문제 유형을 촘촘히 분류해 개념을 적용시키면
수학이 쉬워집니다!

개념을 익히고 그 개념들을 단계별로
연결하여 파악하는 것이 수학 공부의 기본입니다.
만약 개념 이해 과정을 소홀히 하고, 문제만 반복하여 푼다면
개념 사이의 연계성을 파악할 수 없어
오랜 시간 공부해도 성적을 올릴 수 없습니다.

자이스토리 고3 수학은
최신 수능, 평가원, 학력평가 및 경찰대, 삼사 기출 문제를 정밀하게 분석해
개념의 연계성에 따라 문제 유형을 촘촘히 분류하였습니다.
따라서 유형별 기출 문제를 순서대로 차근차근 풀어가면
개념의 연계성이 명쾌하게 파악되어서 문제 풀이가 쉬워집니다.

또한, 자이스토리의 정확하고 자세한 단계별 해설과 풍부한 보충 첨삭은
문제를 풀어가면서 개념을 알맞게 적용하는 방법을
자연스럽게 익힐 수 있습니다.

이 책의 마지막 페이지를 넘길 때쯤 여러분은 이미
수학 1등급에 도달해 있을 것입니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 **자이스토리** –

수능 1등급 완성 학습 계획표 [38일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~63		월 일	월 일
2	64~117		월 일	월 일
3	118~161		월 일	월 일
4	162~189		월 일	월 일
5	190~207		월 일	월 일
6	B 01~54		월 일	월 일
7	55~94		월 일	월 일
8	95~120		월 일	월 일
9	121~145		월 일	월 일
10	146~169		월 일	월 일
11	170~183		월 일	월 일
12	C 01~52		월 일	월 일
13	53~97		월 일	월 일
14	98~117		월 일	월 일
15	D 01~51		월 일	월 일
16	52~86		월 일	월 일
17	87~112		월 일	월 일
18	E 01~44		월 일	월 일
19	45~83		월 일	월 일
20	84~108		월 일	월 일
21	109~132		월 일	월 일
22	F 01~59		월 일	월 일
23	60~110		월 일	월 일
24	111~135		월 일	월 일
25	G 01~49		월 일	월 일
26	50~85		월 일	월 일
27	86~120		월 일	월 일
28	121~145		월 일	월 일
29	146~180		월 일	월 일
30	H 01~53		월 일	월 일
31	54~92		월 일	월 일
32	93~137		월 일	월 일
33	138~165		월 일	월 일
34	166~192		월 일	월 일
35	I 01~51		월 일	월 일
36	52~83		월 일	월 일
37	84~111		월 일	월 일
38	모의 1, 2, 3회		월 일	월 일

- 나는 ______________ 대학교 ______________ 학과 __________ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

자이스토리 고3 미적분 활용법+α

❶ 개념 · 공식 학습 후 수능 출제 경향 확인!

- 각 단원에 필수적으로 알아야 하는 핵심 개념과 관련된 보충 설명을 꼼꼼히 살펴보세요.
- 최신 출제 경향을 파악하고 앞으로의 수능을 예측하세요.

❷ 수능과 모의고사에 나오는 모든 유형을 촘촘히 섭렵하자!

- 촘촘히 분류된 모든 유형을 확인하고 유형별 풀이 비법을 확인하세요.
- 유형 안에서 난이도 순으로 다시 분류된 문제를 보면서 각 유형에서 쉬운 문제는 어떻게 출제되는지, 고난도 문제는 어떻게 출제되는지 확인하세요.

❸ 부족한 유형을 다시 한 번 점검하자!

- 자신에게 부족한 유형을 찾아낸 후 부족한 부분을 여러 번 반복 학습해 보세요.
- 부족한 유형에 대한 특징과 핵심 개념을 다시 한 번 확인한 후 유형 해결 요령을 터득하세요.

❹ 1등급을 좌우하는 고난도 문항을 완벽하게 마스터하자!

- 1등급 대비 문제는 복합적인 개념을 묻기 때문에 여러 개념을 정확히 파악한 뒤 종합적 사고를 하세요.
- 1등급 문제의 핵심이 되는 단서로 조건을 파악하고 조건을 이용하여 접근하는 방법을 발상해서 문제 풀이에 적용하는 방법을 익히세요.

❺ 쉽게 이해되는 입체 첨삭 해설을 공부해서 다시는 틀리지 말자!

- [첨삭 해설]과 [실수, 함정, 주의 첨삭]을 따라가다 보면 풀이 과정에서 놓치기 쉬운 부분이나 이해가 어려운 부분을 쉽게 풀어 주어 해설을 완벽하게 이해할 수 있어요.
- 쉬운 풀이, 톡톡 풀이, 다른 풀이를 꼼꼼히 읽어서 시간을 줄일 수 있는 풀이법을 찾아보세요.
- 문제 해결 과정에 사용된 개념 · 공식을 다시 한 번 확인하여 놓치고 있었던 내용이 없는지 확인하세요.
- 수능 핵강으로 문제에 대한 개념을 완벽하게 이해하세요.

❻ 오답노트를 만들어 100% 활용하자!

- 반드시 오답노트를 만들어 보세요. 해설에 제시된 단서 또는 접근법도 같이 기록하여 풀어 봤던 문제는 다시는 틀리지 않도록 여러 번 풀어보세요.
- 시간이 지난 후 오답노트를 읽어 보며 해설의 아이디어를 바탕으로 풀이를 따라가 보고 자신만의 풀이도 추가해 보세요.

단원별 핵심 문제 + 최신 · 중요 문제

동영상 강의 QR코드

1. 개념 강의로 핵심 개념을 이해하고 개념이 문제에 적용되는 것을 확인해 보세요!
2. 동영상 문제 풀이로 해설을 좀 더 빠르게 이해할 수 있어요!
3. 해설의 풀이를 읽어보고 동영상 강의를 시청하면 더 쉽게 이해될 거예요!
4. 풀기 어려운 고난도 문제는 동영상 강의를 여러 번 반복 시청해 보세요!

차 례 [총 158개 유형 분류]

다른 풀이, 쉬운, 톡톡 풀이 대폭 강화

1등급 문제 단서, 발상, 적용 단계별 해설

Ⅰ 수열의 극한

A 수열의 극한 – 22개 유형 분류

핵심 개념 정리 12
기본 기출 문제 13
수능 유형별 기출 문제 14
1등급 마스터 문제 46
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 50

B 급수 – 20개 유형 분류

핵심 개념 정리 52
기본 기출 문제 53
수능 유형별 기출 문제 55
1등급 마스터 문제 103
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 107

Ⅱ 미분법

C 지수함수와 로그함수의 미분 – 17개 유형 분류

핵심 개념 정리 112
기본 기출 문제 113
수능 유형별 기출 문제 114
1등급 마스터 문제 130
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 131
동아리 소개/서울대 연합 버뜨리랑 132

D 삼각함수의 덧셈정리 – 12개 유형 분류

핵심 개념 정리 134
기본 기출 문제 135
수능 유형별 기출 문제 136
1등급 마스터 문제 153
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 155
동아리 소개/성균관대 성균지 156

E 삼각함수의 미분 – 12개 유형 분류

핵심 개념 정리 158
기본 기출 문제 159
수능 유형별 기출 문제 160
1등급 마스터 문제 183
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 188
동아리 소개/카이스트 KAKI 190

Ⅲ 적분법

F 여러 가지 미분법 – 13개 유형 분류

핵심 개념 정리 192
기본 기출 문제 193
수능 유형별 기출 문제 195
1등급 마스터 문제 211
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 214
동아리 소개 / 고려대 KUAAA 216

G 도함수의 활용 – 26개 유형 분류

핵심 개념 정리 218
기본 기출 문제 219
수능 유형별 기출 문제 221
1등급 마스터 문제 249
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 256
동아리 소개 / 고려대 쉐어링콰이어 258

