문제 유형을 촘촘히 분류해 개념을 적용시키면
수학이 쉬워집니다!

개념을 익히고 그 개념들을 단계별로
연결하여 파악하는 것이 수학 공부의 기본입니다.
만약 개념 이해 과정을 소홀히 하고, 문제만 반복하여 푼다면
개념 사이의 연계성을 파악할 수 없어
오랜 시간 공부해도 성적을 올릴 수 없습니다.

자이스토리 고3 수학은
최신 수능, 평가원, 학력평가 및 경찰대, 삼사 기출 문제를 정밀하게 분석해
개념의 연계성에 따라 문제 유형을 촘촘히 분류하였습니다.
따라서 유형별 기출 문제를 순서대로 차근차근 풀어가면
개념의 연계성이 명쾌하게 파악되어서 문제 풀이가 쉬워집니다.

또한, 자이스토리의 정확하고 자세한 단계별 해설과 풍부한 보충 첨삭은
문제를 풀어가면서 개념을 알맞게 적용하는 방법을
자연스럽게 익힐 수 있습니다.

이 책의 마지막 페이지를 넘길 때쯤 여러분은 이미
수학 1등급에 도달해 있을 것입니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 –

수능 1등급 완성 학습 계획표 [35일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~52		월 일	월 일
2	53~97		월 일	월 일
3	98~121		월 일	월 일
4	B 01~53		월 일	월 일
5	54~102		월 일	월 일
6	103~137		월 일	월 일
7	C 01~52		월 일	월 일
8	53~103		월 일	월 일
9	104~144		월 일	월 일
10	145~172		월 일	월 일
11	D 01~49		월 일	월 일
12	50~95		월 일	월 일
13	96~138		월 일	월 일
14	139~172		월 일	월 일
15	E 01~58		월 일	월 일
16	59~108		월 일	월 일
17	109~154		월 일	월 일
18	155~192		월 일	월 일
19	F 01~55		월 일	월 일
20	56~99		월 일	월 일
21	G 01~58		월 일	월 일
22	59~110		월 일	월 일
23	111~159		월 일	월 일
24	160~197		월 일	월 일
25	198~230		월 일	월 일
26	H 01~52		월 일	월 일
27	53~102		월 일	월 일
28	103~151		월 일	월 일
29	152~183		월 일	월 일
30	I 01~44		월 일	월 일
31	45~88		월 일	월 일
32	89~134		월 일	월 일
33	모의 1회		월 일	월 일
34	모의 2회		월 일	월 일
35	모의 3회		월 일	월 일

- 나는 ________________ 대학교 ________________ 학과 __________ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

자이스토리 고3 수학 Ⅰ 활용법+α

❶ 개념 · 공식 학습 후 수능 출제 경향 확인!

- 각 단원에 필수적으로 알아야 하는 핵심 개념과 관련된 보충 설명을 꼼꼼히 살펴보세요.
- 최신 출제 경향을 파악하고 앞으로의 수능을 예측하세요.

❷ 수능과 모의고사에 나오는 모든 유형을 촘촘히 섭렵하자!

- 촘촘히 분류된 모든 유형을 확인하고 유형별 풀이 비법을 확인하세요.
- 유형 안에서 난이도 순으로 다시 분류된 문제를 보면서 각 유형에서 쉬운 문제는 어떻게 출제되는지, 고난도 문제는 어떻게 출제되는지 확인하세요.

❸ 부족한 유형을 다시 한 번 점검하자!

- 자신에게 부족한 유형을 찾아낸 후 부족한 부분을 여러 번 반복 학습해 보세요.
- 부족한 유형에 대한 특징과 핵심 개념을 다시 한 번 확인한 후 유형 해결 요령을 터득하세요.

❹ 1등급을 좌우하는 고난도 문항을 완벽하게 마스터하자!

- 1등급 대비 문제는 복합적인 개념을 묻기 때문에 여러 개념을 정확히 파악한 뒤 종합적 사고를 하세요.
- 1등급 문제의 핵심이 되는 단서로 조건을 파악하고 조건을 이용하여 접근하는 방법을 발상해서 문제 풀이에 적용하는 방법을 익히세요.

❺ 쉽게 이해되는 입체 첨삭 해설을 공부해서 다시는 틀리지 말자!

- [첨삭 해설]과 [실수, 함정, 주의 첨삭]을 따라가다 보면 풀이 과정에서 놓치기 쉬운 부분이나 이해가 어려운 부분을 쉽게 풀어 주어 해설을 완벽하게 이해할 수 있어요.
- 쉬운 풀이, 톡톡 풀이, 다른 풀이를 꼼꼼히 읽어서 시간을 줄일 수 있는 풀이법을 찾아보세요.
- 문제 해결 과정에 사용된 개념 · 공식을 다시 한 번 확인하여 놓치고 있었던 내용이 없는지 확인하세요.
- 수능 핵강으로 문제에 대한 개념을 완벽하게 이해하세요.

❻ 오답노트를 만들어 100% 활용하자!

- 반드시 오답노트를 만들어 보세요. 해설에 제시된 단서 또는 접근법도 같이 기록하여 풀어 봤던 문제는 다시는 틀리지 않도록 여러 번 풀어보세요.
- 시간이 지난 후 오답노트를 읽어 보며 해설의 아이디어를 바탕으로 풀이를 따라가 보고 자신만의 풀이도 추가해 보세요.

단원별 핵심 문제 + 최신 · 중요 문제 동영상 강의 QR코드

1. 개념 강의로 핵심 개념을 이해하고 개념이 문제에 적용되는 것을 확인해 보세요!
2. 동영상 문제 풀이로 해설을 좀 더 빠르게 이해할 수 있어요!
3. 해설의 풀이를 읽어보고 동영상 강의를 시청하면 더 쉽게 이해될 거예요!
4. 풀기 어려운 고난도 문제는 동영상 강의를 여러 번 반복 시청해 보세요!

차 례 [총 159개 유형 분류]

다른 풀이, 쉬운, 톡톡 풀이 대폭 강화

1등급 문제 단서, 발상, 적용 단계별 해설

Ⅰ 지수함수와 로그함수

A 지수 – 12개 유형 분류

B 로그 – 15개 유형 분류

C 지수함수와 로그함수 – 22개 유형 분류

D 지수함수와 로그함수의 활용 – 19개 유형 분류

Ⅱ 삼각함수

E 삼각함수 – 29개 유형 분류

F 삼각함수의 활용 – 13개 유형 분류

Ⅲ 수열

Special 수학 Ⅰ 실전 기출 모의고사

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

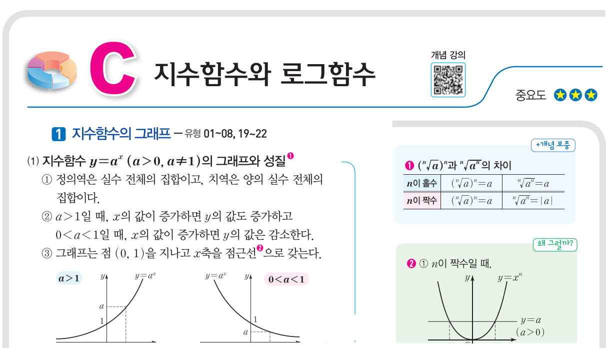
셀프수학

개념 총정리 + 촘촘한 유형 분류 기출 문제 = 수능 1등급

1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

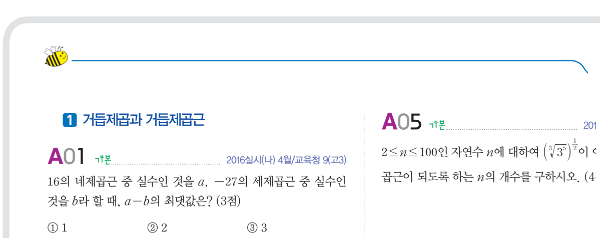
가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념과 공식을 쉽게 이해할 수 있도록 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 제공되는 강의와 보충 설명으로 개념과 공식의 이해를 돕고 실전 문제에서 적절하게 개념을 사용할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

- **중요도** ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요도 제시
- +개념 보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2024학년도 수능과 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시


C 지수함수와 로그함수
개념 강의
중요도 ★★★
1 지수함수의 그래프 – 유형 01~08, 19~22
(1) 지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$의 그래프와 성질
① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고 $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
③ 그래프는 점 (0, 1)을 지나고 x축을 점근선으로 갖는다.

2 기본 기출 문제 – 쉬운 기출 문제로 개념 점검

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 기본 개념과 공식을 확인하는 기출 문제를 수록하였습니다. 이는 개념 이해를 강화하고 응용 문제를 풀 수 있는 초석을 쌓는 과정입니다.


1 거듭제곱과 거듭제곱근
A01 16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? (3점)
A05 $2\le n\le100$인 자연수 n에 대하여 ...

3 경찰대·삼사 기출 문제 – 최신 중요 기출 문제 수록

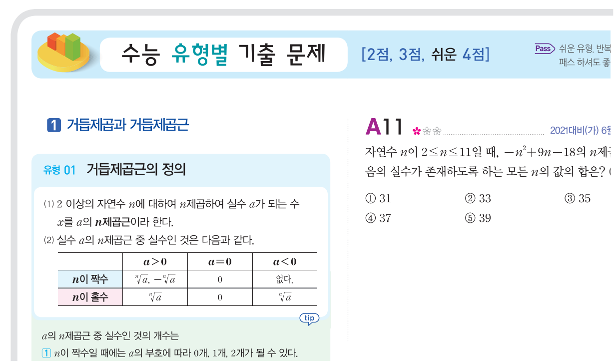
경찰대 기출과 삼사 기출 문제 중 수능 출제 기준에 맞는 중요 문항을 엄선하여 수록하였습니다.


경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점 + 4점 + 5점]
A116 2022대비 경찰대 13(고3)
A119 실수 x에 대하여 $2^{3x}=9$일 때, $3^{\frac{2}{x}}$의 값은? (3점)

4 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하여 유형, 개념, 난이도 순서대로 문항을 배열하였습니다. 기출 문제가 부족한 단원이나 유형은 고품격 수능 기출 변형 문제를 출제하여 추가 수록하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- QR코드 : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.


수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]
1 거듭제곱과 거듭제곱근
유형 01 거듭제곱근의 정의
A11

- **유형 분류** : 출제 – 2024 수능, 평가원에서 출제된 유형
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형

- **난이도** : ✿✿✿ – 기본 문제 ✿✿✿ – 중급 문제
  ✿✿✿ – 중상급 문제 ✿✿✿ – 상급 문제
- Pass : 간단한 계산 문제로 패스해도 좋은 문제

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2024대비 수능 1(고3) : 2023년 11월에 실시한 수능
  - 2024대비 6월 모평 2(고3) : 2023년 6월에 실시한 평가원
  - 2023실시 4월 학평 3(고3) : 2023년 4월에 실시한 학력평가
  - 2024대비 9월 모평 2(고3) : 2023년 9월에 실시한 평가원

5 수학 I 실전 기출 모의고사

기출 문제로 구성한 3회의 실전 모의고사입니다.
수능을 대비하여 실력을 점검하는 데 큰 도움이 될 것입니다.

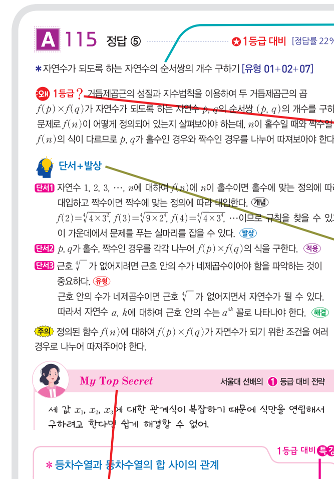

1회 수학 I 실전 기출 모의고사
2025학년도 수능 대비 ①
5지선다형
01 $27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4$의 값은? (2점)
05

6 1등급 마스터 문제 – 1등급 대비, 2등급 대비, 4점 문제 수록

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 키워서 반드시 수학 1등급에 도달할 수 있습니다.

- ●✽✽✽ – 상급 문제
- ✪ 2등급 대비 – 정답률이 21~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- ✪ 1등급 대비 – 정답률이 20% 이하인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제

7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설



문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

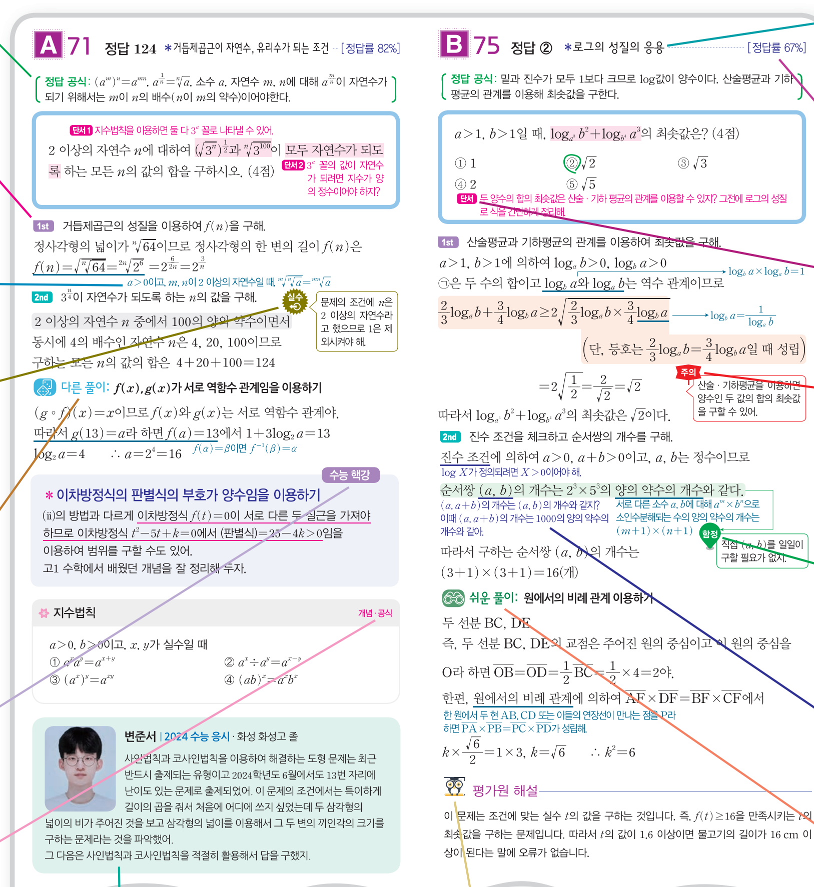
왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
- 단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
- 개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
- 유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
- 발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
- 적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
- 해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

8 입체 첨삭 해설!



