은 $x<0$ 또는 $x>3$ 일 때 존재한다.

이때, 이 교점의 x 좌표는

$$x^2-3x=10$$

$$(x+2)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=5$$



구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^0 (-x^2 + 3x + 10) dx \\
 &\quad + \int_0^3 (x^2 - 3x + 10) dx \\
 &\quad + \int_3^5 (-x^2 + 3x + 10) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 10x \right]_{-2}^0 \\
 &\quad + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 10x \right]_0^3 \\
 &\quad + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 10x \right]_3^5 \\
 &= \frac{34}{3} + \frac{51}{2} + \frac{34}{3} \\
 &= \frac{289}{6} \quad \leftarrow \text{이차함수의 대칭성을 이용하면 두 값은 동일하다.}
 \end{aligned}$$

40 [답] ②

$0 \leq t \leq 3$ 일 때 $v(t) \geq 0$ 이고, $3 \leq t \leq 4$ 일 때

$v(t) \leq 0$ 이므로

구하는 거리는

$$\begin{aligned}
 &\int_0^4 |-2t + 6| dt \\
 &= \int_0^3 (-2t + 6) dt + \int_3^4 (2t - 6) dt \\
 &= \left[-t^2 + 6t \right]_0^3 + \left[t^2 - 6t \right]_3^4 \\
 &= 9 + 1 = 10
 \end{aligned}$$

41 [답] ①

주어진 그래프로부터 점 P의 속도 $v(t)$ 는

$$v(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < 1) \\ -t + 2 & (1 \leq t < 4) \\ 2t - 10 & (t \geq 4) \end{cases}$$

$t=2$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리를

s 라 하자.

$$\begin{aligned}
 s &= \int_2^5 |v(t)| dt \\
 &= \int_2^4 |-t + 2| dt + \int_4^5 |2t - 10| dt \\
 &= \int_2^4 (t - 2) dt + \int_4^5 (-2t + 10) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_2^4 + \left[-t^2 + 10t \right]_4^5 = 2 + 1 = 3
 \end{aligned}$$

42 [답] $\frac{16}{45}$

속도 $v(t)$ 가 이차함수이고 함수 $y=v(t)$ 의

그래프와 t 축의 교점이 두 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$

이므로

$$v(t) = a(t-3)(t-5) \quad (\text{단, } a > 0)$$

$$v(0) = 4 \text{에서 } v(0) = 15a = 4 \text{이므로}$$

$$a = \frac{4}{15}$$

$$\therefore v(t) = \frac{4}{15}(t-3)(t-5)$$

$$= \frac{4}{15}t^2 - \frac{32}{15}t + 4$$

한편, 점 P가 출발할 때의 운동 방향과 반대

방향으로 움직인 시간은 $v(t) \leq 0$ 이므로

$t=3$ 에서 $t=5$ 일 때까지이다.

따라서 구하는 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned}
 s &= \int_3^5 \left| \frac{4}{15}t^2 - \frac{32}{15}t + 4 \right| dt \\
 &= \int_3^5 \left(-\frac{4}{15}t^2 + \frac{32}{15}t - 4 \right) dt \\
 &= \left[-\frac{4}{45}t^3 + \frac{16}{15}t^2 - 4t \right]_3^5 \\
 &= \frac{16}{45}
 \end{aligned}$$

확률과 통계

I. 여러 가지 순열

01 원순열 ~

04 조 나누는 방법과 분배하는 방법

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 164

01 풀이 참조 02 ④ 03 360

04 500 05 ① 06 6

07 60 08 60 09 26

10 (1) 15 (2) 90

11 (1) 15 (2) 90

01 답 풀이 참조

(1) 4개의 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$ 이다.

(2) 4개의 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열한 것을 원형으로 배열하면 같은 것이 4개씩 있다.

(3) 4개의 문자 A, B, C, D를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{4} = 3!$ 이다.

02 답 ④

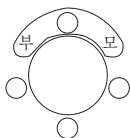
(i) 부모 사이에 앉을 자녀 한 명을 뽑는 방법 : 4

(ii) 부모와 자녀 한 명을 한 사람으로 생각하고 원탁에 배열하는 방법 :

$(4-1)! = 3!$ $\rightarrow$ n명을 원에 배열하는 방법은 $(n-1)!$

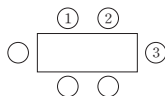
(iii) 부모가 서로 자리를 바꿀 경우 : 2

$\therefore$ (구하는 경우의 수) $= 4 \times 3! \times 2 = 48$



03 답 360

원순열로 생각하고 배열하는 경우 : 5!



하나의 배열이 시작되는 위치가 ①, ②, ③으로 다를 경우 : 3

$\therefore$ (구하는 경우의 수) $= 5! \times 3 = 120 \times 3 = 360$

04 답 500



$4 \times {}_5\Pi_3 = 4 \times 5^3 = 4 \times 125 = 500$
 $\rightarrow$ 여기에 0을 제외한 숫자 1, 2, 3, 4가 올 수 있다.

05 답 ①

편지를 각각 1, 2, 3, 4, 5라 하고, 우체통을 각각 A, B, C라 하자. 각각의 편지에 A, B, C라는 이름을 붙이는 경우라 생각하면

$(1, 2, 3, 4, 5) \leftrightarrow (A, A, A, B, C)$

$\leftrightarrow (A, A, B, B, C)$

$\vdots$

따라서 A, B, C를 중복을 허락하여 5개 선택하여 배열하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$ 이다.

06 답 6

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

07 답 60

a, a, a, n, n, b의 여섯 개의 문자 중 같은 것을 포함하는 순열을 이용하면

(구하는 경우의 수) $= \frac{6!}{3!2!} = 60$

$\rightarrow$ a가 3개, n이 2개, 전체가 6개이므로!

08 60

맨 앞자리의 숫자를 정하여 경우의 수를 구하자.

(i) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

일의 자리의 숫자는 반드시 5이고 나머지 다섯 자리에 0, 0, 2, 5, 5를 일렬로 나열

하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!}=30$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 5인 경우

일의 자리의 숫자는 반드시 5이고 나머지 다섯 자리에 0, 0, 2, 2, 5를 일렬로 나열

하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!}=30$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$$30+30=60$$

09 26

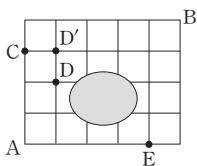
(i) $A \rightarrow C \rightarrow B : 1 \times \frac{6!}{5!}=6$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow D' \rightarrow B : \frac{3!}{2!} \times 1 \times \frac{5!}{4!}=15$

(iii) $A \rightarrow E \rightarrow B : 1 \times \frac{5!}{4!}=5$

따라서 최단거리로 가는 방법의 수는

$$6+15+5=26(\text{가지})\text{이다.}$$



10 (1) 15 (2) 90

(1) ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!}=15$ 2, 2, 2로 나눈 것이 서로 구별되지 않으니까 $\frac{1}{3!}$ 을 곱한다.

