## 문제 유형을 촘촘히 분류해 개념을 적용시키면
## 수학이 쉬워집니다!

개념을 익히고 그 개념들을 단계별로
연결하여 파악하는 것이 수학 공부의 기본입니다.
만약 개념 이해 과정을 소홀히 하고, 문제만 반복하여 푼다면
개념 사이의 연계성을 파악할 수 없어
오랜 시간 공부해도 성적을 올릴 수 없습니다.

자이스토리 고3 수학은
최신 수능, 평가원, 학력평가 및 경찰대, 삼사 기출 문제를 정밀하게 분석해
개념의 연계성에 따라 문제 유형을 촘촘히 분류하였습니다.
따라서 유형별 기출 문제를 순서대로 차근차근 풀어가면
개념의 연계성이 명쾌하게 파악되어서 문제 풀이가 쉬워집니다.

또한, 자이스토리의 정확하고 자세한 단계별 해설과 풍부한 보충 첨삭은
문제를 풀어가면서 개념을 알맞게 적용하는 방법을
자연스럽게 익힐 수 있습니다.

이 책의 마지막 페이지를 넘길 때쯤 여러분은 이미
수학 1등급에 도달해 있을 것입니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 –

# 수능 1등급 완성 학습 계획표 [34일]

| Day | 문항 번호 | 틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기 | 날짜 | 복습 날짜 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A 01~58 | | 월 일 | 월 일 |
| 2 | 59~104 | | 월 일 | 월 일 |
| 3 | 105~161 | | 월 일 | 월 일 |
| 4 | 162~189 | | 월 일 | 월 일 |
| 5 | 190~203 | | 월 일 | 월 일 |
| 6 | B 01~39 | | 월 일 | 월 일 |
| 7 | 40~73 | | 월 일 | 월 일 |
| 8 | 74~106 | | 월 일 | 월 일 |
| 9 | 107~129 | | 월 일 | 월 일 |
| 10 | C 01~42 | | 월 일 | 월 일 |
| 11 | 43~93 | | 월 일 | 월 일 |
| 12 | 94~130 | | 월 일 | 월 일 |
| 13 | 131~146 | | 월 일 | 월 일 |
| 14 | D 01~50 | | 월 일 | 월 일 |
| 15 | 51~90 | | 월 일 | 월 일 |
| 16 | 91~127 | | 월 일 | 월 일 |
| 17 | 128~154 | | 월 일 | 월 일 |
| 18 | E 01~44 | | 월 일 | 월 일 |
| 19 | 45~79 | | 월 일 | 월 일 |
| 20 | 80~114 | | 월 일 | 월 일 |
| 21 | 115~146 | | 월 일 | 월 일 |
| 22 | F 01~43 | | 월 일 | 월 일 |
| 23 | 44~85 | | 월 일 | 월 일 |
| 24 | 86~124 | | 월 일 | 월 일 |
| 25 | 125~156 | | 월 일 | 월 일 |
| 26 | 157~180 | | 월 일 | 월 일 |
| 27 | 181~208 | | 월 일 | 월 일 |
| 28 | G 01~41 | | 월 일 | 월 일 |
| 29 | 42~76 | | 월 일 | 월 일 |
| 30 | 77~107 | | 월 일 | 월 일 |
| 31 | 108~138 | | 월 일 | 월 일 |
| 32 | 모의 1회 | | 월 일 | 월 일 |
| 33 | 모의 2회 | | 월 일 | 월 일 |
| 34 | 모의 3회 | | 월 일 | 월 일 |

- 나는 ____________________대학교 ____________________학과 ____________학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

# 자이스토리 고3 수학 Ⅱ 활용법+$\alpha$


## ❶ 개념 · 공식 학습 후 수능 출제 경향 확인!

- 각 단원에 필수적으로 알아야 하는 핵심 개념과 관련된 보충 설명을 꼼꼼히 살펴보세요.
- 최신 출제 경향을 파악하고 앞으로의 수능을 예측하세요.

## ❷ 수능과 모의고사에 나오는 모든 유형을 촘촘히 섭렵하자!

- 촘촘히 분류된 모든 유형을 확인하고 유형별 풀이 비법을 확인하세요.
- 유형 안에서 난이도 순으로 다시 분류된 문제를 보면서 각 유형에서 쉬운 문제는 어떻게 출제되는지, 고난도 문제는 어떻게 출제되는지 확인하세요.

## ❸ 부족한 유형을 다시 한 번 점검하자!

- 자신에게 부족한 유형을 찾아낸 후 부족한 부분을 여러 번 반복 학습해 보세요.
- 부족한 유형에 대한 특징과 핵심 개념을 다시 한 번 확인한 후 유형 해결 요령을 터득하세요.

## ❹ 1등급을 좌우하는 고난도 문항을 완벽하게 마스터하자!

- 1등급 대비 문제는 복합적인 개념을 묻기 때문에 여러 개념을 정확히 파악한 뒤 종합적 사고를 하세요.
- 1등급 문제의 핵심이 되는 단서로 조건을 파악하고 조건을 이용하여 접근하는 방법을 발상해서 문제 풀이에 적용하는 방법을 익히세요.

## ❺ 쉽게 이해되는 입체 첨삭 해설을 공부해서 다시는 틀리지 말자!

- [첨삭 해설]과 [실수, 함정, 주의 첨삭]을 따라가다 보면 풀이 과정에서 놓치기 쉬운 부분이나 이해가 어려운 부분을 쉽게 풀어 주어 해설을 완벽하게 이해할 수 있어요.
- 쉬운 풀이, 톡톡 풀이, 다른 풀이를 꼼꼼히 읽어서 시간을 줄일 수 있는 풀이법을 찾아보세요.
- 문제 해결 과정에 사용된 개념 · 공식을 다시 한 번 확인하여 놓치고 있었던 내용이 없는지 확인하세요.
- 수능 핵강으로 문제에 대한 개념을 완벽하게 이해하세요.

## ❻ 오답노트를 만들어 100% 활용하자!

- 반드시 오답노트를 만들어 보세요. 해설에 제시된 단서 또는 접근법도 같이 기록하여 풀어 봤던 문제는 다시는 틀리지 않도록 여러 번 풀어보세요.
- 시간이 지난 후 오답노트를 읽어 보며 해설의 아이디어를 바탕으로 풀이를 따라가 보고 자신만의 풀이도 추가해 보세요.

---

**단원별 핵심 문제 + 최신 · 중요 문제**

**동영상 강의 QR코드**

1. 개념 강의로 핵심 개념을 이해하고 개념이 문제에 적용되는 것을 확인해 보세요!
2. 동영상 문제 풀이로 해설을 좀 더 빠르게 이해할 수 있어요!
3. 해설의 풀이를 읽어보고 동영상 강의를 시청하면 더 쉽게 이해될 거예요!
4. 풀기 어려운 고난도 문제는 동영상 강의를 여러 번 반복 시청해 보세요!

# 차 례 [총 133개 유형 분류]

다른 풀이, 쉬운, 톡톡 풀이 대폭 강화

1등급 문제 단서, 발상, 적용 단계별 해설

## I 함수의 극한과 연속

### A 함수의 극한 – 20개 유형 분류



### B 함수의 연속 – 13개 유형 분류



## II 미분

### C 미분계수와 도함수 – 17개 유형 분류



### D 도함수의 활용 (1) – 24개 유형 분류



### E 도함수의 활용 (2) – 18개 유형 분류

## Ⅲ 적분



## Special 수학Ⅱ 실전 기출 모의고사



개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

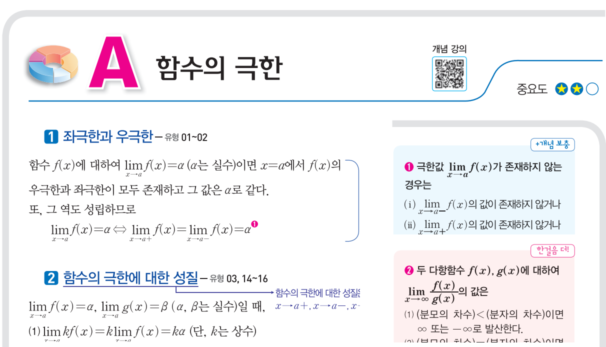
**셀프수학**

# 개념 총정리 + 촘촘한 유형 분류 기출 문제 = 수능 1등급

## 1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

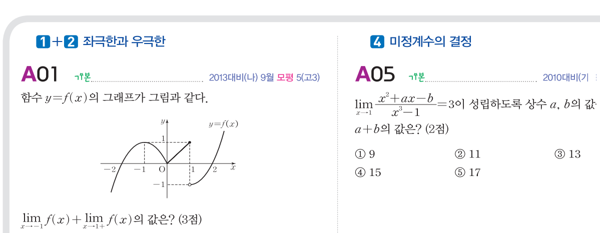
가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 제공되는 강의와 보충 설명으로 개념과 공식의 이해를 돕고 실전 문제에서 적절하게 개념을 사용할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

- **중요도** ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요도 제시
- +개념 보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2024학년도 수능과 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시




## 2 기본 기출 문제 – 쉬운 기출 문제로 개념 점검

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 기본 개념과 공식을 확인하는 기출 문제를 수록하였습니다. 이는 개념 이해를 강화하고 응용 문제를 풀 수 있는 초석을 쌓는 과정입니다.



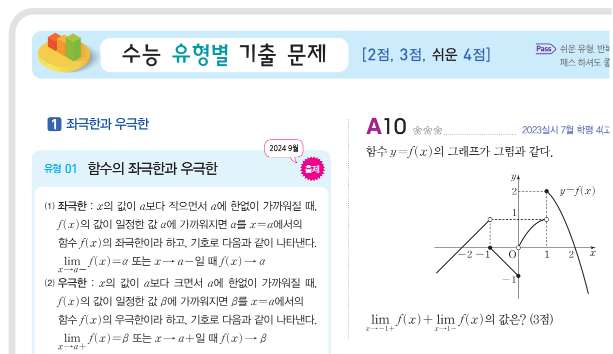

## 3 경찰대·삼사 기출 문제 – 최신 중요 기출 문제 수록

경찰대 기출과 삼사 기출 문제 중 수능 출제 기준에 맞는 중요 문항을 엄선하여 수록하였습니다.


## 4 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하여 유형, 개념, 난이도 순서대로 문항을 배열하였습니다. 기출 문제가 부족한 단원이나 유형은 고품격 수능 기출 변형 문제를 출제하여 추가 수록하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- **QR코드** : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.




- **유형 분류** : 출제 – 2024 수능, 평가원에서 출제된 유형
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형

- **난이도** : ★☆☆ – 기본 문제　★★☆(1) – 중급 문제
  ★★☆ – 중상급 문제　★★★ – 상급 문제
- Pass : 간단한 계산 문제로 패스해도 좋은 문제

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2024대비 수능 1(고3) : 2023년 11월에 실시한 수능
  - 2024대비 6월 모평 2(고3) : 2023년 6월에 실시한 평가원
  - 2023실시 4월 학평 3(고3) : 2023년 4월에 실시한 학력평가
  - 2024대비 9월 모평 2(고3) : 2023년 9월에 실시한 평가원

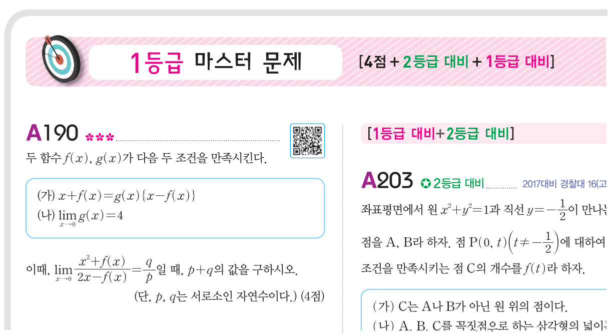
## 5 수학 Ⅱ 실전 기출 모의고사

기출 문제로 구성한 3회의 실전 모의고사입니다.
수능을 대비하여 실력을 점검하는 데 큰 도움이 될 것입니다.

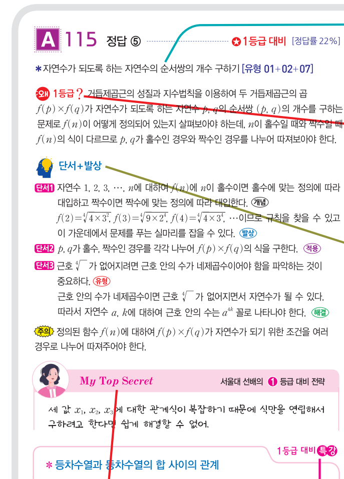
## 6 1등급 마스터 문제 – 1등급 대비, 2등급 대비, 4점 문제 수록

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 키워서 반드시 수학 1등급에 도달할 수 있습니다.