H 여러 가지 적분법 – 22개 유형 분류

핵심 개념 정리 260
기본 기출 문제 261
수능 유형별 기출 문제 262
1등급 마스터 문제 289
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 297

I 정적분의 활용 – 14개 유형 분류

핵심 개념 정리 300
기본 기출 문제 301
수능 유형별 기출 문제 303
1등급 마스터 문제 320
경찰대, 삼사 중요 기출 문제 322

Special 미적분 실전 기출 모의고사

1회 모의고사 [2025학년도 수능 대비①] 326
2회 모의고사 [2025학년도 수능 대비②] 328
3회 모의고사 [2025학년도 수능 대비③] 330

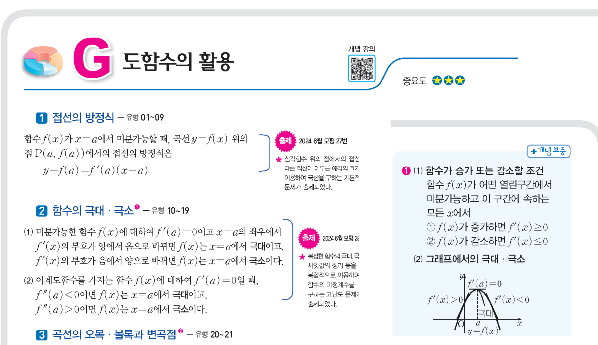
빠른 정답 찾기[문제편] 335

개념 총정리 + 촘촘한 유형 분류 기출 문제 = 수능 1등급

1 핵심 개념 정리–쉽게 이해되는 개념과 공식

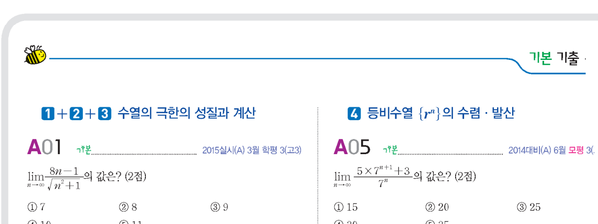
가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 제공되는 강의와 보충 설명으로 개념과 공식의 이해를 돕고 실전 문제에서 적절하게 개념을 사용할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

- **중요도** ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요도 제시
- +개념 보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2024학년도 수능과 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시



2 기본 기출 문제–쉬운 기출 문제로 개념 점검

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 기본 개념과 공식을 확인하는 기출 문제를 수록하였습니다. 이는 개념 이해를 강화하고 응용 문제를 풀 수 있는 초석을 쌓는 과정입니다.



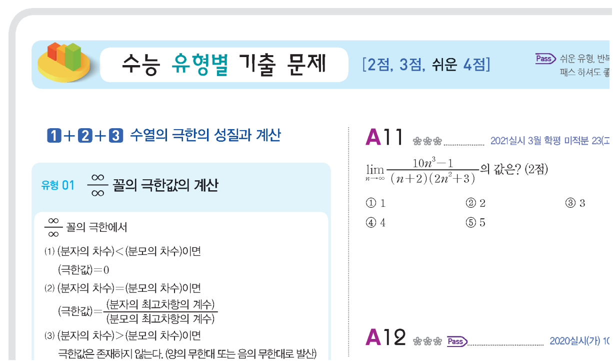
3 경찰대·삼사 기출 문제–최신 중요 기출 문제 수록

경찰대 기출과 삼사 기출 문제 중 수능 출제 기준에 맞는 중요 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

4 유형별 기출 문제–유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하여 유형, 개념, 난이도 순서대로 문항을 배열하였습니다. 기출 문제가 부족한 단원이나 유형은 고품격 수능 기출 변형 문제를 출제하여 추가 수록하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR코드** : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.



- **유형 분류** : 출제 – 2024 수능, 평가원에서 출제된 유형
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형

- **난이도** : ✿✿✿ – 기본 문제, ✿✿✿ – 중급 문제, ✿✿✿ – 중상급 문제, ✿✿✿ – 상급 문제
- Pass : 간단한 계산 문제로 패스해도 좋은 문제

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2024대비 수능 1(고3) : 2023년 11월에 실시한 수능
  - 2024대비 6월 모평 2(고3) : 2023년 6월에 실시한 평가원
  - 2023실시 4월 학평 3(고3) : 2023년 4월에 실시한 학력평가
  - 2024대비 9월 모평 2(고3) : 2023년 9월에 실시한 평가원

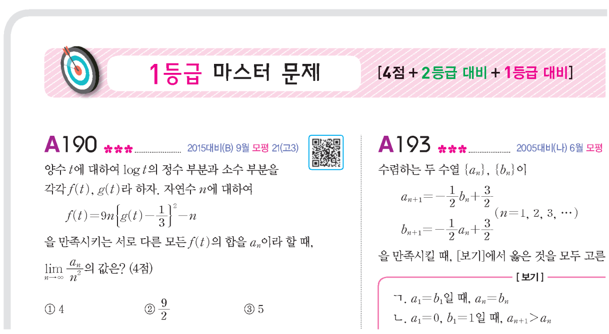
5 미적분 실전 기출 모의고사

기출 문제로 구성한 3회의 실전 모의고사입니다.
수능을 대비하여 실력을 점검하는 데 큰 도움이 될 것입니다.

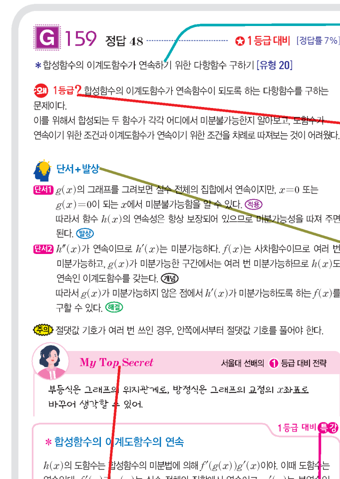
6 1등급 마스터 문제 – 1등급 대비, 2등급 대비, 4점 문제 수록

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 키워서 반드시 수학 1등급에 도달할 수 있습니다.

- ●✽✽✽ – 상급 문제
- ✪ 2등급 대비 – 정답률이 21~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- ✪ 1등급 대비 – 정답률이 20% 이하인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제



7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설



문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
- 단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
- 개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
- 유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
- 발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
- 적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
- 해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

8 입체 첨삭 해설!

정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

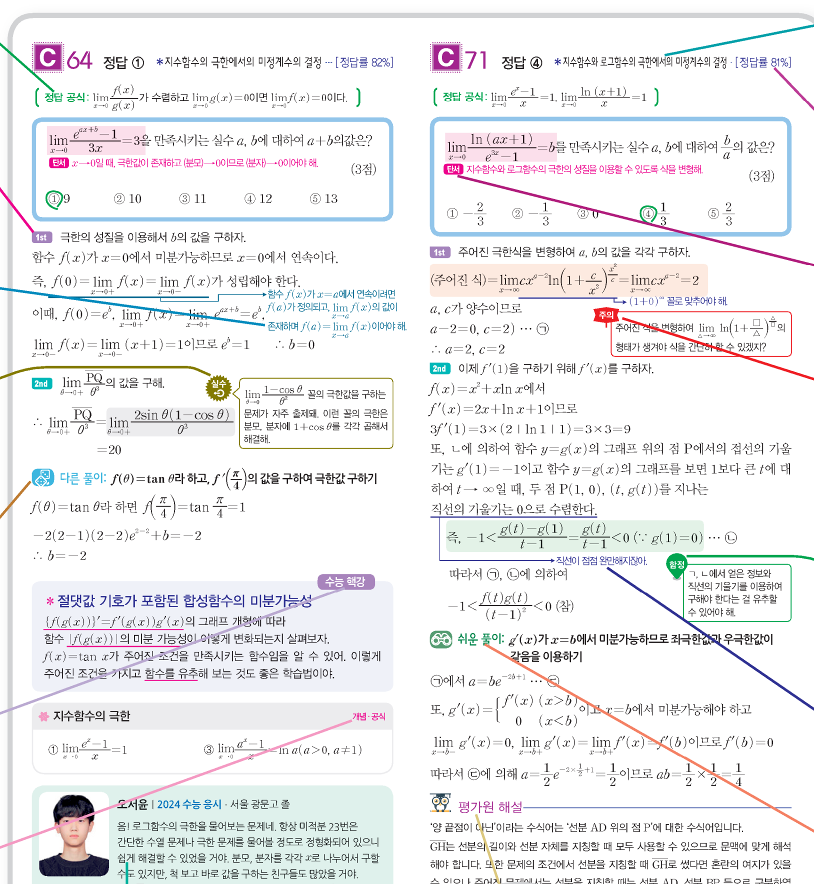
해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.