정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

생생체험
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

평가원 해설
오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빠뜨리거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여고
김대식 경기 하남고
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 안양 안양외고
박숙녀 아산 충남삼성고
배수나 서울 가인아카데미
신건률 대치 오름학원
신명선 안양 신성고
신현준 안양 신성고
윤장노 안양 신성고
윤혜미 서울 세종과학고
이종석 저) 일등급 수학
이창희 서울 THE 다원수학
위경아 서울 강남대성기숙의대관
장광걸 김포 김포외고
장경호 오산 운천고
장철희 서울 보성고
전경준 서울 풍문고
조승원 수원 경기과학고
지강현 안양 신성고
홍지언 부산 피보나치 수학
홍지우 안양 평촌고
황광희 경기 시흥고
수경 수학 컨텐츠 연구소

[다른 풀이 집필]

김연주 목동쌤올림수학
김요셉 김포 대치명인학원
김호원 분당 원수학학원
사공 원 의정부 호연지기
안병훈 부산 팀매쓰수학전문학원
유대호 평촌 플랜지에듀
이강수 반포 뉴파인 학원
장영환 제주 제로링수학교실
정광조 서울 로드맵수학
정태성 부산 하이스트

개념&문제 풀이
강의 선생님
유튜브 채널
셀프수학

[감수진]

강동은 반포 세정학원
강성철 서울 일타수학학원
강현아 서울 수능수학 전문컨설턴트
강효선 광주 강효선수학학원
고지윤 김포 고수학전문학원
곽웅수 광주 카르페영수학원
권혁재 성남 수학의 아침
김건우 부산 4퍼센트의 논리
김기호 서울 대치파인만학원
김대운 대구 중앙SKY학원
김민수 서울 원수학
김선영 대구 청림수학학원
김성민 부산 직관수학학원
김연일 서울 미래인재학원
김유진 서울 수능수학 전문컨설턴트
김인하 김포 양곡고
김지은 김포 수학학원
김찬규 의왕 올마이티매쓰학원
김태환 대구 로고스 수학학원(침산원)
김혜정 서울 우리생수학학원
남지혜 부산 수능수학 전문컨설턴트
마지희 고양 이안의학원
문재웅 수원 수학의공간
박경준 용인 수학의준석
박미화 전주 엄쌤수학전문학원
박보경 부산 화명고
박성찬 수원 성찬쌤's 수학의공간
박은하 서울 이지매쓰수학학원
박장호 구미 현일고
박재윤 천안 박재윤수학학원
박정일 통영 SM학원
박혜인 양산 참좋은학원
박희수 광주 태전고
배진수 용인 수학의진수학원
서봉원 서산 SM수학교습소
송지민 창원 석동 지음학원
신영진 전주 유나이츠학원
심재인 김포 현준쌤 수학학원
심혜정 부산 영품수학
안보현 군포 LSE학원
안준석 부산 이든수학교습소
안지환 울산 수능수학 전문컨설턴트
양형준 전주 대들보 수학
양해영 대치 청출어람학원
원기찬 부산 양운고
유선형 강릉 Pf math
유승준 서울 해볼수학학원
윤성호 서울 혜성코멧학원 의대관
윤용기 계룡 비엠수학
윤혜영 성남 뷰티풀수학
이경미 포천 학원빡쎈
이경민 서울 대치에스학원
이경수 부산 경수학
이경화 의정부 의정부여고
이경효 고양 효수학학원
이상협 인천 마스터수학학원
이상훈 대구 명석수학학원
이영현 파주 대치명인학원
이용희 청주 주성박미숙수학학원
이재선 김해 하이퍼 학원
이재희 대전 집단지성학원
이정민 김해 하이퍼 수학, 영어 전문학원
이준현 구미 진샘제이에스학원
이진희 서울 서준학원
이창현 양주 U2M수학학원
이현웅 서울 웅수학학원
인수진 청주 청주여상
임정혁 김포 하이엔드 수학
임지민 시흥 피타고라스 수학학원
임현아 성남 분당 수이학원
장우희 남양주 서연고학원
장진영 충주 수능수학 전문컨설턴트
전수현 전) 서울 페르마수학 학원
전하윤 대전 하몽수학
정다원 광주 인성고
정은경 목포 베스트 수학
정희정 부산 정쌤수학교습소
조용희 부산 최상위수학학원
주기호 창원 비상한수학국어학원
차슬기 고양 브레인리그
차영진 울산 창조적소수수학전문학원
최경락 인천 경서대신학원
최규식 서울 CMS관악영재관
최규종 울산 뉴토모수학전문학원
최동훈 김포 고수학전문학원
최세남 서울 엑시엄수학학원
최영광 대전 우범석영어수학전문학원
최정현 부산 더쎈수학학원
하수민 창원 퀀덤영재학원
한양근 광주 TAP라온학원
현제윤 서울 정명수학학원
홍승원 계룡 The채움수학
홍유미 광주 채홍수학학원

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
김진형 서울대 약학과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
황대윤 서울대 수리과학부

수능 선배들의 비법 전수 – 수험장 생생 체험 소개

긴장되고 떨리는 수험장에서 선배들이
문제를 풀면서 겪은 생생한 체험과 나만의 풀이 비법을
자이스토리 해설편에 수록했습니다.

• 2023년

강　한 서울 배재고 졸(고려대 융합에너지공학과)
권주원 서울 배재고 졸(서울대 정치외교학부)
김보겸 광주서석고 졸(연세대 지구시스템과학과)
김수정 부산국제고 졸(고려대 서어서문학과)
김준서 부산 대연고 졸(부산대 의예과)
김태산 광주서석고 졸(고려대 정치외교학과)
김현서 경기 평택고 졸(서강대 정치외교학과)
나인규 광주 국제고 졸(한양대 경영학과)
명준하 광주서석고 졸(연세대 사회환경시스템공학부)
박서영 부산 해운대고 졸(서울대 심리학과)
박세민 광주 광덕고 졸(서울대 의예과)
장경은 서울 세화여고 졸(고려대 통계학과)
장성욱 부산 대연고 졸(동아대학교 의예과)
정서린 서울 세화여고 졸(서울대 약학과)
조현준 익산 이리고 졸(전북대 의예과)
최윤성 서울 양정고 졸(서울대 공과대학 광역)
홍채연 서울 한영고 졸(고려대 불어불문학과)

• 2022년

강민성 부산 해운대고 졸(성균관대 의예과)
강연욱 서울 한영고 졸(연세대 노어노문학과)
고현웅 광주서석고 졸(전남대 의예과)
공준형 경기 우성고 졸(가톨릭관동대 의예과)
김서윤 경기 우성고 졸(성균관대 글로벌경제학과)
김예리 서울 수명고 졸(고려대 의예과)
김찬우 익산 이리고 졸(전남대 의예과)
김혜윰 경기 숭신여고 졸(서울대 인문대학)
박정빈 익산 이리고 졸(고려대 한국사학과)
박준현 전남 장성고 졸(육군사관학교)
송홍준 광주 국제고 졸(고려대 융합에너지공학과)
양예진 전주 상산고 졸(이화여대 의예과)
오석우 공주 한일고 졸(서울대 의예과)
오연주 전주 솔내고 졸(서강대 사회학과)
이수현 대구 송현여고 졸(고려대 정치외교학과)
장인우 광주 고려고 졸(서울대 인문학부)
전수현 경기 숭신여고 졸(한림대 의예과)
정지호 익산 남성고 졸(경찰대학교)
최준명 서울 양정고 졸(KAIST 전기 및 전자공학부)

2024 응시


곽지훈
서울 한영외고 졸업
– 세계지리


곽태웅
서울 강서고 졸업
– 윤리와 사상


권민재
서울 광영여고 졸업
– 생명과학 Ⅰ


김동현
안성 안법고 졸업
– 고3 수학 Ⅰ, 고3 확률과 통계


김서현
대전한빛고 졸업
– 지구과학 Ⅰ


김수민
광주 금호중앙여고 졸업
– 화학 Ⅱ


김신유
익산 남성고 졸업
– 화법과 작문 실전


김아린
대전한빛고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


김용희
화성 화성고 졸업
– 언어와 매체 실전

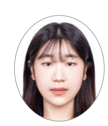

김지희
광주 국제고 졸업
– 한국지리


김태현
부산 대연고 졸업
– 물리학 Ⅰ


노규민
부산 용인고 졸업
– 지구과학 Ⅱ


류이레
광주대동고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


문지민
대구 정화여고 졸업
– 생활과 윤리


박주은
대전외고 졸업
– 동아시아사


백혜원
대구남산고 졸업
– 문학 실전


변준서
화성 화성고 졸업
– 고3 수학 Ⅰ, 고3 수학 Ⅱ


심기현
대구 계성고 졸업
– 화학 Ⅰ


오서윤
서울 광문고 졸업
– 고3 수학 Ⅱ, 고3 미적분


이준수
익산 남성고 졸업
– 고3 수학 Ⅱ, 기하


전성연
부산국제고 졸업
– 사회·문화


조수근
성남 태원고 졸업
– 독해 실전, 어법·어휘 실전


조인성
성남 태원고 졸업
– 수능 한국사


천원준
부산 동인고 졸업
– 생명과학 Ⅱ


허다현
부산 사직여고 졸업
– 독서 실전

문항 배열 및 구성 [1473제]

❶ 개념 이해 체크를 위한 기본 기출 문제 (67제)

필수 개념과 공식을 확인할 수 있는 기출 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초 실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 최신 6개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항 수록 (1335제)

- 최근 출제 경향을 파악할 수 있도록 최신 6개년 수능, 평가원 및 학력평가 기출 전 문항을 수록하였습니다.
- 2018~1994 수능, 평가원 및 학력평가 기출 문항 중 새수능 출제 기준에 맞는 문항을 엄선하여 수록하였습니다.

❸ 경찰대, 삼사 중요 기출 문제 수록 (73제)

경찰대, 삼사 기출 문항 중 중요 문항을 선별하여 수록하였습니다.

❹ 새수능 대비를 위한 고품격 수능 기출 변형 문제 (65제)

새수능을 대비해서 충분한 문제로 훈련할 수 있도록 수능 기출 변형 문제를 추가 수록하였습니다.

[고3 수학 Ⅰ 수록 문항 구성표]

대비연도	3월	4월	6월	7월	9월	10월	수능	합계	비고
2024	11	11	11	11	11	11	11	77	*2025학년도 수능에 적합한 전 문항 수록
2023	11	11	11	11	11	11	11	77	
2022	11	11	11	11	11	11	11	77	
2021	27	29	19	20	16	19	17	147	
2020	16	13	7	7	6	7	8	64	
2019	17	12	6	8	9	6	9	67	
2018	18	13	5	10	9	5	6	66	*수능, 평가원, 학력평가 엄선 수록
2017	11	7	5	6	7	7	6	49	
2016	21	17	12	8	5	6	7	76	
2015	3	7	13	6	8	5	8	50	
2014	7	6	11	4	8	3	8	47	
2013	5	5	9	1	3	0	6	29	
2012	5	6	7	3	5	2	6	34	
2011	5	6	10	2	4	3	8	38	
2010	3	5	10	6	8	2	9	43	
2009이전	17	10	45	15	40	11	73	211	
2022, 2014, 2005 대비 예비 평가								25	
수능 기출 변형 문제								65	
고1/고2 학력평가								158	
삼사 및 경찰대								73	
총 문항 수								1473	

2024학년도 6월, 9월 평가원+수능

수학 Ⅰ+수학 Ⅱ 문항 배치표

문항 번호	6월		9월		수능	
	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호	수록 교재	수록 번호
1	수Ⅰ	A65	수Ⅰ	A39	수Ⅰ	A64
2	수Ⅱ	C63	수Ⅱ	C54	수Ⅱ	C62
3	수Ⅰ	H18	수Ⅰ	E45	수Ⅰ	E118
4	수Ⅱ	B09	수Ⅱ	A09	수Ⅱ	B08
5	수Ⅱ	C38	수Ⅰ	G121	수Ⅱ	F18
6	수Ⅰ	E121	수Ⅱ	D84	수Ⅰ	G178
7	수Ⅰ	C110	수Ⅰ	B75	수Ⅱ	D108
8	수Ⅱ	E24	수Ⅱ	F17	수Ⅱ	F83
9	수Ⅰ	H95	수Ⅰ	E161	수Ⅰ	B66
10	수Ⅱ	G14	수Ⅱ	D23	수Ⅱ	G98
11	수Ⅱ	D60	수Ⅱ	G84	수Ⅰ	H96
12	수Ⅰ	G75	수Ⅰ	I47	수Ⅱ	G71
13	수Ⅰ	F87	수Ⅱ	D139	수Ⅰ	F38
14	수Ⅱ	G86	수Ⅰ	C159	수Ⅱ	A197
15	수Ⅰ	I110	수Ⅱ	B98	수Ⅰ	I46
16	수Ⅰ	D48	수Ⅰ	D69	수Ⅰ	D12
17	수Ⅱ	F13	수Ⅰ	H17	수Ⅱ	C35
18	수Ⅱ	D120	수Ⅱ	C36	수Ⅰ	H19
19	수Ⅰ	E97	수Ⅱ	G34	수Ⅰ	E165
20	수Ⅱ	F183	수Ⅰ	F37	수Ⅱ	D134
21	수Ⅰ	C168	수Ⅰ	H160	수Ⅰ	C162
22	수Ⅱ	D145	수Ⅱ	F184	수Ⅱ	E132

