상위 1% 도전을 위한 최고의 명품 일등급 문제

일등급 수학

THE FIRST CLASS MATHEMATICS

공통 수학 2

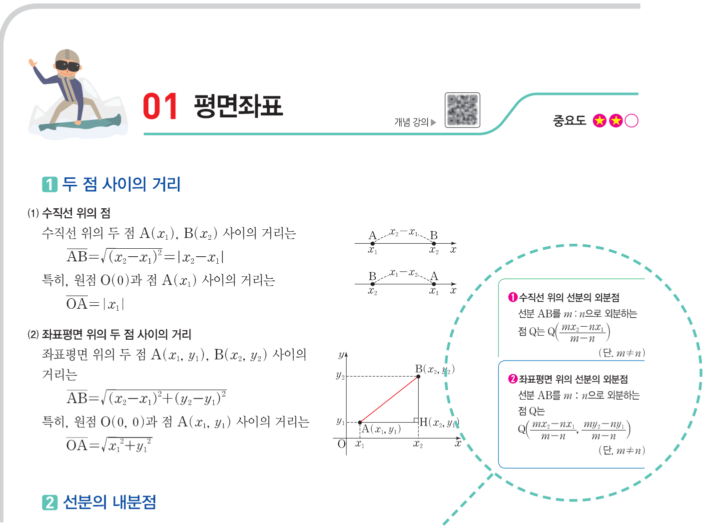
구성과 특징

학교 시험, 수능 1등급을 위한
최고의 명품 수학 문제집!
일등급 수학

1 개념 정리 – 1등급을 위한 핵심 개념과 Tip

중단원 핵심 내용을 정리하여 혹시 잊을 수 있는 개념을 다시 한 번 최종 점검해 볼 수 있습니다.

- **중요도** ★★★
  시험에 자주 나오는 단원의 중요도 제시
- **First Class Tip**
  일등급 수학만의 명품 Tip을 제시하여 시험에서 요긴하게 사용할 수 있습니다.



01 평면좌표

개념 강의▶

중요도 ★★○

1 두 점 사이의 거리

(1) 수직선 위의 점

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

특히, 원점 $O(0)$과 점 $A(x_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=|x_1|$$

(2) 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

특히, 원점 $O(0, 0)$과 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

❶ 수직선 위의 선분의 외분점

선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q는 $Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

❷ 좌표평면 위의 선분의 외분점

선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q는 $Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

2 선분의 내분점

공식이 유도되는 과정이나 확장 개념을 보조단에 제시하였습니다.

2 핵심 유형 연습 – 가장 중요한 유형 연습

대표 문제 ➡ 유제 ➡ 발전 문제가 하나의 세트로 구성되어 있어서 핵심 유형을 효과적으로 정복할 수 있습니다.
일등급 실력으로 가는 입문 과정이므로 스스로 충분히 풀 수 있다면 수학 실력이 한층 더 업그레이드될 것입니다.

- 출제율 ❯❯❯
  학교시험과 학력평가, 수능에서 출제되는 정도를 표시하였습니다.

FIRST CLASS **핵심 유형 연습**

◀동영상 강의

핵심유형 01 두 점 사이의 거리

01 출제율 ❯❯❯

두 점 $A(3, 8)$, $B(10, 2)$가 있다. x축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때, $\overline{AP}:\overline{BP}$는?

① 1 : 1 ② 2 : 1 ③ 3 : 1
④ 4 : 1 ⑤ 3 : 2

핵심유형 02 선분의 내분점

04 출제율 ❯❯❯

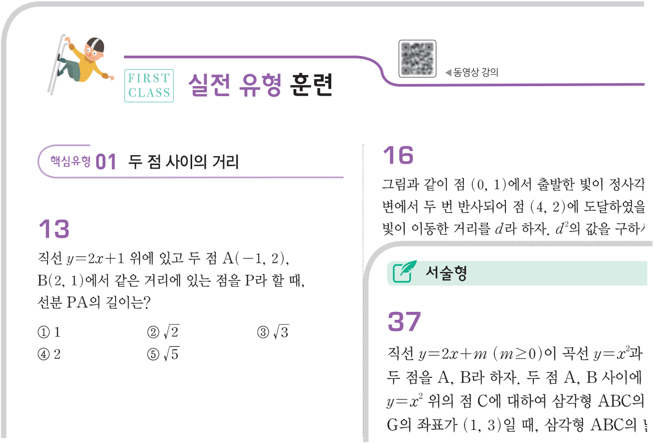
두 점 $A(1, 8)$, $B(4, -3)$에 대하여 선분 AB
$k:1$로 내분하는 점이 제1사분면에 존재하도
하는 모든 자연수 k의 값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 8

3 실전 유형 훈련 – 실전 유형을 단계적으로 파악

핵심 유형 연습에서 배운 것을 학교시험이나 수능에 어떻게 적용하는지 훈련하는 단계입니다. 단순 반복이 아닌 확장된 개념과 유형을 학습할 수 있는 문제로 구성되어 있습니다.