- ✱✱✱ – 상급 문제
- 2등급 대비 – 정답률이 21~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- 1등급 대비 – 정답률이 20% 이하인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제




## 7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설




**문제 분석**
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

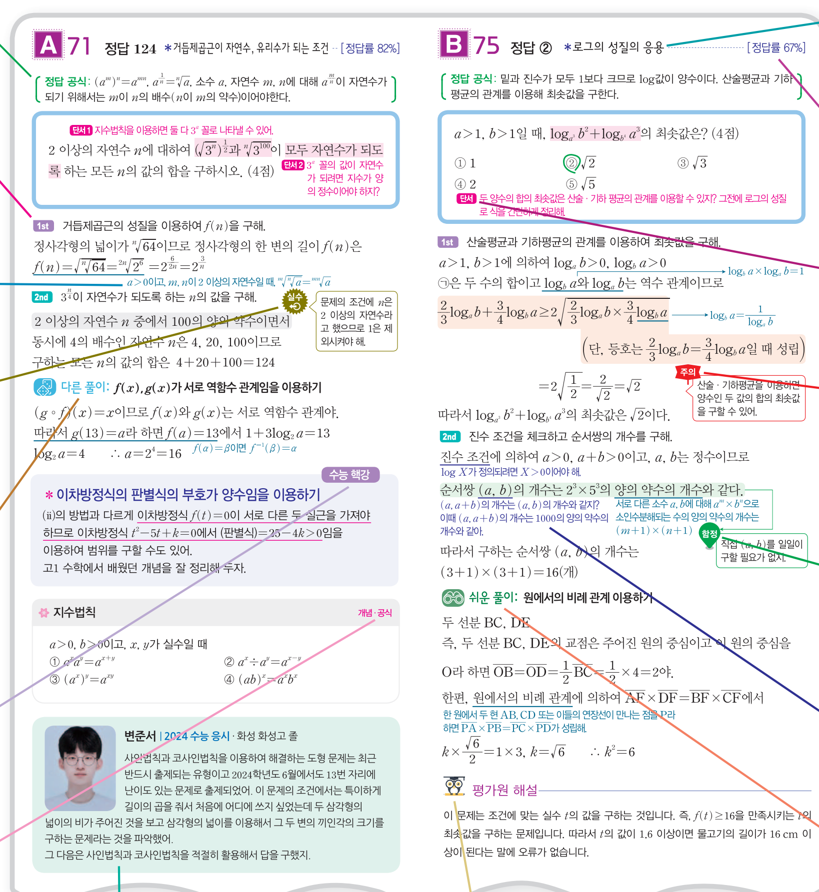
**왜 1등급, 왜 2등급**
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

**단서+발상**
단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

**My Top Secret**
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

**1등급 대비 특강**
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

## 8 입체 첨삭 해설!




**정답 공식**
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

**단계별 명쾌 풀이**
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

**해설 적용 공식**
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

**실수**
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

**다른 풀이**
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

**수능 핵강**
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

**개념 공식**
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

**생생체험**
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

**평가원 해설**
오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.

**출제 개념**
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

**정답률**
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

**핵심 단서**
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

**주의**
풀이 과정에서 주어진 조건을 빠뜨리거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

**함정**
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

**보충 설명**
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

**쉬운 풀이, 톡톡 풀이**
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

# 집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

## [ 집필진 ]

김덕환 대전 대성여고
김대식 경기 하남고
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 안양 안양외고
박숙녀 아산 충남삼성고
배수나 서울 가인아카데미
신건률 대치 오름학원
신명선 안양 신성고
신현준 안양 신성고
윤장노 안양 신성고
윤혜미 서울 세종과학고
이종석 저) 일등급 수학
이창희 서울 THE 다원수학
위경아 서울 강남대성기숙의대관
장광걸 김포 김포외고
장경호 오산 운천고
장철희 서울 보성고
전경준 서울 풍문고
조승원 수원 경기과학고
지강현 안양 신성고
홍지언 부산 피보나치 수학
홍지우 안양 평촌고
황광희 경기 시흥고
수경 수학 컨텐츠 연구소

### [다른 풀이 집필]

강성운 광주 더오름학원
김준호 대구 유신학원
김현지 하남 수능수학 전문컨설턴트
서봉원 충남 SM수학교습소
어성웅 수원 어쌤수학학원
이태경 서울 오산고등학교
장영환 제주 제로링수학교실
정지민 청주 스텝업수학

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널
셀프수학

## [ 감수진 ]

강마루 이천 이강학원
강명식 수원 매쓰온수학학원
강수민 부산 강하이수학학원
강은녕 서울 탑수학학원
김경자 대전 펜타뮤수학
김남환 광주 살레이오고등학교
김대한 인천 학산학원
김도연 구미 그릿수학학원
김리안 인천 수리안학원
김미정 대구 일등수학학원
김민영 군포 상승수학
김민정 창원 스키마수학
김복현 부천 시온고등학교
김봉조 울산 퍼스트클래스 수학영어전문학원
김성환 밀양 밀양고등학교
김수영 대구 봉덕김쌤수학학원
김수진 광주 영재사관학원
김연주 서울 목동쌤올림수학학원
김용형 세종 QE영어수학학원
김정구 인천 3030영수학원
김정섭 서울 로고스 학원
김정식 용인 게이트학원
김주현 광주 현스카이학원
김주희 인천 탑엘리트영수학원
김 준 인천 쭌에듀학원
김지송 서울 잠신고등학교
김지현 수원 엠코드수학학원
김태성 광주 김태성수학
김해성 거제 AHHA수학(아하수학)
문정연 광주 풍암의 정석
문정탁 대구 STM수학학원
박경문 전주 해성중학교
박규진 김포 하이스트 학원
박영언 의정부 멘토학원
박지현 대구 하이클래스수학
백석인 서울 연세학원
백태민 대구 학문당입시학원
변지영 대구 수학을찾는사람들
서동원 대전 수학의 중심 학원
손형래 합천 남명학습관
손흥규 고양 꿀수학교습소
심동주 안동 아르베수학전문학원
안대호 김포 독강수학학원
안재현 부산 현수학교습소
안 혁 울산 혁신수학
양우석 서울 강의하는아이들
양윤석 용인 태성고등학교
양지현 성남 일비충천수학학원
어성웅 수원 어쌤수학학원
엄보용 안산 경안고등학교
유슬기 창원 르네수학교습소
윤희용 부천 매트릭스학원
이경환 대구 학문당입시학원
이민규 인천 투스카이수학학원
이선경 대구 아르케수학학원
이세복 서울 일타수학학원
이승재 대구 척수학교습소
이승훈 인천 일품수학과학전문학원
이원영 고양 FM 수학전문학원
이윤경 서울 윤수학학원
이정섭 서울 은지호영감수학
이주연 울산 반석성균관학원
이준석 서울 로드맵수학학원
이철호 군포 파스칼수학학원
이태권 대구 보담학원
이한빛 고양 한빛수학학원
이화정 안양 마타수학
임안철 안양 에이엠수학학원
임태형 군포 생각하는방법
장시은 용인 자이언트에듀학원
장용준 의정부 상우고등학교
전수현 전) 서울 페르마 수학학원
전승환 안양 공즐학원
전지혜 세종 뉴웨이브수학
정중연 부천 정중수학학원
정휘수 부산 제이매쓰수학방
조성철 부천 매트릭스수학학원
차동희 용인 수학전문공감학원
최지영 용인 매쓰플랜
최현성 대전 충남고등학교
한승효 진주 보람과학씨투엠수학영재학원
함정훈 압구정 함수학
현승평 화성 화성고등학교
홍재화 서울 티다른수학교습소
황화연 전주 근영여자고등학교

### [My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
황대윤 서울대 수리과학부

## 수능 선배들의 비법 전수 – 수험장 생생 체험 소개

긴장되고 떨리는 수험장에서 선배들이
문제를 풀면서 겪은 생생한 체험과 나만의 풀이 비법을
자이스토리 해설편에 수록했습니다.

### • 2023년

강 한 서울 배재고 졸 (고려대 융합에너지공학과)
권주원 서울 배재고 졸 (서울대 정치외교학부)
김보겸 광주서석고 졸 (연세대 지구시스템과학과)
김수정 부산국제고 졸 (고려대 서어서문학과)
김준서 부산 대연고 졸 (부산대 의예과)
김태산 광주서석고 졸 (고려대 정치외교학과)
김현서 경기 평택고 졸 (서강대 정치외교학과)
나인규 광주 국제고 졸 (한양대 경영학과)
명준하 광주서석고 졸 (연세대 사회환경시스템공학부)
박서영 부산 해운대고 졸 (서울대 심리학과)
박세민 광주 광덕고 졸 (서울대 의예과)
장경은 서울 세화여고 졸 (고려대 통계학과)
장성욱 부산 대연고 졸 (동아대학교 의예과)
정서린 서울 세화여고 졸 (서울대 약학과)
조현준 익산 이리고 졸 (전북대 의예과)
최윤성 서울 양정고 졸 (서울대 공과대학 광역)
홍채연 서울 한영고 졸 (고려대 불어불문학과)

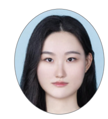
### • 2022년

강민성 부산 해운대고 졸 (성균관대 의예과)
강연욱 서울 한영고 졸 (연세대 노어노문학과)
고현웅 광주서석고 졸 (전남대 의예과)
공준형 경기 우성고 졸 (가톨릭관동대 의예과)
김서윤 경기 우성고 졸 (성균관대 글로벌경제학과)
김예리 서울 수명고 졸 (고려대 의예과)
김찬우 익산 이리고 졸 (전남대 의예과)
김혜윰 경기 숭신여고 졸 (서울대 인문대학)
박정빈 익산 이리고 졸 (고려대 한국사학과)
박준현 전남 장성고 졸 (육군사관학교)
송홍준 광주 국제고 졸 (고려대 융합에너지공학과)
양예진 전주 상산고 졸 (이화여대 의예과)
오석우 공주 한일고 졸 (서울대 의예과)
오연주 전주 솔내고 졸 (서강대 사회학과)
이수현 대구 송현여고 졸 (고려대 정치외교학과)
장인우 광주 고려고 졸 (서울대 인문학부)
전수현 경기 숭신여고 졸 (한림대 의예과)
정지호 익산 남성고 졸 (경찰대학교)
최준명 서울 양정고 졸 (KAIST 전기 및 전자공학부)

### 2024 응시


**곽지훈**
서울 한영외고 졸업
– 세계지리


**곽태웅**
서울 강서고 졸업
– 윤리와 사상


**권민재**
서울 광영여고 졸업
– 생명과학Ⅰ


**김동현**
안성 안법고 졸업
– 고3 수학Ⅰ, 고3 확률과 통계


**김서현**
대전한빛고 졸업
– 지구과학Ⅰ


**김수민**
광주 금호중앙여고 졸업
– 화학Ⅱ


**김신유**
익산 남성고 졸업
– 화법과 작문 실전


**김아린**
대전한빛고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


**김용희**
화성 화성고 졸업
– 언어와 매체 실전

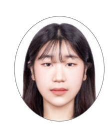

**김지희**
광주 국제고 졸업
– 한국지리


**김태현**
부산 대연고 졸업
– 물리학Ⅰ


**노규민**
부산 용인고 졸업
– 지구과학Ⅱ


**류이레**
광주대동고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


**문지민**
대구 정화여고 졸업
– 생활과 윤리


**박주은**
대전외고 졸업
– 동아시아사


**백혜원**
대구남산고 졸업
– 문학 실전


**변준서**
화성 화성고 졸업
– 고3 수학Ⅰ, 고3 수학Ⅱ


**심기현**
대구 계성고 졸업
– 화학Ⅰ


**오서윤**
서울 광문고 졸업
– 고3 수학Ⅱ, 고3 미적분


**이준수**
익산 남성고 졸업
– 고3 수학Ⅱ, 기하


**전성연**
부산국제고 졸업
– 사회·문화


**조수근**
성남 태원고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


**조인성**
성남 태원고 졸업
– 수능 한국사


**천원준**
부산 동인고 졸업
– 생명과학Ⅱ


**허다현**
부산 사직여고 졸업
– 독서 실전

# 문항 배열 및 구성 [1157제]

**❶ 개념 이해 체크를 위한 기본 기출 문제(52제)**

필수 개념과 공식을 확인할 수 있는 기출 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초 실력을 쌓도록 구성하였습니다.

**❷ 최신 6개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항 수록(927제)**

• 최근 출제 경향을 파악할 수 있도록 최신 6개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항을 수록하였습니다.
• 2018~1994 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문항 중 새수능 출제 기준에 맞는 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

**❸ 경찰대, 삼사 중요 기출 문제 수록(59제)**

경찰대, 삼사 기출 문항 중 중요 문항을 선별하여 수록하였습니다.

**❹ 새수능 대비를 위한 고품격 수능 기출 변형 문제(119제)**

새수능을 대비해서 충분한 문제로 훈련할 수 있도록 수능 기출 변형 문제를 추가 수록하였습니다.