- 수Ⅰ : 2024 자이스토리 고3 수학 Ⅰ
- 수Ⅱ : 2024 자이스토리 고3 수학 Ⅱ

A 지수

★ 유형 차례

★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2024	수능	유형 05 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈)	❀❀❀
	9월	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 05 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈)	❀❀❀
2023	수능	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	9월	유형 03 거듭제곱근의 활용 유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	✿✿❀ ❀❀❀
	6월	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
2022	수능	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	9월	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 03 거듭제곱근의 활용 유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	✿✿❀ ❀❀❀
	예시	유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀

★ 2024 수능 출제 경향 분석

• **지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈)** : 밑을 통일하고 지수법칙을 이용하여 계산하는 기본 개념과 계산력을 판단하는 문제가 출제되었다. [A64 문항]

★ 2025 수능 예측

1. 거듭제곱근의 성질을 이용하여 거듭제곱근이 자연수가 되도록 하는 자연수를 구하는 유형의 문제가 출제 예상된다. 기본적인 거듭제곱근에 대한 성질을 정확히 알고 있으면 풀리는 문제들이다.
2. 지수법칙을 이용하는 간단한 계산 문제는 지수의 여러 가지 성질과 함께 항상 출제된다. 쉬운 문제이지만 계산 실수에 주의하여야 하고 지수법칙을 정확히 알고 있어야 한다.
3. 지수를 포함한 등식의 활용 문제가 출제 예상되므로 곱셈 공식, 인수분해, 유리식이나 비례식 등을 활용하여 변형하는 연습을 해야 한다. 고1 수학에서 배웠던 내용도 한 번 더 정리하자.

A 지수

개념 강의

중요도 ★★★

1 거듭제곱과 거듭제곱근[1] — 유형 01

(1) **거듭제곱**: 임의의 실수 a와 자연수 n에 대하여

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{개}}$$

2^{3} ← 지수, ↑ 밑

와 같이 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 한다.
또, a의 제곱, 세제곱, 네제곱, …을 통틀어 a의 **거듭제곱**이라 하고,
a^n에서 a를 거듭제곱의 **밑**, n을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

(2) **거듭제곱근**: 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수,
즉 방정식 $x^n = a$를 만족시키는 x를 a의 **n제곱근**이라 한다.
이때, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.

(3) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.[2]

① **n이 짝수일 때**
$a>0$이면 양수 $\sqrt[n]{a}$와 음수 $-\sqrt[n]{a}$의 2개가 있고, 그 절댓값은 같다.
$a=0$이면 $\sqrt[n]{0}$, 즉 0뿐이다.
$a<0$이면 없다.

② **n이 홀수일 때**
a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ 오직 하나뿐이다.

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수일 때	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수일 때	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

2 거듭제곱근의 성질[3] — 유형 02~03

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 양의 정수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

3 지수의 확장[4] — 유형 04~12

(1) **지수가 0 또는 음의 정수인 경우**

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (단, $a>0$, n은 자연수)

(2) **지수가 유리수인 경우**

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (단, $a>0$, m, n은 정수, $n>0$)

(3) **지수법칙**[5]

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때,

① $a^x a^y = a^{x+y}$ 예) $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

② $a^x \div a^y = a^{x-y}$ 예) $3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$ 예) $(5^2)^4 = 5^{2\times 4} = 5^8$

④ $(ab)^x = a^x b^x$ 예) $(7\times 11)^2 = 7^2 \times 11^2$

출제
2024 수능 1번
2024 9월 모평 1번
2024 6월 모평 1번

★ 주어진 식에서 밑을 통일하고 지수법칙을 이용하여 값을 구하는 아주 쉬운 문제가 수능과 9월, 6월 평가원에서 모두 1번 문제로 출제되었다.

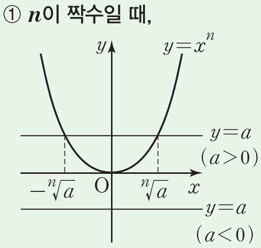
+개념 보충

❶ $(\sqrt[n]{a})^n$과 $\sqrt[n]{a^n}$의 차이

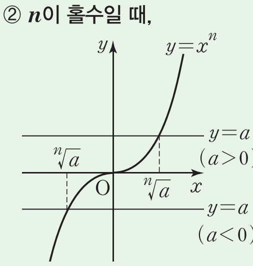
n이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a$
n이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$

왜 그럴까?

❷ ① n이 짝수일 때,



② n이 홀수일 때,



한걸음 더!

❸ $a>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때,
$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

+개념 보충

❹ $a^{\frac{m}{n}}$과 같이 지수가 유리수인 경우, a가 자연수일 때, $a^{\frac{m}{n}}$이 자연수가 되기 위한 조건은 m이 n의 배수 또는 n이 m의 약수일 때이다.

한걸음 더!

❺ 밑이 같을 때와 다를 때를 구분하자. 간단한 계산 문제뿐만 아니라 문장제 문제도 꼭 하나씩 출제된다.
지수법칙을 이용할 때는 먼저 밑이 같은지 다른지를 확인하고 같은 밑에 대해서 지수끼리 더할지, 곱할지를 정확하게 계산하자.

1 거듭제곱과 거듭제곱근

A01 기본 2016실시(나) 4월 학평 9(고3)

16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? (3점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

2 거듭제곱근의 성질

A02 기본 2003대비(인) 수능 1(고3)

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$을 간단히 하면? (2점)

① 2　② 4　③ $\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt[3]{2}$

A03 기본 2013대비(나) 9월 모평 6(고3)

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? (3점)

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

3 지수의 확장

A04 기본 2018실시(나) 10월 학평 1(고3)

$2^{\frac{5}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}$의 값은? (2점)

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

A05 기본 2013대비(나) 수능 26(고3)

$2\le n\le100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (4점)

A06 기본 2006대비(나) 6월 모평 4(고3)

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$일 때, $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타낸 것은? (3점)

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$　② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$　③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$　④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$　⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

A07 기본 2009대비(나) 9월 모평 20(고3)

두 실수 a, b가 $3^{a+b}=4$, $2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. (3점)

A08 기본 2005대비(나) 12월 예비 26(고3)

어떤 호수에서 수면에서의 빛의 세기가 I_0일 때, 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기 I_d는 다음과 같이 나타내어진다고 한다.

$$I_d=I_0 2^{-0.25d}$$

이 호수에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25 %인 곳의 수심은? (3점)

① 16 m　② 12 m　③ 10 m　④ 8 m　⑤ 4 m

❖ 정답 및 해설 2~3p

1 거듭제곱과 거듭제곱근

유형 01 거듭제곱근의 정의

(1) 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수 x를 a의 **n제곱근**이라 한다.

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

tip

a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는

1 n이 짝수일 때에는 a의 부호에 따라 0개, 1개, 2개가 될 수 있다.

2 n이 홀수일 때에는 항상 1개이다.

A09

2016실시(나) 11월 학평 13(고2)

실수 a, b에 대하여 a는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근일때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

A10

2022실시 7월 학평 19(고3)

$n\geq2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. (3점)

A11

2021대비(가) 6월 모평 12(고3)

자연수 n이 $2\leq n\leq11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

A12

2020실시(가) 3월 학평 18(고3)

다음은 $1\leq|m|<n\leq10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

(i) $m>0$인 경우
n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.

(ii) $m<0$인 경우
n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(나)}$이다.

(i), (ii)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는
$\boxed{(가)}+\boxed{(나)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? (4점)

① 70 ② 65 ③ 60 ④ 55 ⑤ 50

A19 ✿❀❀ 2018실시(나) 3월 학평 14(고3)

x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) (4점)

① 6 ② $3\sqrt[3]{9}$ ③ $6\sqrt[3]{3}$
④ 12 ⑤ $6\sqrt[3]{9}$

A20 ✿✿❀ 2023대비 9월 모평 11(고3)

함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? (4점)

> $\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

A21 ✿✿❀ 2022대비 6월 모평 21(고3)

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

A22 ✿✿❀ 2019실시(나) 3월 학평 15(고3)

자연수 n에 대하여 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하고, $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n)>g(n)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? (4점)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

3 지수의 확장

2024 9월 출제

유형 04 지수법칙 – 밑이 같은 계산

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n=a^{m-n}$
③ $(a^m)^n=a^{mn}$ ④ $(ab)^n=a^n b^n$
⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$ ⑥ $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a^0=1$

tip
밑이 같은지 살펴보고, 지수에서 곱은 합으로, 나누기는 빼기로, 제곱의 제곱은 곱으로 바뀐다는 것을 확인하여 계산하자.

A23 ❀❀❀ 2022대비 수능 1(고3)

$(2^{\sqrt{3}}\times 4)^{\sqrt{3}-2}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

A24 ❀❀❀ 2022대비 9월 모평 1(고3)

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\times 3^{-\frac{7}{4}}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 9

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A114 ✲✲✲ 2017실시(나) 3월 학평 21(고3)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\left\{(a,\ b)\,\middle|\,2^a=\frac{m}{b},\ a,\ b\text{는 자연수}\right\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_4=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m=2^k$이면 $n(A_m)=k$이다.

ㄷ. $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[1등급 대비+2등급 대비]

A115 ✪ 2등급 대비 2019실시(가) 6월 학평 21(고2)

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\sqrt[4]{9\times 2^{n+1}} & (n\text{이 홀수})\\ \sqrt[4]{4\times 3^n} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는? (4점)

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점 + 4점 + 5점]

A116 ✿❀❀ 2022대비 경찰대 13(고3)

실수 $r=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$에 대하여

$$r+r^2+r^3=a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$$

일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 유리수이다.) (4점)

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

A117 ✿❀❀ 2022대비 삼사 6(고3)

$\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}$의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? (3점)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

A118 ✿❀❀ 2020대비(나) 삼사 2(고3)

$\sqrt[3]{36}\times\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\right)^2=2^a$일 때, a의 값은? (2점)

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2
④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ $\dfrac{8}{3}$

A119 ✿❀❀ 2020대비 경찰대 1(고3)

실수 x에 대하여 $2^{3x}=9$일 때, $3^{\frac{2}{x}}$의 값은? (3점)

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

A120 ✿❀❀ 2019대비(나) 삼사 22(고3)

$\sqrt{3\sqrt[4]{27}}=3^{\frac{q}{p}}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (3점)

A121 ✪ 2등급 대비 2018대비(나) 삼사 28(고3)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $n^{\frac{4}{k}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(6)=3$이다. $f(n)=8$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오. (4점)

❖ 정답 및 해설 26~29p

TNT

서울대학교 테니스 동아리

젊음의 열정을 터트리자! TNT

TNT는 경영대에서 창립되어 현재 20년이 넘는 전통을 자랑하는 테니스 동아리입니다. 저희는 입학과 졸업을 같이 하고픈 따뜻한 동아리이며, 졸업 이후에도 선배님들과의 교류를 꾸준히 이어나가고 있는 열정적인 동아리이기도 합니다. 그리고 경영대에 속한 동아리이지만 단과대나 나이, 성별 등을 불문하여 다양한 사람들과 테니스를 즐길 수 있습니다.

TNT는 매주 토요일에 정모를 통해서 그룹 개인지도를 진행하며, 평일 중 하루의 스쿨을 선택해 평일 레슨 또한 받을 수 있습니다. 그리고 학장배 테니스 대회, 동아리 교류전, 홈커밍 등의 행사를 통해 자신의 실력을 드러내고 인적 네트워크의 폭을 확장해 나갈 수 있습니다.

동아리에 들어오시려고 할 때 테니스가 처음이라 어려워하는 마음이 들 수 있지만, 걱정하지 마십시오. 열정이 있다면 실력이 어떠하든, 운동신경이 어떠하든 같이 즐겁게 추억을 남기며 운동할 수 있도록 도와드릴 것이라 약속합니다.

나의 몸의 리듬을 익히고, 같은 팀 동료와 호흡을 맞추며, 공에 열정을 담는 경험을 하며, 나의 폭발적인 잠재력을 일깨울 수 있는 동아리인 TNT에 여러분을 초대합니다.