- **서술형**
  학교시험에서 출제되는 서술형 유형을 완벽히 분석해 구성한 문제입니다.



FIRST CLASS **실전 유형 훈련**

◀동영상 강의

핵심유형 **01** 두 점 사이의 거리

13

직선 $y=2x+1$ 위에 있고 두 점 A$(-1,\ 2)$, B$(2,\ 1)$에서 같은 거리에 있는 점을 P라 할 때, 선분 PA의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

16

그림과 같이 점 $(0,\ 1)$에서 출발한 빛이 정사각
변에서 두 번 반사되어 점 $(4,\ 2)$에 도달하였을
빛이 이동한 거리를 d라 하자. d^2의 값을 구하

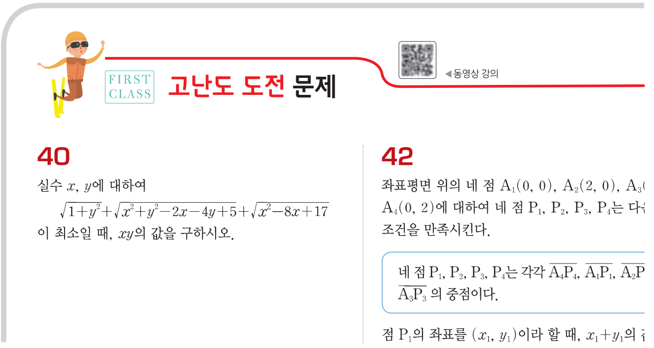
서술형

37

직선 $y=2x+m$ $(m\geq 0)$이 곡선 $y=x^2$과
두 점을 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이에
$y=x^2$ 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC의
G의 좌표가 $(1,\ 3)$일 때, 삼각형 ABC의

4 고난도 도전 문제 – 일등급을 위한 고난도 명품 문제

여러 개념을 종합적으로 이해하고 적용해야 풀 수 있는 명품 문제로 구성되어 있습니다. 종합적 사고력을 키울 수 있어 수학시험에서 완벽한 1등급을 받을 수 있습니다.



FIRST CLASS **고난도 도전 문제**

◀동영상 강의

40

실수 x, y에 대하여

$$\sqrt{1+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}+\sqrt{x^2-8x+17}$$

이 최소일 때, xy의 값을 구하시오.

42

좌표평면 위의 네 점 $A_1(0,\ 0)$, $A_2(2,\ 0)$, A_3
$A_4(0,\ 2)$에 대하여 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4는 다
조건을 만족시킨다.

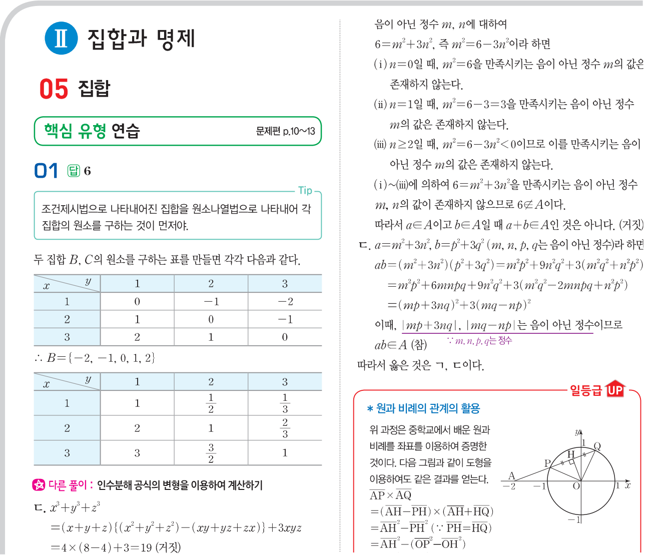
> 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4는 각각 $\overline{A_4P_4}$, $\overline{A_1P_1}$, $\overline{A_2P}$
> $\overline{A_3P_3}$ 의 중점이다.