생생체험
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

평가원 해설
오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빼먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

강태희 파주 한민고
김덕환 대전 대성여고
김대식 경기 하남고
김정수 고양 대치M수학학원
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 경기 안양외고
박숙녀 충남 삼성고
방성의 시흥 초고수수학학원
배수나 서울 가인아카데미
신건률 대치 오름학원
신명선 안양 신성고
신현준 안양 신성고
윤장노 안양 신성고
윤혜미 서울 세종과학고
이종석 저)일등급 수학
이창희 THE 다원수학
이효상 부산 수학솔루션
위경아 강남대성기숙 의대관
장광걸 경기 김포외고
장경호 오산 운천고
장영환 제주 제로링수학교실
장철희 서울 보성고
전경준 서울 풍문고
조승원 경기 경기과학고
지강현 안양 신성고
홍지언 부산 피보나치수학
홍지우 안양 평촌고
황광희 경기 시흥고

[다른 풀이 집필]

사공원 의정부 호연지기학원
서봉원 서산 SM수학교습소
장용준 경기 상우고

개념&문제 풀이
강의 선생님
유튜브 채널
셀프수학

[감수진]

강경혜 제주 강경혜수학
강종철 서울 쿠메수학교습소
권연정 대구 하마수학학원
기미나 인천 기쌤수학
김단비 순천 올바른수학국어학원
김문호 인천 MTM수학
김상완 서울 서로수학교습소
김수민 서울 고려대학교 대학원
김영훈 남양주 성원영어수학학원
김우진 세종 정진수학학원
김유찬 부천 오길수학
김의진 서울 채움수학학원
김재현 세종 세종국제고
김지혜 제주 즐거운공부학원
김현지 서울 수능수학 전문컨설턴트
김희철 서울 4공간수학교습소
나은영 노원 메가스터디 러셀
남정민 서울 강동중
마정곤 파주 마샘의 수학교실
민동록 거제 민쌤수학
박경수 서울 제이에스학원
박경호 부산 MATH CLASS
박경후 광주 더브릿지수학학원&위니드수학학원
박규철 광주 강수학학원
박동민 울산 동지수학과학전문학원
박미옥 목포 폴리아학원
박소연 광주 강남청솔기숙학원
박신태 수원 디엘수학전문학원
박은주 수원 은주짱샘 수학공부방
박종범 용인 돌격수학학원
박충현 광주 본수학과학전문학원
박현욱 고양 대치이강학원
박현정 의정부 탑수학 공부방
박현주 대구 매쓰플래너
배지후 세종 해밀수학과학학원
백승봉 서울 대치위더스학원
서가영 용인 누리수학교습소
성정화 서울 LNS 수학학원
송미경 영천 강의하는 아이들
송승용 광주 송승용수학전문학원
송태주 성남 메가스터디 러셀
신아영 거창 신아영수학
신은숙 서울 펜타곤학원
신주영 광주 이룸수학학원
안수호 화성 수능수학 전문컨설턴트
양진철 서울 수학의길
양해영 대치 청출어람학원
양호석 남양주 광동고
엄시온 서울 올마이티캠퍼스
우진형 고양 대치이강
우현석 대전 EBS 수학우수학원
유창훈 충남 시그마학원
유혜원 서울 아드폰테스학원
이경복 강릉 수능수학 전문컨설턴트
이명희 부산 조이수학학원
이보형 성남 매쓰코드학원
이성우 서울 상상미학
이승준 부산 캥거루 수학교실
이승훈 인천 일품수학과학전문학원
이애희 인천 부평해법수학교실
이종숙 강남 센티움학원
이지근 아산 충남외국어고
이현구 서울 성남고
임경수 인천 류수학영어전문학원
장보현 청주 대치동입시학원
장주영 고양 화수고
전수현 서울 전)페르마수학학원
전진우 안양 플랜지에듀학원
정석균 천안 힐베르트수학과학학원
정태성 부산 엘리트 에듀 학원
주종대 서울 강북세일학원
주진돈 안양 평촌 메가스터디학원
천소현 부천 일신중
천현필 서울 미래탐구학원
최유택 서울 미래탐구 오목 캠퍼스
태인 수원 메가스터디 러셀
편순창 서울 알면쉽다연세수학학원
한상원 성남 수학전문 일비충천
한효선 부여 두드림영어수학학원
허재민 안동 성희여고
홍성윤 서울 수능수학 전문컨설턴트
황대연 세종 해밀고
황성관 세종 카이젠프리미엄학원
황유미 김포 대치명인학원
황종선 남양주 클래스원수학학원
황혜숙 창원 명지여고

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
황대윤 서울대 수리과학부

수능 선배들의 비법 전수 – 수험장 생생 체험 소개

긴장되고 떨리는 수험장에서 선배들이
문제를 풀면서 겪은 생생한 체험과 나만의 풀이 비법을
자이스토리 해설편에 수록했습니다.

• 2023년

강 한	서울 배재고 졸(고려대 융합에너지공학과)
권주원	서울 배재고 졸(서울대 정치외교학부)
김보겸	광주서석고 졸(연세대 지구시스템과학과)
김수정	부산국제고 졸(고려대 서어서문학과)
김준서	부산 대연고 졸(부산대 의예과)
김태산	광주서석고 졸(고려대 정치외교학과)
김현서	경기 평택고 졸(서강대 정치외교학과)
나인규	광주 국제고 졸(한양대 경영학과)
명준하	광주서석고 졸(연세대 사회환경시스템공학부)
박서영	부산 해운대고 졸(서울대 심리학과)
박세민	광주 광덕고 졸(서울대 의예과)
장경은	서울 세화여고 졸(고려대 통계학과)
장성욱	부산 대연고 졸(동아대학교 의예과)
정서린	서울 세화여고 졸(서울대 약학과)
조현준	익산 이리고 졸(전북대 의예과)
최윤성	서울 양정고 졸(서울대 공과대학 광역)
홍채연	서울 한영고 졸(고려대 불어불문학과)

• 2022년

강민성	부산 해운대고 졸(성균관대 의예과)
강연욱	서울 한영고 졸(연세대 노어노문학과)
고현웅	광주서석고 졸(전남대 의예과)
공준형	경기 우성고 졸(가톨릭관동대 의예과)
김서윤	경기 우성고 졸(성균관대 글로벌경제학과)
김예리	서울 수명고 졸(고려대 의예과)
김찬우	익산 이리고 졸(전남대 의예과)
김혜윰	경기 숭신여고 졸(서울대 인문대학)
박정빈	익산 이리고 졸(고려대 한국사학과)
박준현	전남 장성고 졸(육군사관학교)
송홍준	광주 국제고 졸(고려대 융합에너지공학과)
양예진	전주 상산고 졸(이화여대 의예과)
오석우	공주 한일고 졸(서울대 의예과)
오연주	전주 솔내고 졸(서강대 사회학과)
이수현	대구 송현여고 졸(고려대 정치외교학과)
장인우	광주 고려고 졸(서울대 인문학부)
전수현	경기 숭신여고 졸(한림대 의예과)
정지호	익산 남성고 졸(경찰대학교)
최준명	서울 양정고 졸(KAIST 전기 및 전자공학부)