1회 수학 I 실전 기출 모의고사

2025학년도 수능 대비 ①
범위: 수학 I 전단원

- 문항 수 11개
- 배점 37점
- 제한시간 30분

5지선다형

1회 01 2010대비(나) 수능 1(고3)

$27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4$의 값은? (2점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

1회 02 2016실시(가) 3월 학평 5(고3)

함수 $f(x)=a\sin x+1$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m=6$일 때, 양수 a의 값은? (3점)

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

1회 03 2016실시(가) 7월 학평 6(고3)

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$의 값은? (3점)

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

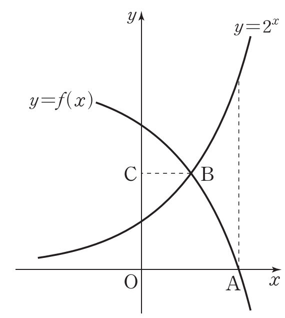
1회 04 2017실시(나) 4월 학평 13(고3)

모든 실수 x에 대하여 $\log_a(x^2+2ax+5a)$가 정의되기 위한 모든 정수 a의 값의 합은? (3점)

① 9　② 11　③ 13　④ 15　⑤ 17

1회 05 2014대비 5월 예비(B) 8(고3)

곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하고, 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A라 하자. (단, $m>2$이다.) 곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{OA}=2\overline{BC}$일 때, m의 값은? (4점)



① $2\sqrt{2}$　② 4　③ $4\sqrt{2}$　④ 8　⑤ $8\sqrt{2}$

1회 06 2014대비(A) 수능 16(고3)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고

$$(a_{n+1})^n=10(a_n)^{n+1}\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면
> $n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$
> 이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면
> $$\frac{\log a_{n+1}}{n+1}=\frac{\log a_n}{n}+\boxed{(가)}$$
> 이다. $b_n=\frac{\log a_n}{n}$이라 하면 $b_1=1$이고
> $$b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}$$
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
> $$b_n=\boxed{(나)}$$
> 이므로
> $$\log a_n=n\times\boxed{(나)}$$
> 이다. 그러므로 $a_n=10^{n\times\boxed{(나)}}$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$과 $g(n)$이라 할 때, $\frac{g(10)}{f(4)}$의 값은? (4점)

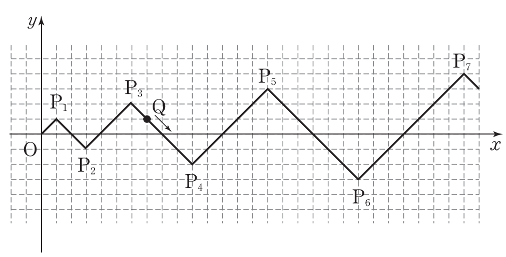
① 38　② 40　③ 42　④ 44　⑤ 46

1회 07 ✿✿✿ 2014대비(A) 6월 학평 16(고3)

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $P_n(x_n, y_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) $x_1=y_1=1$
>
> (나) $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+(n+1) \\ y_{n+1}=y_n+(-1)^n\times(n+1) \end{cases}$ $(n\geq 1)$

점 Q는 원점 O를 출발하여 $\overline{OP_1}$을 따라 점 P_1에 도착한다. 자연수 n에 대하여 점 P_n에 도착한 점 Q는 점 P_{n+1}을 향하여 $\overline{P_nP_{n+1}}$을 따라 이동한다. 점 Q는 한 번에 $\sqrt{2}$만큼 이동한다. 예를 들어, 원점에서 출발하여 7번 이동한 점 Q의 좌표는 $(7, 1)$이다. 원점에서 출발하여 55번 이동한 점 Q의 y좌표는? (4점)



① -5　　② -6　　③ -7

④ -8　　⑤ -9

단답형

1회 08 ✿✿✿ 2007실시(나) 3월 학평 18(고3)

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_7=12,\ \frac{a_6a_{10}}{a_5}=36$$

이 성립할 때, a_{15}의 값을 구하시오. (3점)

1회 09 ✿✿✿ 2015대비(A) 6월 학평 24(고3)

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 두 함수

$$f(x)=2^x,\ g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

의 최댓값을 각각 a, b라 하자. ab의 값을 구하시오. (3점)

1회 10 ✿✿✿ 2014대비(A) 6월 학평 28(고3)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=7$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

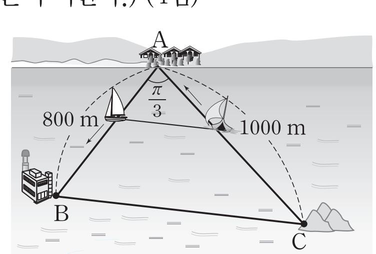
> (가) $a_{n+2}=a_n-4$ $(n=1, 2, 3, 4)$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$이다.

$\sum_{k=1}^{50} a_k=258$일 때, a_2의 값을 구하시오. (4점)

1회 11 ✿✿✿

그림과 같이 갑이 탄 배는 항구 A에서 출발하여 800 m 떨어진 등대 B를 향해 속력 100 m/분으로 직선 경로를 따라서 항해하고, 을이 탄 배는 섬 C에서 출발하여 1000 m 떨어진 항구 A를 향해 속력 200 m/분으로 직선 경로를 따라서 항해하고 있다.

$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$일 때, 항구 A와 섬 C를 각각 동시에 출발한 갑, 을이 탄 두 배가 지나는 지점을 잇는 선분이 B지점과 C지점을 잇는 선분과 평행이 되는 순간의 두 배 사이의 거리는 $\frac{q}{p}\sqrt{21}$이다. $q-p$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이고, 두 배의 크기는 무시한다.) (4점)



33 DAY

❖ 정답 및 해설 555~558p

A 지수

기본 기출 문제

A01 정답 ⑤ *거듭제곱근의 정의 [정답률 89%]

(**정답 공식**: 16의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{16}$, -27의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{-27}$이다.)

❶16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, ❷-27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

단서 거듭제곱근의 정의를 알아야 해. 이때, ❶은 양수, ❷는 음수의 거듭제곱근이니까 주의하자.

1st 거듭제곱근의 정의를 이용하여 실수 a, b의 값을 찾자.
$x^n=a$(a는 상수)라 할 때, x는 a의 n제곱근이야.

16의 네제곱근을 x라 하면
$x^4=16$이므로
$x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

주의 판별식을 이용하면 $D=0^2-4\times1\times4<0$으로 허근을 가져.

$x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$
$x^2=-4$에서 $x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}i$
→ 실수가 아닌 허수이지?

$\therefore a=2$ 또는 $a=-2$

-27의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=-27$이므로
$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)=0$
→ 판별식을 이용하면 $D=3^2-4\times9<0$으로 허근이야.

$x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore b=-3$

2nd $a-b$의 최댓값을 구해.

$a-b=2-(-3)=5$ 또는 $a-b=-2-(-3)=1$
이므로 $a-b$의 최댓값은 5이다.
두 수의 차의 최대는 a가 양수, b가 음수일 때야.

A02 정답 ① *거듭제곱근의 계산 [정답률 91%]

(**정답 공식**: $\sqrt[mk]{a^{nk}}=\sqrt[m]{a^n}$)

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$을 간단히 하면? (2점) 단서 $16=2^4$이니까 2의 거듭제곱근으로 정리해 볼까?

① 2 ② 4 ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt[3]{2}$

1st 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산해.

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}$
밑이 2인 수로 정리해 볼까? $\sqrt[mk]{a^{nk}}=\sqrt[m]{a^n}$
$=\sqrt[3]{2\times2^2}=\sqrt[3]{2^3}=2$

다른 풀이: 유리수인 지수로 나타낸 후 지수법칙을 이용하여 계산하기

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=2^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}$
$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ $a^m\times a^n=a^{m+n}$
$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2$

A03 정답 ② *거듭제곱근의 계산 [정답률 71%]

(**정답 공식**: 괄호 안의 제일 안쪽 근호부터 정리하여 밑을 2로 바꾼다.)

단서 $\sqrt{\sqrt[3]{\ }}$ 꼴은 근호를 줄여나가야 해. 이때, 이 수보다 큰 자연수를 찾자.

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? (3점)

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

1st 거듭제곱근을 지수로 바꿔 간단히 정리하여 값을 구해.

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=\left(2\times\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2\times2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$
$=\left\{(2\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{2}}\right\}^3$ $(a^x)^y=a^{xy}$

실수 $a^x\times a^y=a^{x+y}$과 $(a^x)^y=a^{xy}$를 잘 구별하자.

이때, $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로
$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.
$6, 7, 8, \cdots$

다른 풀이: 유리수인 지수로 나타낸 후 조건을 만족시키는 자연수 구하기

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=2^{\frac{5}{2}}$이므로 자연수 n에 대하여 $n>2^{\frac{5}{2}}$이라 하면 $n^2>2^5$
$\therefore n=6, 7, \cdots$
따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

A04 정답 ⑤ *지수법칙 – 밑이 같은 계산 [정답률 98%]

(**정답 공식**: 밑이 같을 때 곱한 값은 지수끼리 더한 값과 같다.)

$2^{\frac{5}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}$의 값은? (2점)
단서 밑이 같은 경우의 곱의 계산을 묻는 거야.

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

1st 지수법칙을 이용하여 계산해.

$2^{\frac{5}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}=2^2=4$
$a^ma^n=a^{m+n}$을 이용한 거야.

지수법칙 개념·공식

$a>0$, $b>0$이고, x, y가 실수일 때
① $a^x\times a^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$
③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$
⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

A05 정답 16 *거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 67%]

(**정답 공식**: 어떤 자연수의 n제곱근이라는 것은 n제곱했을 때 자연수가 되어야 한다는 의미이다.)

단서 어떤 자연수를 N이라 하면 $\sqrt[n]{N}$ 이지? 이때, n은 자연수이고 $2\le n\le100$이야.

$2\le n\le100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (4점)

1st 어떤 자연수를 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$으로 나타내.

어떤 자연수를 N이라 하면 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 자연수 N의 n제곱근이므로
x가 a의 n제곱근이면 $x^n=a$이야.

$\left\{\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^n=\left\{\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^n=3^{\frac{5n}{6}}=N$
$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

실수 복잡한 거듭제곱근을 지수 형태로 고치는 과정에서 실수가 많아.

2nd N, n이 자연수이니까 $2\le n\le 100$에서 n의 개수를 구해.

n이 6의 배수이면 N은 3의 거듭제곱으로 자연수가 된다.
$n=6k$ (k는 자연수)라 하면 $\frac{5}{6}n=\frac{5}{6}\times 6k=5k$도 자연수야.

즉, n의 개수는 100 이하의 자연수 중 6의 배수의 개수와 같다.

따라서 자연수 n의 개수는 16이다. $\frac{100}{6}=16.\times\times\times$

수능 핵강

* n 이하의 자연수 중 k의 배수의 개수 구하기

1부터 n까지의 자연수 중 2, 3, 4, ⋯의 배수의 개수를 쉽게 구하는 방법은 몫을 구하는 거야.

2의 배수 : $\frac{n}{2}$의 몫　3의 배수 : $\frac{n}{3}$의 몫　4의 배수 : $\frac{n}{4}$의 몫

5의 배수 : $\frac{n}{5}$의 몫　m의 배수 : $\frac{n}{m}$의 몫

A 06 정답 ① *지수법칙의 활용 – 문자로 표현 [정답률 85%]

(정답 공식: $\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{6}}$)

❶ $a=\sqrt{2}$, ❷ $b=\sqrt[3]{3}$일 때, $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타낸 것은? (3점)

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$　② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$　③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$

④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$　⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

단서 6의 6제곱근이니까 ❶, ❷를 이용하기 위하여 2와 3의 거듭제곱근으로 표현해.

1st 지수법칙을 이용하여 $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타내.

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\times(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

주의 $(ab)^n=a^n\times b^n$

다른 풀이: 거듭제곱근의 성질을 이용하기

$\sqrt[6]{6}=\sqrt[6]{2\times 3}=\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{3}$ $\Rightarrow \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\times\sqrt{\sqrt[3]{3}}$ $\Rightarrow \sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

$=\sqrt[3]{a}\times\sqrt{b}=a^{\frac{1}{3}}\times b^{\frac{1}{2}}$

A 07 정답 25 *지수법칙의 활용 – 식 변형 [정답률 73%]

(정답 공식: $3^{a^2-b^2}=(3^{a+b})^{a-b}$)

두 실수 a, b가 ❶ $3^{a+b}=4$, ❷ $2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. (3점)

단서 지수에 a^2-b^2이 나오게 하려면 ❶과 ❷를 이용해서 거듭제곱을 해야 되겠지? 실수로 식 ❶, ❷를 곱하면 안 돼!

1st 주어진 조건 중 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하자.

$3^{a^2-b^2}=\underbrace{3^{(a+b)(a-b)}=(3^{a+b})^{a-b}}_{a^{nm}=(a^n)^m}=4^{a-b}=(2^2)^{a-b}=(2^{a-b})^2=5^2=25$

다른 풀이: 로그의 정의를 이용하여 $a+b$, $a-b$를 나타내어 값 구하기

$3^{a+b}=4$에서 $a+b=\log_3 4$ ⋯ ㉠

$2^{a-b}=5$에서 $a-b=\log_2 5$ ⋯ ㉡

[로그의 정의] $a^x=N$에 대하여 $(a>0, a\ne 1)$ $x=\log_a N$

㉠, ㉡의 각 변을 각각 곱하면

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\log_3 4\times\log_2 5$

$=\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 2}=\frac{2\log 2}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 2}=2\times\frac{\log 5}{\log 3}$

$=2\log_3 5=\log_3 5^2=\log_3 25$　$\frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b$

따라서 $a^2-b^2=\log_3 25$이므로 $3^{a^2-b^2}=3^{\log_3 25}=25$ ($\because a^{\log_a b}=b$)

A 08 정답 ④ *지수법칙의 실생활 응용 [정답률 63%]

(정답 공식: $I_d=0.25I_0$일 때, d의 값을 구한다.)

어떤 호수에서 수면에서의 빛의 세기가 I_0일 때, 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기 I_d는 다음과 같이 나타내어진다고 한다.