(2) $\left({}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!}\right) \times 3!$
 $= {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$ 2, 2, 2로 나뉘어도 각각은 구별되니까 (1)의 식에 $3!$ 을 곱한다.
 $= 90$

11 (1) 15 (2) 90

(1) ${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}=15$

1, 2, 2로 나눈 것이 어느 두 개가 같으니까 $\frac{1}{2!}$ 을 곱한다.

(2) $\left({}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right) \times 3!=90$

종합 연습 문제 정답

문제편 p. 172

12 ①

13 ③

14 ④

15 256

16 ④

17 ①

18 18

19 ⑤

12 ①

먼저 여자 4명을 묶어서 한 사람으로 보면

전체 4명을 원탁에 앉히는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

13 ③

가운데 영역에 색을 칠한 후 나머지 영역을 칠하는 경우의 수를 구할 때, 원순열을 이용하자.

서로 다른 6개의 색을 각각 a, b, c, d, e, f 라 하면 가운데 정오각형에 칠할 수 있는 색을 택하는 경우의 수는 ${}_6C_1=6$

가운데 정오각형에 a 를 칠했다고 하면 5개의 색 b, c, d, e, f 를 사용하여 나머지 둘레에 있는 정오각형에 칠할 수 있는 경우의 수는 $(5-1)! = 4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

14 답 ④

첫 번째 자리에는 반드시 숫자가 와야 하므로 1, 3, 4, 6의 4가지이고, 첫 번째 자리를 제외한 나머지 자리에는 4개의 숫자 1, 3, 4, 6과 3개의 특수문자 #, \$, % 중 중복을 허용하여 3개를 뽑아 나열하면 되므로
 그 경우의 수는 ${}_7\Pi_3 = 7^3$
 따라서 구하는 경우의 수는 4×7^3

15 답 256

만 천 백 십 일

중복을 허용하여 네 개의 숫자 0, 2, 3, 5로 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수 중에서 일의 자리의 숫자와 만의 자리의 숫자의 곱이 홀수이려면 만의 자리와 일의 자리에 모두 홀수가 와야 하므로 ${}_2\Pi_2$
 나머지 세 개의 자리에 올 수 있는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3$
 따라서 구하는 자연수의 개수는
 ${}_2\Pi_2 \times {}_4\Pi_3 = 2^2 \times 4^3 = 256$

16 답 ④

갑, 을 2명이 같은 도시에서 내리므로 한 사람으로 생각하면 3명의 승객이 B, C, D 도시에 내리는 경우이므로 B, C, D 3개 중 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$

17 답 ①

각 자리의 숫자를 각각 a, b, c, d, e 라 하면
 $a \times b \times c \times d \times e = 1000 = 2^3 \times 5^3$ 이므로
 a, b, c, d, e 5개 중에서 3개는 5이고, 나머지 2개는 1과 8 또는 2와 4이어야 한다.

(i) 각 자리의 숫자가 5, 5, 5, 1, 8인 경우
 5, 5, 5, 1, 8을 일렬로 나열하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

(ii) 각 자리의 숫자가 5, 5, 5, 2, 4인 경우
 5, 5, 5, 2, 4를 일렬로 나열하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
 $20 + 20 = 40$

18 답 18

짝수를 모두 짝수 번째 자리에 나열하는 경우는 홀수도 홀수 번째 자리에 나열되므로 다음과 같이 나열하면 된다.

$$\textcircled{\text{홀}} \textcircled{\text{짝}} \textcircled{\text{홀}} \textcircled{\text{짝}} \textcircled{\text{홀}} \textcircled{\text{짝}} \textcircled{\text{홀}}$$

(i) 3, 3, 7의 네 개의 숫자를 홀수 번째 자리에 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

(ii) 4, 4, 8의 세 개의 숫자를 짝수 번째 자리에 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(i), (ii)의 경우가 동시에 일어나므로
 구하는 자연수의 개수는 $6 \times 3 = 18$

19 답 ⑤

L, N, U, E의 순서가 정해져있으므로 모두 □로 보고 나열한 후 □자리에 L, N, U, E를 순서대로 나열하면 된다.

따라서 LANGUAGE에서 □A□G□AG□를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{4!2!2!} = 420$$

05 중복조합 ~

06 이항정리와 이항계수의 성질

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 174

20 15 21 136 22 35

23 풀이 참조 24 풀이 참조

25 $k=680, n+r=20$

20 [답] 15

순서를 고려하지 않고 중복을 허용하므로
중복조합을 이용하면 구하는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

21 [답] 136

방정식 $x+y+z=15$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 에 대하여 순서쌍 (x, y, z) 은 $(15, 0, 0), (14, 1, 0), \dots$ 이다. 이때, $x=14, y=1, z=0$ 은 서로 다른 문자 x, y, z 에서 x 를 14개, y 를 1개, z 를 0개 택하는 경우로 생각할 수 있으므로 서로 다른 세 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 모두 15개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3H_{15} &= {}_{3+15-1}C_{15} = {}_{17}C_{15} = {}_{17}C_2 \\ &= \frac{17 \times 16}{2} = 136 \end{aligned}$$

22 [답] 35

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 를 만족시키는

함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는 공역 X 의 서로 다른 4개의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

23 [답] 풀이 참조

이항정리를 이용하여 다항식을 전개하자.

자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 \\ &\quad + \dots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \dots + {}_nC_n b^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) (2x+y)^5 &= {}_5C_0 (2x)^5 + {}_5C_1 (2x)^4 y + {}_5C_2 (2x)^3 y^2 \\ &\quad + {}_5C_3 (2x)^2 y^3 + {}_5C_4 (2x) y^4 + {}_5C_5 y^5 \\ &= 32x^5 + 80x^4 y \\ &\quad + 80x^3 y^2 + 40x^2 y^3 + 10xy^4 + y^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (x-y)^4 &= {}_4C_0 x^4 + {}_4C_1 x^3(-y) + {}_4C_2 x^2(-y)^2 \\ &\quad + {}_4C_3 x(-y)^3 + {}_4C_4 (-y)^4 \\ &= x^4 - 4x^3 y + 6x^2 y^2 - 4xy^3 + y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 &= {}_5C_0 x^5 + {}_5C_1 x^4 \left(\frac{1}{x}\right) \\ &\quad + {}_5C_2 x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}_5C_3 x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 \\ &\quad + {}_5C_4 x \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}_5C_5 \left(\frac{1}{x}\right)^5 \\ &= x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \end{aligned}$$

24 [답] 풀이 참조

다항식의 전개식에서 일반항을 구하자.