2024 응시


곽지훈
서울 한영외고 졸업
– 세계지리


곽태웅
서울 강서고 졸업
– 윤리와 사상


권민재
서울 광영여고 졸업
– 생명과학Ⅰ


김동현
안성 안법고 졸업
– 고3 수학Ⅰ, 고3 확률과 통계


김서현
대전한빛고 졸업
– 지구과학Ⅰ


김수민
광주 금호중앙여고 졸업
– 화학Ⅱ


김신유
익산 남성고 졸업
– 화법과 작문 실전


김아린
대전한빛고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


김용희
화성 화성고 졸업
– 언어와 매체 실전


김지희
광주 국제고 졸업
– 한국지리


김태현
부산 대연고 졸업
– 물리학Ⅰ


노규민
부산 용인고 졸업
– 지구과학Ⅱ


류이레
광주대동고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


문지민
대구 정화여고 졸업
– 생활과 윤리


박주은
대전외고 졸업
– 동아시아사


백혜원
대구남산고 졸업
– 문학 실전


변준서
화성 화성고 졸업
– 고3 수학Ⅰ, 고3 수학Ⅱ


심기현
대구 계성고 졸업
– 화학Ⅰ


오서윤
서울 광문고 졸업
– 고3 수학Ⅱ, 고3 미적분


이준수
익산 남성고 졸업
– 고3 수학Ⅱ, 기하


전성연
부산국제고 졸업
– 사회·문화


조수근
성남 태원고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


조인성
성남 태원고 졸업
– 수능 한국사


천원준
부산 동인고 졸업
– 생명과학Ⅱ


허다현
부산 사직여고 졸업
– 독서 실전

문항 배열 및 구성 [1393제]

❶ 개념 이해 체크를 위한 기본 기출 문제(95제)

필수 개념과 공식을 확인할 수 있는 기출 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초 실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 최신 6개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항 수록(1107제)

- 최근 출제 경향을 파악할 수 있도록 최신 6개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항을 수록하였습니다.
- 2018~1994 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문항 중 새수능 출제 기준에 맞는 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

❸ 경찰대, 삼사 중요 기출 문제 수록(67제)

경찰대, 삼사 기출 문항 중 중요 문항을 선별하여 수록하였습니다.

❹ 새수능 대비를 위한 고품격 수능 기출 변형 문제(124제)

새수능을 대비해서 충분한 문제로 훈련할 수 있도록 수능 기출 변형 문제를 추가 수록하였습니다.

[고3 미적분 수록 문항 구성표]

대비연도	3월	4·5월	6월	7월	9월	10월	수능	합계	비고
2024	8	8	8	8	8	8	8	56	*2025학년도 수능에 적합한 전 문항 수록
2023	8	8	8	8	8	8	8	56	
2022	8	8	8	8	8	8	8	56	
2021	2	6	10	12	12	12	12	66	
2020	25	20	18	16	17	13	15	124	
2019	25	19	17	14	13	14	13	115	
2018	21	18	15	13	11	14	12	104	*수능, 평가원, 학력평가 엄선 수록
2017	22	16	13	14	11	12	10	98	
2016	14	11	14	14	12	12	11	88	
2015	7	6	9	8	12	0	10	52	
2014	8	7	8	6	8	7	10	54	
2013	8	6	10	3	8	7	5	47	
2012	4	8	8	5	9	4	7	45	
2011	2	6	8	3	6	3	6	34	
2010	2	3	7	4	3	2	8	29	
2009이전	6	14	30	6	31	14	43	144	
2022, 2014, 2005 대비 예비 평가								22	
수능 기출 변형 문제								123	
고1/고2 학력평가								13	
경찰대 및 삼사								67	
총 문항 수								1393	

2024학년도 6월, 9월 평가원+수능
미적분 문항 배치표

문항 번호	6월		9월		수능	
	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호
23	미적분	A63	미적분	C35	미적분	C48
24	미적분	F71	미적분	F72	미적분	F66
25	미적분	C65	미적분	H74	미적분	H131
26	미적분	G115	미적분	B70	미적분	I79
27	미적분	G29	미적분	I92	미적분	F84
28	미적분	G161	미적분	H180	미적분	I94
29	미적분	F122	미적분	A115	미적분	B168
30	미적분	B171	미적분	F118	미적분	H162

• 미적분 : 2024 자이스토리 고3 미적분

A 수열의 극한

★ 유형 차례

유형 01 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산

유형 02 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 로그를 포함한 식의 극한값의 계산

중요 유형 03 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서의 미정계수의 결정

유형 04 수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산

유형 05 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 활용

유형 06 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산

유형 07 $\infty-\infty$ 꼴의 극한에서의 미정계수의 결정

유형 08 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 활용

중요 유형 09 등비수열의 수렴 조건

유형 10 등비수열의 극한값의 계산

유형 11 등비수열의 극한에서 미지수 구하기

유형 12 x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수

유형 13 등비수열의 극한과 함수의 연속

유형 14 a_n과 S_n의 관계를 이용한 수열의 극한

유형 15 수열의 극한의 대소 관계

유형 16 삼각함수를 포함한 수열의 극한을 이용한 대소 관계

유형 17 치환을 이용한 수열의 극한

유형 18 수열의 수렴과 발산의 진위 판정

중요 유형 19 좌표평면에서 선분의 길이에 대한 극한

중요 유형 20 좌표평면에서 도형의 넓이에 대한 극한

유형 21 좌표평면에서 여러 가지 극한

유형 22 무한히 반복되는 도형에서의 극한값

★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2024	수능	출제되지 않음	
	9월	유형 11 등비수열의 극한에서 미지수 구하기	✿✿❀
	6월	유형 06 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산	❀❀❀
2023	수능	유형 11 등비수열의 극한에서 미지수 구하기	❀❀❀
	9월	유형 04 수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산	❀❀❀
	6월	유형 06 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산	❀❀❀
2022	수능	유형 01 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산	❀❀❀
	9월	유형 10 등비수열의 극한값의 계산	❀❀❀
	6월	유형 07 $\infty-\infty$ 꼴의 극한에서의 미정계수의 결정	❀❀❀
	예시	유형 09 등비수열의 수렴 조건	❀❀❀

★ 2024 출제 경향 분석

• 이번 수능에서는 출제되지 않았지만 수열의 극한의 성질을 이용하는 문제가 간접적으로 출제되었다. 해마다 간단한 계산 문제가 출제될 수 있으니 정확히 알아두도록 한다.

★ 2025 수능 예측

1. $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴, $\infty-\infty$ 꼴 또는 등비수열의 극한값을 구하는 간단한 문제가 해마다 출제되므로 계산 과정에서 실수하지 않도록 주의하자.
2. 극한의 성질과 수열의 대소 관계를 이용하여 새롭게 정의된 수열의 극한값을 구하는 유형은 수열의 극한의 성질을 종합적으로 정확히 알고 적용할 수 있어야 한다.
3. 좌표평면 위의 그래프에 대한 도형의 길이나 넓이 등을 수열로 나타내서 극한값을 구하는 문제에 대비하기 위해 함수의 그래프와 도형의 성질을 유기적으로 연결하여 해결하는 연습을 충분히 하자.