$I_d=I_0 2^{-0.25d}$ ⋯ ⓐ

이 호수에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25 %인 곳의 수심은? (3점) 단서 I_d와 I_0의 관계식이 하나 더 있으니까 ⓐ와 연립하여 d의 값을 구해.

① 16 m　② 12 m　③ 10 m　④ 8 m　⑤ 4 m

1st 단서에서 주어진 조건에 맞게 I_d, I_0의 식을 세워.

수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25 %이므로

$I_d=0.25I_0$ ⋯ ㉠

그런데 주어진 조건에 의하여 $I_d=I_0 2^{-0.25d}$ ⋯ ㉡

㉠=㉡에 의하여 $0.25I_0=I_0 2^{-0.25d}$　$\therefore 2^{-0.25d}=0.25$

2nd 우변의 값을 지수 형태로 변형해.

$0.25=\frac{1}{4}=2^{-2}$이므로 $2^{-0.25d}=2^{-2}$　$a>0$, $a\ne 1$인 실수 a에 대하여 $a^x=a^y$이면 $x=y$야.

$-0.25d=-2$　$\therefore d=\frac{2}{0.25}=8$

따라서 구하는 수심은 8 m이다.

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 09 정답 ⑤ *거듭제곱근의 정의 [정답률 81%]

(정답 공식: a의 n제곱근은 $\sqrt[n]{a}$이다.)

실수 a, b에 대하여 a는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근일 때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)

단서 거듭제곱근의 정의를 알고 있는지 물어보고 있어.

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

1st a, b를 거듭제곱근을 이용하여 표현해 봐.

a는 2의 세제곱근이므로 $a^3=2$

$\sqrt{2}$는 b의 네제곱근이므로 $(\sqrt{2})^4=b$

2nd **1st**에서 구한 값을 $\left(\frac{b}{a}\right)^3$에 대입하자.

$\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{a^3}=\frac{\{(\sqrt{2})^4\}^3}{2}=\frac{2^6}{2}=2^5=32$

A 10 정답 4 *거듭제곱근의 정의 [정답률 66%]

(정답 공식: 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 n이 홀수이면 1개이고, n이 짝수이면 $a>0$일 때 2개, $a=0$일 때 1개, $a<0$일 때 0개이다.)

$n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. (3점)

단서 n이 홀수일 때와 n이 짝수일 때로 나누어 생각하면 돼. 또한 n이 짝수일 때에는 $2n^2-9n$의 부호가 양수인지 음수인지, 그 값이 0인지로 나누어 생각해야겠지?

1st n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 $f(n)$의 값을 구해.

(i) n이 $n\ge2$인 홀수일 때,

$2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 1이므로
$f(n)=1$이다. 이때의 실수 $2n^2-9n$의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{2n^2-9n}$의 1개야.

(ii) n이 $n\ge2$인 짝수일 때,

i) $2n^2-9n>0$에서 $n>\frac{9}{2}$, 즉 n이 6 이상인 짝수이면

n은 양수이므로 $2n^2-9n>0$의 양변을 n으로 나누면 $2n-9>0$ $\therefore n>\frac{9}{2}$

이때의 실수 $2n^2-9n$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{2n^2-9n}$, $-\sqrt[n]{2n^2-9n}$의 2개야.

$2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 2이므로
$f(n)=2$이다.

ii) $2n^2-9n=0$을 만족시키는 2 이상의 자연수 n은
존재하지 않는다. $2n^2-9n=n(2n-9)=0$에서 $n=0$ 또는 $n=\frac{9}{2}$

그런데 $n\ge2$인 자연수이므로 이 방정식을 만족시키는 n의 값은 없어.

iii) $2n^2-9<0$에서 $n<\frac{9}{2}$, 즉 n이 4 이하인 짝수이면 $2n^2-9n$의
n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 0이므로 $f(n)=0$이다.

2nd $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구해.

(i)에 의하여 $n=3$, $n=5$일 때 $f(n)=1$이고

(ii)에 의하여 $n=4$일 때 $f(n)=0$, $n=6$일 때 $f(n)=2$이므로

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

쉬운 풀이: n 대신 3, 4, 5, 6을 직접 대입하여 제곱근 중 실수인 것의 개수 구하기

(i) $n=3$일 때
$2n^2-9n=2\times3^2-9\times3=18-27=-9<0$의 세제곱근 중에서
실수인 것은 $\sqrt[3]{-9}$로 1개야.
$\therefore f(3)=1$

(ii) $n=4$일 때
$2n^2-9n=2\times4^2-9\times4=32-36=-4<0$의 네제곱근 중에서
실수인 것은 없어.
$\therefore f(4)=0$

(iii) $n=5$일 때
$2n^2-9n=2\times5^2-9\times5=50-45=5>0$의 다섯제곱근 중에서
실수인 것은 $\sqrt[5]{5}$로 1개야.
$\therefore f(5)=1$

(iv) $n=6$일 때
$2n^2-9n=2\times6^2-9\times6=72-54=18>0$의 여섯제곱근 중에서
실수인 것은 $\sqrt[6]{18}$, $-\sqrt[6]{18}$로 2개야.
$\therefore f(6)=2$

(i)~(iv)에 의하여
$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

실수 a의 실수인 n제곱근 개념·공식

n이 2 이상인 자연수일 때,

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

A 11 정답 ① *거듭제곱근의 정의 [정답률 67%]

정답 공식: a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 n이 홀수일 때 a가 음수이어야 하고 n이 짝수일 때 a가 양수이어야 한다.

자연수 n이 $2\le n\le11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)

단서 x에 대한 방정식 $x^n=-n^2+9n-18$을 만족시키는 음의 실근이 존재하는 경우를 찾는 것과 같아.

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

1st $-n^2+9n-18$의 값의 부호에 따라 조건을 만족시키는 n의 값을 구해.

a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 a가 양수이고 n이 짝수이거나 a가 음수이고 n이 홀수이어야 해.

(i) $-n^2+9n-18>0$일 때, n이 짝수이면 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재한다.
이때, $-n^2+9n-18>0$에서 $n^2-9n+18<0$
$(n-3)(n-6)<0$ $\therefore 3<n<6$ $\alpha<\beta$일 때, 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$
이때, $2\le n\le11$이므로 $3<n<6$
따라서 이것을 만족시키고 n이 짝수이어야 하므로 $n=4$

(ii) $-n^2+9n-18<0$일 때, n이 홀수이면 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재한다.
이때, $-n^2+9n-18<0$에서 $n^2-9n+18>0$
$(n-3)(n-6)>0$ $\therefore n<3$ 또는 $n>6$ $\alpha<\beta$일 때, 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
이때, $2\le n\le11$이므로 $2\le n<3$ 또는 $6<n\le11$
따라서 이것을 만족시키고 n이 홀수이어야 하므로
$n=7$ 또는 $n=9$ 또는 $n=11$

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n의 값의 합은 $4+7+9+11=31$

A 12 정답 ② *거듭제곱근의 정의 [정답률 75%]

정답 공식: a의 n제곱근 중 실수인 것은 n이 짝수일 때 a가 양수이어야 존재하고, n이 홀수일 때 a가 실수이면 존재한다.

다음은 $1\le|m|<n\le10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다. **단서** 실수의 홀수제곱근 중 실수는 1개이고 양수의 짝수제곱근 중 실수는 2개야.

(i) $m>0$인 경우
n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가) 이다.

(ii) $m<0$인 경우
n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (나) 이다.

(i), (ii)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가) + (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? (4점)

① 70 ② 65 ③ 60 ④ 55 ⑤ 50

1st $m>0$일 때 순서쌍 (m, n)의 개수를 구해.

(i) $m>0$인 경우

n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다.
따라서 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 부등식 $1\le m<n\le 10$을 만족시키는 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수와 같다.
즉, 1에서 10까지의 자연수 중 서로 다른 2개의 숫자를 뽑아 그 중 작은 수가 m, 큰 수가 n으로 결정되는 것과 같다.
따라서 이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는

$${}_{10}C_2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=\overset{(가)}{\boxed{45}}\text{ 이다.}$$

서로 다른 n개 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개 중에서 r개를 택하는 조합이라 하고 이때의 조합의 수는 ${}_nC_r$로 나타내.

2nd $m<0$일 때 순서쌍 (m, n)의 개수를 구해.

(ii) $m<0$인 경우

n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다.
한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다.
따라서 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 n이 홀수일 때, 부등식 $1\le |m|<n\le 10$을 만족시키는 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수와 같다.

문제에서 n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하지 않는다고 했으니까 n이 홀수인 경우만 따져주면 돼.

i) $n=1$일 때, 부등식 $1\le |m|<n\le 10$을 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

ii) $n=3$일 때, 부등식 $1\le |m|<n\le 10$을 만족시키는 m의 값은 -1, -2로 2개이다.

iii) $n=5$일 때, 부등식 $1\le |m|<n\le 10$을 만족시키는 m의 값은 -1, -2, -3, -4로 4개이다.

iv) $n=7$일 때, 부등식 $1\le |m|<n\le 10$을 만족시키는 m의 값은 -1, -2, -3, -4, -5, -6으로 6개이다.

v) $n=9$일 때, 부등식 $1\le |m|<n\le 10$을 만족시키는 m의 값은 -1, -2, $\cdots$, -8로 8개이다.

i)～ v)에 의하여 이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는

$$0+2+4+6+8=\overset{(나)}{\boxed{20}}\text{ 이다.}$$

(i), (ii)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $45+20=65$이다.

3rd $p+q$의 값을 구해.

따라서 $p=45$, $q=20$이므로 $p+q=45+20=65$

A 13 정답 ③ *거듭제곱근의 정의 [정답률 76%]

(정답 공식: 음수의 제곱근은 존재하지 않는다. 홀수제곱근 중 실수는 1개이고, 양수의 짝수제곱근 중 실수는 2개이다.)

자연수 $n(n\ge 2)$에 대하여 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$라 할 때, $f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

단서 $x^n=a$가 실수인 해를 가지는 조건을 생각하여 $f_n(a)$를 계산해 볼까?

1st a, n의 값에 실수 a의 n제곱근을 식으로 나타내어 $f_n(a)$를 구해.

방정식 $x^n=a$의 근 중에서 실수의 개수야.

-3의 제곱근 중 실수는 없으므로 $f_2(-3)=0$

$x^2=-3\Rightarrow x=\pm\sqrt{-3}$이니까 허수야.

-2의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{-2}$로 한 개뿐이므로 $f_3(-2)=1$

$x^3=-2$

5의 네제곱근 중 실수는 $\sqrt[4]{5}$, $-\sqrt[4]{5}$로 2개이므로 $f_4(5)=2$

$x^4=5$

$\therefore f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)=0+1+2=3$

A 14 정답 ① *거듭제곱근의 계산 [정답률 93%]

(정답 공식: $\sqrt[n]{a^n}=a\,(a>0)$임을 이용한다.)

$\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}$의 값은? (2점)

단서 $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^n}$은 a임을 이용하자.

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

1st $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^n}=a$지?

$$\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}=\sqrt{2^2}\times\underbrace{\sqrt[3]{2^3}}_{\sqrt[n]{a^n}=a\,(a>0)}=2\times 2=4$$

다른 풀이: 유리수인 지수로 나타낸 후 지수법칙을 이용하여 계산하기

$$\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}=4^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=2\times 2=4$$

A 15 정답 ⑤ *거듭제곱근의 계산 [정답률 91%]

(정답 공식: 거듭제곱근의 성질에 의하여 $\sqrt{2\sqrt{6}}=\sqrt{\sqrt{24}}=\sqrt[4]{24}$이다.)

$(\sqrt{2\sqrt{6}})^4$의 값은? (2점) 단서 $\sqrt{\sqrt{\ }}$ 꼴은 제곱근을 줄여서 나가야 해.

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

1st $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$을 이용하여 $\sqrt{\ }$를 줄여 나가면서 계산해.

$$(\sqrt{2\sqrt{6}})^4=\underbrace{\{(2\sqrt{6})^{\frac{1}{2}}\}^4}_{(a^m)^n=a^{mn}}=(2\sqrt{6})^2=24$$

거듭제곱근 개념·공식

(1) 거듭제곱근의 정의
n이 자연수일 때 n제곱해서 a가 되는 수, 즉 $x^n=a$를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라 한다.

(2) 거듭제곱근의 성질
$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때,
① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$
④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

A 16 정답 ⑤ *거듭제곱근의 계산 [정답률 95%]

(정답 공식: 거듭제곱근의 성질에 의하여 $(\sqrt{2})^5=\sqrt{2^5}$이다.)

$(\sqrt{2})^5$의 값은? (2점) 단서 2의 제곱근이니까 $2^{\frac{1}{2}}$이네.

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

1st 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 정리해.

$$\underbrace{(\sqrt{2})^5}_{(\sqrt{2})^{2+2+1}}=\{(\sqrt{2})^2\}^2\times\sqrt{2}=2^2\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

A 17 정답 ② *거듭제곱근의 활용 [정답률 62%]

정답 공식: 자연수 n에 대하여 방정식 $x^n=k\,(k>0)$의 실근은 n이 홀수일 때 $x=k^{\frac{1}{n}}$이고, n이 짝수일 때 $x=k^{\frac{1}{n}}$, $x=-k^{\frac{1}{n}}$이다.

2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$$

단서 n이 홀수일 때와 짝수일 때 방정식의 실근이 다르므로 n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 생각해.

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? (4점)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

1st 방정식을 풀어.

$AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$에서 $x^n=8$ 또는 $x^{2n}=8$

2nd n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 조건을 만족시키는 n의 값을 구해.

(i) n이 홀수일 때,

$x^n=8$에서 $x=8^{\frac{1}{n}}$

실수 a와 홀수 n에 대하여 방정식 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$로 1개야.

$x^{2n}=8$에서 $x=8^{\frac{1}{2n}}$ 또는 $x=-8^{\frac{1}{2n}}$

자연수 n의 값에 상관없이 $2n$은 짝수야.

양수 a와 짝수 n에 대하여 방정식 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, $x=-a^{\frac{1}{n}}=-\sqrt[n]{a}$로 2개야.

따라서 이때의 모든 실근의 곱은

$$8^{\frac{1}{n}}\times 8^{\frac{1}{2n}}\times\left(-8^{\frac{1}{2n}}\right)=2^{\frac{3}{n}}\times 2^{\frac{3}{2n}}\times\left(-2^{\frac{3}{2n}}\right)$$

$8=2^3$이므로 $8^{\frac{1}{n}}=(2^3)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{3}{n}}$이고 $8^{\frac{1}{2n}}=(2^3)^{\frac{1}{2n}}=2^{\frac{3}{2n}}$이야.

$$=-2^{\frac{3}{n}+\frac{3}{2n}+\frac{3}{2n}}=-2^{\frac{6}{n}}$$

그런데 모든 실근의 곱이 -4이므로 $-2^{\frac{6}{n}}=-4$에서

$2^{\frac{6}{n}}=2^2$, $\frac{6}{n}=2$ $\quad\therefore n=3$

(ii) n이 짝수일 때,

$x^n=8$에서 $x=8^{\frac{1}{n}}$ 또는 $x=-8^{\frac{1}{n}}$

$x^{2n}=8$에서 $x=8^{\frac{1}{2n}}$ 또는 $x=-8^{\frac{1}{2n}}$

따라서 이때의 모든 실근의 곱은

$$8^{\frac{1}{n}}\times\left(-8^{\frac{1}{n}}\right)\times 8^{\frac{1}{2n}}\times\left(-8^{\frac{1}{2n}}\right)=2^{\frac{3}{n}}\times\left(-2^{\frac{3}{n}}\right)\times 2^{\frac{3}{2n}}\times\left(-2^{\frac{3}{2n}}\right)$$

$$=2^{\frac{3}{n}+\frac{3}{n}+\frac{3}{2n}+\frac{3}{2n}}=2^{\frac{9}{n}}$$

그런데 모든 실근의 곱이 -4이므로 $2^{\frac{9}{n}}=-4$

이것을 만족시키는 짝수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 3이다.

수능 핵강

*** 방정식 $(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$의 모든 실근의 곱의 부호**

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$에서 $x^n=8$ 또는 $x^{2n}=8$

(i) n이 홀수일 때,

$x^n=8$에서 실근은 양수 1개

$x^{2n}=8$에서 실근은 양수 1개와 음수 1개

즉, 이때의 모든 실근의 곱은 (양수)×(양수)×(음수)=(음수)야.

(ii) n이 짝수일 때,

$x^n=8$에서 실근은 양수 1개와 음수 1개

$x^{2n}=8$에서 실근은 양수 1개와 음수 1개

즉, 이때의 모든 실근의 곱은 (양수)×(음수)×(양수)×(음수)=(양수)야.

그런데 문제에서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱이 -4로 음수이므로 n은 홀수일 수밖에 없어.

이것을 알고 있다면 n이 짝수일 때는 따져주지 않아도 답을 구할 수 있겠지?

A 18 정답 ① *거듭제곱근의 활용 [정답률 69%]

정답 공식: x가 a의 n제곱근이면 $x^n=a$, 즉 $x=\sqrt[n]{a}$이다.

1이 아닌 세 양수 a, b, c와 1이 아닌 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킨다. 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? (4점)

단서1 m, n 사이의 관계식을 구해서 이를 만족시키는 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하라는 거야.

(가) $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이다.
(나) $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이다.
(다) c는 a^{12}의 네제곱근이다.

단서2 이 조건들을 수식으로 표현한 다음 m, n 사이의 관계식을 찾아야 해.

① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

1st 주어진 조건을 수식으로 나타내자.

조건 (가)에서 $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이므로

$b=(\sqrt[3]{a})^m=(a^{\frac{1}{3}})^m=a^{\frac{m}{3}}$ ⋯ ㉠

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

조건 (나)에서 $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이므로

$c=(\sqrt{b})^n=(b^{\frac{1}{2}})^n=b^{\frac{n}{2}}$ ⋯ ㉡

$(a^m)^n=a^{mn}$

조건 (다)에서 c는 a^{12}의 네제곱근이므로

$a^{12}=c^4$ ⋯ ㉢

2nd m, n에 대한 관계식을 구하자.

㉠을 ㉡에 대입하면

$c=(a^{\frac{m}{3}})^{\frac{n}{2}}=a^{\frac{mn}{6}}$ ⋯ ㉣

다시 ㉣을 ㉢에 대입하면

$a^{12}=(a^{\frac{mn}{6}})^4=a^{\frac{2mn}{3}}$, $12=\frac{2mn}{3}$ $\quad\therefore mn=18$

3rd 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하자.

따라서 1이 아닌 두 자연수 m, n에 대하여 $mn=18$을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 $(2, 9)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(9, 2)$로 4개이다.

실수 1이 아닌 두 자연수라는 조건을 놓치게 되면 $(1, 18)$, $(18, 1)$도 조건을 만족시키는 순서쌍으로 착각할 수 있어.

A 19 정답 ④ *거듭제곱근의 활용 [정답률 68%]

정답 공식: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$임을 이용한다.

x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) (4점)

단서 이차방정식에서 두 근이 주어졌으니 근과 계수의 관계를 이용해.

① 6 ② $3\sqrt[3]{9}$ ③ $6\sqrt[3]{3}$
④ 12 ⑤ $6\sqrt[3]{9}$

1st 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b에 관한 식을 구해.

x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{3}b=a$

2nd a, b에 관한 식을 이용하여 ab를 계산해야 해.

$b=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{3^4}=\sqrt[3]{3^3\times 3}=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{3}=3\times\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$

$a=\sqrt[3]{3}b=\sqrt[3]{3}\times 2\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3^2}$

$\therefore ab=2\sqrt[3]{3^2}\times 2\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{3^3}=4\times 3=12$

$2\sqrt[3]{3^2}\times 2\sqrt[3]{3}=2\times 2\times\sqrt[3]{3\times 3^2}=4\sqrt[3]{3^3}$

(iii) $f(n)=2$, 즉 $n=100$ … ㉤일 때,

$f(n+10)=f(n)+1=3$에서 $3\le\log(n+10)<4$

$1000\le n+10<10000$

$\therefore 990\le n<9990$ … ㉥ n은 100 이하의 자연수이니까

㉤, ㉥에 의하여 이때의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는

$9+10=19$

B 126 정답 ③ *상용로그의 활용－정수 부분과 소수 부분 … [정답률 58%]

정답 공식: 주어진 조건에 따라 $\log n=1+\alpha$이다. α의 값의 범위가 주어져 있으므로 n의 값의 범위도 구할 수 있다.

양의 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $f(x)=\log x$이다. $f(n)$의 정수 부분이 1, 소수 부분이 α일 때, 2α의 정수 부분이 1인 모든 자연수 n의 개수는? (단, $3.1<\sqrt{10}<3.2$) (4점)

단서 2α의 정수 부분이 1이므로 $1\le 2\alpha<2$야.

① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

1st 조건을 이용해서 α의 범위를 구하자.

2α의 정수 부분이 1이므로 $1\le 2\alpha<2$ $\quad\therefore \frac{1}{2}\le\alpha<1$

2nd 로그의 성질을 이용해서 n의 범위를 구하자.

$f(n)$의 정수 부분이 1, 소수 부분이 α이므로

$f(n)=\log n=1+\alpha$

$10^{\frac{3}{2}}=(10^{\frac{1}{2}})^3=(\sqrt{10})^3=10\sqrt{10}$

$1+\frac{1}{2}\le\log n<1+1$, $10^{\frac{3}{2}}\le n<10^2$

$3.1<\sqrt{10}<3.2$라 하므로 각 변에 10을 곱하면 $31<10\sqrt{10}<32$

즉, $10\sqrt{10}=31.\cdots$이므로 $31.\cdots\le n<10^2$

그런데 n은 자연수이므로 $32\le n<100$

따라서 자연수 n의 개수는 68이다.

자연수 a, b, n에 대하여 $a\le n<b$ 또는 $a<n\le b$이면 자연수 n의 개수는 $b-a$야.

B 127 정답 11 *상용로그의 활용－정수 부분과 소수 부분 … [정답률 47%]

정답 공식: $\log\frac{x}{y}=\log x-\log y$를 이용해서 식을 정리하고, $\log x$, $\log y$의 값의 범위로 정리한 식의 범위를 구한다.

$\log x$의 정수 부분이 4이고 $\log y$의 정수 부분이 1일 때,

단서1 두 상용로그의 범위를 정할 수 있지?

$\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\frac{y}{x}\right)$의 값 중에서 정수의 개수를 구하시오. (4점)

단서2 단서1을 이용하여 이 식의 범위를 구해 볼까?

1st 로그의 성질을 이용하여 $\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\frac{y}{x}\right)$를 간단히 정리해.

$\log\frac{b}{a}=-\log\frac{a}{b}$

$\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\frac{y}{x}\right)=-\left(\log\frac{x}{y}\right)^2=-(\log x-\log y)^2$ … ㉠

2nd $\log a$의 정수 부분이 n일 때, $n\le\log a<n+1$을 이용하여 $\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\frac{y}{x}\right)$의 값의 범위를 구해.

이때, $4\le\log x<5$, $1\le\log y<2$이므로

$-2<-\log y\le-1$이고 $\log x$, $-\log y$로 표현된 두 부등식을 더하면 돼.

$2<\log x-\log y<4$

$a\le x\le b$ … ㉮
$c<y<d$ … ㉯
㉮+㉯을 하면 $a+c<x+y<b+d$
㉮−㉯을 하면 $a-d<x-y<b-c$

㉠에 의하여

$-16<\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\frac{y}{x}\right)<-4$

따라서 조건을 만족시키는 정수의 개수는 11이다.

$-15, -14, \cdots, -5$로 $-5-(-15)+1=11$

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

B 128 정답 426 *로그의 성질의 활용－식의 정리 … [정답률 33%]

정답 공식: $\log_a x=b$이면 $x=a^b$이다.

자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록

단서 정수 k에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$라 놓고 조건을 만족시키는 n의 값을 구해.

하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

1st 주어진 값이 정수가 되도록 하는 자연수 n을 식으로 나타내.

정수 k에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$라 하면

$4\log_{2^6}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$, $\frac{4}{6}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$

$\log_{a^n}k=n\log_a k$

$\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$, $\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\frac{3}{2}k$

$\log_a x=t \Leftrightarrow x=a^t$

$\therefore \frac{3}{4n+16}=2^{\frac{3}{2}k}=(2^3)^{\frac{k}{2}}=8^{\frac{k}{2}}$ … ㉠

$a^{mn}=(a^m)^n$

이때, 자연수 n에 대하여 $0<\frac{3}{4n+16}<1$이므로 $0<8^{\frac{k}{2}}<1$이어야 한다.

n이 자연수이므로 $4n+16>20$이야.

즉, $k<0$이어야 한다.

또, $\frac{3}{4n+16}$이 유리수이므로 $8^{\frac{k}{2}}$도 유리수가 되어야 한다.

따라서 자연수 m에 대하여 $k=-2m$이라 하면 ㉠에서

자연수 m에 대하여 $k=-(2m-1)=-2m+1$이라 하면 $8^{\frac{k}{2}}=8^{\frac{-2m+1}{2}}=8^{-m}\times 8^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{8}}{8^m}$이므로 무리수가 돼. 따라서 $k=-2m$이어야 해.

$\frac{3}{4n+16}=8^{-m}$, $\frac{4n+16}{3}=8^m$

$\therefore 4n+16=3\times 8^m$

2nd 조건을 만족시키는 자연수 n의 값을 구해.

(i) $m=1$일 때

$4n+16=3\times 8=24$에서 $4n=8$

$\therefore n=2$

(ii) $m=2$일 때

$4n+16=3\times 8^2=192$에서 $4n=176$

$\therefore n=44$

(iii) $m=3$일 때

$4n+16=3\times 8^3=1536$에서 $4n=1520$

$\therefore n=380$

(iv) $m\ge 4$일 때 n의 값은 1000보다 크다.

(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$2+44+380=426$이다.

로그의 성질 개념·공식

$a>0$, $a\ne1$, $x>0$, $y>0$일 때,

① $\log_a a=1$ ② $\log_a 1=0$

③ $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$ ④ $\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$

B 129 정답 70

*상용로그의 활용－정수 부분과 소수 부분 [정답률 38%]

정답 공식: $\{f(x)\}^2+3g(x)=3$에서 $f(x)$가 정수이므로 가능한 값은 ±1이다. 각각에 대해 $\log x$의 값을 구할 수 있다.

양수 x에 대하여 단서1 상용로그의 정수 부분이 $f(x)$, 소수 부분이 $g(x)$야.

$\log x=f(x)+g(x)$ ($f(x)$는 정수, $0\le g(x)<1$)

이라 하자. $\{f(x)\}^2+3g(x)$의 값이 3이 되도록 하는 모든 x의 값의 곱은 $10^{\frac{q}{p}}$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (4점) 단서2 소수 부분 $g(x)$의 범위로 정수 $f(x)$의 값을 유추하여 x의 값을 찾아 볼까?