### [고3 수학Ⅱ 수록 문항 구성표]

| 대비연도 | 3월 | 4·5월 | 6월 | 7월 | 9월 | 10월 | 수능 | 합계 | 비고 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2024 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 77 | *2025학년도 수능에 적합한 전 문항 수록 |
| 2023 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 77 | |
| 2022 | 11 | 11 | 11 | 10 | 10 | 11 | 11 | 75 | |
| 2021 | 23 | 11 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 86 | |
| 2020 | 2 | 3 | 7 | 9 | 5 | 10 | 8 | 44 | |
| 2019 | 0 | 4 | 6 | 8 | 7 | 9 | 7 | 41 | |
| 2018 | 0 | 4 | 8 | 9 | 9 | 9 | 8 | 47 | *수능, 평가원, 학력평가 엄선 수록 |
| 2017 | 0 | 3 | 6 | 7 | 8 | 7 | 9 | 40 | |
| 2016 | 1 | 6 | 8 | 8 | 8 | 9 | 8 | 48 | |
| 2015 | 2 | 3 | 9 | 6 | 6 | 6 | 7 | 39 | |
| 2014 | 2 | 4 | 10 | 6 | 8 | 6 | 5 | 41 | |
| 2013 | 3 | 3 | 10 | 12 | 9 | 9 | 8 | 54 | |
| 2012 | 1 | 3 | 10 | 8 | 5 | 6 | 8 | 41 | |
| 2011 | 0 | 0 | 9 | 5 | 3 | 2 | 3 | 22 | |
| 2010 | 0 | 1 | 7 | 5 | 4 | 1 | 5 | 23 | |
| 2009이전 | 0 | 5 | 35 | 10 | 22 | 11 | 31 | 114 | |
| 2022, 2014, 2005 대비 예비 평가 | | | | | | | | 18 | |
| 수능 기출 변형 문제 | | | | | | | | 119 | |
| 고1/고2 학력평가 | | | | | | | | 92 | |
| 삼사 및 경찰대 | | | | | | | | 59 | |
| 총 문항 수 | | | | | | | | 1157 | |

2024학년도 6월, 9월 평가원+수능

### 수학Ⅰ+수학Ⅱ 문항 배치표

| 문항 번호 | 6월 | | 9월 | | 수능 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 수록 교재 | 수록 번호 | 수록 교재 | 수록 번호 | 수록 교재 | 수록 번호 |
| 1 | 수Ⅰ | A65 | 수Ⅰ | A39 | 수Ⅰ | A64 |
| 2 | 수Ⅱ | C63 | 수Ⅱ | C54 | 수Ⅱ | C62 |
| 3 | 수Ⅰ | H18 | 수Ⅰ | E45 | 수Ⅰ | E118 |
| 4 | 수Ⅱ | B09 | 수Ⅱ | A09 | 수Ⅱ | B08 |
| 5 | 수Ⅱ | C38 | 수Ⅰ | G121 | 수Ⅱ | F18 |
| 6 | 수Ⅰ | E121 | 수Ⅱ | D84 | 수Ⅰ | G178 |
| 7 | 수Ⅰ | C110 | 수Ⅰ | B75 | 수Ⅱ | D108 |
| 8 | 수Ⅱ | E24 | 수Ⅱ | F17 | 수Ⅱ | F83 |
| 9 | 수Ⅰ | H95 | 수Ⅰ | E161 | 수Ⅰ | B66 |
| 10 | 수Ⅱ | G14 | 수Ⅱ | D23 | 수Ⅱ | G98 |
| 11 | 수Ⅱ | D60 | 수Ⅱ | G84 | 수Ⅰ | H96 |
| 12 | 수Ⅰ | G75 | 수Ⅰ | I47 | 수Ⅱ | G71 |
| 13 | 수Ⅰ | F87 | 수Ⅱ | D139 | 수Ⅰ | F38 |
| 14 | 수Ⅱ | G86 | 수Ⅰ | C159 | 수Ⅱ | A197 |
| 15 | 수Ⅰ | I110 | 수Ⅱ | B98 | 수Ⅰ | I46 |
| 16 | 수Ⅰ | D48 | 수Ⅰ | D69 | 수Ⅰ | D12 |
| 17 | 수Ⅱ | F13 | 수Ⅰ | H17 | 수Ⅱ | C35 |
| 18 | 수Ⅱ | D120 | 수Ⅱ | C36 | 수Ⅰ | H19 |
| 19 | 수Ⅰ | E97 | 수Ⅱ | G34 | 수Ⅰ | E165 |
| 20 | 수Ⅱ | F183 | 수Ⅰ | F37 | 수Ⅱ | D134 |
| 21 | 수Ⅰ | C168 | 수Ⅰ | H160 | 수Ⅰ | C162 |
| 22 | 수Ⅱ | D145 | 수Ⅱ | F184 | 수Ⅱ | E132 |

• 수Ⅰ : 2024 자이스토리 고3 수학Ⅰ
• 수Ⅱ : 2024 자이스토리 고3 수학Ⅱ

# A 함수의 극한

## ★ 유형 차례




## ★ 최신 3개년 수능 + 모평 출제 경향

| 학년도 | | 출제 유형 | 난이도 |
|---|---|---|---|
| 2024 | 수능 | 유형 14 새롭게 정의된 함수의 극한 | ★★★ |
| | 9월 | 유형 01 함수의 좌극한과 우극한 | ☆☆☆ |
| 2023 | 수능 | 유형 08 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 | ☆☆☆ |
| | 9월 | 유형 18 도형의 길이에 대한 극한 | ★☆☆ |
| | 6월 | 유형 01 함수의 좌극한과 우극한 | ☆☆☆ |
| 2022 | 수능 | 유형 01 함수의 좌극한과 우극한 | ☆☆☆ |
| | 9월 | 출제되지 않음 | |
| | 6월 | 유형 01 함수의 좌극한과 우극한 | ☆☆☆ |
| | 예시 | 유형 01 함수의 좌극한과 우극한 | ☆☆☆ |

## ★ 2024 수능 출제 경향 분석

• 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 그래프와 직선이 만나는 점의 개수를 새롭게 함수로 정의하고 그 함수의 함숫값, 좌극한값, 우극한값의 합이 일정한 수가 되는 경우가 단 하나일 때를 예상해 봐야 하는 고난도 문제이다. 특히, 구간에서 연속인 삼차함수의 그래프의 극대점과 극소점 사이로 직선이 지나면 세 점에서 만나게 되고 좌극한값과 우극한값도 3이므로 이러한 경우가 생기지 않도록 이차함수의 그래프의 꼭짓점을 이동시키면서 유추해야 한다. [A197 문항]

## ★ 2025 수능 예측

1. 함수의 그래프가 주어지고 우극한과 좌극한을 찾아 계산하는 문제 또는 $\frac{0}{0}$ 꼴, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 등의 극한값을 구하는 쉬운 계산 문제가 출제 예상되므로 극한의 개념을 확실히 알고 있어야 한다.
2. 분수식의 극한값이 존재하는 조건에서의 분모와 분자의 미정계수를 결정하는 유형은 출제 가능성이 매우 높은 유형이다. 극한값이 존재하고 분모(또는 분자)가 0으로 다가갈 때, 분자(또는 분모)의 극한값이 어떻게 되는지 꼭 기억하자.
3. 좌표평면 위의 그래프에서 도형의 길이나 넓이 등에 대한 극한값을 구하는 문제에 대비하기 위해 함수의 그래프와 도형의 성질을 유기적으로 연결하여 해결하는 연습을 충분히 하자.

# A 함수의 극한

개념 강의

중요도 ★★○

## 1 좌극한과 우극한 – 유형 01~02

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ ($\alpha$는 실수)이면 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 $\alpha$로 같다.
또, 그 역도 성립하므로

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=\alpha$$ ❶

출제 2024 9월 모평 4번

★ 주어진 불연속인 그래프를 보고 함수의 좌, 우극한을 찾는 쉬운 난이도의 문제가 출제되었다.

## 2 함수의 극한에 대한 성질 – 유형 03, 14~16

함수의 극한에 대한 성질은 극한값이 존재할 때만 성립하고 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때도 성립한다.

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때,

(1) $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (단, $k$는 상수)

(2) $\lim_{x\to a} \{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\pm\beta$ (복호동순)

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

(4) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq 0$, $\beta\neq 0$)

## 3 함수의 극한값의 계산 – 유형 04~10, 14~16, 18~20

실수 $k$에 대하여 다항함수 $f(x)$의 $x=k$에서의 극한값은 $x=k$에서의 함숫값 $f(k)$와 같다. 즉, $\lim_{x\to k} f(x)=f(k)$이다.

(1) $\dfrac{0}{0}$ 꼴 : 분자, 분모가 모두 다항식이면 분자, 분모를 각각 인수분해한 다음 약분한다. 분모, 분자 중 무리식이 있으면 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴❷ : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

(3) $\infty-\infty$ 꼴 : 다항식은 최고차항으로 묶고, 무리식은 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(4) $\infty\times 0$ 꼴 : 통분이나 유리화하여 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴 또는 $\dfrac{0}{0}$ 꼴로 변형한다.

출제 2024 수능 14번

★ $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\infty\times 0$

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 3이면 $g(t)$의 함숫값, 좌극한과 우극한의 값도 모두 3이 되어 합이 9가 된다는 점을 파악하여 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 3인 지점이 1개인 경우를 생각해 내야 하는 최상 난이도의 문제가 출제되었다.

## 4 미정계수의 결정❸ – 유형 11~13, 16

실수 $a$와 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 상수)일 때,

(1) $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이다.

(2) $\lim_{x\to a} f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} g(x)=0$이다. (단, $\alpha\neq 0$)❹

## 5 함수의 극한과 대소 관계❺ – 유형 17

실수 $a$와 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여
$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때,

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$

---

+개념 보충

❶ 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하지 않는 경우는
(ⅰ) $\lim_{x\to a-} f(x)$의 값이 존재하지 않거나
(ⅱ) $\lim_{x\to a+} f(x)$의 값이 존재하지 않거나
(ⅲ) $\lim_{x\to a-} f(x)\neq\lim_{x\to a+} f(x)$일 때이다.

한걸음 더!

❷ 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$의 값은
(1) (분모의 차수)<(분자의 차수)이면 $\infty$ 또는 $-\infty$로 발산한다.
(2) (분모의 차수)=(분자의 차수)이면 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비로 수렴한다.
(3) (분모의 차수)>(분자의 차수)이면 0으로 수렴한다.

+개념 보충

❸ 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 상수)일 때
(1) $\alpha\neq 0$이면 $\alpha=\dfrac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})}$ 이고 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같다.
(2) $\alpha=0$이면 $g(x)$의 차수가 $f(x)$의 차수보다 크다.

왜 그럴까?

❹ $\alpha\neq 0$이라는 조건이 필요하다.
$f(x)=x-1$, $g(x)=x+1$이라 하면
$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} (x-1)=0$,
$\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$
이지만
$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1} (x+1)=2\neq 0$

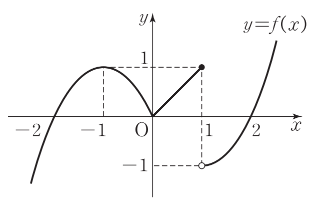
한걸음 더!

❺ $a$에 가까운 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만 $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)$인 경우가 있기 때문에 $f(x)<g(x)$의 양변에 $\lim_{x\to a}$를 취하면 $\lim_{x\to a} f(x)\le\lim_{x\to a} g(x)$이다.

## 1+2 좌극한과 우극한

### A01 기본 2013대비(나) 9월 모평 5(고3)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to1+} f(x)$의 값은? (3점)

① $-2$ ② $-1$ ③ 0
④ 1 ⑤ 2

### A02 기본 2013대비(나) 9월 모평 22(고3)

$\lim_{x\to2} \frac{x^2+x}{x+1}$의 값을 구하시오. (3점)

## 2+3 함수의 극한값의 계산

### A03 기본 2012대비(나) 수능 22(고3)

$\lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2+3x+7)}{x-1}$의 값을 구하시오. (3점)

### A04 기본 2010실시(가) 7월 학평 3(고3)

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

## 4 미정계수의 결정

### A05 기본 2010대비(가) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{x\to1} \frac{x^2+ax-b}{x^3-1}=3$이 성립하도록 상수 $a$, $b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? (2점)

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

### A06 기본 2014대비(A) 6월 모평 25(고3)

두 상수 $a$, $b$에 대하여 $\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$일 때, $10a+4b$의 값을 구하시오. (3점)

### A07 기본 2018대비(나) 9월 모평 12(고3)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2}=2$ (나) $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x}=3$

$f(2)$의 값은? (3점)

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

## 5 함수의 극한의 대소 관계

### A08 기본

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$x^2+3x-4\le f(x)\le 3x^2-x-2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1} \frac{f(x)}{x-1}$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

❖ 정답 및 해설 2~3p

# 수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

Pass 쉬운 유형, 반복 계산 문제로 패스 하셔도 좋습니다.