A 수열의 극한

개념 강의

중요도 ★★★

1 수열의 수렴 · 발산 — 유형 01~02, 06~07, 10, 18

(1) **수렴** : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (단, α는 일정한 값) 예 $a_n = \dfrac{1}{n}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(2) **발산** :
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (양의 무한대로 발산) 예 $a_n = n$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (음의 무한대로 발산) 예 $a_n = -n$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- 진동 (수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.)

예 $a_n = (-1)^n$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$은 -1과 1로 진동한다.

2 극한값의 계산 — 유형 01~09, 15~22

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴

주어진 수열이 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴인데 수렴할 때, (분자의 차수)>(분모의 차수)인 모양은 분자의 최고차항의 계수에 미지수가 존재하는 경우가 대부분이므로 정리한 최고차항의 계수가 0이 되도록 미지수를 정하면 된다.

① (분자의 차수)>(분모의 차수)
: ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.

② (분자의 차수)=(분모의 차수)
: 최고차항의 계수의 비로 수렴한다.[1]

③ (분자의 차수)<(분모의 차수) : 0으로 수렴한다.

(2) $\infty - \infty$ 꼴

(ⅰ) 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.[2]

(ⅱ) 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

출제 2024 6월 모평 23번

★ $\infty - \infty$ 꼴의 근호가 포함된 극한의 계산은 유리화를 통해 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 계산하는 기초적인 문제가 출제되었다.

3 수열의 극한값의 성질[3] — 유형 01~22

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때,

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$(복호동순)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\alpha$(단, c는 상수)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$(단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

4 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산 — 유형 10~22

(1) $r > 1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ (발산)

(2) $r = 1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 1$ (수렴)

(3) $-1 < r < 1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ (수렴)

(4) $r \le -1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$은 진동한다. (발산)

출제 2024 9월 모평 29번

★ 등비수열과 극한이 혼합된 문제로 등비수열의 수렴에 대한 개념을 바르게 알아야 풀 수 있는 고난도 문제가 출제되었다.

5 수열의 극한값의 대소 관계 — 유형 16~18

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때,

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.[4]

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

+개념 보충

❶ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

$f(n)$과 $g(n)$의 차수가 같으면

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \dfrac{(f(n)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(n)\text{의 최고차항의 계수})}$

❷ 유리화

유리화는 근호를 제곱하여 없애는 것으로 곱셈 공식 중에서 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$을 이용한다.

① $\dfrac{A}{\sqrt{B}-C} = \dfrac{A(\sqrt{B}+C)}{B-C^2}$

② $\sqrt{A} - B = \dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$

③ $\dfrac{\sqrt{A}+B}{C} = \dfrac{A-B^2}{C(\sqrt{A}-B)}$

왜 그럴까?

❸ 수열의 극한값의 성질은 두 수열이 모두 수렴할 때만 성립한다. 만약 수렴하지 않는다면 그 성질을 쓸 수 없다.

예를 들면 $a_n = n$, $b_n = \dfrac{1}{n}$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \times 0$이고

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n \times \dfrac{1}{n}\right) = 1$이다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

한걸음 더!

❹ 수열의 극한값의 대소 관계에서 (1)은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이면 $\alpha \le \beta$가 성립한다.
즉, $a_n < b_n$과 같이 등호가 포함되지 않아도 $\alpha \le \beta$에는 등호가 붙는 것에 주의하자.
예를 들어

$a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $b_n = 1 + \dfrac{2}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$로 같다.

1 + 2 + 3 수열의 극한의 성질과 계산

A01 기본 2015실시(A) 3월 학평 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}}$의 값은? (2점)

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

A02 기본 2012대비(나) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{2n^2+n}$의 값은? (2점)

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{3}{2}$
④ $\dfrac{7}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

A03 기본 2011대비(나) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A04 기본 2018실시(나) 4월 학평 22(고3)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}b_n=1$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$의 값을 구하시오. (3점)

4 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

A05 기본 2014대비(A) 6월 모평 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{5\times7^{n+1}+3}{7^n}$의 값은? (2점)

① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

A06 기본 2012대비(나) 수능 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+2}{5^n+3^n}$의 값은? (2점)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

A07 기본 2011대비(나) 수능 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a\times6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=4$일 때, 상수 a의 값은? (2점)

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

5 수열의 극한값의 대소 관계

A08 기본 2006실시(나) 10월 학평 3(고3)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n-1<na_n<2n+4$를 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

❖ 정답 및 해설 002~003p

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

Pass 쉬운 유형, 반복 계산 문제로 패스 하셔도 좋습니다.

1 + 2 + 3 수열의 극한의 성질과 계산

유형 01 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서

(1) (분자의 차수)<(분모의 차수)이면
(극한값)$=0$

(2) (분자의 차수)$=$(분모의 차수)이면
(극한값)$=\frac{\text{(분자의 최고차항의 계수)}}{\text{(분모의 최고차항의 계수)}}$

(3) (분자의 차수)>(분모의 차수)이면
극한값은 존재하지 않는다. (양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산)

tip

1 분모의 차수와 분자의 차수를 비교한다.

2 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

3 $\lim_{n\to\infty}\frac{\text{(상수)}}{n}=0$임을 이용한다.

A09 ❀❀❀ 2022실시 10월 학평 미적분 23(고3)

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}$의 값은? (2점)

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

A10 ❀❀❀ 2022대비 수능 미적분 23(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

A11 ❀❀❀ 2021실시 3월 학평 미적분 23(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

A12 ❀❀❀ Pass 2020실시(가) 10월 학평 1(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{n(9n-5)}{3n^2+1}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

A13 ❀❀❀ 2021대비(가) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

A14 ❀❀❀ 2020실시(가) 4월 학평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-3}{2n^2+7n-9}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

A15
❀❀❀ 2020대비(나) 수능 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

A16
❀❀❀ Pass 2019실시(나) 7월 학평 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-n}{2n^2+1}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

A17
❀❀❀ Pass 2020대비(나) 6월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4n+1}}{2n+5}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

A18
❀❀❀ Pass 2019대비(나) 수능 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-3}{2n^2+5n}$의 값은? (2점)

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

A19
❀❀❀ Pass 2018실시(나) 7월 학평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-6}{n^2+n}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A20
❀❀❀ Pass 2019대비(나) 6월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+1}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

A21
❀❀❀ 2018실시(나) 3월 학평 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{2}\right)$의 값은? (2점)

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

A22
❀❀❀ 2023실시 10월 학평 미적분 23(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{n^2+1}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

A23
❀❀❀ 2023실시 3월 학평 미적분 23(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$의 값은? (2점)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

❖ 정답 및 해설 003~006p

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A190 ★★★ 2015대비(B) 9월 모평 21(고3)

양수 t에 대하여 $\log t$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? (4점)

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

A191 ★★★ 2023실시 3월 학평 미적분 29(고3)

자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. (4점)

A192 ★★★ 2007대비(가) 6월 모평 21(고3)

두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+1}{x^{2n}+2}$, $g(x)=\sin(k\pi x)$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 갖지 않을 때, $60k$의 최댓값을 구하시오. (4점)

A193 ★★★ 2005대비(나) 6월 모평 15(고3)

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$$
$$b_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $a_1=b_1$일 때, $a_n=b_n$

ㄴ. $a_1=0$, $b_1=1$일 때, $a_{n+1}>a_n$

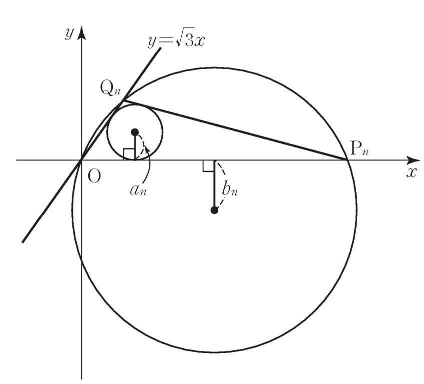
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A194 ★★★ 2014실시(A) 3월 학평 30(고3)

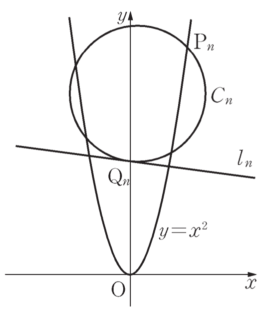
좌표평면 위에 직선 $y=\sqrt{3}x$가 있다. 자연수 n에 대하여 x축 위의 점 중에서 x좌표가 n인 점을 P_n, 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 OP_nQ_n의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리를 a_n, 삼각형 OP_nQ_n의 외접원의 중심에서 x축까지의 거리를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=L$이다. $100L$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.) (4점)



A195 ✱✱✱ 2021실시 3월 학평 미적분 29(고3)

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0,\ 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. (4점)



[1등급 대비+2등급 대비]

A196 ✪ 2등급 대비 2023실시 3월 학평 미적분 30(고3)

함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2\le|x|<2k$일 때,
>
> $$g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$$
>
> 이다. (단, k는 자연수이다.)