점 P_1의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 할 때, x_1+y_1의

5 정답 및 해설 – 정확하고 명쾌한 해설

일등급 수학만의 접근 방법으로 쉽고 간단하게 고난도 문제의 해답을 구하는 방법을 습득할 수 있습니다.

- **Tip**
  핵심 유형 문제의 풀이 전략에 필요한 Tip을 제시하였습니다.
- **다른 풀이**
  단순한 풀이가 아닌 사고를 전환하여 여러 관점에서 접근하는 방법을 배울 수 있습니다.
- **일등급 UP**
  개념을 확장시켜 문제에 더 쉽게 접근할 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.



Ⅱ 집합과 명제

05 집합

핵심 유형 연습 문제편 p.10~13

01 답 6

Tip
조건제시법으로 나타내어진 집합을 원소나열법으로 나타내어 각 집합의 원소를 구하는 것이 먼저야.

두 집합 B, C의 원소를 구하는 표를 만들면 각각 다음과 같다.

x \ y	1	2	3
1	0	-1	-2
2	1	0	-1
3	2	1	0

$\therefore B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

x \ y	1	2	3
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	2	1	$\frac{2}{3}$
3	3	$\frac{3}{2}$	1

다른 풀이 : 인수분해 공식의 변형을 이용하여 계산하기

ㄷ. $x^3+y^3+z^3$
$=(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\}+3xyz$
$=4\times(8-4)+3=19$ (거짓)

음이 아닌 정수 m, n에 대하여
$6=m^2+3n^2$, 즉 $m^2=6-3n^2$이라 하면
(ⅰ) $n=0$일 때, $m^2=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m의 값은 존재하지 않는다.
(ⅱ) $n=1$일 때, $m^2=6-3=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m의 값은 존재하지 않는다.
(ⅲ) $n\geq 2$일 때, $m^2=6-3n^2<0$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 m의 값은 존재하지 않는다.
(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $6=m^2+3n^2$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m, n의 값이 존재하지 않으므로 $6\not\in A$이다.
따라서 $a\in A$이고 $b\in A$일 때 $a+b\in A$인 것은 아니다. (거짓)
ㄷ. $a=m^2+3n^2$, $b=p^2+3q^2$ (m, n, p, q는 음이 아닌 정수)라 하면
$ab=(m^2+3n^2)(p^2+3q^2)=m^2p^2+9n^2q^2+3(m^2q^2+n^2p^2)$
$=m^2p^2+6mnpq+9n^2q^2+3(m^2q^2-2mnpq+n^2p^2)$
$=(mp+3nq)^2+3(mq-np)^2$
이때, $\underbrace{|mp+3nq|,\ |mq-np|\text{는 음이 아닌 정수}}_{\because\ m,\ n,\ p,\ q\text{는 정수}}$이므로
$ab\in A$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

일등급 UP

* 원과 비례의 관계의 활용

위 과정은 중학교에서 배운 원과 비례를 좌표를 이용하여 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 도형을 이용하여도 같은 결과를 얻는다.
$\overline{AP}\times\overline{AQ}$
$=(\overline{AH}-\overline{PH})\times(\overline{AH}+\overline{HQ})$
$=\overline{AH}^2-\overline{PH}^2$ ($\because\ \overline{PH}=\overline{HQ}$)
$=\overline{AH}^2-(\overline{OP}^2-\overline{OH}^2)$