## 1 좌극한과 우극한

2024 9월 출제

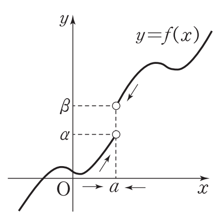
### 유형 01 함수의 좌극한과 우극한

(1) **좌극한** : $x$의 값이 $a$보다 작으면서 $a$에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 $\alpha$에 가까워지면 $\alpha$를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\alpha$ 또는 $x\to a-$일 때 $f(x)\to\alpha$

(2) **우극한** : $x$의 값이 $a$보다 크면서 $a$에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 $\beta$에 가까워지면 $\beta$를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\beta$ 또는 $x\to a+$일 때 $f(x)\to\beta$

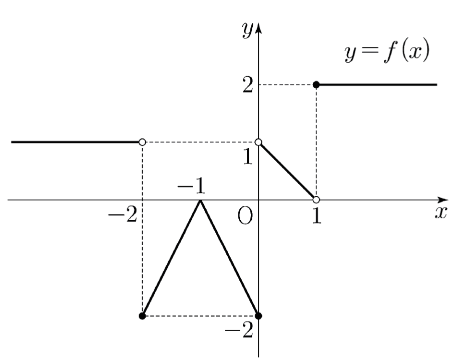



tip

$x$의 값이 $a$보다 크면서 $a$에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x\to a+$와 같이 나타내고, $x$의 값이 $a$보다 작으면서 $a$에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x\to a-$와 같이 나타낸다.

**A09** 2024대비 9월 모평 4(고3)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

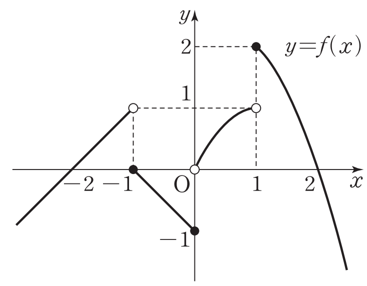



$\lim\limits_{x\to-2+} f(x)+\lim\limits_{x\to1-} f(x)$의 값은? (3점)

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$
④ $1$ ⑤ $2$

**A10** 2023실시 7월 학평 4(고3)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

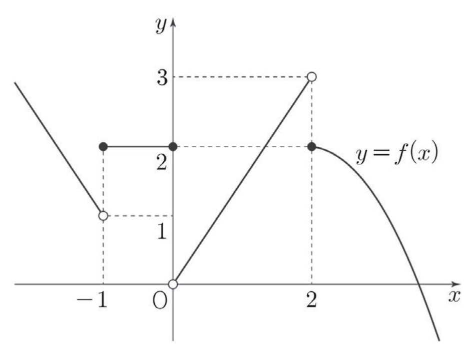



$\lim\limits_{x\to-1+} f(x)+\lim\limits_{x\to1-} f(x)$의 값은? (3점)

① $-1$ ② $0$ ③ $1$
④ $2$ ⑤ $3$

**A11** 2023실시 4월 학평 3(고3)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

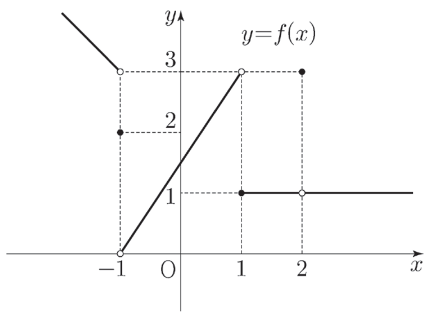



$\lim\limits_{x\to-1+} f(x)+\lim\limits_{x\to2-} f(x)$의 값은? (3점)

① $1$ ② $2$ ③ $3$
④ $4$ ⑤ $5$

## A12 ❀❀❀ Pass 2022대비 수능 4(고3)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

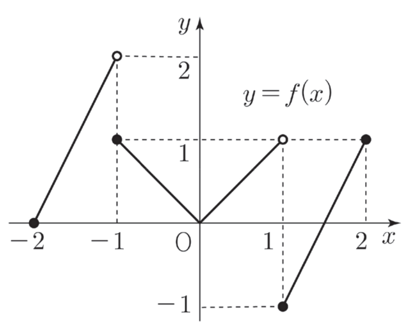



$\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to2} f(x)$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

## A13 ❀❀❀ Pass 2021실시 7월 학평 4(고3)

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

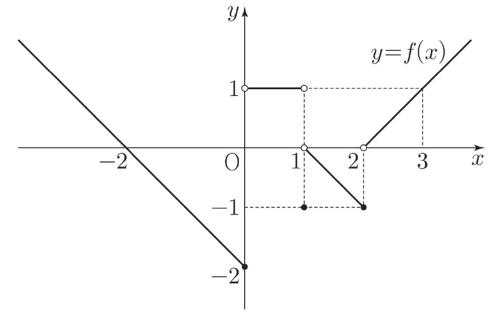



$\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to1+} f(x)$의 값은? (3점)

① $-1$ ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

## A14 ❀❀❀ Pass 2022대비 6월 모평 4(고3)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

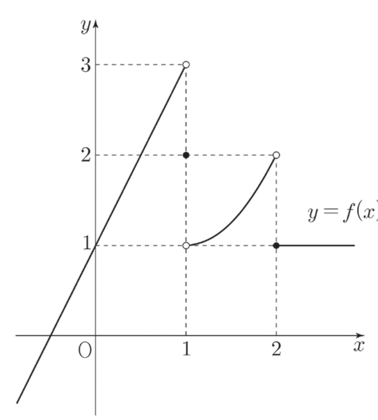



$\lim_{x\to0-} f(x)+\lim_{x\to2+} f(x)$의 값은? (3점)

① $-2$ ② $-1$ ③ 0
④ 1 ⑤ 2

## A15 ❀❀❀ Pass 2021실시 4월 학평 4(고3)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to2+} f(x)$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

❖ 정답 및 해설 4~6p

# 1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

## A190 ★★★

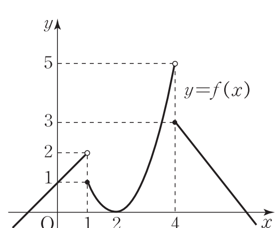
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> (가) $x+f(x)=g(x)\{x-f(x)\}$
> (나) $\lim_{x\to 0} g(x)=4$

이때, $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{2x-f(x)}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p$, $q$는 서로소인 자연수이다.) (4점)

## A191 ★★★ 2011대비(가) 6월 모평 7(고3)

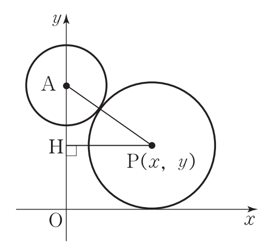
실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\lim_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은? (3점)




① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

## A192 ★★★ 2011실시(나) 10월 학평 16(고3)

그림과 같이 중심이 A$(0,\ 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $x$축에 접하는 원의 중심을 P$(x,\ y)$라 하자. 점 P에서 $y$축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}}$의 값은? (4점)




① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

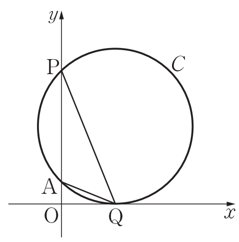
## A193 ★★★ 2022실시 10월 학평 20(고3)

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오. (4점)

> (가) $\lim_{x\to 0}\dfrac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재한다.
> (나) 모든 실수 $x$에 대하여 $xf(x)\ge -4x^2+x$이다.

## A194 ✽✽✽ 2015실시(가) 6월 학평 15(고2)

그림과 같이 좌표평면 위의 점 A$(0, 1)$을 지나고 $x$축에 접하는 원 $C$가 있다. 원 $C$가 $y$축과 만나는 또 다른 점을 P라 하고, $x$축과 접하는 점을 Q$(t, 0)$이라 하자. 삼각형 APQ의 넓이를 $S(t)$, 원 $C$의 반지름의 길이를 $r(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t\times r(t)}$의 값은? (단, $t>1$이다.) (4점)




① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

**[1등급 대비+2등급 대비]**

## A195 ✪ 2등급 대비 2011대비(가) 6월 모평 24(고3)

$x$가 양수일 때, $x$보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>2f(x)) \\ \frac{1}{f(x)} & (x\le 2f(x)) \end{cases}$$

라고 하자. 예를 들어, $f\left(\frac{7}{2}\right)=2$이고 $\frac{7}{2}<2f\left(\frac{7}{2}\right)$이므로 $g\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}$이다. $\lim_{x\to 8+}g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to 8-}g(x)=\beta$라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오. (4점)

## A196 ✪ 1등급 대비 2015대비(A) 6월 모평 21(고3)

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(1)=0$
> (나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ $(n=1, 2, 3, 4)$

$g(5)$의 값은? (4점)

① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

## A197 ✪ 2등급 대비 2024대비 수능 14(고3)

두 자연수 $a$, $b$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 $k$의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값은? (4점)

① 51　② 52　③ 53
④ 54　⑤ 55

## A198 ✪ 1등급 대비 2021실시 9월 학평 30(고2)

세 실수 $a(a\neq0)$, $b$, $k$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+(2b-3)x+a^2-3 & (x<k) \\ -\frac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1 & (x\geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 임의의 실수 $a$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
>
> (나) 두 함수 $y=g(x)$와 $y=-4\left|\log_2 \frac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 5이다.

$k=p+q\sqrt{17}$일 때, $16(p+q)$의 값을 구하시오. (단, $p$, $q$는 유리수이다.) (4점)

## A199 ✪ 2등급 대비 2020실시 9월 학평 30(고2)

이차함수 $f(x)=x^2+2x+2$와 실수 $t$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ |f(-x)-t| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to a-}h(t)\neq\lim_{t\to a+}h(t)$$

인 모든 실수 $a$를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_m$ ($m$은 자연수)라 할 때, $\sum_{k=1}^{m}\{4a_k\times h(a_k)\}$의 값을 구하시오. (4점)

## A200 ✪ 1등급 대비 2019실시(가) 9월 학평 30(고2)

실수 $k$와 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x-2} & (x<2) \\ 2^{-x+2} & (x\geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-k|+k$라 하자.
직선 $y=2k$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(k)$라 할 때, $\lim_{k\to\frac{1}{4}-}\left\{h(k)h\left(k+\frac{1}{4}\right)\right\}$의 값을 구하시오. (4점)

# 경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점 + 4점 + 5점]

### A201 ✽✽❀ 2023대비 삼사 12(고3)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\le 2) \\ ax+b & (x>2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha)+\lim_{x\to\alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 $\alpha$의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값은?

(단, $a$, $b$는 상수이다.) (4점)

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$
④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

### A202 ✽✽✽ 2015대비(A) 삼사 9(고3)

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$
(나) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^3}$의 값은? (3점)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

## [1등급 대비+2등급 대비]

### A203 ✪ 2등급 대비 2017대비 경찰대 16(고3)

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=-\frac{1}{2}$이 만나는 점을 A, B라 하자. 점 $\mathrm{P}(0, t)\left(t\neq-\frac{1}{2}\right)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 C의 개수를 $f(t)$라 하자.

(가) C는 A나 B가 아닌 원 위의 점이다.
(나) A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 A, B, P를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이와 같다.

$f(a)+\lim_{t\to a-} f(t)=5$이고 $\lim_{t\to 0-} f(t)=b$일 때, $a+b$의 값은?