(1) $(x+1)^9$ 의 전개식의 일반항은

$${}_9C_r x^{9-r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, 9)$$

(2) $(2x-3y)^4$ 의 전개식의 일반항은

$$\begin{aligned} &{}_4C_r (2x)^{4-r} (-3y)^r \\ &= {}_4C_r 2^{4-r} x^{4-r} (-3)^r y^r \\ &= {}_4C_r 2^{4-r} (-3)^r x^{4-r} y^r \\ &\quad (\text{단, } r=0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

(3) $(2-x)^n$ 의 전개식의 일반항은

$$\begin{aligned} &{}_nC_r 2^{n-r} (-x)^r \\ &= {}_nC_r (-1)^r 2^{n-r} x^r \\ &\quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

25 $k=680, n+r=20$

$_{n+1}C_r = {}_nC_{r-1} + {}_nC_r$ 를 이용하여

2개의 항끼리 간단히 묶으면

$${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{16}C_2$$

$$= ({}_3C_3 + {}_3C_2) + {}_4C_2 + \cdots + {}_{16}C_2$$

$$= ({}_4C_3 + {}_4C_2) + \cdots + {}_{16}C_2$$

$$= {}_{16}C_3 + {}_{16}C_2$$

$$= {}_{17}C_3$$

$$= \frac{17 \times 16 \times 15}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 680$$

따라서 $k=680$ 이고,

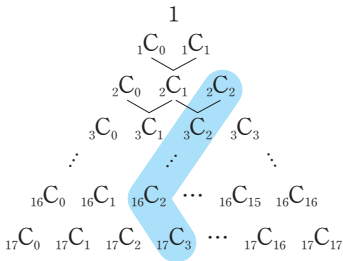
$n=17, r=3$ 이므로

$n+r=20$

[다른 풀이]

파스칼의 삼각형의 하키 스틱 패턴에 의하여

${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{16}C_2 = {}_{17}C_3$ 인 것을 쉽게 알 수 있다.



종합 연습 문제 정답

문제편 p. 178

26 ①

27 ③

28 36

29 810

30 ②

31 210

32 11

33 11

26 ①

6개의 사탕을 4명에게 나누어 주는 경우의 수는 중복조합의 수 ${}_4H_6$ 과 같으므로

$${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 84$$

A, B, C, D 4명에게 모두 적어도 한 개의 사탕을 나누어 주는 경우의 수는 6개의 사탕 중 A, B, C, D 4명에게 먼저 사탕을 각각 1개씩 나누어 준 후 남은 2개의 사탕을 모두 4명에게 나누어 주는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2$$

$$= \frac{5 \times 4}{2}$$

$$= 10$$

따라서 한 개도 받지 못하는 사람이 생기는 경우의 수는 $84 - 10 = 74$

27 ③

택한 4장의 카드에 적혀 있는 수가 모두 같은 수일 수 있다.

서로 다른 3개의 카드에서 4개를 택하는 경우의 수는 3, 4, 5의 세 수에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2$$

$$= \frac{6 \times 5}{2}$$

$$= 15$$

이 중에서 합이 16 이상인 경우는 3355,

3445, 3455, 3555, 4444, 4445, 4455,

4555, 5555의 9가지이므로

구하는 경우의 수는 $15 - 9 = 6$

[다른 풀이]

합이 12인 경우는 3333으로 1가지
 합이 13인 경우는 3334로 1가지
 합이 14인 경우는 3344, 3335로 2가지
 합이 15인 경우는 3345, 3444로 2가지
 따라서 구하는 경우의 수는
 $1+1+2+2=6$

28 답 36

$(a, b, c) \longleftrightarrow \overbrace{xx \cdots x}^{a\text{개}} \overbrace{yy \cdots y}^{b\text{개}} \overbrace{zz \cdots z}^{c\text{개}}$
 즉, 순서쌍 (a, b, c) 는 x, y, z 를 중복해서
 각각 a, b, c 개를 뽑는 것과 일대일 대응이다.
 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른
 x, y, z 에서 7개를 택하는 중복조합이므로
 ${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$ (가지)

29 답 810

이항정리에 의하여 $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^5$ 의 전개식의
 일반항은

$$\begin{aligned} & {}_5C_r (2x)^{5-r} \left(-\frac{3}{x}\right)^r \\ &= {}_5C_r 2^{5-r} (-3)^r x^{5-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r \\ & 5-2r = -3, 2r=8 \\ & \therefore r=4 \\ & \text{따라서 } \frac{1}{x^3} \text{의 이항계수는} \\ & {}_5C_4 \times 2^{5-4} (-3)^4 = 5 \times 2 \times 81 = 810 \end{aligned}$$

30 답 2

$$\begin{aligned} & \log_2({}_{15}C_0 + {}_{19}C_2 + {}_{19}C_4 + \cdots + {}_{19}C_{18}) \text{에서} \\ & \underline{{}_{19}C_0 + {}_{19}C_2 + {}_{19}C_4 + \cdots + {}_{19}C_{18}} \\ &= 2^{19-1} = 2^{18} \text{이므로 } \rightarrow {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots = 2^{n-1} \\ & \log_2({}_{15}C_0 + {}_{19}C_2 + {}_{19}C_4 + \cdots + {}_{19}C_{18}) \\ &= \log_2 2^{18} = 18 \end{aligned}$$

31 답 210

$$\begin{aligned} & (1+x^2) + (1+x^2)^2 + \cdots + (1+x^2)^{20} \text{의 각} \\ & \text{각의 항에서 } x^2 \text{의 계수만을 뽑아보면} \\ & \quad \rightarrow (1+x^2)^n \text{의 계수의 일반항은 } {}_nC_r 1^{n-r} (x^2)^r = {}_nC_r x^{2r} \\ & \quad \quad \quad 2r=2 \quad \therefore r=1 \\ & \quad \text{따라서 } (1+x^2)^n \text{의 } x^2 \text{의 계수는 } {}_nC_1 \text{이다.} \\ & {}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_{20}C_1 \\ &= {}_{20}C_2 = \frac{20 \times 21}{2} \\ &= 210 \end{aligned}$$