1st 조건을 만족시키는 정수 $f(x)$의 값을 구해.

$\{f(x)\}^2+3g(x)=3$에서

$g(x)=\dfrac{3-\{f(x)\}^2}{3}$ … ㉠이고 $0\le g(x)<1$이므로

$0\le\dfrac{3-\{f(x)\}^2}{3}<1$ $\quad\therefore 0<\{f(x)\}^2\le3$ → $\{f(x)\}^2=1, 2, 3$

그런데 $f(x)$는 정수이므로 $f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$이다.

2nd $f(x)$의 값에 따라 $\{f(x)\}^2+3g(x)=3$을 만족시키는 x의 값을 구하자.

(i) $f(x)=1$일 때, ㉠에 대입하면

$g(x)=\dfrac{3-1^2}{3}=\dfrac{2}{3}$이므로

$\log x=f(x)+g(x)=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$ $\quad\therefore x=10^{\frac{5}{3}}$

[로그의 정의] $\log_a N=x \Longleftrightarrow a^x=N$

실수 문제에서 $f(x)$는 정수라 하였으므로 $\{f(x)\}^2=1, 2, 3$일 때를 모두 고려하지 않아도 돼. 이 중에서 제곱수는 1뿐이므로 $f(x)=\pm1$일 때만 해당되겠지.

(ii) $f(x)=-1$일 때, ㉠에 대입하면

$g(x)=\dfrac{3-(-1)^2}{3}=\dfrac{2}{3}$이므로

$\log x=f(x)+g(x)=-1+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore x=10^{-\frac{1}{3}}$

3rd 모든 x의 값의 곱을 구하여 p, q의 값을 구할 수 있겠지?

(i), (ii)에 의하여 모든 x의 값의 곱은 $\underbrace{10^{\frac{5}{3}}\times10^{-\frac{1}{3}}}_{a^m\times a^n=a^{m+n}}=10^{\frac{4}{3}}$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로 $10(p+q)=10(3+4)=70$

다른 풀이: $g(x)$의 값을 기준으로 가능한 $f(x)$의 값을 유추하여 값 구하기

$\{f(x)\}^2+3g(x)=3$ … ㉠에서 $f(x)$가 정수이므로 $3g(x)$도 정수여야 해. → $3g(x)=3-\{f(x)\}^2=(\text{정수})-(\text{정수})=(\text{정수})$

그런데 $0\le g(x)<1$에서 $0\le3g(x)<3$이므로 $3g(x)$의 값은 0 또는 1 또는 2야.

(i) $3g(x)=0$, 즉 $g(x)=0$일 때,

㉠에서 $\{f(x)\}^2=3$ $\quad\therefore f(x)=\pm\sqrt{3}$ ⇒ 무리수

그런데 이것은 $f(x)$가 정수라는 조건에 맞지 않아.

(ii) $3g(x)=1$, 즉 $g(x)=\dfrac{1}{3}$일 때,

㉠에서 $\{f(x)\}^2+1=3$ $\quad\therefore f(x)=\pm\sqrt{2}$ ⇒ 무리수

이것도 $f(x)$는 정수라는 조건에 맞지 않아.

(iii) $3g(x)=2$, 즉 $g(x)=\dfrac{2}{3}$일 때,

㉠에서 $\{f(x)\}^2+2=3$ $\quad\therefore f(x)=\pm1$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 x의 값은

$f(x)=1$, $g(x)=\dfrac{2}{3}$일 때, $\log x=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$에서 $x=10^{\frac{5}{3}}$

$f(x)=-1$, $g(x)=\dfrac{2}{3}$일 때, $\log x=-1+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}$에서 $x=10^{-\frac{1}{3}}$

(이하 동일)

B 130 정답 44

1등급 대비 [정답률 12%]

*두 상용로그의 소수 부분이 같도록 하는 자연수 n의 값 구하기 [유형 14]

양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 소수 부분을 $f(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a와 n에 대하여 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (4점) 단서1 $\log a$와 $\log a^{2n}$의 소수 부분이 같으므로 두 수의 차는 정수가 되겠지? 나머지를 찾아야 해.

(가) $f(a)=f(a^{2n})$

(나) $(n+1)\log a=3n^2-4n+4$

단서2 다음과 같이 고쳐보자.

$\log_a=\dfrac{(n\text{에 대한 2차식})}{(n\text{에 대한 1차식})}=(n\text{에 대한 1차식})+\dfrac{k}{(n\text{에 대한 1차식})}$

왜 1등급? 두 로그의 소수 부분이 같도록 하는 자연수 n의 값을 구하는 것이다. 이를 위해서는 두 수의 소수 부분이 같으면 두 수의 차 $\log a^{2n}-\log a$의 값이 정수가 되므로 이를 n에 대하여 나타내어 따져 볼 수 있어야 한다.

단서+발상

단서1 조건 (가)에서 $\log a$와 $\log a^{2n}$의 소수 부분이 같으므로 두 수의 차의 소수 부분은 0이다. (개념)
따라서 두 수의 차는 두 수의 정수 부분의 차와 같으므로 정수가 된다. (발상)

단서2 조건 (나)에서 주어진 식을 $\log a=\boxed{}$로 정리하여 $\log a$의 정수 부분과 소수 부분을 구분한다. (적용)
로그의 성질에 의해 $\log a^{2n}=2n\log a$이므로 $\log a^{2n}-\log a$를 $\log a$로 묶어 나타내어 $\log a^{2n}-\log a$의 값이 정수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구한다. (해결)

주의 $\log a$와 $\log a^{2n}$의 소수 부분을 각각 구해 비교하기보다는 두 수의 차가 정수가 됨을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

핵심 정답 공식: 소수 부분이 같다는 것은 로그 값을 서로 뺀 값이 정수라는 뜻이다.

[문제 풀이 순서]

1st 두 상용로그의 소수 부분이 같으면 그 차가 정수가 됨을 이용해서 식을 세우자.

조건 (나)에서 $(n+1)\log a=3n^2-4n+4$이므로 양변을 $n+1$로 나누면

$\log a=3n-7+\dfrac{11}{n+1}$ … ㉠

$\dfrac{3n^2-4n+4}{n+1}=\dfrac{(3n-7)(n+1)+11}{n+1}=3n-7+\dfrac{11}{n+1}$

실수 정말 자주 쓰이는 성질이니까 잘 익혀둬.

조건 (가)에서 $f(a)=f(a^{2n})$

즉, $\log a$와 $\log a^{2n}$의 소수 부분이 같으므로 $\log a^{2n}-\log a$의 값이 정수여야 한다.

$\log a=m+\alpha$, $\log a^{2n}=m'+\alpha$ (m, m'은 정수, $0\le\alpha<1$)이면 $\log a^{2n}-\log a=(m'+\alpha)-(m+\alpha)=(m'-m)=(\text{정수})$

$2n\log a-\log a=(2n-1)\log a=(\text{정수})$이므로

㉠의 양변에 $(2n-1)$을 곱하면

$(2n-1)\log a=(2n-1)(3n-7)+\dfrac{11(2n-1)}{n+1}$

$=\underbrace{(2n-1)(3n-7)+22}_{\text{정수}}-\dfrac{33}{n+1}$

2nd 조건에 맞는 자연수 n의 값을 구하자.

$\dfrac{33}{n+1}$이 정수이면 $(2n-1)\log a$가 정수이다. n은 자연수이므로 $n+1$은 3, 11, 33이어야 한다. 즉, n은 2, 10, 32이다.

$\dfrac{33}{n+1}$이 정수가 되려면 $n+1$은 33의 약수이어야 하는데 n이 자연수이니까 $n+1$로 가능한 수는 3, 11, 33 이야.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+10+32=44$

1등급 대비 특강

*** 소수 부분이 같은 두 수의 차가 정수인 이유**

$\log a^{2n}$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 m, α $(0 \le \alpha < 1)$, $\log a$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 m', β $(0 \le \beta < 1)$라 하고 두 수 $\log a^{2n}$, $\log a$의 차를 k라 하면 $k = \log a^{2n} - \log a = (m+\alpha) - (m'+\beta) = (m-m') + (\alpha - \beta)$이지?
그런데 문제에서 두 수 $\log a^{2n}$, $\log a$의 소수 부분이 같다고 했으니까
$\alpha = \beta$에서 $\alpha - \beta = 0$이고 m, m'은 정수이므로 $m-m'$로 정수야.
$\therefore \log a^{2n} - \log a = (m-m') + (\alpha - \beta) = m - m' = $(정수)

My Top Secret 서울대 선배의 1등급 대비 전략

소수 부분이 같다는 조건을 두 수의 차가 정수가 된다는 조건으로 바꾸어 활용하는 이유는 조건 (나)에서 주어진 $\log a$의 식을 이용하여 계산 실수를 줄이기 위해서라고 볼 수 있어.
왜냐하면 각 수의 소수 부분을 직접 계산해서 서로 비교하면 계산이 복잡해지기 때문에 실수하기 쉽기 때문이야.

B 131 정답 ③

1등급 대비 [정답률 15%]

* 주어진 등식을 만족시키는 자연수 a, b의 값 구하기 [유형 15]

양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분을 $f(x)$라 할 때, $f(ab) = f(a)f(b) + 2$를 만족시키는 20 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은? (4점)

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

단서 a, b의 값의 범위에 따라 $1 \le ab \le 400$이니까 $f(ab) = 0$ 또는 1 또는 2가 되지?

왜 1등급? 정수 부분을 활용하여 주어진 등식을 만족시키는 자연수를 구하는 문제이다.
두 자연수 a, b의 값의 범위를 나누어 $f(ab)$의 값을 따져 볼 수 있어야 한다.

단서+발상

단서 $\log x$의 정수 부분인 $f(x)$는 $1 \le x < 10$일 때 $f(x) = 0$, $10 \le x < 100$일 때 $f(x) = 1$, $100 \le x < 1000$일 때 $f(x) = 2$이다. 개념
a와 b는 20 이하의 자연수이므로 $f(a)$와 $f(b)$는 0 또는 1의 값을 갖고, ab는 $1 \le ab \le 400$이므로 $f(ab)$는 0, 1, 2의 값을 갖는다. 적용
$f(ab) \le 2$이고 $f(a)f(b) \ge 0$인 것을 활용하여 $f(ab) = f(a)f(b) + 2$에서 등호가 성립하려면 $f(ab) = 2$이고 $f(a)f(b) = 0$임을 알 수 있다. 발상
따라서 $100 \le ab \le 400$이고, $1 \le a < 10$ 또는 $1 \le b < 10$이다. 해결

주의 a와 b의 값의 범위에 주의하여 $a+b$의 값이 최소가 되는 경우를 찾아야 한다.

핵심 정답 공식: a, b가 20 이하의 두 자연수이므로 $f(a)$, $f(b)$의 값은 0 또는 1이다. 각각에 대해 경우의 수를 나눈다.

[문제 풀이 순서]

1st 20 이하의 자연수 k에 대하여 $f(k) = 0$ 또는 $f(k) = 1$임을 이용해.

주의 상용로그는 밑이 10이므로 $\log a$의 정수 부분이 자연수이려면 $a \ge 10$을 만족해야 해.

다음과 같이 두 자연수 a, b의 범위를 나누어 $f(ab) = f(a)f(b) + 2$를 만족시키는 자연수 (a, b)의 순서쌍을 구하자.

(i) $1 \le a \le 9$, $1 \le b \le 9$인 경우
a, b는 한 자리의 수이므로 $\log a$의 정수 부분은 0이다.
a가 n자리의 수일 때, $\log a$의 정수 부분은 $n-1$이야.
마찬가지로 $\log b$의 정수 부분도 0이다.
즉, $f(a) = f(b) = 0$이므로
$f(ab) = f(a)f(b) + 2 = 0 \times 0 + 2 = 2$ ⋯ ㉠
그런데 $1 \le ab \le 81$이므로 $\log 1 = 0 \le \log ab \le \log 81 < \log 10^2 = 2$
이때, ㉠에서 $f(ab) = 2$이어야 하는데 $\log ab$의 정수 부분 $f(ab)$의 값은 2가 될 수 없으므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 (a, b)의 순서쌍은 존재하지 않는다.

(ii) $1 \le a \le 9$, $10 \le b \le 20$인 경우
a는 한 자리의 수이고, b는 두 자리의 수이므로 $\log a$의 정수 부분은 0이고, $\log b$의 정수 부분은 1이다. a가 n자리의 수일때 $\log a$의 정수 부분은 $n-1$이야.
즉, $f(a) = 0$, $f(b) = 1$이므로
$f(a)f(b) + 2 = 0 \times 1 + 2 = 2$ ⋯ ㉡ ab가 두 자리 수이면 $\log ab$의 정수 부분은 1이야.
이때, $10 \le ab \le 180$인데, $10 \le ab < 100$일 때는 $f(ab) = 1$이므로
㉡에 의하여 $f(ab) = 2$이면 두 자연수 a, b는 $100 \le ab \le 180$을 만족해야만 한다.
따라서 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$(5, 20)$ 각각에서 $a+b$의 최솟값을 구할 수 있을 거야.
$(6, 17)$, $(6, 18)$, $(6, 19)$, $(6, 20)$ ⇐ $6 \times 16 = 96 < 100$
$(7, 15)$, $(7, 16)$, ⋯, $(7, 20)$ ⇐ $7 \times 14 = 98 < 100$
$(8, 13)$, $(8, 14)$, ⋯, $(8, 20)$ ⇐ $8 \times 12 = 96 < 100$
$(9, 12)$, $(9, 13)$, ⋯, $(9, 20)$ ⇐ $9 \times 11 = 99 < 100$
이므로 $a+b$의 최솟값은
$8 + 13 = 9 + 12 = 21$

(iii) $10 \le a \le 20$, $1 \le b \le 9$인 경우
(ii)와 마찬가지로 $a+b$의 최솟값은 21이다.