(4점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

❖ 정답 및 해설 69~77p


★ 수학 Ⅱ

# 실전 기출 모의고사

[11문항형 / 제한시간 60분]

1회 모의고사 – 2025학년도 수능 대비 $\boxed{1}$

2회 모의고사 – 2025학년도 수능 대비 $\boxed{2}$

3회 모의고사 – 2025학년도 수능 대비 $\boxed{3}$

- 문항 수 11개
- 배점 37점
- 제한시간 60분

## 5지선다형

**1회 01** 2011실시(가) 11월 학평 2(고2)

$\lim_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{\sqrt{x+2}-2}$의 값은? (2점)

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

**1회 02** 2018실시(나) 10월 학평 4(고3)

$\int_0^1 (3x^2-2)dx$의 값은? (3점)

① $-2$　② $-1$　③ 0　④ 1　⑤ 2

**1회 03** 2014대비(A) 6월 모평 6(고3)

함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)-f(1)}{2h}$의 값은? (3점)

① 2　② $\dfrac{5}{2}$　③ 3　④ $\dfrac{7}{2}$　⑤ 4

**1회 04** 2016실시(나) 11월 학평 6(고2)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & (x\neq 3) \\ a & (x=3) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 $a$의 값은? (3점)

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

**1회 05** 2015대비(A) 6월 모평 14(고3)

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $x$가 $x=-t^2+4t$이다. $t=a$에서 점 P의 속도가 0일 때, 상수 $a$의 값은? (4점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

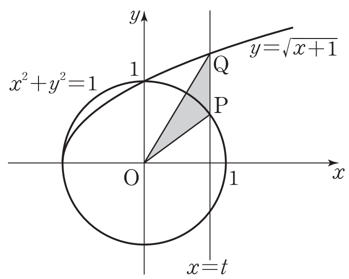
**1회 06** 2015대비(A) 6월 모평 16(고3)

함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+a$의 극댓값이 10일 때, 상수 $a$의 값은? (4점)

① $-12$　② $-10$　③ $-8$　④ $-6$　⑤ $-4$

## 1회 07 ✿❀❀ 2017실시(나) 9월 학평 17(고2)

그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\sqrt{x+1}$이 직선 $x=t$ $(0<t<1)$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{S(t)}{t^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.) (4점)




① $\dfrac{1}{8}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\dfrac{3}{8}$

④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{5}{8}$

## 1회 08 ✿❀❀

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & (x\le 1) \\ 2x-3 & (x>1) \end{cases}$에 대하여 $\displaystyle\int_k^2 f(x)dx=\frac{4}{3}$를 만족시키는 상수 $k$의 값은? (단, $k<1$) (4점)

① $-4$　② $-3$　③ $-2$

④ $-1$　⑤ $0$

### 단답형

## 1회 09 ✿❀❀ 2015실시(가) 9월 학평 28(고2)

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 속도를 $v(t)=3t^2-6t$라 하자. 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리가 58일 때, $v(a)$의 값을 구하시오. (3점)

## 1회 10 ✿✿❀ 2011대비(가) 6월 모평 23(고3)

최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오. (3점)

(가) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3 f(x)}=4$

(나) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{x}=4$

## 1회 11 ✪ 2등급 대비 2011대비(가) 수능 24(고3)

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 $t$에 대하여 집합 $S$를

$S=\{a\,|\,$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 $S$의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

(4점)

❖ 정답 및 해설 620~622p

# 차 례

## 해설편 1

### Ⅰ 함수의 극한과 연속



### Ⅱ 적분



★D154번까지 수록

## 해설편 2



★E01번부터 수록

### Ⅲ 적분



### Special 수학Ⅱ 실전 기출 모의고사

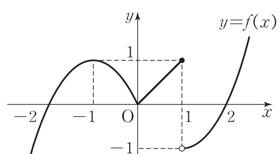
# A 함수의 극한

## 기본 기출 문제

### A 01 정답 ③ *함수의 좌극한값과 우극한값 ········ [정답률 96%]

( **정답 공식**: 그래프에서 $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$이고, 그래프를 따라가 보고 $\lim_{x\to+1} f(x)$의 값을 찾는다. )

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




단서1 $x=-1$에서의 극한값을 찾아.

$\lim_{x\to-1} f(x)+\lim_{x\to1+} f(x)$의 값은? (3점)

단서2 $x=1$에서의 우극한값을 찾아.

① $-2$ ② $-1$ ③ 0
④ 1 ⑤ 2

**1st** 그래프를 이용하여 각 점에서의 극한값을 구하자.

$\therefore \lim_{x\to-1} f(x)+\lim_{x\to1+} f(x)=1+(-1)=0$

함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로 $x=-1$에서의 극한값은 $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)=1$
또, $x=1$에서의 우극한값은 $\lim_{x\to1+} f(x)=-1$

실수 $x=1$에서 함수 $f(x)$의 좌극한값과 우극한값은 서로 달라.

### A 02 정답 2 *극한값의 계산 ········ [정답률 96%]

( **정답 공식**: $x=a$에서 유리함수 $f(x)$의 (분모)$\neq0$이면 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이다. )

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x}{x+1}$의 값을 구하시오. (3점) 단서 함수식에 $x=2$를 대입해.

**1st** 주어진 극한을 계산하자.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x}{x+1}=\lim_{x\to2}\frac{x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to2}x=2$$

$x=2$를 바로 대입해도 돼. 즉 $\frac{4+2}{3}=2$야.

주의 $x=2$에서 함수 $\frac{x^2+x}{x+1}$는 연속이므로 $x=2$를 바로 대입하면 극한값을 구할 수 있어.

### A 03 정답 11 *$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산(분수식) ···· [정답률 93%]

( **정답 공식**: $\frac{0}{0}$ 꼴일 때는 분모, 분자의 공통인수를 약분하고 극한값을 계산한다. )

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+3x+7)}{x-1}$의 값을 구하시오. (3점)

단서 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 약분하자.

**1st** 분모와 분자의 공통인수를 약분해서 극한값을 계산해.

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+3x+7)}{x-1}$$

$\frac{0}{0}$ 꼴 : 분자, 분모를 각각 인수분해한 다음 약분해.

$$=\lim_{x\to1}(x^2+3x+7)$$

$$=1+3+7=11$$

### A 04 정답 ② *$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산(무리식) ······ [정답률 91%]

( **정답 공식**: $x=-t$로 치환하여 극한값을 계산한다. )

단서2 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구할 때에는 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누어야 해.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$의 값은? (2점)

단서1 $x=-t$로 치환해.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**1st** 주어진 식이 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴임을 주의하여 계산하자.

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항인 $t$로 분자, 분모를 나누자.

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}}=2$$

$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}=0$, $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0$

### A 05 정답 ④ *인수분해를 이용한 미정계수의 결정 ····· [정답률 84%]

( **정답 공식**: (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 이후 분모, 분자의 공통인수를 약분한다. )

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-b}{x^3-1}=3$이 성립하도록 상수 $a$, $b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? (2점)

단서 $\lim_{x\to1}(x^3-1)=0$이고, 극한값이 존재하므로 $\lim_{x\to1}(x^2+ax-b)=0$이야.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

**1st** 주어진 식의 극한값이 존재하니까 $\frac{0}{0}$ 꼴이 되어야 해.

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-b}{x^3-1}=3$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로
(분자)$\to0$이 되어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax-b)=0$에서 $1+a-b=0$
$\therefore b=a+1$ ··· ㉠

**2nd** 분자, 분모를 각각 인수분해한 후 공통인수를 약분해 봐.

㉠을 주어진 식에 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$x-1$이 분자, 분모의 공통인수이므로 약분해.

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+a+1}{x^2+x+1}=\frac{a+2}{3}=3$$

$\therefore a=7$
㉠에서 $b=8$
$\therefore a+b=7+8=15$

### A 06 정답 21 *유리화를 이용한 미정계수의 결정 [정답률 85%]

( **정답 공식**: 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. )

두 상수 $a$, $b$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$일 때, $10a+4b$의 값을 구하시오. (3점)

단서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이고, 극한값이 존재하므로 $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-2)=0$

1st 분수식의 극한값이 존재할 때, (분모) → 0이면 (분자) → 0임을 이용해서 $a$의 값부터 구하자.

$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$에서 $x\to 2$일 때, (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+a}-2)=\sqrt{2+a}-2=0$에서

$\sqrt{2+a}=2,\ 2+a=4$

$\therefore\ a=2$

2nd $a=2$를 주어진 식에 대입하여 $b$의 값을 구하자.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\boxed{\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}}$$

$\frac{0}{0}$ 꼴이고 무리식이 포함되어 있으니까 무리식을 유리화해야 해.

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\boxed{x-2}}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$(\sqrt{x+2})^2-2^2=(x+2)-4=x-2$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}=b$$

$\therefore\ 10a+4b=10\cdot 2+4\cdot\frac{1}{4}=21$

### 분모의 유리화 개념·공식

분모에 근호가 있을 때 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 근호가 없는 형태로 변형하는 것을 **분모의 유리화**라 한다.

① $\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$ ② $\frac{c}{a\sqrt{b}}=\frac{c\times\sqrt{b}}{a\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{c\sqrt{b}}{ab}$

## A 07 정답 ② *함수의 극한을 이용한 다항함수의 결정 ···· [정답률 78%]

( 정답 공식: 조건 (가)를 통해 $f(x)$가 이차함수라는 것을 알 수 있다. )

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$ 단서1 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수야.

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$ 단서2 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이어야 해.

$f(2)$의 값은? (3점)

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

1st 다항식 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}=c$ (단, $c$는 0이 아닌 상수)이면 $f(x)$의 차수는 $n$이고, 최고차항의 계수는 $c$야.

조건 (가)에 의하여 다항함수 $f(x)$는

$f(x)=2x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$에서 분모의 차수가 2이니까 분자의 차수도 2이고, 분자인 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이어야 해.

2nd 조건 (나)를 이용하여 상수 $a$, $b$의 값을 구하자.

조건 (나)에서 $x\to 0$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 0}(2x^2+ax+b)=b=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$가 수렴하므로 분모가 0에 수렴할 때, 분자도 0에 수렴해야 해. 즉, $f(0)=0$이어야 하지.

따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0}(2x+a)=a=3$$

$2x^2+ax=x(2x+a)$야.

이므로 $f(x)=2x^2+3x$

$\therefore\ f(2)=2\cdot 2^2+3\cdot 2=14$

### 미정계수의 결정 개념·공식

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (단, $\alpha$는 상수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (단, $\alpha\neq 0$인 상수)일 때,

$\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

## A 08 정답 ⑤ *함수의 극한의 대소 관계 ··········· [정답률 73%]

( 정답 공식: $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$($\alpha$는 실수)이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$이다. )

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$x^2+3x-4\le f(x)\le 3x^2-x-2$

단서 이 부등식을 구해야 하는 극한값이 나오도록 변형해.

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누어 생각해.

$x^2+3x-4\le f(x)\le 3x^2-x-2$에서

$(x-1)(x+4)\le f(x)\le(x-1)(3x+2)$

이 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

(i) $x>1$일 때, $x+4\le\frac{f(x)}{x-1}\le 3x+2$

$x>1$이면 $x-1>0$이므로 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않아.

각 변에 $\lim_{x\to 1+}$를 취하면

$\lim_{x\to 1+}(x+4)\le\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{x-1}\le\lim_{x\to 1+}(3x+2)$

이때, $\lim_{x\to 1+}(x+4)=1+4=5$,

$\lim_{x\to 1+}(3x+2)=3\times 1+2=5$

이므로 $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{x-1}=5$이다.

주의 부등식의 각 변에 같은 식을 곱하거나 각 변을 같은 식으로 나눌 때 곱하거나 나누는 식의 값의 범위에 따라 대소 관계가 바뀔 수 있으므로 꼭 $x$의 범위를 나누어서 풀어야 해.

(ii) $x<1$일 때, $3x+2\le\frac{f(x)}{x-1}\le x+4$

$x<1$이면 $x-1<0$이므로 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면 부등호의 방향은 바뀌어야 해.

각 변에 $\lim_{x\to 1-}$를 취하면

$\lim_{x\to 1-}(3x+2)\le\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)}{x-1}\le\lim_{x\to 1-}(x+4)$

이때, $\lim_{x\to 1-}(3x+2)=3\times 1+2=5$, $\lim_{x\to 1-}(x+4)=1+4=5$

이므로 $\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)}{x-1}=5$이다.

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=5$

함수 $\frac{f(x)}{x-1}$의 $x=1$에서의 좌극한값과 우극한값이 모두 존재하고 그 값이 5로 같으므로 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=5$야.

### 함수의 극한의 대소 관계 개념·공식

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때

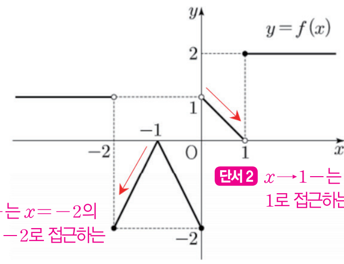
(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

## A 09 정답 ① *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 92%]

( **정답 공식**: 그래프를 따라가며 우극한, 좌극한을 찾는다. )

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to-2+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)$의 값은? (3점)

① $-2$ ② $-1$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

**1st** 주어진 그래프에서 $x=-2$에서의 우극한, $x=1$에서의 좌극한을 구하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x=-2$의 우극한을 구하면

$\lim_{x\to-2+}f(x)=-2$ → $x$의 값이 $-2$의 오른쪽에서 $-2$로 접근할 때, 그래프를 따라가면 $f(x)$는 $-2$에 접근해.

마찬가지로 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x=1$의 좌극한을 구하면

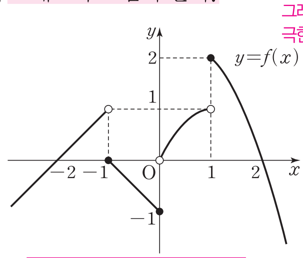
$\lim_{x\to1-}f(x)=0$ → $x$의 값이 1의 왼쪽에서 1로 접근할 때, 그래프를 따라가면 $f(x)$는 0에 접근해.

$\therefore \lim_{x\to-2+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=-2+0=-2$

## A 10 정답 ③ *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 89%]

( **정답 공식**: $x$가 특정 값에 가까워질 때 함숫값이 가까워지는 값을 그래프에서 찾아본다. )

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. **단서 1** 함수의 식을 모르더라도 그래프를 활용해서 함수의 극한값을 구할 수 있어.



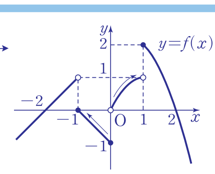

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)$의 값은? (3점) **단서 2** $x=-1$에서 우극한값, $x=1$에서 좌극한값을 각각 찾자.