32 답 11

$$\begin{aligned} & (1+x)^n \text{의 전개식에서 } x^3 \text{항은 } {}_nC_3 x^3 \text{이므로} \\ & x^3 \text{의 계수는} \\ & {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 165 \quad \leftarrow 3 \times 5 \times 11 \\ & \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 165 \\ & \quad \quad \quad \begin{matrix} \text{---} 10 \text{---} \\ \text{---} 9 \text{---} \end{matrix} \\ &= 3 \times 5 \times 11 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 11 \times 10 \times 9 \\ & \text{따라서 구하는 자연수 } n \text{의 값은 11이다.} \end{aligned}$$

33 답 11

$$\begin{aligned} & {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n \\ & \text{이므로} \\ & {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - {}_nC_0 \\ & \quad \quad \quad = 2^n - 1 \\ & \text{이고, } 2000 < 2^n - 1 < 3000 \text{에서} \\ & n=10 \text{이면} \\ & 2^{10} - 1 = 1023 \\ & n=11 \text{이면} \\ & 2^{11} - 1 = 2047 \\ & n=12 \text{이면} \\ & 2^{12} - 1 = 4095 \\ & \text{따라서 구하는 자연수 } n \text{의 값은 11이다.} \end{aligned}$$

II. 확률

07 확률의 뜻 ~ 09 확률의 덧셈정리

핵심 개념 문제

정답

문제편 p. 180

01 풀이 참조 02 $\frac{3}{14}$ 03 3

04 $\frac{1}{35}$ 05 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{1}{8}$

06 $\frac{\pi}{25}$ 07 $P(A \cap B)$ 08 0

09 (1) 0.6 (2) 0.1

01 답 풀이 참조

- (1) {1, 2, 3, 4, 5, 6}
 (2) {1, 3, 5}
 (3) {2, 3, 5}
 (4) {1, 2, 3, 5}
 (5) {3, 5}

02 답 $\frac{3}{14}$

$$\frac{15(\text{만 대})}{70(\text{만 대})} = \frac{3}{14}$$

분모는 자동차 총 대수이고, 분자는 A 회사의 자동차 대수이다.

03 답 3

15번에 한 번 꼴로 2개 모두 흰 공이므로 10개 중 2개를 꺼낼 때, 2개 모두 흰 공일 통계적 확률은 $\frac{1}{15}$ 이다.

10개 중에 흰 공이 x 개 들어 있다고 하면 2개를 꺼낼 때 모두 흰 공일 수학적 확률은

$$\frac{{}_x C_2}{{}_{10} C_2} \text{이다.}$$

$$\frac{{}_x C_2}{{}_{10} C_2} = \frac{x(x-1)}{10 \times 9} = \frac{1}{15},$$

$$x(x-1) = \frac{1}{15} \times 10 \times 9 = 3 \times 2$$

$$\therefore x = 3$$

04 답 $\frac{1}{35}$

8명의 학생이 원탁에 앉는 경우의 수는 $(8-1)! = 7!$

남학생 4명과 여학생 4명이 번갈아 앉으려면 남, 여, 남, 여, 남, 여, 남 순서로 앉으면 된다.

먼저 남학생을 앉히면 $(4-1)! = 3!$

남은 사이사이 4자리에 여학생을 앉히면 4!

이므로 이때의 경우의 수는 $3! \times 4!$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

05 답 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{1}{8}$

집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 원소의 개수가 4이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^4 = 16$

(1) 집합 A 의 부분집합의 원소의 개수가 2개 이려면 4개의 원소 중 서로 다른 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_4 C_2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(2) 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 1, 4를 반드시 원소로 갖고, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{4-2-1} = 2$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

06 답 $\frac{\pi}{25}$

전체 판의 넓이 : $5 \times 5 = 25$

원의 넓이 : $\pi \times 1^2 = \pi$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{\pi}{25}$$

07 답 $P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

08 0

$$P(A \cup B) = 0$$

09 (1) 0.6 (2) 0.1

$$\begin{aligned} (1) P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.4 + 0.5 - 0.3 = 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.4 + 0.5 - P(A \cap B) = 0.8 \\ \text{이므로 } P(A \cap B) &= 0.1 \end{aligned}$$

종합 연습 문제

정답

문제편 p. 186

10 (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{4}{15}$

11 $\frac{2}{15}$

12 $\frac{1}{3}$

13 ④

14 ①

15 ⑤

16 ⑤

10 (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{4}{15}$

6장의 카드가 들어있는 주머니에서 임의로
2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

- (1) 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 수의 합이
4의 배수가 되는 경우는 두 수의 합이
4, 8, 12가 될 때이다.

	2	4	4	6	6	6
2						
4	6					
4	6	8				
6	8	10	10			
6	8	10	10	12		
6	8	10	10	12	12	

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{15}$

- (2) 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 수가 서로
같은 경우 ○를 하면 다음 표와 같다.

	2	4	4	6	6	6
2						
4						
4		○				
6						
6				○		
6				○	○	

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$

11 $\frac{2}{15}$

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!2!} = 180$$

- (i) 양 끝에 P가 오는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

- (ii) 양 끝에 E가 오는 경우도 마찬가지로
12

- (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$12 \times 2 = 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{180} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

12 $\frac{1}{3}$

흰 공이 적어도 2개가 포함될 사건을 A라
하면 A^C 은 흰 공이 없거나 1개 포함될 사건
이다.

$$\begin{aligned} P(A^C) &= \frac{{}_7C_4}{{}_{10}C_4} + \frac{{}_7C_3 \times {}_3C_1}{{}_{10}C_4} \\ &= \frac{35 + 35 \times 3}{210} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^C)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

13 답 ④

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

이므로

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{42}$$

14 답 ①

1부터 30까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 30장의 카드 중 3의 배수는 3, 6, 9, ..., 30

이므로 확률은 $\frac{10}{30}$

4의 배수는 4, 8, ..., 28이므로 확률은 $\frac{7}{30}$

3의 배수이면서 4의 배수는 12, 24이므로

확률은 $\frac{2}{30}$

따라서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{10}{30} + \frac{7}{30} - \frac{2}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

15 답 ⑤

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 으로의 함수의 개수는 $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$ 이다. 이때, 모든 함수값의 곱이 짝수일 사건을 A 라 하면 A^c 은 모든 함수값의 곱이 홀수가 되는 사건이다.