(iv) $10 \le a \le 20$, $10 \le b \le 20$인 경우
$\log a$, $\log b$의 정수 부분이 모두 1로 $f(a) = f(b) = 1$이므로
$f(a)f(b) + 2 = 1 \times 1 + 2 = 3$ ⋯ ㉢
$\log 100 = 2 \le \log ab \le \log 400 < \log 10^3 = 3$ ab는 세 자리 수이니까 $\log ab$의 정수 부분이 2야.
이때, ㉢에서 $f(ab) = 3$이어야 하는데 $100 \le ab \le 400$이므로 $\log ab$의 정수 부분 $f(ab)$의 값은 3이 될 수 없으므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 (a, b)의 순서쌍은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 $a+b$의 최솟값은 21이다.

My Top Secret 서울대 선배의 1등급 대비 전략

주어진 범위에서 로그의 정수 부분이 갖는 값의 범위는 한정적이므로 그 값에 따라 경우를 나누어 구할 수 있어. 따라서 a와 b의 값의 범위를 나누고, ab의 값의 범위를 나누어 등식을 만족시키는 경우를 구할 수 있어.

상용로그의 정수 부분과 소수 부분 개념·공식

① $\log N$의 정수 부분이 n자리이면
$n < \log N < n+1$, 즉 $10^n < N < 10^{n+1}$이다.
② $\log A$와 $\log B$의 소수 부분이 같으면
$\log A - \log B = $(정수)
③ $\log A$와 $\log B$의 소수 부분의 합이 정수이면
$\log A + \log B = $(정수)

경찰대, 삼사 중요 기출 문제 [어려운 3점+4점+5점]

B 132 정답 973 *로그의 정의 [정답률 74%]

(정답 공식: $a^x=b$이면 $x=\log_a b$이고 $\log_a x=b$이면 $x=a^b$이다.)

단서1 로그의 정의를 이용하여 b를 a로, d를 c로 나타내 봐.

단서2 a, b, c, d가 자연수라는 조건이 이 문제의 핵심이야. 단서1에서 b, d가 자연수가 되기 위한 조건이 무엇인지 생각해야 해.

$\log_a b=\frac{3}{2}$, $\log_c d=\frac{3}{4}$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d에 대하여 $a-c=19$일 때, $b-d$의 값을 구하시오. (4점)

단서3 단서2에서 찾아낸 조건과 $a-c=19$를 이용하여 a, c의 값을 각각 결정할 수 있어.

1st b, d를 a, b로 나타내자.

$\log_a b=\frac{3}{2}$에서 $b=a^{\frac{3}{2}}$ ⋯ ㉠, $\log_c d=\frac{3}{4}$에서 $d=c^{\frac{3}{4}}$ ⋯ ㉡

$\log_a b=x \Longleftrightarrow b=a^x$

2nd a, c의 값을 각각 구하자.

a, b, c, d는 자연수이므로 ㉠에서 a는 제곱수가 되어야 하고 ㉡에서 c는 네제곱수가 되어야 한다.

즉, 가능한 a의 값은 제곱수인 4, 9, 16, 25, ⋯이고 가능한 c의 값은 네제곱수인 16, 81, 256, 625, ⋯이다.

이 중 $a-c=19$를 만족시키는 a와 c의 값은 $a=100$, $c=81$이다. ⋯ (★)

3rd $b-d$의 값을 구하자.

$(a^m)^n=a^{mn}$

㉠에서 $b=a^{\frac{3}{2}}=100^{\frac{3}{2}}=(10^2)^{\frac{3}{2}}=10^{2\times\frac{3}{2}}=10^3=1000$이고

㉡에서 $d=c^{\frac{3}{4}}=81^{\frac{3}{4}}=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^{4\times\frac{3}{4}}=3^3=27$이므로

$b-d=1000-27=973$

수능 핵강

*(★)에서 $a-c=19$를 만족시키는 a와 c의 값이 하나뿐인 이유

자연수 s, t에 대하여 a는 제곱수이므로 $a=s^2$이라 하고 c는 네제곱수이므로 $c=t^4$이라 하면 $a-c=19$에서 $s^2-t^4=19$야.

이를 인수분해하면 $(s+t^2)(s-t^2)=19$이고 s, t가 자연수이므로 $s+t^2$, $s-t^2$도 모두 자연수가 되어야 해. 또, 19를 두 자연수의 곱으로 나타내면 $19=1\times19$이므로 $s+t^2=1$, $s-t^2=19$ 또는 $s+t^2=19$, $s-t^2=1$이어야 해.

(i) $s+t^2=1$, $s-t^2=19$일 때,
s, t^2은 모두 자연수이므로 $s+t^2=1$을 만족시키는 경우는 없어. 따라서 $s+t^2=1$, $s-t^2=19$를 만족시키는 자연수 s, t는 존재하지 않아.

(ii) $s+t^2=19$, $s-t^2=1$일 때,
 i) $s+t^2=19$에서 $t^2=1$일 때, $s=18$인데 $s-t^2=1$을 만족시키지 않아.
 ii) $s+t^2=19$에서 $t^2=4$일 때, $s=15$인데 $s-t^2=1$을 만족시키지 않아.
 iii) $s+t^2=19$에서 $t^2=9$일 때, $s=10$이고 $s-t^2=1$을 만족시켜.
 $\therefore s=10$, $t=3$
 iv) $s+t^2=19$에서 $t^2=16$일 때, $s=3$인데 $s-t^2=1$을 만족시키지 않아.
 v) $t^2\geq25$이면 $s+t^2=19$를 만족시키는 자연수 s는 존재하지 않아.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 s, t의 값은 각각 $s=10$, $t=3$이므로 $a=s^2=10^2=100$, $c=t^4=3^4=81$

B 133 정답 250 *로그의 성질의 활용–식의 정리 [정답률 72%]

(정답 공식: $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$, $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$)

실수 a, b, c가

$$\log\frac{ab}{2}=(\log a)(\log b),$$

$$\log\frac{bc}{2}=(\log b)(\log c),$$

$$\log(ca)=(\log c)(\log a)$$

단서1 로그의 성질을 이용하여 $\log a$, $\log b$, $\log c$에 대한 식으로 나타내.

를 만족시킬 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 모두 10보다 크다.) (4점)

단서2 $\log a$, $\log b$, $\log c$의 값은 모두 1보다 커.

1st 치환을 이용하여 연립방정식을 만들어.

$\log a=A$, $\log b=B$, $\log c=C$라 하면

$\log\frac{ab}{2}=(\log a)(\log b)$에서 $\log(ab)-\log 2=(\log a)(\log b)$

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$, $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$\log a+\log b-\log 2=(\log a)(\log b)$

$\therefore A+B-\log 2=AB$ ⋯ ㉠

$\log\frac{bc}{2}=(\log b)(\log c)$에서 $\log(bc)-\log 2=(\log b)(\log c)$

$\log b+\log c-\log 2=(\log b)(\log c)$

$\therefore B+C-\log 2=BC$ ⋯ ㉡

$\log(ca)=(\log c)(\log a)$에서 $\log c+\log a=(\log c)(\log a)$

$\therefore C+A=CA$ ⋯ ㉢

2nd A, B, C에 대한 방정식을 풀자.

㉠−㉡을 하면 $A-C=AB-BC$에서 $A-C=B(A-C)$

$B(A-C)-(A-C)=0$, $(A-C)(B-1)=0$

$\therefore A=C$ ($\because B>1$)

$b>10$이므로 $\log b>\log 10=1$ $\therefore B>1$

이것을 ㉢에 대입하면 $C+C=C^2$에서 $C^2-2C=0$, $C(C-2)=0$

$\therefore C=2$ ($\because C>1$) $\Rightarrow A=2$

$c>10$이므로 $\log c>\log 10=1$ $\therefore C>1$

$A=2$를 ㉠에 대입하면 $2+B-\log 2=2B$에서

$B=2-\log 2=\log 100-\log 2=\log\frac{100}{2}=\log 50$

3rd a, b, c의 값을 각각 구하고 $a+b+c$를 계산해.

$A=2$에서 $\log a=2$ $\therefore a=10^2=100$

$\log_a x=k \Leftrightarrow x=a^k$

$B=\log 50$에서 $\log b=\log 50$ $\therefore b=50$

$C=2$에서 $\log c=2$ $\therefore c=10^2=100$

$\therefore a+b+c=100+50+100=250$

B 134 정답 ④ *로그의 성질의 활용–식의 정리 [정답률 72%]

(정답 공식: $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$임을 이용한다.)

두 양수 a, b가

단서 미지수가 a, b로 2개이고 식도 2개이므로 연립방정식을 풀어야 해.

$$\log_b a+\log_a b=\frac{26}{5},\ ab=27$$

을 만족시킬 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a\neq1$, $b\neq1$) (3점)

① 240 ② 242 ③ 244
④ 246 ⑤ 248

1회 수학 I 실전 기출 모의고사 문제편 p. 308

1회 01 정답 ⑤ *로그의 계산 [정답률 97%]

(정답 공식: $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$)

$27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4$의 값은? (2점) 단서 거듭제곱 꼴은 지수법칙, 로그는 로그의 성질을 이용하여 간단히 해.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 지수법칙과 로그의 성질을 이용해서 식을 정리해.

실수 이렇게 지수와 로그의 성질을 둘 다 이용해야 하는 문제도 많이 나오지. 지수와 로그의 성질은 기본 중의 기본이니까 제대로 익혀두자.

$27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4=\underbrace{(3^3)^{\frac{1}{3}}}_{(a^m)^n=a^{mn}}+\log_2 2^2=3+2\underbrace{\log_2 2}_{=1}=3+2=5$

로그 개념·공식

a, b, c, x, y가 양수이고, $a\neq1, b\neq1, c\neq1$일 때,
① $\log_a a=1$
② $\log_a 1=0$
③ $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$
④ $\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$
⑤ $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
⑥ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$
⑦ $\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1$
⑧ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b\ (m\neq0)$

1회 02 정답 ③ *삼각함수의 최대·최소 – 일차식 꼴 [정답률 89%]

(정답 공식: 함수 $y=\sin x$의 최댓값, 최솟값을 이용한다.)

함수 $f(x)=a\sin x+1$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m=6$일 때, 양수 a의 값은? (3점)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

단서 함수 $f(x)$는 함수 $y=\sin x$를 a배한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 함수지? 그럼 함수 $y=\sin x$의 최댓값과 최솟값을 이용하여 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있어.

1st 함수 $y=\sin x$의 최댓값과 최솟값은 각각 1, -1임을 이용하여 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구해.

$-1\le\sin x\le1$이므로 각 변에 a를 곱하면
$-a\le a\sin x\le a$ ($\because a>0$) → 함수 $y=\sin x$의 치역은 $\{y\mid-1\le y\le1\}$이야.
다시 각 변에 1을 더하면
$-a+1\le a\sin x+1\le a+1$
따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각
$M=a+1$, $m=-a+1$

2nd $M-m=6$의 값을 이용해서 양수 a의 값을 구하자.

이때, $M-m=6$이므로 $M-m=a+1-(-a+1)=6$에서
$2a=6$
$\therefore a=3$

1회 03 정답 ③ *삼각함수 사이의 관계 – $\sin\theta\times\cos\theta$, $\sin\theta\pm\cos\theta$ [정답률 87%]

(정답 공식: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이고, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이다.)

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$의 값은? (3점)
단서 주어진 조건식이 sin, cos으로 주어졌으니까 구하는 식도 sin, cos으로 나타내야 한다고 생각해 봐.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

1st 조건식의 양변을 제곱해 보자.

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\underbrace{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}_{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}=\frac{3}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\underbrace{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}_{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\overbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}^{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{1}{8}}=8$

삼각함수 사이의 관계 개념·공식

① $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
③ $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

1회 04 정답 ① *로그의 정의 [정답률 73%]

(정답 공식: 모든 실수 x에 대하여 log가 정의되기 위해서는 밑이 1이 아닌 양수여야 하고, 진수가 x의 값에 관계없이 항상 양수여야 한다.)

모든 실수 x에 대하여 $\log_a(x^2+2ax+5a)$가 정의되기 위한 모든 정수 a의 값의 합은? (3점) 단서 로그가 정의되기 위해서는 (진수)>0, (밑)>0, (밑)$\neq1$이어야 해.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

1st 로그의 (밑)>0, (밑)$\neq1$이어야 해.

$\log_a(x^2+2ax+5a)$가 정의되기 위해서 밑인 a가
$a>0$, $a\neq1$ … ㉠
이 성립되어야 한다.

2nd 로그의 (진수)>0이어야 해.

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+5a>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+5a=0$의 판별식 $D<0$이어야 한다.
→ 이차부등식 $ax^2+bx+c>0\ (a>0)$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 가지면 안 되므로 판별식 $D<0$이어야 해.

$\frac{D}{4}=a^2-5a<0$
$a(a-5)<0$
$\therefore 0<a<5$ … ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 a는 2, 3, 4이므로 이 값들의 합은 9이다.
㉠에서 $a\neq1$임을 잊지 말자.

실수 로그 $\log_a N$의 밑의 조건은 $a\neq1$, $a>0$이어야 해.