① $-1$ ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

**1st** $\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)$의 값을 구해.

$\lim_{x\to-1+}f(x)=0$, $\lim_{x\to1-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=0+1=1$




수능 핵강

*** 좌극한과 우극한의 값을 구할 때, 실수 줄이기**

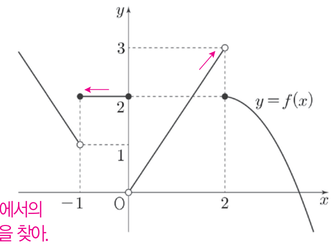
그래프를 이용해서 함수의 극한값을 구할 때에는 특정한 지점의 함숫값은 무시하고 생각하는 것이 혼란을 피할 수 있는 방법이야.

$x\to-1+$는 $x\neq-1$이면서 $-1$의 오른쪽에서 한없이 가까워질 때, 가까워지는 값을 뜻하고, $x\to1-$는 $x\neq1$이면서 1의 왼쪽에서 한없이 가까워질 때, 가까워지는 값을 뜻해.

## A 11 정답 ⑤ *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 92%]

( **정답 공식**: $x\to-1+$는 $x=-1$의 오른쪽에서 $-1$로 접근하는 것이고, $x\to2-$는 $x=2$의 왼쪽에서 2로 접근하는 것이다. 그래프를 따라가며 우극한값, 좌극한값을 찾는다. )

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




**단서 1** $x=-1$에서의 우극한값을 찾아.

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)$의 값은? (3점)

**단서 2** $x=2$에서의 좌극한값을 찾아.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**1st** 주어진 그래프에서 $x=-1$에서의 우극한값, $x=2$에서의 좌극한값을 구하자.

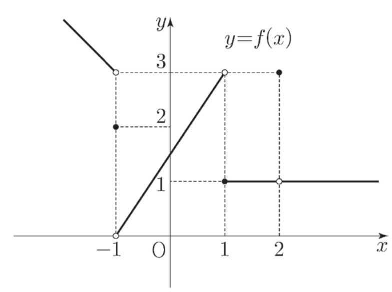
$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)=2+3=5$ → 함수 $y=f(x)$의 $x=-1$에서의 우극한값은 2이고, $x=2$에서의 좌극한값은 3이야.

### 수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

## A 12 정답 ④ *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 94%]

( **정답 공식**: $x$가 특정 값에 가까워질 때 함숫값이 가까워지는 값을 그래프에서 찾아본다. )

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)$의 값은? (3점)

**단서** $x=-1$에서의 좌극한값과 $x=2$에서의 극한값을 찾자.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

**1st** 그래프에서 주어진 극한값을 구하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x$의 값이 $-1$의 왼쪽에서 $-1$로 접근할 때, 그래프를 따라가면 함숫값은 3에 수렴한다.

$\therefore \lim_{x\to-1-}f(x)=3$

또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x$의 값이 2의 왼쪽에서 2로 접근할 때와 2의 오른쪽에서 2로 접근할 때 모두 그래프를 따라가면 함숫값은 1에 수렴한다.

## A 189 정답 ④ *좌표평면에서의 극한의 활용 …… [정답률 49%]

( **정답 공식**: 그래프를 좌표평면에 나타내서 $t$의 값에 따른 교점의 개수를 파악한다. )

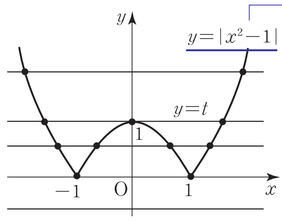
단서 1 $y=|x^2-1|$의 그래프를 그린 후, $t$의 값의 범위에 따라 $f(t)$의 값을 구해봐.

실수 $t$에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to1-}f(t)$의 값은? (4점)

단서 2 $t=1$에서의 좌극한값을 구해.

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

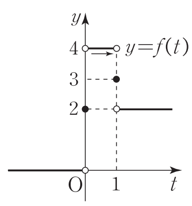
**1st** 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프를 그려 봐.




$y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$ 그래프의 $x$축 윗부분은 그대로, $x$축 아랫부분은 $x$축에 대하여 대칭이동시켜 그리면 돼.

그림과 같이 $y=|x^2-1|$의 그래프를 그려서 $t$의 값에 따라 직선 $y=t$와 만나는 점의 개수 $f(t)$를 조사하면

$$f(t)=\begin{cases}2 & (t>1)\\ 3 & (t=1)\\ 4 & (0<t<1)\\ 2 & (t=0)\\ 0 & (t<0)\end{cases} \Rightarrow$$




$\therefore \lim_{t\to1-}f(t)=4$

**좌극한과 우극한** 　개념·공식

① $\lim_{x\to a-}f(x)=p$일 때, $p$를 $x=a$에서 $f(x)$의 **좌극한값**이라고 한다.

② $\lim_{x\to a+}f(x)=q$일 때, $q$를 $x=a$에서 $f(x)$의 **우극한값**이라고 한다.

**1등급 마스터 문제** [4점+2등급 대비+1등급 대비]

## A 190 정답 10 *함수의 극한값의 계산 …… [정답률 38%]

( **정답 공식**: $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$(단, $g(x)\neq0$, $\beta\neq0$)이다. )

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $x+f(x)=g(x)\{x-f(x)\}$

(나) $\lim_{x\to0}g(x)=4$

단서 극한값을 구해야 하는 식이 $f(x)$에 대한 식이므로 조건 (가)의 식을 변형해 봐.

이때, $\lim_{x\to0}\frac{x^2+f(x)}{2x-f(x)}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $p$, $q$는 서로소인 자연수이다.) (4점)

**1st** 조건 (가)의 식을 $f(x)$에 대하여 정리하자.

조건 (가) $x+f(x)=g(x)\{x-f(x)\}$에서

$f(x)\{1+g(x)\}=x\{g(x)-1\}$이므로

$x\neq0$일 때, $\frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)-1}{1+g(x)}$

$g(x)=-1$이면 조건 (나)에서 $\lim_{x\to0}g(x)=-1\neq4$이므로 모순이야. 따라서 $g(x)\neq-1$이므로 분모, 분자를 $g(x)+1$로 나눌 수 있는 거야.

**2nd** $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구하자.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-1}{1+g(x)}$$

$x\to0$은 $x$가 0이 아니면서 0에 한없이 접근한다는 뜻이야. 즉, $x\neq0$이므로 $\frac{f(x)}{x}$의 식을 적용할 수 있어.

$$=\frac{\lim_{x\to0}g(x)-1}{1+\lim_{x\to0}g(x)}$$

$$=\frac{4-1}{1+4}=\frac{3}{5}$$

**3rd** 구해야 하는 극한값을 계산해.

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x^2+f(x)}{2x-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{2-\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{0+\frac{3}{5}}{2-\frac{3}{5}}=\frac{3}{7}$$

따라서 $p=7$, $q=3$이므로

$p+q=7+3=10$

수능 핵강

*** 극한값의 계산에서 자주 하는 실수**

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+f(x)}{2x-f(x)}=\frac{0+f(0)}{0-f(0)}=\frac{f(0)}{-f(0)}=-1$$

위의 방법처럼 풀면 안 돼!! 왜냐하면 위의 풀이는 $\lim_{x\to0}f(x)$가 0이 아닌 값을 가질 때만 풀 수 있는 거야.

그런데 주어진 조건만으로는 $\lim_{x\to0}f(x)$의 존재 여부를 알 수 없지?

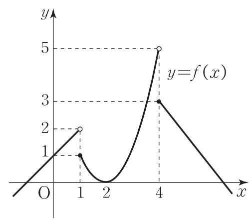
즉, 위의 본 풀이처럼 주어진 조건을 이용해 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구한 후 극한식을 변형하여 구해야 하는 거야.

## A 191 정답 ③ *새롭게 정의된 함수의 좌극한값과 우극한값 …… [정답률 30%]

**정답 공식:** $\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$, $\frac{4t-1}{t+1}=4-\frac{5}{t+1}$이다. $t\to\pm\infty$일 때 어떤 값에 가까워지는지 살핀다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

단서 함수 $f(x)$의 그래프가 불연속인 점이 있으므로 좌극한값과 우극한값을 정확히 판단하자.




$$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$$

의 값은? (3점)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

**1st** $y=f(x)$는 $x=1$, $x=4$에서 (좌극한값)$\neq$(우극한값)이지? 따라서 $t$에 관한 함수에 대하여 좌극한, 우극한을 정확히 판단해서 계산하자.

$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$에서 $x=\frac{t-1}{t+1}$이라 하면 $x=\frac{(t+1)-2}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$

$x=1-\frac{2}{t+1}$이므로 $t\to\infty$일 때, $x\to 1-$

실수 치환하여 극한값을 구할 때에는 치환한 문자가 다가가는 값이 바뀌는 것에 유의하자.

$\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$에서 $x=\frac{4t-1}{t+1}$이라 하면 $x=\frac{4(t+1)-5}{t+1}=4-\frac{5}{t+1}$

$x=4-\frac{5}{t+1}$이므로 $t\to-\infty$일 때, $x\to 4+$

**2nd** $x=1$에서 좌극한값, $x=4$에서 우극한값을 계산해야 해.

$$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{x\to1-}f(x)=2$$

$$\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{x\to4+}f(x)=3$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$$

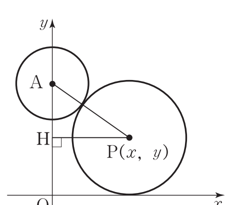
## A 192 정답 ④ *길이에 대한 극한의 활용 …… [정답률 35%]

**정답 공식:** 두 점 A, P 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다는 것을 이용해 $y$를 $x$에 대하여 나타내고 극한값을 구한다.

그림과 같이 중심이 $\mathrm{A}(0, 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $x$축에 접하는 원의 중심을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하자. 점 P에서 $y$축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}}$의 값은? (4점)

단서1 (원의 반지름의 길이)$=|$원의 중심의 $y$좌표$|$

단서2 $\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}}$를 $x$에 관한 식으로 변형해.




① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

**1st** 직각삼각형 AHP의 세 변인 $\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{PH}}$, $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 각각 $x$, $y$로 나타내.

중심이 P인 원이 $x$축에 접하므로 반지름의 길이는 점 P의 $y$좌표와 같다.

이때, 중심이 A인 원의 반지름의 길이가 1이고 두 원이 외접하므로

$\overline{\mathrm{PA}}=y+1$

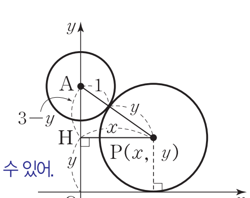
또, 두 점 $\mathrm{A}(0, 3)$, $\mathrm{P}(x, y)$에 의해

$\overline{\mathrm{PH}}=x$이고, $\overline{\mathrm{OH}}=y$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=3-y$

삼각형 AHP는 직각삼각형이므로

$(1+y)^2=x^2+(3-y)^2$ 피타고라스 정리를 이용할 수 있어. $\angle\mathrm{H}=90^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2$

$\therefore x^2=8y-8$ ⋯ ㉠




**2nd** $\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}}$의 값을 구해.

㉠에서 $y=\frac{x^2+8}{8}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{y+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\frac{x^2+8}{8}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2}{x^2+16}=8$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8}{1+\frac{16}{x^2}}=8$$

**다른 풀이:** $x\to\infty$이면 $y\to\infty$이므로 $x^2$을 $y$에 대한 식으로 바꾸어 풀기

㉠에서 $x\to\infty$이면 $y\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{y+1}=\lim_{y\to\infty}\frac{8y-8}{y+1}\ (\because ㉠)=8$$

실수 치환하여 극한값을 구할 때에는 치환한 문자가 다가가는 값에 유의하자.

## A 193 정답 226 *함수의 극한을 이용한 다항함수의 결정 …… [정답률 31%]

**정답 공식:** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 실수)일 때 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오. (4점)

(가) $\lim_{x\to0}\frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재한다.

단서1 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 하지? 이를 이용해 삼차함수 $f(x)$의 식을 미정계수를 이용하여 세울 수 있어.

(나) 모든 실수 $x$에 대하여 $xf(x)\geq-4x^2+x$이다.

단서2 삼차함수 $f(x)$의 식을 주어진 부등식에 대입한 후 모든 실수 $x$에 대하여 부등식이 성립하도록 하는 미정계수의 값의 범위를 찾아내.

**1st** 조건 (가)를 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 유추해.

조건 (가)에서 $\lim_{x\to0}\frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to0}x=0$이므로

$\lim_{x\to0}|f(x)-1|=0$이어야 한다.

즉, $f(0)-1=0$이므로 삼차식 $f(x)-1$은 $x$를 인수로 갖는다.

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가져.