여사건의 확률을 구하는 것이 더 간단하므로 여사건의 확률을 구하자.

정의역의 원소 1, 2, 3, 4가 공역의 홀수인 원소 1, 3, 5에 각각 대응되어야 하므로 그 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

$$\text{즉, } P(A^c) = \frac{3^4}{6^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

16 답 ⑤

이 학급 35명의 학생 중에서 임의로 택한 1명이 남학생인 사건을 A , 언어 B 를 제2의 국어로 택하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{20}{35}, P(B) = \frac{17}{35}$$

한편, 학급 학생 35명 중 임의로 택한 1명이 남학생이면서 언어 B 를 제2외국어로 택하는 사건은 $A \cap B$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{9}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{20}{35} + \frac{17}{35} - \frac{9}{35} \\ &= \frac{28}{35} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

10 조건부확률과 확률의 곱셈정리 ~ 12 독립시행의 확률

핵심 개념 문제 정답

문제편 p. 188

$$17 \text{ (1) } \frac{1}{2} \text{ (2) } \frac{11}{20} \text{ (3) } \frac{3}{10}$$

$$18 \frac{3}{10}, \frac{3}{5} \quad 19 \frac{3}{10}, \frac{6}{11}$$

$$20 A \text{와 } C, B \text{와 } C \quad 21 0.72$$

$$22 \neg, \perp, \sqsubset$$

$$23 \text{ (1) } \frac{1}{2} \text{ (2) } {}_5C_1 \text{ (3) } {}_5C_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$24 \text{ (1) } {}_5C_2 \text{ (2) } {}_5C_2, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}$$

$$25 \frac{781}{1024}$$

$$17 \text{ 답 (1) } \frac{1}{2} \text{ (2) } \frac{11}{20}$$

$$\text{(3) } \frac{3}{10}$$

봉사활동에 참가한 60명 중 여자는 30명, 한국인은 33명, 여자이면서 한국인인 사람은 18명이므로 여자인 사건을 A , 한국인인 사건을 B 라 하면

$$\begin{aligned}(1) P(A) &= \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \\(2) P(B) &= \frac{33}{60} = \frac{11}{20} \\(3) P(A \cap B) &= \frac{18}{60} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

18 **답** $\frac{3}{10}, \frac{3}{5}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

19 **답** $\frac{3}{10}, \frac{6}{11}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{11}{20}} = \frac{6}{11}$$

20 **답** A 와 C , B 와 C

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = 0, P(B \cap C) = \frac{1}{6},$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

(i) $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로
 A 와 B 는 종속

(ii) $P(B \cap C) = \frac{1}{6} = P(B)P(C)$ 이므로
 B 와 C 는 독립 $\hookrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 만 확인한다.

(iii) $P(A \cap C) = \frac{1}{6} = P(A)P(C)$ 이므로
 A 와 C 는 독립

21 **답** 0.72

국어가 90점이 넘는 사건과 수학이 90점이 넘는 사건은 독립이므로

$$0.8 \times 0.9 = 0.72$$

22 **답** $\neg, \neg, \neg$

두 사건 A, B 가 독립이면 두 사건 A 와 B^c , A^c 과 B , A^c 과 B^c 도 각각 서로 독립이므로 $\neg, \neg, \neg$ 모두 독립이다.

23 **답** (1) $\frac{1}{2}$ (2) ${}_5C_1$

$$(3) {}_5C_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$(1) P(A) = \frac{1}{2}$$

(2) 5회 시행 중에 사건 A 가 1번 일어나는 경우의 수는 ${}_5C_1$ 이다.

(3) 5회 시행 중에 사건 A 가 1번 일어나는 확률은 ${}_5C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$ 이다.

24 **답** (1) ${}_5C_2$ (2) ${}_5C_2, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}$

(1) 5회 시행 중에 사건 A 가 2번 일어나는 경우의 수는 ${}_5C_2$ 이다.

(2) 5회 시행 중에 사건 A 가 2번 일어나는 확률은 ${}_5C_2 \times \left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3$ 이다.

25 **답** $\frac{781}{1024}$

안타를 한 번도 치지 못하는 사건을 A 라 하면

$$P(A) = {}_5C_0 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{1024}$$

따라서 적어도 안타를 1회 이상 칠 확률은

$$1 - \frac{243}{1024} = \frac{781}{1024}$$

26 $\frac{1}{3}$

27 $\frac{9}{37}$

28 $\frac{2}{3}$

29 $\frac{379}{2187}$

30 $\frac{21}{50}$

31 ⑤

32 ②

33 $\frac{98}{125}$

26 $\frac{1}{3}$

A : 갑이 당첨제비를 뽑을 사건

B : 을이 당첨제비를 뽑지 못할 사건

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{63}{90} \\ &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{7}{30}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

27 $\frac{9}{37}$

(i) 우산을 잃어버렸을 확률 :

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{37}{64}$$

(ii) 우산을 문방구에서 잃어버렸을 확률 :

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{구하는 확률}) &= \frac{((\text{ii}) \text{의 확률})}{((\text{i}) \text{의 확률})} \\ &= \frac{\frac{9}{64}}{\frac{37}{64}} = \frac{9}{37} \end{aligned}$$

28 $\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$P(A \cap B) = 0 \text{이고,}$$

확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

이때, $P(A) = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup B) - P(A) \\ &= \frac{7}{12} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{3}$$

한편, 두 사건 A, C가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ &= \frac{1}{4}P(C) = \frac{1}{12} \\ \therefore P(C) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(B) + P(C) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

29 $\frac{379}{2187}$

(i) 승원이가 연달아 네 번을 이길 경우 :

$${}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4}$$

(ii) 네 게임 중 3번을 이기고, 마지막에 이기는 경우 :

$${}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3^5}$$

(iii) 다섯 게임 중 3번을 이기고, 마지막에 이

기는 경우 :

$${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{40}{3^6}$$

(iv) 여섯 게임 중 3번을 이기고, 마지막에 이

기는 경우 :

$${}_6C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{160}{3^7}$$

$$\therefore (\text{구하는 확률}) = \frac{1}{3^4} + \frac{8}{3^5} + \frac{40}{3^6} + \frac{160}{3^7}$$

$$= \frac{379}{2187}$$

30 답 21/50

A가 자유투를 성공하는 사건을 A, B가 자유투를 성공하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A \cap B)$ 이다.

$$P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{7}{10} \text{이고,}$$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{7}{10}$$

$$= \frac{21}{50}$$

31 답 ⑤

2 또는 3의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 나머지 눈

이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다. 주사위를 4번 던져

A지점에서 출발하여 P지점에 도달하려면 오른쪽으로 2칸, 위로 2칸을 이동하면 되므로 구하는 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

32 답 ②

4개의 문제를 임의로 답했을 때, 얻을 수 있는 점수는 다음과 같다.