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. (4점)

A197 ✪ 1등급 대비 2021실시 4월 학평 미적분 30(고3)

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}\ (a,\ b\text{는 양의 상수})$$

라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수를 c_m이라 할 때, $c_k=5$인 자연수 k가 존재한다. $k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)$의 값을 구하시오. (4점)

❖ 정답 및 해설 069~075p

경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점 + 4점 + 5점]

A203

2019대비 경찰대 13(고3)

자연수 p에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n=\dfrac{(n!)^4}{(pn)!}$이다. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\alpha$($\alpha$는 0이 아닌 상수)일 때, $\log_2\alpha$의 값은? (4점)

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

A204

2020대비 경찰대 5(고3)

자연수 k에 대하여 $a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}}{5^n k+4k^{n+1}}$이라 할 때, $\sum\limits_{k=1}^{10}ka_k$의 값은? (4점)

① 16 ② 20 ③ 21
④ 25 ⑤ 50

A205

2018대비 경찰대 5(고3)

10 이하인 세 자연수 a, b, c에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n+b^n}{a^{2n}+b^{2n}}=1$$

을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는? (4점)

① 5 ② 7 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

A206

2019대비 경찰대 19(고3)

함수

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(x^{2n}-x^{-2n})}{x^{2n}+x^{-2n}} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 방정식 $f(x)=(x-k)^2$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 실수 k의 범위는 $a<k<b$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (5점)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}$

A207

2017대비 경찰대 10(고3)

좌표평면에서 직선 $y=nx$ (n은 자연수)와 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 A_n, B_n이라 하자. 원점 O와 A_n의 중점을 P_n이라 하고, $\overline{A_nP_n}=\overline{B_nQ_n}$을 만족시키는 직선 $y=nx$ 위의 점을 Q_n이라 하자. (단, Q_n은 원 외부에 있다.) 점 Q_n의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}|na_n+b_n|$의 값은? (4점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

❖ 정답 및 해설 080~083p

1회 미적분 실전 기출 모의고사

2025학년도 수능 대비 1

범위: 미적분 전단원

- 문항 수 8개
- 배점 26점
- 제한시간 40분

5지선다형

1회 01

2010대비(나) 수능 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{2n^2+1}$의 값은? (2점)

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

1회 02

2007대비(나) 9월 모평 12(고3)

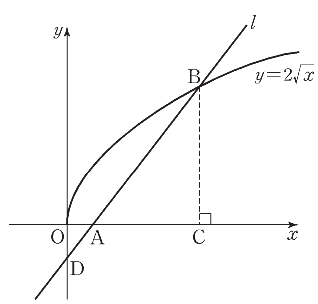
수열 $\{a_n\}$은 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. 수렴하지 않는 급수는? (3점)

① $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$　② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$　③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$　④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$　⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$

1회 03

2014대비(B) 6월 모평 8(고3)

점 $A(1, 0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 직선 l이 y축과 만나는 점을 D라 하자. 점 $B(t, 2\sqrt{t})$에 대하여 삼각형 BAC의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f'(9)$의 값은? (3점)



① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$　④ 4　⑤ $\frac{13}{3}$

1회 04

2004실시(가) 10월 학평 27(고3)

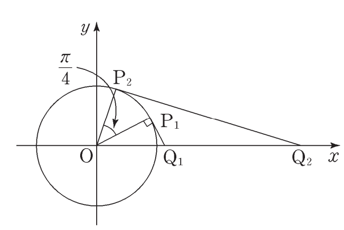
자연수 n에 대하여 구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선 $y=\frac{1}{n}\sin x$, $y=\frac{1}{n+1}\sin x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은? (3점)

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $\frac{\pi}{2}$　⑤ π

1회 05

2007대비(가) 수능 28(고3)

그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P_1에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_1이라 할 때, 삼각형 P_1OQ_1의 넓이는 $\frac{1}{4}$이다. 점 P_1을 원점 O를 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시킨 점을 P_2라 하고, 점 P_2에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_2라 하자. 삼각형 P_2OQ_2의 넓이는? (단, 점 P_1은 제1사분면 위의 점이다.) (3점)



① 1　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2

A 수열의 극한

기본 기출 문제

A01 정답 ② *$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 92%]

(**정답 공식:** 분모, 분자를 n으로 나눠서 $\frac{1}{\infty}\to 0$을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}}$의 값은? (2점) 단서 무리식이 있다고 무조건 유리화하는 게 아니야. 이 문제는 유리화하지 않고 바로 구할 수 있어.

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

1st 분모, 분자를 모두 n으로 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{8}{1}=8$$

분모, 분자에 $\frac{1}{n}$을 곱한 거야. $\frac{1}{n}$을 근호 안으로 넣게 되면 $\frac{1}{n^2}$이 되는 것에 주의하자.

A02 정답 ③ *$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 95%]

(**정답 공식:** 분모, 분자를 n^2으로 나눠서 $\frac{1}{\infty}\to 0$을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}$의 값은? (2점) 단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나눠서 구해.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

1st $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모와 분자를 분모의 최고차항으로 각각 나눠봐.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}}_{\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\text{이지?}}=\frac{3}{2}$$

쉬운 풀이: 분모, 분자의 최고차항의 계수의 비로 극한값 구하기

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 분모와 분자의 차수가 같으므로 최고차항의 계수의 비로 구하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}=\frac{3}{2}$$

A03 정답 ② *$\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 90%]

(**정답 공식:** 근호가 포함된 $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 유리화해본다.)

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)$의 값은? (2점) 단서 무리식이 포함된 $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 무리식을 유리화해서 극한값을 구해.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 무리식을 포함한 수열의 극한은 유리화하자.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n+11}-n)(\sqrt{n^2+4n+11}+n)}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+11-n^2}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+11}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$

분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 나누어 계산해.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{11}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{11}{n^2}}+1}=\frac{4}{2}=2$$

A04 정답 4 *수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산 [정답률 93%]

(**정답 공식:** $n\to\infty$일 때 수렴하는 두 수열의 합 또한 수렴한다.)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}b_n=1$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$의 값을 구하시오. (3점)
단서 수열의 극한의 성질을 이용하여 계산하면 돼.

1st 수열의 극한의 성질을 이용하여 계산해.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=2+2\times1=4$$

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$\lim_{n\to\infty}ka_n=k\lim_{n\to\infty}a_n$ (단, k는 상수)
$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

A05 정답 ⑤ *등비수열의 극한값의 계산 [정답률 94%]

(**정답 공식:** 분모, 분자를 7^n으로 나눠서 $|r|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times7^{n+1}+3}{7^n}$의 값은? (2점) 단서 분모, 분자를 7^n으로 각각 나누고, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$임을 이용해.

