고등 수학,
개념과 유형을 제대로 익히면 누구나 잘 할 수 있습니다.

고등학교 수학은 개념이 어렵다고
공식만 암기하면서 공부해서는 안 됩니다.
개념을 꼼꼼히 이해하고 각 개념의 필수 공식과 문제 유형들을
단계화된 문제를 통해서 정확히 익혀야 합니다.

자이스토리는 학교시험과 최신 학력평가 문제를
철저히 분석해 촘촘하게 유형을 분류하고 개념을 알맞게 적용시키는
세분화된 문제 유형 훈련으로 수학 기본 실력이 탄탄하게 다져집니다.
그래서 하루가 다르게 수학 성적이 향상됨을 느낄 수 있습니다.

또한, 자이스토리의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설,
다른 풀이, 톡톡 풀이, 쉬운 풀이 등은 수학 공부에
흥미와 성취감을 북돋아 줄 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 **자이스토리** –

학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [27일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~42		월 일	월 일
2	43~77		월 일	월 일
3	78~95		월 일	월 일
4	B 01~38		월 일	월 일
5	39~61		월 일	월 일
6	62~74		월 일	월 일
7	C 01~38		월 일	월 일
8	39~62		월 일	월 일
9	D 01~42		월 일	월 일
10	43~64		월 일	월 일
11	E 01~33		월 일	월 일
12	34~56		월 일	월 일
13	57~68		월 일	월 일
14	F 01~39		월 일	월 일
15	40~67		월 일	월 일
16	68~81		월 일	월 일
17	G 01~47		월 일	월 일
18	48~73		월 일	월 일
19	74~92		월 일	월 일
20	H 01~35		월 일	월 일
21	36~66		월 일	월 일
22	67~87		월 일	월 일
23	I 01~47		월 일	월 일
24	48~71		월 일	월 일
25	모의 A, B, C		월 일	월 일
26	모의 D, E, F		월 일	월 일
27	모의 G, H, I		월 일	월 일

- 나는 ______________ 대학교 ______________ 학과 __________ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여고
김대식 경기 하남고
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 경기 안양외고
박숙녀 충남 삼성고
배수나 서울 가인아카데미
신건률 대치 오름학원
신명선 안양 신성고
신현준 안양 신성고
윤장노 안양 신성고
윤혜미 서울 세종과학고
이종석 저)일등급 수학

이창희 THE 다원수학
위경아 강남대성기숙 의대관
장광걸 경기 김포외고
장경호 오산 운천고
장영환 제주 제로링수학교실
장철희 서울 보성고
전경준 서울 풍문고
조승원 경기 경기과학고
지강현 안양 신성고
홍지언 부산 피보나치수학
홍지우 안양 평촌고
황광희 경기 시흥고

[다른 풀이 집필]

강태희 파주 한민고
김정수 고양 대치M수학학원
방성의 시흥 초고수수학학원
이효상 부산 수학솔루션
장용준 의정부 상우고

개념&문제 풀이
강의 선생님
유튜브 채널
'수학문제 다깨기'

[감수진]

강대성 전주 블루M수학학원
강종철 서울 쿠메수학교습소
기소연 남양주 매쓰키수학
김기덕 서울 메가매쓰수학학원
김덕한 대전 더칸수학학원
김동민 서울 호크마수학학원
김동욱 서울 디파인수학전문학원
김동현 광명 수능수학 전문컨설턴트
김미영 서울 명수학교습소
김민경 강릉 강릉고
김보라 제주 라딕스수학
김상호 전주 휴민고등수학
김새로미 화성 스터디온학원
김영대 천안 탑씨크리트학원
김영준 서울 매쓰탑학원
김장훈 제주 프로젝트M수학학원
김재광 광주 디투엠 수학학원
김재혁 천안 불당동 라온프라임학원
김지선 남양주 스튜디오D코딩수학학원
김지선 서울 수학전문 순수
김진식 대구 경신고
김착한 구리 수능수학 전문컨설턴트
남병조 서울 로드맵플러스
노명훈 원주 노명훈쌤의 알수학학원
박경보 서울 최고수챌린지에듀학원
박동훈 안산 에스엠수학
박묘인 용인 이투스수학
박소영 서울 정상수학학원
박영선 세종 유얼수학