맞힌 문제의 개수	0	1	2	3	4
얻은 점수	-16	-6	4	14	24

얻은 점수가 8점 이상인 경우는 3문제를 맞히는 경우와 4문제를 맞히는 경우이다.

따라서 구하는 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

33 답 98/125

신제품을 구입한 세 사람 중 적어도 한 명이 구입한 신제품에 사은품이 들어 있을 사건을 A라 하면

세 사람의 신제품에 모두 사은품이 들어 있지 않는 사건은 A^c 이다.

$$\text{즉, } P(A^c) = {}_3C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \text{이므로}$$

사은품이 들어 있을 확률이 40%이므로 사은품이 들어 있지

않을 확률은 60%, 즉 $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

여사건의 확률에 의하여 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - {}_3C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$= \frac{98}{125}$$

Ⅲ. 통계

13 이산확률변수와 확률질량함수 ~ 17 정규분포

핵심 개념 문제

정답

문제편 p. 196

01 풀이 참조 02 $\frac{23}{36}$ 03 $\frac{15}{8}$

04 풀이 참조 05 풀이 참조

06 풀이 참조 07 풀이 참조

08 풀이 참조 09 $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}$

10 2, 1, $\frac{1}{2}$ 11 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{16}$

12 (1) 0, 1 (2) 3, 2 (3) 11, 4

13 풀이 참조 14 풀이 참조

01 풀이 참조

확률변수 X 가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이고 각 값을 가질 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_4C_3 \times {}_3C_0}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_2 \times {}_3C_1}{{}_7C_3} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_1 \times {}_3C_2}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_4C_0 \times {}_3C_3}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

02 $\frac{23}{36}$

(i) 두 눈의 합이 4 : (1, 3), (2, 2), (3, 1)

(ii) 두 눈의 합이 5 : (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

(iii) 두 눈의 합이 6 : (1, 5), (2, 4), (3, 3),

(4, 2), (5, 1)

(iv) 두 눈의 합이 7 : (1, 6), (2, 5), (3, 4),

(4, 3), (5, 2), (6, 1)

(v) 두 눈의 합이 8 : (2, 6), (3, 5), (4, 4),

(5, 3), (6, 2)

(i)~(v)에 의하여 구하는 확률은

$$P(4 \leq X \leq 8) = \frac{3+4+5+6+5}{36} = \frac{23}{36}$$

03 $\frac{15}{8}$

확률분포의 성질에 의해 모든 확률의 합은

$$1 \text{ 이므로 } b=1, a=\frac{3}{8}$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = c \quad \therefore c = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b+c = \frac{15}{8}$$

04 풀이 참조

$V(X)$

$$= E((X-m)^2)$$

$$\begin{aligned} &= \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} \\ &\quad + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{9 \times 1 + 1 \times 3 + 1 \times 3 + 9 \times 1}{32} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

이고, 확률변수 X 의 표준편차는

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이다.}$$

05 풀이 참조

$$\begin{aligned} (1) E(2X-5) &= 2 \times E(X) - 5 \\ &= 2 \times 10 - 5 = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) E(-3X+2) &= -3 \times E(X) + 2 \\ &= -3 \times 10 + 2 \\ &= -28 \end{aligned}$$

06 [답] 풀이 참조

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(-2X-4) \\ &= (-2)^2 \times V(X) = 4 \times 6 \\ &= 24 \\ \sigma(Y) &= \sigma(-2X-4) \\ &= |-2| \times \sigma(X) = 2 \times \sqrt{6} \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

07 [답] 풀이 참조

1ST 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 는 0, 1, 2, 3 중에서 어느 하나의 값을 가지는 확률변수이다.

2ND 한 번의 시행에서 2 이하의 눈이 나오는 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 독립시행의 확률에 의하여 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \begin{cases} {}_3C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 & (x=0) \\ {}_3C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} & (x=1, 2) \\ {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 & (x=3) \end{cases} \end{aligned}$$

2RD 따라서 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(3, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르고, 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X)$	${}_3C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^3$	${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2$	${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)$	${}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3$	1

08 [답] 풀이 참조

	X	$E(X)$	$V(X)$	$\sigma(X)$
(1)	$B\left(4, \frac{1}{2}\right)$	2	1	1
(2)	$B\left(60, \frac{1}{3}\right)$	20	$\frac{40}{3}$	$\frac{2\sqrt{30}}{3}$
(3)	$B\left(180, \frac{1}{6}\right)$	30	25	5

09 [답] $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) &\text{의 값은 확률밀도함수} \\ y = \frac{1}{5} \text{의 그래프와 } x\text{-축 및 두 직선 } x = \frac{1}{3}, \\ x = \frac{2}{3} \text{로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로} \\ P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

10 [답] 2, 1, $\frac{1}{2}$

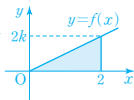
$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 2) &\text{의 값은 확률밀도함수} \\ y = \frac{1}{3}x \ (0 \leq x \leq 2) \text{의 그래프와 } x\text{-축 및 두} \\ \text{직선 } x=1, x=2 \text{로 둘러싸인 부분의 넓이} \\ \text{와 같으므로} \\ P(1 \leq X \leq 2) &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이다.