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

1st 7^n으로 분모, 분자를 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times7^{n+1}+3}{7^n}=\lim_{n\to\infty}\left(5\times7+\frac{3}{7^n}\right)=35$$

분모, 분자에 r^n을 포함한 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱으로 분자와 분모로 나누어 계산해.

A06 정답 ④ *등비수열의 극한값의 계산 [정답률 91%]

(**정답 공식:** 분모, 분자를 5^n으로 나눠서 $|r|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+2}{5^n+3^n}$의 값은? (2점) 단서 분모에서 밑이 가장 큰 5^n으로 분모, 분자를 나누어 극한값을 계산하자.

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

1st 밑이 가장 큰 5^n으로 분모, 분자를 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+2}{5^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(5+\frac{2}{5^n}\right)}{5^n\left\{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+2\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=5$$

$\frac{5^{n+1}}{5^n}=\frac{5\cdot5^n}{5^n}=5$

A 07 정답 ③ *등비수열의 극한에서의 미정계수 ···· [정답률 81%]

(**정답 공식:** 분모, 분자를 6^n으로 나눠서 $|r|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$임을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=4$일 때, 상수 a의 값은? (2점)

단서 r^n이 포함된 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이니까 분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 6^n으로 분모, 분자를 각각 나눠서 극한값이 4가 되도록 a의 값을 구해.

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

1st 6^n으로 분모, 분자를 각각 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6a-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}=6a=4$$

$0<\frac{5}{6}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$

$\therefore a=\frac{2}{3}$

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴·발산 개념·공식

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)
② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)
③ $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)
④ $r\le-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n$은 진동 (발산)

A 08 정답 ② *수열의 극한의 대소 관계 ············ [정답률 84%]

(**정답 공식:** 부등식의 각 변을 n으로 나눠서 a_n의 범위를 찾은 후 부등식에 극한을 취해서 극한값을 구한다.)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n-1<na_n<2n+4$를 만족할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? (2점)

단서 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 구해야 하니까 주어진 부등식을 $x_n<a_n<y_n$ 꼴로 고친 다음 각 변에 극한을 취해.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 주어진 부등식을 변형해 보자.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n-1<na_n<2n+4$를 만족하므로 각 변을 자연수 n으로 나누면

$$\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{2n+4}{n}$$

각 변에 극한을 취하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}\le\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}$$

$a_n<b_n$이더라도 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$인 경우가 있으므로 $a_n<b_n$의 양변에 극한을 취하면 $\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n$이야.

2nd 극한값의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구해.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}=2$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$야.

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

A 09 정답 ① *$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 ··············· [정답률 92%]

(**정답 공식:** 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은 $a_n=a+(n-1)d$이다.)

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}$의 값은? (2점)

단서 첫째항과 공차가 주어졌으니까 등차수열의 일반항 a_n을 구할 수 있어.

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

1st 등차수열의 일반항을 구하여 주어진 극한값을 계산하자.

첫째항이 1이고, 공차가 2인 등차수열의 일반항 a_n을 구하면

$a_n=1+2(n-1)=2n-1$

[등차수열]
첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항
$a_n=a+(n-1)d$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$임을 이용한 거야.

A 10 정답 ⑤ *$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 ··············· [정답률 95%]

(**정답 공식:** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$의 값은? (2점)

단서 분모, 분자에 각각 n을 곱하여 극한값을 계산하자.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 분모, 분자에 n을 곱하여 극한값을 계산하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=\frac{5+0}{1-0}=5$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

다른 풀이: 분모, 분자에 각각 n^3을 곱하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 바꾸어 극한값 구하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{n^2-2}=5$$

분모, 분자에 각각 n^3을 곱하면 분자, 분모가 모두 다항식이고 차수가 같게 돼.

양예진 이화여대 의예과 2022년 입학 · 전북 상산고 졸

미적분의 시작을 알리는 첫 문항! 다행히 기출에서 많이 출제되던 수열의 극한값을 계산하는 문항이라 가볍게 선택 과목을 시작할 수 있었지. 가장 중요한건 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이라는 걸 알고 있어야 한다는 거야. 분모, 분자에 각각 n을 곱하면 0으로 수렴하는 항과 상수가 되는 항들이 구분되겠지? 어떤 항들이 0으로 수렴하게 되는지 파악하는 연습을 하면 가볍게 풀 수 있는 문제였어.

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

C 110 정답 ③ *지수함수와 로그함수의 극한의 진위 판정 [정답률 31%]

(정답 공식: $y=a^x$, $y=b^x$, $y=\log_a x$, $y=\log_b x$의 그래프를 그려 비교한다.)

$a>0$, $b>0$, $a\neq1$, $b\neq1$일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $1<a<b$이면 $x>1$인 모든 x에 대하여 $f(x)>1$이다.

ㄴ. $b<a<1$이면 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이다.

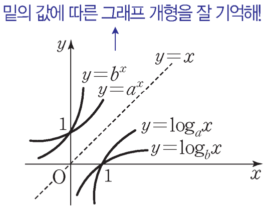
ㄷ. $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=\log_a b$ 단서 그래프의 개형을 그리고 참, 거짓을 따져봐.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 그래프를 적절히 활용하자.

주의 지수함수, 로그함수는 밑의 범위에 따라 그래프 개형이 달라진다는 걸 기억해.

밑의 값에 따른 그래프 개형을 잘 기억해!



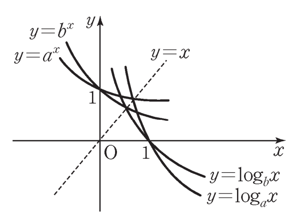
ㄱ. $1<a<b$이고 $x>1$이면 그림과 같이

$1<a^x<b^x$, $0<\log_b x<\log_a x$

즉, $a^x+\log_b x<b^x+\log_a x$이므로

$f(x)=\dfrac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}>1$ (참)

ㄴ. $b<a<1$이면 그림과 같이



$\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\lim\limits_{x\to\infty}b^x=0$이고

$\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\lim\limits_{x\to\infty}\log_b x=-\infty$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{b^x}{\log_b x}+\dfrac{\log_a x}{\log_b x}}{\dfrac{a^x}{\log_b x}+1}$$

$x\to\infty$이고, $0<b<1$, $0<a<1$이면 $a^x\to0$, $b^x\to0$이므로 미리 0을 대입하고 계산해도 돼.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{b^x}{\log_b x}+\dfrac{\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}{\log_b x}}{\dfrac{a^x}{\log_b x}+1}$$

$\log_a x$를 밑변환 공식을 이용하여 변형한 거야.

$=\dfrac{1}{\log_b a}=\log_a b$ (거짓) $\to$ $\log_a b=\dfrac{\log_x b}{\log_x a}$, $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

2nd ㄴ과 같은 방법으로 ㄷ을 결정하자.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0+}a^x=\lim\limits_{x\to0+}b^x=1$이고

$x\to0+$일 때, $\log_a x$, $\log_b x$는 ∞ 또는 $-\infty$로 발산하므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\dfrac{b^x}{\log_b x}+\dfrac{\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}{\log_b x}}{\dfrac{a^x}{\log_b x}+1}=\log_a b \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

C 111 정답 ⑤ *지수함수의 연속성 [정답률 39%]

(정답 공식: $x=1$에서 $f(x)$가 연속이기 위한 조건과 x의 범위에 따라 달라지는 $g(f(x))$의 좌, 우극한 값을 고려한다.)

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<1) \\ -3x+4 & (x\geq1)\end{cases},\ g(x)=2^x+2^{-x}$$

에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (4점) 단서 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)$가 불연속인 x의 값을 확인해야 해.

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

1st 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$를 만족시켜야 하지?

함수 $f(x)$는 $x=1$에서만 불연속이 될 가능성이 있고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속인지 알아야 한다.

함수 $y=(g\circ f)(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(a)$

$x=1$에서의 연속성만 확인하면 돼.