차 례

Ⅰ 도형의 방정식

01 평면좌표

02 직선의 방정식

03 원의 방정식

04 도형의 이동

Ⅱ 집합과 명제

05 집합

06 명제

07 명제의 증명과 절대부등식

Ⅲ 함수와 그래프

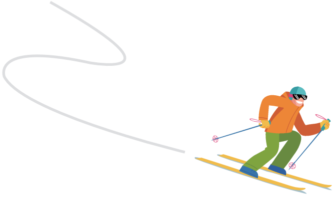
08 함수

09 유리식과 유리함수

10 무리식과 무리함수

일등급 수학 학습계획표 20일

Day	학습 내용	페이지	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	학습 날짜	복습 날짜
01	**01** 평면좌표 개념정리+핵심 유형 연습	8-11		월 일	월 일
02	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	12-19		월 일	월 일
03	**02** 직선의 방정식 개념정리+핵심 유형 연습	20-24		월 일	월 일
04	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	25-33		월 일	월 일
05	**03** 원의 방정식 개념정리+핵심 유형 연습	34-38		월 일	월 일
06	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	39-47		월 일	월 일
07	**04** 도형의 이동 개념정리+핵심 유형 연습	48-51		월 일	월 일
08	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	52-61		월 일	월 일
09	**05** 집합 개념정리+핵심 유형 연습	64-68		월 일	월 일
10	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	69-76		월 일	월 일
11	**06** 명제 개념정리+핵심 유형 연습	78-82		월 일	월 일
12	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	83-90		월 일	월 일
13	**07** 명제의 증명과 절대부등식 개념정리+핵심 유형 연습	92-96		월 일	월 일
14	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	97-107		월 일	월 일
15	**08** 함수 개념정리+핵심 유형 연습	110-114		월 일	월 일
16	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	115-124		월 일	월 일
17	**09** 유리식과 유리함수 개념정리+핵심 유형 연습	126-129		월 일	월 일
18	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	130-137		월 일	월 일
19	**10** 무리식과 무리함수 개념정리+핵심 유형 연습	138-141		월 일	월 일
20	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	142-149		월 일	월 일



I 도형의 방정식

GPS는 위성에서 보내는 신호로 자신의 현재
위치를 계산하는 위성항법시스템입니다.
이제 차마다 GPS는 필수로 자리잡게
되었습니다. 이런 것이 가능하게
된 것은 데카르트가 도입한
좌표의 발명 덕분입니다.

01 평면좌표

개념 강의▶

중요도 ★★○

1 두 점 사이의 거리

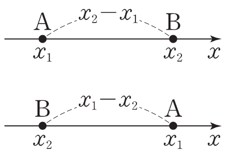
(1) 수직선 위의 점

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

특히, 원점 $O(0)$과 점 $A(x_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=|x_1|$$



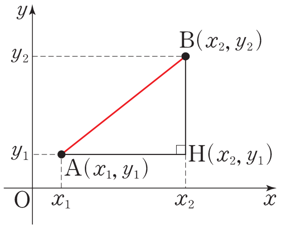
(2) 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

특히, 원점 $O(0, 0)$과 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$$



2 선분의 내분점

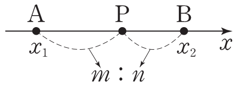
(1) 수직선 위의 선분의 내분점❶

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여

선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

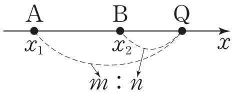
특히, 선분 AB의 중점 M은 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$



❶ 수직선 위의 선분의 외분점

선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점 Q는 $Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$

(단, $m\neq n$)



First Class Tip

*** 비례식의 계산과 같이 (내항)끼리, (외항)끼리 곱하기**

외항 nx_1

$A : B=m : n \Rightarrow$ 선분 $A(x_1)B(x_2)$ $m : n$

내항 mx_2

내분점 $\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$, 외분점 $\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$

(2) 좌표평면 위의 선분의 내분점❷

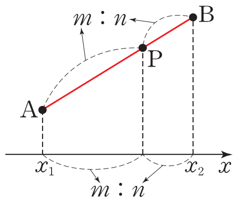
좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여

선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

특히, 선분 AB의 중점 M은

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



❷ 좌표평면 위의 선분의 외분점

선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점 Q는

$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

(단, $m\neq n$)

FIRST CLASS 핵심 유형 연습

◀동영상 강의

핵심유형 01 두 점 사이의 거리

01 출제율 ▶▶▶

두 점 A(3, 8), B(10, 2)가 있다. x축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소일 때, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}$는?

① 1 : 1　② 2 : 1　③ 3 : 1
④ 4 : 1　⑤ 3 : 2

02 출제율 ▶▶▷

세 점 A(2, 2), B(4, 8), C(a, 0)에 대하여 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 10　② 13　③ 16
④ 19　⑤ 22

03 출제율 ▶▶▶

세 점 A(4, -2), B(0, 6), C(-4, 4)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심 P의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

핵심유형 02 선분의 내분점

04 출제율 ▶▶▶

두 점 A(1, 8), B(4, -3)에 대하여 선분 AB를 $k:1$로 내분하는 점이 제1사분면에 존재하도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합은?