11 [답] (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{16}$

(1) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x -축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 2 \times 2k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (2) P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

12 **답** (1) 0, 1 (2) 3, 2
(3) 11, 4

	정규분포	평균	표준편차
(1)	$N(0, 1^2)$	0	1
(2)	$N(3, 2^2)$	3	2
(3)	$N(11, 4^2)$	11	4

13 **답** 풀이 참조

평균	$E(X_1) < E(X_2) < E(X_3)$
표준편차	$\sigma(X_1) > \sigma(X_2) > \sigma(X_3)$

14 **답** 풀이 참조

평균	$E(X_1) = E(X_2) < E(X_3)$
표준편차	$\sigma(X_1) = \sigma(X_3) < \sigma(X_2)$

종합 연습 문제 **정답**

문제편 p. 206

15 $\frac{9}{25}$ 16 110

17 평균 : 500, 표준편차 : $5\sqrt{19}$

18 23 19 ①

20 0.8185 21 ④ 22 5

15 **답** $\frac{9}{25}$

X	0	1	2	합계
$P(X)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X) = \frac{6}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} = 1 \text{ 이므로}$$

$$V(X) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$\hookrightarrow V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

16 **답** 110

X	-20	-40	300	-80	-100	600	합계
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = \frac{1}{6}(-20 - 40 + 300 - 80 - 100 + 600) = 110$$

17 **답** 평균 : 500, 표준편차 : $5\sqrt{19}$

확률변수 X 가 이항분포 $B(10000, \frac{1}{20})$ 을 따르므로

$$E(X) = np = 10000 \times \frac{1}{20} = 500$$

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{npq} = \sqrt{10000 \times \frac{1}{20} \times \frac{19}{20}} \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{475} = 5\sqrt{19} \end{aligned}$$

18 **답** 23

3개의 동전을 한 번 던졌을 때, 2개는 앞면, 1개는 뒷면이 나올 확률 p 는

$$p = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

이므로 X 는 이항분포 $B(16, \frac{3}{8})$ 을 따른다.

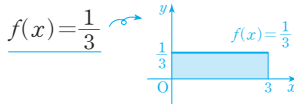
$$E(X) = np = 16 \times \frac{3}{8} = 6$$

$$\therefore E(4X - 1) = 4E(X) - 1 = 23$$

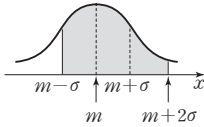
$\hookrightarrow E(aX + b) = aE(X) + b$

19 **답** ①

$x(0 \leq x \leq 3)$ 분에 지하철이 올 확률은 일정하고 확률의 전체는 1이므로 확률밀도함수



20 0.8185



확률변수 X 가 정규분포 $N(5, 4)$ 를 따르므로 $m=5, \sigma=2$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore P(3 \leq X \leq 9) &= P(5-2 \leq X \leq 5+2 \times 2) \\ &= P(m-\sigma \leq X \leq m+2\sigma) \\ &= P(m \leq X \leq m+\sigma) \\ &\quad + P(m \leq X \leq m+2\sigma) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

21 ④

이차방정식 $12x^2 - 11x + 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 로 놓으면 ($0 < \alpha < \beta$)

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{11}{12}, \alpha\beta = \frac{1}{12} \text{이므로} \\ \beta - \alpha &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{\left(\frac{11}{12}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{121}{144} - \frac{48}{144}} \\ &= \frac{\sqrt{73}}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(1 < X \leq 3) &= P(X \leq 3) - P(X \leq 1) \\ &= \beta - \alpha \\ &= \frac{\sqrt{73}}{12} \end{aligned}$$

22 5

$P(-3 \leq X \leq a)$ 의 값은 확률밀도함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$$P(-3 \leq X \leq a) = 1$$

$$P(-3 \leq X \leq a) = \frac{1}{2} \times (a+3) \times b = 1$$

$$ab + 3b = 2 \dots \textcircled{1}$$

$P\left(\frac{a}{3} \leq X \leq a\right)$ 의 값은 확률밀도함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=\frac{a}{3}$ 로

둘러싸인 부분의 넓이로 $\frac{b}{8}$ 이므로

$$P\left(\frac{a}{3} \leq X \leq a\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(a - \frac{a}{3}\right) \times \frac{2}{3}b = \frac{b}{8}$$

$$a - \frac{a}{3} = \frac{3}{8}, \frac{2}{3}a = \frac{3}{8} \quad \begin{array}{l} \text{↙} \\ \text{0} \leq x \leq a \text{에서} \\ \text{함수 } y=f(x) \text{는} \\ y = -\frac{b}{a}x + b \end{array}$$

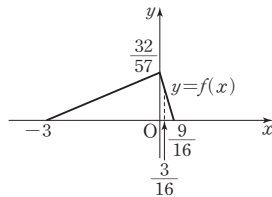
$$\therefore a = \frac{9}{16}$$

$$\text{이때, } x = \frac{a}{3} \text{이면 } y = \frac{2}{3}b$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{9}{16}b + 3b = 2 \quad \therefore b = \frac{32}{57}$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(\frac{a}{3} \leq X \leq a\right) &= \frac{b}{8} = \frac{1}{8} \times \frac{32}{57} \\ &= \frac{4}{57} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$



$$p = P\left(0 \leq X \leq \frac{a}{3}\right)$$

$$= P\left(0 \leq X \leq a\right) - P\left(\frac{a}{3} \leq X \leq a\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} \times \frac{32}{57} - \frac{4}{57} (\because \textcircled{2})$$

$$= \frac{9-4}{57} = \frac{5}{57}$$

$$\therefore 57p = 57 \times \frac{5}{57} = 5$$

18 표준정규분포 ~ 21 모평균의 추정

핵심 개념 문제

정답

문제편 p. 208

23 2, 1, 0, 1359

24 1.96, 0.95

25 1, 0.8413 26 풀이 참조

27 풀이 참조 28 풀이 참조

29 풀이 참조 30 $\frac{11}{32}$

31 풀이 참조 32 풀이 참조

33 풀이 참조 34 풀이 참조

23 [답] 2, 1, 0.1359

$$\begin{aligned} P(1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359 \end{aligned}$$

24 [답] 1.96, 0.95

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 1.96) \\ &= P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1.96) \\ &= 2 \times 0.4750 = 0.95 \end{aligned}$$

25 [답] 1, 0.8413

$$\begin{aligned} P(Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.3413 = 0.8413 \end{aligned}$$

26 [답] 풀이 참조

$$Z = \frac{X - 3}{4} \text{은 표준정규분포 } N(0, 1) \text{을}$$

따르므로

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 5) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.3830 \end{aligned}$$

27 [답] 풀이 참조

	이항분포 $B(n, p)$	평균 m	표준 편차 σ	정규분포 $N(m, \sigma^2)$
(1)	$B(12, \frac{1}{3})$	4	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$N(4, \frac{2\sqrt{6}}{3}^2)$
(2)	$B(48, \frac{1}{2})$	24	$2\sqrt{3}$	$N(24, 2\sqrt{3}^2)$
(3)	$B(400, \frac{1}{2})$	200	10	$N(200, 10^2)$

28 [답] 풀이 참조

1ST 확률변수 X 가 이항분포 $B(400, \frac{1}{2})$

을 따르므로 X 의 평균 m 과 표준편차 σ 는

$$m = 400 \times \frac{1}{2} = 200,$$

$$\sigma = \sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 10 \text{이다.}$$