이때, 최고차항의 계수가 1인 이차식 $g(x)$에 대하여

$f(x)-1=xg(x)$라 하자.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)-1$도 최고차항의 계수가 1인 삼차함수야. 따라서 이 식이 $x$를 인수로 가지므로 최고차항의 계수가 1인 이차식 $g(x)$를 이용하여 $f(x)-1=xg(x)$로 나타낼 수 있는 거야.

$$\lim_{x\to0+}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|xg(x)|}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{|x||g(x)|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x|g(x)|}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}|g(x)|=|g(0)|$$

$x\to0+$이므로 $x>0$이지? 즉, $|x|=x$가 돼.

$$\lim_{x\to0-}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|xg(x)|}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{|x||g(x)|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x|g(x)|}{x}$$

$$=-\lim_{x\to0-}|g(x)|=-|g(0)|$$

$x\to0-$이므로 $x<0$이지? 즉, $|x|=-x$가 돼.

이고, $\lim_{x\to0}\frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재하므로

$|g(0)|=-|g(0)|$에서 $g(0)=0$이다.

따라서 이차식 $g(x)$도 $x$를 인수로 가지므로

$g(x)=x(x+a)$ ($a$는 실수)라 하면

$f(x)-1=x^2(x+a)$에서 $f(x)=x^3+ax^2+1$ ⋯ ㉡이다.

**2nd** 조건 (나)를 이용하여 $a$의 값의 범위를 구해.

조건 (나)의 $xf(x)\geq-4x^2+x$에 ㉡을 대입하면

$x(x^3+ax^2+1)\geq-4x^2+x$, $x^4+ax^3+x+4x^2-x\geq0$

$x^4+ax^3+4x^2\geq 0$, $x^2(x^2+ax+4)\geq 0$

$\therefore x^2+ax+4\geq 0$ ($\because x^2\geq 0$)

모든 실수 $x$에 대하여 이 부등식이 성립하려면

이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 $D$라 할 때,

$D\leq 0$이어야 하므로

$a>0$일 때, 모든 실수 $x$에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D$라 할 때, $D=b^2-4ac\leq 0$이어야 해.

$D=a^2-16\leq 0$ $\quad\therefore -4\leq a\leq 4$ ⋯ ㉡

3rd $f(5)$의 최댓값을 구해.

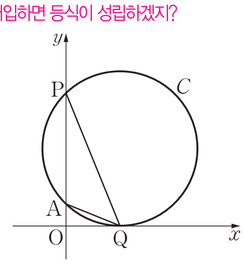
따라서 ㉠에서 $f(5)=25a+126$이므로 구하는 $f(5)$의 최댓값은 ㉡에 의해 $a=4$일 때 $f(5)=25\times 4+126=226$이다.

## A 194 정답 ② *넓이에 대한 극한의 활용 [정답률 30%]

정답 공식: 넓이를 구하는 삼각형의 밑변과 높이를 $x$축 또는 $y$축과 평행하도록 잡아서 넓이를 $t$에 대하여 나타낸다.

단서1 원이 지나는 점이 주어졌으니까 원의 방정식에 대입하면 등식이 성립하겠지?

그림과 같이 좌표평면 위의 점 A$(0,\ 1)$을 지나고 $x$축에 접하는 원 $C$가 있다. 원 $C$가 $y$축과 만나는 또 다른 점을 P라 하고, $x$축과 접하는 점을 Q$(t,\ 0)$이라 하자. 삼각형 APQ의 넓이를 $S(t)$, 원 $C$의 반지름의 길이를 $r(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{S(t)}{t\times r(t)}$의 값은? (단, $t>1$이다.)




단서2 원이 $x$축과 접하게 되면 원의 반지름의 길이는 원의 중심의 $y$좌표의 절댓값과 같아. (4점)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

1st $x$축에 접하는 원의 반지름의 길이는 원의 중심의 $y$좌표의 절댓값과 같아.

원 $C$는 $x$축 위의 점 Q$(t,\ 0)$과 접하고, 반지름의 길이를 $r(t)$라 하므로 원의 중심은 $(t,\ r(t))$이다.

원 $C$의 방정식은

$(x-t)^2+\{y-r(t)\}^2=\{r(t)\}^2$ ⋯ ㉠

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에 대하여
(1) $x$축에 접하는 원 : $r=|b|$
(2) $y$축에 접하는 원 : $r=|a|$
(3) $x$축, $y$축에 접하는 원 : $r=|a|=|b|$

2nd $S(t)$, $r(t)$를 $t$에 관한 식으로 나타내보자.

원 $C$가 점 A$(0,\ 1)$을 지나므로 ㉠에 $x$ 대신 0, $y$ 대신 1을 대입하자.

$(0-t)^2+\{1-r(t)\}^2=\{r(t)\}^2$, $t^2+1-2r(t)+\{r(t)\}^2=\{r(t)\}^2$

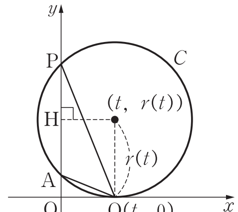
$\therefore r(t)=\dfrac{t^2+1}{2}$ ⋯ ㉡

한편, $S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times t$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이만 구하면 된다.

그림과 같이 원의 중심 $(t,\ r(t))$에서 $\overline{\mathrm{AP}}$에 수선의 발 H를 내리면

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{OA}}=r(t)-1$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\{r(t)-1\}$




$\therefore S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times t$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\{r(t)-1\}\times t$

$=t\{r(t)-1\}$

이것에 ㉡을 대입하면

$S(t)=t\left(\dfrac{t^2+1}{2}-1\right)=\dfrac{t(t^2-1)}{2}$ ⋯ ㉢

주의 원 위의 두 점과 원의 중심을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형은 이등변삼각형이고 이등변삼각형의 꼭지각에서 밑변에 내린 수선은 밑변을 이등분해.

3rd ㉡, ㉢을 구하는 극한에 대입하자.

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t\times r(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{t(t^2-1)}{2}}{t\times\frac{t^2+1}{2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3-t}{t^3+t}=1$$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 계산할 때, 분모, 분자의 차수가 같으니까 최고차항의 계수의 비로 구한 거야.

## A 195 정답 16 2등급 대비 [정답률 29%]

*새롭게 정의된 함수의 극한을 함수의 정의에 따라 구하기 [유형 01+14]

$x$가 양수일 때, $x$보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>2f(x)) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (x\leq 2f(x)) \end{cases}$$

단서1 $f(x)$와 $g(x)$의 정의를 잘 파악해야 해. $x$의 기준을 먼저 나누고 시작하자.

라고 하자. 예를 들어, $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=2$이고 $\dfrac{7}{2}<2f\left(\dfrac{7}{2}\right)$이므로 $g\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이다. $\lim\limits_{x\to 8+}g(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to 8-}g(x)=\beta$라고 할 때, $\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오. (4점)

단서2 $8<x<9$일 때와 $7<x<8$일 때로 나누어서 생각해봐.

왜 2등급? 이 문제는 $x$보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수로 정의된 $f(x)$를 이용하여 새롭게 정의된 함수 $g(x)$의 $x=8$에서의 좌극한값과 우극한값을 구하는 문제이다.

함수 $g(x)$가 $x$와 $2f(x)$의 대소에 따라 정의되어 있다는 것을 정확히 파악하는 과정이 복잡하다.

### 단서+발상

단서1 $f(x)$의 정의가 $x$보다 작은 자연수 중 소수의 개수이므로 $x$를 자연수일 때와 아닐 때로 구분하고, 자연수가 아닐 때는 $x$보다 작은 자연수 중 가장 큰 수가 동일한 실수 $x$끼리 나누어 생각해야 한다. 발상

이때, $x$보다 작은 자연수 중 가장 큰 수가 8인 자연수가 아닌 실수 $x$의 범위는 $8<x<9$이고 $x$보다 작은 자연수 중 가장 큰 수가 7인 자연수가 아닌 실수 $x$의 범위는 $7<x<8$이므로 $7<x<8$일 때와 $8<x<9$일 때로 나누어 생각한다. 적용

단서2 $7<x<8$일 때와 $8<x<9$일 때의 함수 $f(x)$를 각각 구하고 $x$와 $2f(x)$의 대소에 따라 $g(x)$를 구한 후 $x=8$에서의 좌극한값과 우극한값을 구한다. 해결

주의 $x=8$의 좌우에서 $x$와 $2f(x)$의 대소가 바뀜에 주의하여 함수 $g(x)$를 구한다.

핵심 정답 공식: $x\to 8+$의 의미는 $x$가 8의 오른쪽에서 8에 가까이 접근한다는 것이므로 $8<x<9$이고 $x\to 8-$의 의미는 $x$가 8의 왼쪽에서 8에 가까이 접근한다는 것이므로 $7<x<8$이다.

[문제 풀이 순서]

1st $x=8$에서 함수 $g(x)$의 우극한값을 계산하자.

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=p$일 때 $p$를 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한값이라고 해.

$8<x<9$인 $x$에 대하여 $x$보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 $f(x)=4$

주의 1은 소수도 합성수도 아니야!

이때, $2f(x)=8<x$ ($\because 8<x<9$)이므로

$g(x)=f(x)=4$

$\therefore \alpha=\lim\limits_{x\to 8+}g(x)=\lim\limits_{x\to 8+}4=4$ ⋯ ㉠

**2nd** $x=8$에서 함수 $g(x)$의 좌극한값을 계산하자.

$\lim_{x\to a-} f(x)=q$일 때 $q$를 $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한값이라고 해.

$7<x<8$인 $x$에 대하여 $x$보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 $f(x)=4$

이때, $2f(x)=8>x$ ($\because$ $7<x<8$)이므로

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \beta=\lim_{x\to 8-} g(x)=\lim_{x\to 8-}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에 의해 $\frac{\alpha}{\beta}=16$

1등급 대비 특강

**＊ $x=8$을 기준으로 좌우의 함숫값의 변화 관찰하기**

구하는 값이 $x$가 8보다 크면서 8에 가까워지는 경우의 $g(x)$와 $x$가 8보다 작으면서 8에 가까워지는 경우의 $g(x)$를 구하는 것이므로 $8<x<9$인 경우와 $7<x<8$인 경우로 나눌 수 있어.
이 두 경우 모두 $f(x)=4$이므로 $x$와 $2f(x)$의 대소를 비교하여 $g(x)$를 각각의 범위에서 구할 수 있어.

## A 196 정답 ⑤ ……… 1등급 대비 [정답률 18%]

＊함수의 극한을 이용한 다항함수의 결정 [유형 05+16]

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. **단서2** $f(1)=0$, $g(1)=0$이므로 $f(x)=(x-1)(x-a)(x-b)$, $g(x)=(x-1)(x-c)(x-d)$로 놓을 수 있어.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ ($n=1, 2, 3, 4$)

**단서1** $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이고 $g(1)=0$이므로 $f(1)=0$이어야 해.

$g(5)$의 값은? (4점)

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

**왜 1등급?** 함수의 극한의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 추론하는 문제이다.
$x\to a$일 때 분수 형태의 함수의 극한값이 존재하고 $x\to a$일 때 (분모)$\to 0$이면 (분자) $\to 0$임을 적용해야 하는 과정이 복잡하다.

**단서+발상**

**단서1** 먼저, 조건 (나)의 식에 $n=1$, $n=2$를 차례로 대입하고 $g(1)=0$과 분수 꼴의 극한의 성질에 의하여 다항함수 $f(x)$가 갖는 인수를 찾아 함수 $f(x)$의 식을 완성한다. (개념)

**단서2** 이제, 함수 $f(x)$와 $n=3$, $n=4$를 조건 (나)의 식에 차례로 대입하여 다항함수 $g(x)$가 갖는 인수를 찾아 함수 $g(x)$의 식을 완성하고 $g(5)$의 값을 구한다. (해결)

**주의** $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$일 때, $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이지만 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이어도 꼭 $\lim_{x\to a} g(x)=0$인 것은 아니다.