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 8

05 출제율 ▶▶▶

직선 $y=3x+k$ $(k>0)$이 곡선 $y=x^2-3x$와 만나는 두 점을 P, Q라 하고, x축과 만나는 점을 R라 하자. 선분 PQ를 $1:4$로 내분하는 점이 y축 위에 있을 때, 점 P는 선분 RQ를 $1:n$으로 내분한다. 양수 n의 값을 구하시오.

(단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작다.)

06 출제율 ▶▶▷

한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC가 있다. $0<k<1$인 유리수 k에 대하여 두 선분 AB, BC를 $k:(1-k)$로 내분하는 점을 각각 P, Q라 하고 두 선분 AB, BC를 $k:(1+k)$로 내분하는 점을 각각 P′, Q′이라 하자. 삼각형 PBQ의 넓이를 S_1, 삼각형 P′BQ′의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1:S_2=4:3$이 되도록 하는 k의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

FIRST CLASS 실전 유형 훈련

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 두 점 사이의 거리

13

직선 $y=2x+1$ 위에 있고 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$에서 같은 거리에 있는 점을 P라 할 때, 선분 PA의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

14

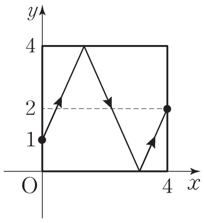
이차함수 $f(x)=x^2-ax$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점 사이의 거리의 최솟값을 m이라 하자. m^2의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

15

세 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(5,\ 1)$, $\mathrm{C}(2,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 직각삼각형이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

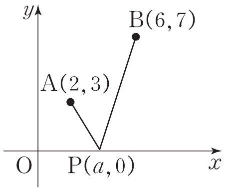
16

그림과 같이 점 $(0,\ 1)$에서 출발한 빛이 정사각형의 변에서 두 번 반사되어 점 $(4,\ 2)$에 도달하였을 때, 빛이 이동한 거리를 d라 하자. d^2의 값을 구하시오.
(단, 빛의 입사각과 반사각의 크기는 같다.)



17

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(6,\ 7)$과 x축 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.



FIRST CLASS 고난도 도전 문제

◀동영상 강의

40

실수 x, y에 대하여

$$\sqrt{1+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}+\sqrt{x^2-8x+17}$$

이 최소일 때, xy의 값을 구하시오.

41

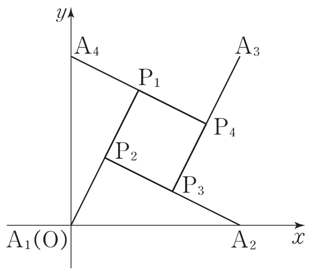
두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ -2)$와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}$는 점 P의 x좌표가 a일 때 최댓값 M을 갖는다. M^2+a^2의 값을 구하시오.

42

좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}_1(0,\ 0)$, $\mathrm{A}_2(2,\ 0)$, $\mathrm{A}_3(2,\ 2)$, $\mathrm{A}_4(0,\ 2)$에 대하여 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4는 다음 조건을 만족시킨다.

> 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4는 각각 $\overline{\mathrm{A}_4\mathrm{P}_4}$, $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1}$, $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2}$, $\overline{\mathrm{A}_3\mathrm{P}_3}$ 의 중점이다.

점 P_1의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 할 때, x_1+y_1의 값은?



① $\dfrac{6}{5}$　② $\dfrac{9}{5}$　③ $\dfrac{12}{5}$

④ $\dfrac{14}{5}$　⑤ $\dfrac{16}{5}$

43

좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n\ (m>n>0)$이 되는 직선 AB 위의 점 P는 2개가 있다. 이 점을 각각 P_1, P_2라 하자. $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{AB}}$일 때, $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$의 값을 구하시오.

I 도형의 방정식

01 평면좌표

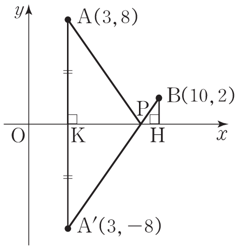
핵심 유형 연습

문제편 p.10~11

01 답 ④

Tip

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}$는 점 P의 좌표를 구하지 않고도 알 수 있어.



두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 K, H라 하고, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 A′이라 하면 $\mathrm{A}'(3,\ -8)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

따라서 그림과 같이 점 P가 $\overline{\mathrm{A'B}}$와 x축의 교점에 위치할 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 된다.