2ND 400은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$ 을 따

른다. 따라서 $Z = \frac{X - 200}{10}$ 은 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(180 \leq X \leq 210) \\ &= P\left(\frac{180 - 200}{10} \leq \frac{X - 200}{10} \leq \frac{210 - 200}{10}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4772 + 0.3413 \\ &= 0.8185 \end{aligned}$$

29 [답] 풀이 참조

(X_1, X_2, X_3)	(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 1)	(2, 1, 1)
$\bar{X}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
(X_1, X_2, X_3)	(1, 2, 2)	(2, 1, 2)	(2, 2, 1)	(2, 2, 2)
$\bar{X}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	2

30 [답] $\frac{11}{32}$

4개의 카드 중에서 1개를 꺼낼 때, 카드에 적혀 있는 숫자를 확률변수 X 라 하면

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{2}{4} = \frac{9}{4}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{2}{4} = \frac{23}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{23}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{2} = \frac{11}{32}$$

31 [답] 풀이 참조

- (1) 통계 조사에서 조사의 대상이 되는 집단 전체를 **모집단** 이라 하고, 조사를 하기 위해 모집단에서 뽑은 일부분을 **표본** 이라 한다.
- (2) 모집단에서 표본을 뽑는 것을 추출이라 하고, 표본을 선택할 때 모집단에서 선택한 표본의 각 대상이 표본에 포함될 확률이 모두 같도록 추출하는 방법을 **임의추출** 이라 한다.
- (3) 통계 조사에서 모집단 전체를 조사하는 것을 **전수조사** 라 하고, 모집단에서 뽑은 표본을 조사하는 것을 **표본조사** 라 한다.

32 [답] 풀이 참조

$$100 - 2.58 \times \frac{20}{\sqrt{100}} \leq m$$

$$\leq 100 + 2.58 \times \frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$\text{이때, } 2.58 \times \frac{20}{\sqrt{100}} = 2.58 \times 2 = 5.16 \text{ 이므로}$$

$$100 - 5.16 \leq m \leq 100 + 5.16$$

$$\Rightarrow 94.84 \leq m \leq 105.16$$

33 [답] 풀이 참조

$$2.58 \times \frac{10}{\sqrt{400}} = 2.58 \times \frac{1}{2} = 1.29 \text{ 이므로}$$

$$100 - 1.29 \leq m \leq 100 + 1.29$$

$$\Rightarrow 98.71 \leq m \leq 101.29$$

34 [답] 풀이 참조

$$2.58 \times \frac{13}{\sqrt{169}} = 2.58 \times 1 = 2.58 \text{ 이므로}$$

$$100 - 2.58 \leq m \leq 100 + 2.58$$

$$97.42 \leq m \leq 102.58$$

종합 연습 문제 [정답]

문제편 p. 216

35 67.3 %

36 0.0668

37 0.4772

38 0.1587

39 ③

40 31.29

41 ⑤

42 10

35 [답] 67.3 %

$$P(164 \leq X \leq 174)$$

$$= P\left(\frac{164-170}{5} \leq Z \leq \frac{174-170}{5}\right)$$

$$= P\left(-\frac{6}{5} \leq Z \leq \frac{4}{5}\right) \quad \begin{array}{l} \text{↗} Z = \frac{X-170}{5} \text{ 으로} \\ \text{표준화한다.} \end{array}$$

$$= P(-1.2 \leq Z \leq 0.8)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.8) + P(0 \leq Z \leq 1.2)$$

$$= 0.288 + 0.385 = 0.673$$

따라서 구하는 확률은 전체의 67.3 %이다.

36 [답] 0.0668

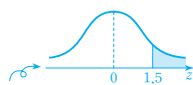
$$P(X \geq 18)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{18-12}{4}\right) = P(Z \geq 1.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332$$

$$= 0.0668$$



37 [답] 0.4772

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ 을 따르

므로 정규분포 $N(30, 5^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(20 \leq X \leq 30) &\xrightarrow{\sigma} P\left(\frac{X-30}{5} \leq \frac{30-30}{5}\right) \text{을 이용한다.} \\ &= P\left(\frac{20-30}{5} \leq Z \leq \frac{30-30}{5}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.4772\end{aligned}$$

38 [답] 0.1587

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{10}\right)$ 을 따

르므로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X \geq 46) &= P\left(Z \geq \frac{46-40}{6}\right) \\ &= P(Z \geq 1) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 \\ &= 0.1587\end{aligned}$$

39 [답] ③

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{X}) &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{4} \\ \sqrt{n} &\geq 8 \quad \therefore n \geq 64 \quad \xrightarrow{\sigma=2} N(5, 4) = N(5, 2^2) \text{에서} \\ &\text{따라서 } n \text{의 최소값은 } 64 \text{이다.}\end{aligned}$$

40 [답] 31.29

모평균을 m , 표본평균을 $\bar{X}$ 라 할 때, 신뢰도 99%로 모평균 m 을 추정하면

$$\begin{aligned}\bar{X} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq m \leq \bar{X} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{이다.} \\ 30 - 2.58 \times \frac{5}{10} &\leq m \leq 30 + 2.58 \times \frac{5}{10} \\ 28.71 &\leq m \leq 31.29 \quad \xrightarrow{\sigma=5} n=100, \bar{X}=30, \sigma=5 \text{이다.} \\ \text{따라서 } m \text{의 최댓값은 } 31.29 \text{이다.}\end{aligned}$$

41 [답] ⑤

모표준편차를 σ , 표본의 크기를 n ,

일정한 신뢰도의 신뢰계수를 k 라 하면

신뢰구간의 길이는 $2 \times k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2$ 이고,

표본의 크기 $n=25$ 이므로 $k\sigma=5 \cdots \textcircled{1}$ 이다.

신뢰구간의 길이를 1로 하려면

$$2 \times k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1$$

$$\sqrt{n} = 10 (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore n = 100$$

42 [답] 10

모표준편차가 σ 인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\bar{x}$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

주어진 조건에서 $n=400$ 이므로 이 표본의 평균을 $\bar{x}$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\bar{x} - 0.129\sigma \leq m \leq \bar{x} + 0.129\sigma$$

따라서 $a = \bar{x} - 0.129\sigma$, $b = \bar{x} + 0.129\sigma$ 에서

$$b - a = 2 \times 0.129\sigma = 0.258\sigma \text{이므로}$$

$$0.258\sigma = 2.58, \sigma = \frac{2.58}{0.258}$$

$$\therefore \sigma = 10$$