주의 합성함수의 연속성을 조사할 때는 합성된 각각의 함수 중 불연속일 가능성이 있는 x의 값에서 합성함수의 연속성을 조사하면 돼.

즉, $g(f(1))=\lim\limits_{x\to1}g(f(x))$가 성립해야 한다.

$f(1)=-3\times1+4=1$이므로 합성함수 $g(f(x))$의 $x=1$에서의 함숫값은

$g(f(1))=g(1)=2^1+2^{-1}=\dfrac{5}{2}$ ⋯ ㉠

합성함수 $g(f(x))$의 $x=1$에서의 우극한값은 $x\geq1$에서

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1-$이므로 $\lim\limits_{x\to1+}g(f(x))=\lim\limits_{t\to1-}g(t)=2^1+2^{-1}=\dfrac{5}{2}$ ⋯ ㉡

합성함수 $g(f(x))$의 $x=1$에서의 좌극한값은 $x<1$에서

(i) $a\geq0$일 때, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=a-$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}g(f(x))=\lim\limits_{t\to a-}g(t)=2^a+2^{-a}$

(ii) $a<0$일 때, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=a+$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}g(f(x))=\lim\limits_{t\to a+}g(t)=2^a+2^{-a}$

(i), (ii)에 의하여 $\lim\limits_{x\to1-}g(f(x))=2^a+2^{-a}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$2^a+2^{-a}=\dfrac{5}{2}$

2nd $2^a=X\ (X>0)$로 치환하고 지수방정식을 풀어 a의 값을 구하자.

지수를 치환할 때 양수로 두어야 해.

이때, $2^a=X\ (X>0)$라 하면 $X+\dfrac{1}{X}=\dfrac{5}{2}$에서

$2X^2-5X+2=0$

$(X-2)(2X-1)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=\dfrac{1}{2}$

$X=2$에서

$2^a=2$ $\quad\therefore a=1$

$X=\dfrac{1}{2}$에서

$2^a=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은

$1\times(-1)=-1$

C 112 정답 107

1등급 대비 [정답률 6%]

*함수의 미분불가능한 점을 이용하여 새로운 함수 추론하기 [유형 15]

$x\ge0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & (0\le x\le1)\\ 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 & (1<x\le2)\end{cases}$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$이다.

$x>0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

단서1 자칫 $g(x)=2f'(x)$라 생각하기 쉽지만, 임의의 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$의 $x=n$에서의 미분가능성을 보장할 수 없으니 주의해야 해.

라 할 때,

단서2 $t\to0+$이므로 함수 $g(x)$의 $x=n$에서의 우극한값에서 좌극한값을 빼야 해.

$$\lim_{t\to0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

왜 1등급? x의 값의 범위에 따라서 달라지는 함수 $g(x)$를 구하고, 자연수 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 가능한 n의 값을 모두 찾는 문제이다. 주어진 조건을 바탕으로 유도한 $f(x)$의 식을 이용하여 $g(x)$를 구할 때 $f(x)$가 미분불가능한 지점을 고려해주어야 하므로 어려웠다.

단서+발상

단서1 x가 자연수인 부분을 제외하고는 $g(x)=2f'(x)$를 만족한다. 자연수 x가 짝수일 때와 홀수일 때로 경우를 나누어 $g(x)$를 구해본다. (발상)

단서2 자연수 n이 홀수일 때와 짝수일 때에 따라서 $g(n)$의 값과 $\lim_{t\to0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}$의 값이 달라지므로 홀수인 n과 짝수인 n을 각각 구해 문제를 해결한다. (해결)

(주의) x의 값의 범위에 따라서 $g(x)$의 값이 달라지기 때문에 $\lim_{t\to0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)$을 계산할 때 잘못된 값을 대입하지 않도록 주의한다.

핵심 정답 공식: 범위에 따라 함수 $f'(x)$를 구하고 새롭게 정의된 함수 $g(x)$의 극한을 이용하여 조건을 만족시키는 미정계수를 구한다.

[문제 풀이 순서]

1st 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구해.

조건 (나)에서 임의의 양의 실수 a에 대하여

$$f(x+2a)=-\frac{1}{2}f(x+2(a-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2f(x+2(a-2))$$
$$=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^af(x)\ \cdots\ ㉠$$

조건 (가), (나)에서 임의의 자연수 b에 대하여 함수 $f(x)$는

$2b-2\le x\le 2b-1$일 때

조건 (가)에서 등호가 포함된 범위를 잘 살펴보고 이에 따라 길이가 1인 두 개의 구간으로 나누어서 생각해야 해.

$$f(x)=f(x-2(b-1)+2(b-1))$$

$2(b-1)$를 빼고 더한 다음 ㉠ 식의 x에 $x-2(b-1)$을, a에 $b-1$을 대입하면 돼.

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{b-1}f(x-2(b-1))\ (\because ㉠)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{b-1}\{2^{x-2(b-1)}-1\}\ (\because \text{조건 (가)})$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{b-1}\{2^{-2(b-1)}\times2^x-1\}$$

$2b-1<x\le2b$일 때

$$f(x)=f(x-2(b-1)+2(b-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{b-1}f(x-2(b-1))$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{b-1}\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2(b-1)}-1\right\}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{b-1}\left\{2^{2b}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right\}$$

$2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x\times(2^{-1})^{-2(b-1)}$
$=2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x\times2^{2b-2}$
$=2^{2b}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$

또한, 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$2b-2<x<2b-1$에서

함정 미분법을 이용하여 도함수를 구할 때 구간의 양 끝에 있는 등호는 반드시 제외해야 함을 명심하자.

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{b-1}\times2^x\times2^{-2(b-1)}\ln2\ \cdots\ ㉡$$

$2b-1<x<2b$에서

$$f'(x)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{b-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x\times2^{2b}\ln2\ \cdots\ ㉢$$

2nd 범위에 따라 함수 $g(x)$를 구해.

자연수 m에 대하여

① $2m-2<x<2m-1$ 또는 $2m-1<x<2m$일 때

$$g(x)=\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

$h\to0+$일 때 $x+h$, $x-h$의 함수식 구간이 같아.

$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)-f(x-h)+f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right\}$$
$$=2f'(x)$$

② $x=2m-1$일 때

$h\to0+$일 때 $2m-1+h$, $2m-1-h$의 함수식 구간이 달라.

$$g(2m-1)=\lim_{h\to0+}\frac{f(2m-1+h)-f(2m-1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left\{2^{2m}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1+h}-1\right\}}{h}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\{2^{-2(m-1)}\times2^{2m-1-h}-1\}}{h}\right]$$

$2^{2m}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}=2^{2m}\times2^{-2m}=1$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+h}$만 남아.

$2^{-2m}\times2^{2m}=1$이므로 $2^{2-1-h}=2^{1-h}$만 남아.

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\lim_{h\to0+}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+h}-2^{1-h}}{h}=0$$

분자가 $2^{1-h}-2^{1-h}=0$이므로 극한값도 0이야.

③ $x=2m$일 때

$$g(2m)=\lim_{h\to0+}\frac{f(2m+h)-f(2m-h)}{h}$$

$h\to0+$일 때 $2m+h$, $2m-h$의 함수식 구간이 달라.

$$=\lim_{h\to0+}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^m(2^{-2m}\times2^{2m+h}-1)}{h}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left\{2^{2m}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-h}-1\right\}}{h}\right]$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^m\times\lim_{h\to0+}\frac{2^h-1+2(2^h-1)}{h}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^m\times\lim_{h\to0+}\frac{3(2^h-1)}{h}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^m\times3\ln2$$

$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

3rd 문제의 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구해.

문제의 조건을 만족시키는 자연수 n의 값을 n이 홀수일 때와 n이 짝수일 때로 나누어 살펴보자.