이때, $\triangle\mathrm{A'PK}\backsim\triangle\mathrm{BPH}$이므로

$\overline{\mathrm{A'P}}:\overline{\mathrm{BP}}=\underbrace{\overline{\mathrm{A'K}}:\overline{\mathrm{BH}}=8:2}_{y\text{좌표의 절댓값의 비}}=4:1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=4:1$

02 답 ⑤

(i) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 경우 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$에서

$(4-2)^2+(8-2)^2=(a-2)^2+(0-2)^2$

$(a-2)^2=6^2\qquad\therefore\ a=8$ 또는 $a=-4$

(ii) $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 경우 $\overline{\mathrm{BA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$에서

$(4-2)^2+(8-2)^2=(a-4)^2+(0-8)^2$

이때, $(a-4)^2=-24$가 되어 정수 a가 존재하지 않는다.

(iii) $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}$인 경우 $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{CB}}^2$에서

$(a-2)^2+(0-2)^2=(a-4)^2+(0-8)^2$

$4a=72\qquad\therefore\ a=18$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$8+(-4)+18=22$

03 답 ①

점 P가 삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$, 즉 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이다.

(i) $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서 $(a-4)^2+(b+2)^2=a^2+(b-6)^2$

$-8a+4b+20=-12b+36$

$8a-16b=-16\qquad\therefore\ a-2b=-2\ \cdots$ ㉠

(ii) $\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$에서 $a^2+(b-6)^2=(a+4)^2+(b-4)^2$

$-12b+36=8a-8b+32$

$8a+4b=4\qquad\therefore\ 2a+b=1\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=1$

$\therefore\ a+b=0+1=1$

04 답 ①

Tip

제1사분면에 존재하는 점의 좌표의 성질을 이용해.

선분 AB를 $k:1$로 내분하는 점을 P라 하면

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4k+1}{k+1},\ \dfrac{-3k+8}{k+1}\right)$

점 P가 제1사분면에 존재하려면

$\dfrac{4k+1}{k+1}>0,\ \dfrac{-3k+8}{k+1}>0$이어야 한다.

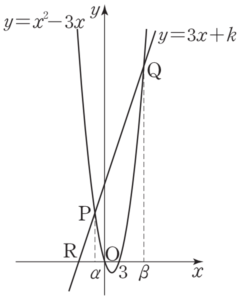
이때, k는 자연수이므로 $k+1>0$이다.

즉, $4k+1>0\ \cdots$ ㉠, $-3k+8>0\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $-\dfrac{1}{4}<k<\dfrac{8}{3}$

따라서 자연수 k는 1, 2이므로 그 합은 $1+2=3$이다.

05 답 3



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\mathrm{P}(\alpha,\ 3\alpha+k),\ \mathrm{Q}(\beta,\ 3\beta+k)$이고

$x^2-3x=3x+k$에서 $x^2-6x-k=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이고

선분 PQ를 $1:4$로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로

내분점의 x좌표 $\dfrac{4\alpha+\beta}{5}=0$이다. $\qquad\therefore\ 4\alpha+\beta=0$

두 식 $\alpha+\beta=6,\ 4\alpha+\beta=0$을 연립하면

$\alpha=-2,\ \beta=8$이고

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $\alpha\beta=-16=-k$

$\therefore\ k=16,\ \mathrm{P}(-2,\ 10),\ \mathrm{Q}(8,\ 40)$

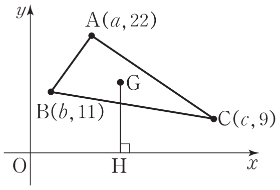
따라서 한 직선 위에 있는 세 점 R, P, Q의 y좌표가 각각 0, 10, 40이므로 점 P는 선분 RQ를 $\underbrace{1:3}_{(10-0):(40-10)=1:3}$으로 내분한다.

$\therefore\ n=3$

10 답 ②

Tip

직선 l을 좌표축으로 설정하면 점과 직선 사이의 거리가 그 점의 좌표가 돼.

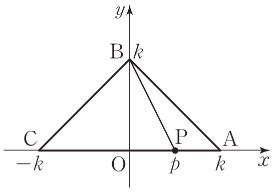


그림과 같이 직선 l을 x축으로 잡으면 세 꼭짓점의 좌표를 $\mathrm{A}(a, 22)$, $\mathrm{B}(b, 11)$, $\mathrm{C}(c, 9)$라 할 수 있다.