**핵심 정답 공식:** 분수 꼴의 극한의 극한값이 존재하고 $x\to a$일 때, (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이어야 한다.

[문제 풀이 순서]

**1st** $n=1$, 2일 때, 극한값이 존재하는 조건을 가지고 $f(x)$를 구해.

조건 (나)에 $n=1$, 2를 차례로 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0\ \cdots\ ㉠,\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=0\ \cdots\ ㉡$$

이때, 조건 (가)의 $g(1)=0$에서 $g(x)$는 $(x-1)$을 인수로 가지므로 ㉠이 성립하려면 $f(x)$도 $(x-1)$을 인수로 가져야 한다.
즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 $f(x)=(x-1)(x-a)(x-b)$, $g(x)=(x-1)(x-c)(x-d)$ (단, $a$, $b$, $c$, $d$는 상수)라 두고 ㉠에 각각 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-a)(x-b)}{(x-1)(x-c)(x-d)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}=0$$

극한값이 0이 되려면 $a$ 또는 $b$가 1이 되어야 한다.
$a=1$이라 하면 $f(x)=(x-1)^2(x-b)$
마찬가지로 ㉡에 대입하면 $f(x)$는 $(x-2)$를 인수로 가져야 하므로
$f(x)=(x-1)^2(x-2)$

**함정** $f(x)$가 삼차함수이고, 이미 $(x-1)^2$과 $(x-2)$를 인수로 가지므로 조건 (나)를 만족시키기 위해서 $g(x)$는 $(x-2)$를 인수로 가질 수 없어.

**2nd** $n=3$, 4일 때, 주어진 극한값을 이용하여 $g(x)$를 구해.

이번엔 조건 (나)에 $n=3$, 4를 차례로 대입하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=2,\ \lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{g(x)}=6\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x-c)(x-d)}=\frac{2}{(3-c)(3-d)}=2\text{에서}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x-c)(x-d)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-c)(x-d)}=\frac{2\times 1}{(3-c)(3-d)}=\frac{2}{(3-c)(3-d)}$$

$(3-c)(3-d)=1$, $9-3(c+d)+cd=1$
$\therefore\ 3(c+d)-cd=8\ \cdots\ ㉢$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x-c)(x-d)}=\frac{6}{(4-c)(4-d)}=6\text{에서}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x-c)(x-d)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-c)(x-d)}=\frac{3\times 2}{(4-c)(4-d)}=\frac{6}{(4-c)(4-d)}$$

$(4-c)(4-d)=1$, $16-4(c+d)+cd=1$
$\therefore\ 4(c+d)-cd=15\ \cdots\ ㉣$

㉢, ㉣을 연립하면 $c+d=7$, $cd=13$
㉣$-$㉢을 하면 $c+d=7$이고, $c+d$를 ㉢에 대입하면 $3\times 7-cd=8$이므로 $cd=13$이야.

따라서 $g(x)=(x-1)(x-c)(x-d)$에 $x=5$를 대입하면

$$g(5)=4(5-c)(5-d)=4\{25-5(c+d)+cd\}$$
$$=4(25-5\cdot 7+13)=12$$

1등급 대비 특강

**＊ $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지는 이유**

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$에서 분모를 0으로 만드는 인자, 즉 $x$를 분모가 인수로 가지고 있으므로 극한값이 존재하려면 분자도 $x$를 인수로 가져야 해. 그런데 극한값이 0이므로 분자는 최소 $x^2$을 인수로 가져야겠지? 따라서 자연수 $m$, $n$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{x^m}{x^n}=0$이면 $m>n$이어야 해. 이것을 이용하면 자연수 $k$와 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이고 $g(x)$를 0으로 만드는 인자, 즉 $(x-n)^k$을 $g(x)$가 인수로 가질 때, 극한값이 0이려면 $f(x)$는 최소 $(x-n)^{k+1}$을 인수로 가져야 해. 따라서 이 문제의 조건 (가)에서 $g(x)$가 $x-1$을 인수로 갖고 조건 (나)에서 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 해.

경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점+4점+5점]

## A 201 정답 ① *새롭게 정의된 함수의 극한 ······ [정답률 58%]

정답 공식: 다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\le k) \\ h(x) & (x>k) \end{cases}$로 정의될 때, $f(k)=g(k)$이고, $\lim\limits_{x\to k+} f(x)=h(k)$이다.

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\le 2) \\ ax+b & (x>2) \end{cases}$$

단서 $a<2$ 또는 $a>2$일 때는 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$이고, $a=2$에서는 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$의 값과 $f(a)$의 값이 다를 수 있어.

에 대하여 $f(a)+\lim\limits_{x\to a+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 $a$의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.) (4점)

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

**1st** $x$의 값의 범위를 나누어 $f(a)+\lim\limits_{x\to a+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 $a$를 찾자.

(i) $x\ne 2$인 경우

$f(x)$는 다항함수이므로 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$이다.

즉, $f(a)+\lim\limits_{x\to a+} f(x)=2f(a)=4$이므로 $f(a)=2$이다.

i) $x<2$일 때

$f(x)=x^2+1$이므로 $x^2+1=2$에서

$x^2=1$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

즉, $f(a)=2$를 만족시키는 $a$의 값은 $-1$, $1$이다.

ii) $x>2$일 때

$f(x)=ax+b$에서 $ax+b=2$인 $x$의 값이 최대 1개 존재하므로

$a\ne0$일 때 $f(x)=ax+b$는 일차함수이므로 $f(a)=2$인 $a$의 값이 1개만 존재해.
만약, $a=0$, $b=2$이면 $f(a)=2$를 만족시키는 $a$의 값은 무수히 많으므로 조건을 만족시키지 않아.
또한, $a=0$, $b\ne2$이면 $x>2$에서는 $f(a)=2$를 만족시키는 $a$의 값이 없지.
그렇다면 조건을 만족시키는 $a$의 값이 $x<2$일 때 2개이므로 $x=2$일 때 1개가 되어도 $a$의 값이 모두 4개라는 조건을 만족시키지 않아.

그 값을 $a_1$이라 하자.

i), ii)에서 $x\ne2$일 때 $f(a)+\lim\limits_{x\to a+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 $a$는 $-1$, $1$, $a_1\,(aa_1+b=2)$의 3개이다.

(ii) $x=2$, 즉 $a=2$인 경우

$x<2$에서 $f(a)=2$인 $a$의 값이 2개이고, $x>2$에서 $f(a)=2$인 $a$의 값이 1개이므로 $x=2$에서, 즉 $a=2$일 때 $f(2)+\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=4$가 성립해야 해.

$f(2)=2^2+1=5$이므로 $f(2)+\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=4$에서

$\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=4-f(2)=4-5=-1$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+} (ax+b)=-1$이므로 $2a+b=-1$ ··· ㉠

(i), (ii)에 의해 $f(a)+\lim\limits_{x\to a+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 $a$는

$-1$, $1$, $a_1\,(aa_1+b=2)$, $2$의 4개이다.

**2nd** 실수 $a$가 될 수 있는 수의 합을 이용하여 $a$, $b$의 값을 각각 구해.

이때, 실수 $a$의 값인 네 수 $-1$, $1$, $a_1\,(aa_1+b=2)$, $2$의 합이 8이므로

$-1+1+a_1+2=8$ $\therefore a_1=6$

$\therefore 6a+b=2$ ··· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{4}$, $b=-\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{7}{4}$

## A 202 정답 ③ *함수의 극한을 이용한 다항함수의 결정 ··· [정답률 39%]

정답 공식: 다항함수 $F(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x^n}=\alpha$ ($\alpha$는 0이 아닌 실수, $n$은 자연수)이면 $F(x)$의 차수는 $n$이고 최고차항의 계수는 $\alpha$이다.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$

단서1 $f(x)-2g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수야.

(나) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$

단서2 $f(x)+3g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수지.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^3}$의 값은? (3점)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

**1st** 주어진 극한값을 이용해 분자에 있는 식의 꼴을 찾아보자.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$이므로

$f(x)-2g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 극한값이 0이 아닌 값으로 수렴하기 위해서는 분모와 분자의 차수가 같아야 하고, 그 극한값은 최고차항의 계수의 비와 같아.

즉, $f(x)-2g(x)=x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수) ··· ㉠라 놓을 수 있다.

또한, 조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$이므로

$f(x)+3g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

즉, $f(x)+3g(x)=x^3+cx^2+dx+e$ ($c$, $d$, $e$는 상수) ··· ㉡라 놓을 수 있다.

**2nd** ㉠, ㉡을 이용해 $g(x)$의 식을 구해.

이때, ㉡$-$㉠을 하면

$5g(x)=x^3+(c-1)x^2+(d-a)x+e-b$

$\therefore g(x)=\frac{1}{5}\{x^3+(c-1)x^2+(d-a)x+e-b\}$ ··· ㉢

**3rd** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^3}$를 구해.

따라서 ㉠에서 $f(x)=2g(x)+x^2+ax+b$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2g(x)+x^2+ax+b+g(x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3g(x)+x^2+ax+b}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3g(x)}{x^3}+\frac{x^2+ax+b}{x^3}\right)$$

㉢에 의해 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3g(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{5}\{x^3+(c-1)x^2+(d-a)x+e-b\}}{x^3}=\frac{3}{5}$

이고, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+ax+b}{x^3}=0$이야.

$$=\frac{3}{5}\ (\because ㉢)$$

# 3회 수학 Ⅱ 실전 기출 모의고사 문제편 p. 268

## 3회 01 정답 ① *$h \to 0$일 때의 미분계수의 정의 [정답률 94%]

( 정답 공식: 미분계수의 정의로부터 $f'(1)$의 값을 구한다. )

함수 $f(x)=x^2+5$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? (2점)

단서 $f'(1)$의 정의야.

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

1st 미분계수의 정의에서 $f'(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$임을 이용하자.

함수 $f(x)=x^2+5$에서 $f'(x)=2x$이므로

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=2$

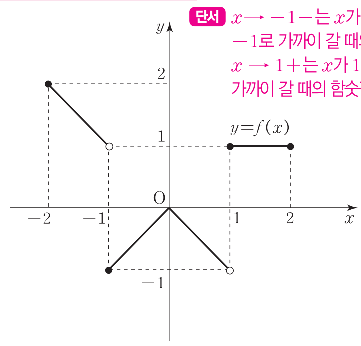
→ 자연수 $n$에 대하여 $(x^n)'=nx^{n-1}$

## 3회 02 정답 ⑤ *함수의 좌극한값과 우극한값 [정답률 95%]

( 정답 공식: 주어진 그래프로부터 두 개의 극한값을 각각 계산한다. )

정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x \to -1-} f(x)+\lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? (3점)

단서 $x \to -1-$는 $x$가 $-1$의 왼쪽에서 $-1$로 가까이 갈 때의 함숫값이고 $x \to 1+$는 $x$가 1의 오른쪽에서 1로 가까이 갈 때의 함숫값이야.




① $-2$ ② $-1$ ③ 0
④ 1 ⑤ 2

1st 그래프에서 각 점에서의 좌극한값과 우극한값을 구하자.

$x=-1$에서의 좌극한값과 $x=1$에서의 우극한값을 각각 구하면

$\lim_{x \to -1-} f(x)=1$, $\lim_{x \to 1+} f(x)=1$

→ $x$가 $-1$의 왼쪽에서 $-1$로 가까이 가면 $f(x)$는 1에 가까이 가고 $x$가 1의 오른쪽에서 1로 가까이 가면 $f(x)$는 1에 가까이 가.

$\therefore \lim_{x \to -1-} f(x)+\lim_{x \to 1+} f(x)=1+1=2$

## 3회 03 정답 ① *정적분의 값을 이용한 미정계수의 결정 [정답률 87%]

( 정답 공식: 함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면 $\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$이다. )

$\int_0^1 (4x-3)dx+\int_1^k (4x-3)dx=0$일 때, 양수 $k$의 값은? (3점)

단서 피적분함수 $4x-3$이 공통으로 들어가 있으므로 정적분의 성질을 이용하여 간단히 한 후 풀자.

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

1st 정적분의 성질을 이용하여 식을 간단히 하자.

$\int_0^1 (4x-3)dx+\int_1^k (4x-3)dx=\int_0^k (4x-3)dx$

$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

$=\Big[2x^2-3x\Big]_0^k$

$=2k^2-3k$

$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

$2k^2-3k=0$에서 $k(2k-3)=0$

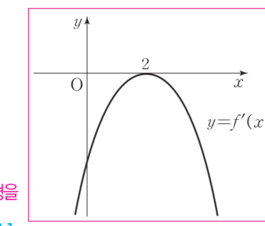
$\therefore k=\frac{3}{2}$ ($\because k>0$)

## 3회 04 정답 ③ *함수의 증가 · 감소와 극대 · 극소 [정답률 68%]

( 정답 공식: 주어진 도함수로부터 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 유추한다. )

그림은 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프이다. 함수 $f(x)$에 대한 설명 중 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (3점)

단서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 유추해 봐.




[보기]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 감소상태에 있다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 오직 한 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 도함수 $f'(x)$의 부호에 따라 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 파악하자.

ㄱ. 함수 $f(x)$에 대하여 $x=0$에서 $f'(0)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 감소상태에 있다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 $f'(2)=0$이지만 $x \ne 2$인 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)<0$으로 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

[도함수를 이용한 극댓값의 판정]
함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $(+)$에서 $(-)$로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가져.

ㄷ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $x=2$에서 $f'(2)=0$이고, 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x) \le 0$이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에서 감소함수이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 $x$축과 오직 한 점에서 만난다. (참)

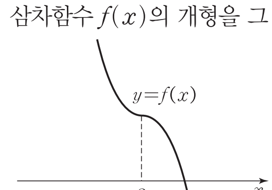
$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x)=-\infty$이고 실수 전체에서 함수 $f(x)$는 감소함수이므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 오직 한 점에서 만나.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이: **증가와 감소를 나타내는 표로 나타내어 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 그리기**

$f'(x)$는 $x=2$에서 중근을 가지는 이차함수지?
따라서 $f'(x)=a(x-2)^2$ $(a<0)$이라 하고 주어진 그래프를 이용하여
도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 음수야.
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내어 삼차함수 $f(x)$의 개형을 그리자.

| $x$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ |




따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이야.