이때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 y좌표는 $\frac{22+11+9}{3}=\frac{42}{3}=14$이므로 $\overline{\mathrm{GH}}=14$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심과 직선 l 사이의 거리는 14이다.

11 답 50



그림과 같이 좌표평면 위에 $\mathrm{A}(k, 0)$, $\mathrm{B}(0, k)$, $\mathrm{C}(-k, 0)$, $\mathrm{P}(p, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{CP}}=(k-p)(k+p)$

$=k^2-p^2$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=k^2+p^2$이므로

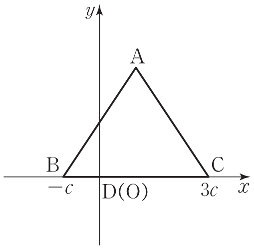
$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{CP}}+\overline{\mathrm{BP}}^2=2k^2=100$

$\therefore k^2=50$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times2k\times k=k^2=50$

12 답 7



그림과 같이 변 BC를 x축으로, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표축을 잡고 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-c, 0)$, $\mathrm{C}(3c, 0)$이라 하면

$3\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$

$=3\{(a+c)^2+b^2\}+(a-3c)^2+b^2$

$=4(a^2+b^2+3c^2)$ ⋯ ㉠

$p(\overline{\mathrm{AD}}^2+q\overline{\mathrm{BD}}^2)=p(a^2+b^2+qc^2)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=7$

실전 유형 훈련

문제편 p.12~17

13 답 ⑤

직선 $y=2x+1$ 위의 점 P의 x좌표를 a라 하면 $\mathrm{P}(a, 2a+1)$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서

$\sqrt{(a+1)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(2a)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $-2a+2=-4a+4$, $2a=2$

$\therefore a=1$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(1, 3)$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(1+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$

14 답 20

이차함수 $f(x)=x^2-ax$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 서로 다른 두 교점의 좌표를 $\mathrm{P}(\alpha, 2\alpha+1)$, $\mathrm{Q}(\beta, 2\beta+1)$이라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-(a+2)x-1=0$의 서로 다른 두 실근이다.

즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+2$, $\alpha\beta=-1$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(2\beta+1-2\alpha-1)^2}=\sqrt{5(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}=\sqrt{5(a+2)^2+20}\geq\sqrt{20}$

따라서 $a=-2$일 때, 두 교점 사이의 거리의 최솟값이 m이므로

$m^2=20$

15 답 672

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 구하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(5-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(2-5)^2+(a-1)^2}=\sqrt{9+(a-1)^2}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(2-0)^2+(a-2)^2}=\sqrt{4+(a-2)^2}$

(i) $\overline{\mathrm{AB}}$가 빗변일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$이어야 하므로

$26=9+(a-1)^2+4+(a-2)^2$에서

$26=2a^2-6a+18$, $2a^2-6a-8=0$

$a^2-3a-4=0$, $(a-4)(a+1)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=-1$ ⋯ ㉠

(ii) $\overline{\mathrm{BC}}$가 빗변일 때, $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$이어야 하므로

$9+(a-1)^2=26+4+(a-2)^2$에서

$-2a+10=-4a+34$, $2a=24$　　$\therefore a=12$ ⋯ ㉡

(iii) $\overline{\mathrm{CA}}$가 빗변일 때, $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$이어야 하므로

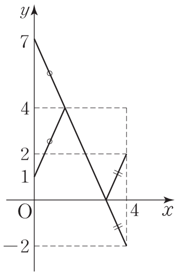
$4+(a-2)^2=26+9+(a-1)^2$에서

$-4a+8=-2a+36$, $-2a=28$　　$\therefore a=-14$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은

$4\times(-1)\times12\times(-14)=672$

16 답 97



빛이 이동한 거리를 대칭이동하면 그림과 같이 두 점 $(0, 7)$과 $(4, -2)$ 사이의 거리임을 알 수 있다.

따라서 빛이 이동한 거리 d는

$d=\sqrt{(4-0)^2+\{(-2)-7\}^2}$

$=\sqrt{16+81}=\sqrt{97}$

$\therefore d^2=97$

고난도 도전 문제

문제편 p.18~19

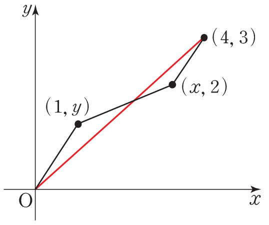
40 답 2

주어진 식을 정리하면

$$\sqrt{1+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}+\sqrt{x^2-8x+17}$$
$$=\sqrt{1^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+1^2}$$
$$=\sqrt{(1-0)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(2-y)^2}+\sqrt{(4-x)^2+(3-2)^2}$$

이다.

즉, 그림과 같이 네 점 $(0, 0)$, $(1, y)$, $(x, 2)$, $(4, 3)$을 차례로 이은 세 선분의 길이의 합과 같다.



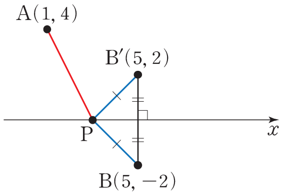
세 선분의 길이의 합은 네 점이 한 직선 위에 있을 때 최소가 된다. 따라서 두 점 $(1, y)$, $(x, 2)$가 두 점 $(0, 0)$, $(4, 3)$을 이은 직선 $y=\frac{3}{4}x$ 위에 있을 때 최소이므로

$x=\frac{8}{3}$, $y=\frac{3}{4}$

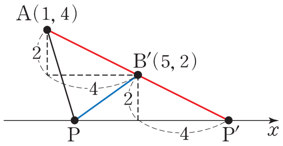
$\therefore xy=2$

41 답 101

그림과 같이 점 B를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 B′이라 하면 x축 위의 모든 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이다.



즉, $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{B'P}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{B'P}}$가 최대일 조건을 구해보자.



삼각형에서 두 변의 길이의 합은 항상 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$\overline{\mathrm{AP}}\le\overline{\mathrm{B'P}}+\overline{\mathrm{AB'}}$, 즉 $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{B'P}}\le\overline{\mathrm{AB'}}$이고,

등호는 세 점 A, B′, P가 한 직선 위에 있을 때, 즉 세 점 A, B′, P로 삼각형을 만들 수 없을 때 성립해.

$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(5-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{B'P}}$의 최댓값 $M=2\sqrt{5}$이고

최대일 때 점 P를 점 P′이라 하면 점 P′은 직선 AB 위의 점이므로 직선 AB와 x축의 교점이다.

그림에서 점 P′의 x좌표는 점 B′의 x좌표에 4를 더한 값이므로

$a=5+4=9$

$\therefore M^2+a^2=(2\sqrt{5})^2+9^2=20+81=101$

42 답 ③

세 점 P_2, P_3, P_4의 좌표를 각각 (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)라 하면

네 점 P_1, P_2, P_3, P_4는 각각 $\overline{\mathrm{A}_4\mathrm{P}_4}$, $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1}$, $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2}$, $\overline{\mathrm{A}_3\mathrm{P}_3}$의 중점이므로

$x_1=\frac{x_4}{2}$, $y_1=\frac{y_4+2}{2}$

$\therefore x_4=2x_1$, $y_4=2y_1-2$ ⋯ ㉠

$x_2=\frac{x_1}{2}$, $y_2=\frac{y_1}{2}$

$\therefore x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$ ⋯ ㉡

$x_3=\frac{x_2+2}{2}$, $y_3=\frac{y_2}{2}$

$\therefore x_2=2x_3-2$, $y_2=2y_3$ ⋯ ㉢

$x_4=\frac{x_3+2}{2}$, $y_4=\frac{y_3+2}{2}$

$\therefore x_3=2x_4-2$, $y_3=2y_4-2$ ⋯ ㉣

㉠~㉣을 연립하여 풀면

$$x_1=2x_2=2(2x_3-2)$$
$$=4x_3-4=4(2x_4-2)-4$$
$$=8x_4-12=8\times 2x_1-12$$
$$=16x_1-12$$

$15x_1=12$ $\therefore x_1=\frac{4}{5}$

같은 방법으로 계산하면

$y_1=2y_2=4y_3=8y_4-8=16y_1-24$

$y_1=16y_1-24$

$15y_1=24$ $\therefore y_1=\frac{8}{5}$

$\therefore x_1+y_1=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}=\frac{12}{5}$

43 답 3

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n$ $(m>n>0)$이 되는 직선 AB 위의 점 P는 그림과 같이 2가지가 있다.

(i) 점 P가 선분 AB를 $m:n$으로 내분할 때 점 P를 P_1이라 하고,