박재홍 용인 열린학원
박정희 인천 수능수학 전문컨설턴트
박진홍 군포 고밀도학원
박한얼 나주 두드림영수학원
성수경 울산 위룰수학영어학원
신선호 화성 하버드수학
심재현 용인 웨이메이커 수학학원
심혜림 성주 별고을교육원
안병훈 부산 팀매쓰수학전문학원
양유식 부여 정석학원
오선화 부산 다대 대성제넥스학원
오정민 인천 갈루아수학학원
옥승길 부산 옥승길수학학원
유재영 평택 비전고
유형기 서울 유형기 수학교습소
윤소라 대전 뉴포스학원
이동헌 평택 S4국영수학원
이동훈 대구 이동훈수학학원
이상혁 광주 감성수학
이서윤 화성 목동 곰수학학원
이세복 서울 일타수학학원
이세진 부산 서용기과학이세진수학학원
이양근 용인 양지메가스터디 기숙학원
이연희 부산 오른수학
이은경 익산 베리타스영수학원
이지훈 세종 공부수다 학원
이지훈 서울 백향목학원
이창현 양주 U2M 옥정 캠퍼스
이한나 울산 꿈꾸는고래학원

이한샘 광명 진성고
이혜진 평택 S4국영수학원
이호균 인천 투스카이수학과학학원
임명진 안양 서연고학원
장성인 부산 노마드수학전문학원
전호완 성남 숭신여자고
정민정 평택 S4국영수학원
정지민 청주 스텝업수학
정지훈 용인 최상위권수학학원
정진영 인천 정선생수학연구소
정한울 포천 한울스터디
정화진 서울 진화수학학원
조일형 금산 별무리고
채송화 부산 채송화수학
채은영 서울 사당베스트수학
최고은 익산 수학코치
최백화 서울 최백화수학
최지현 대구 CMC수학
최현섭 울산 세인학원
홍성진 서울 대치 김앤홍수학전문학원
홍준서 서울 퍼씰수학전문학원
홍진국 대전 저스트수학

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
황대윤 서울대 수리과학부

차 례 [총 94개 유형 분류]

다른 풀이, 쉬운, 톡톡 풀이 대폭 강화

Ⅰ 수열의 극한

A 수열의 극한 – 15개 유형 분류

핵심 개념 정리 10
개념 확인 문제 11
수능 유형별 기출 문제 12
1등급 마스터 문제 28
동아리 소개 / 서울대 연극동아리 총연극회 30

B 급수 – 9개 유형 분류

핵심 개념 정리 32
개념 확인 문제 33
수능 유형별 기출 문제 34
1등급 마스터 문제 51

Ⅱ 미분법

C 지수함수와 로그함수의 미분 – 8개 유형 분류

핵심 개념 정리 54
개념 확인 문제 55
수능 유형별 기출 문제 56
1등급 마스터 문제 65
동아리 소개 / 서울대 전무련 66

D 삼각함수의 덧셈정리 – 7개 유형 분류

핵심 개념 정리 68
개념 확인 문제 69
수능 유형별 기출 문제 70
1등급 마스터 문제 78
동아리 소개 / 고려대 관현악단 80

E 삼각함수의 미분 – 7개 유형 분류

핵심 개념 정리 82
개념 확인 문제 83
수능 유형별 기출 문제 84
1등급 마스터 문제 95
동아리 소개 / 카이스트 SPARCS 98

F 여러 가지 미분법 – 9개 유형 분류

핵심 개념 정리 100
개념 확인 문제 101
수능 유형별 기출 문제 102
1등급 마스터 문제 114
동아리 소개 / 서울대 TNT 116

G 도함수의 활용 – 12개 유형 분류

핵심 개념 정리 118
개념 확인 문제 119
수능 유형별 기출 문제 120
1등급 마스터 문제 135
동아리 소개 / 고려대 쉐어링코이어 138

Ⅲ 적분법

H 여러 가지 적분법 – 16개 유형 분류

- 핵심 개념 정리 140
- 개념 확인 문제 141
- 수능 유형별 기출 문제 142
- 1등급 마스터 문제 155
- 동아리 소개/ 성균관대 아이섹 158

I 정적분의 활용 – 11개 유형 분류

- 핵심 개념 정리 160
- 개념 확인 문제 161
- 수능 유형별 기출 문제 162
- 1등급 마스터 문제 174

Special 내신+수능 대비 단원별 모의고사

- A 수열의 극한 176
- B 급수 178
- C 지수함수와 로그함수의 미분 180
- D 삼각함수의 덧셈정리 182
- E 삼각함수의 미분 184
- F 여러 가지 미분법 186
- G 도함수의 활용 188
- H 여러 가지 적분법 190
- I 정적분의 활용 192

빠른 정답 찾기[문제편] 194

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

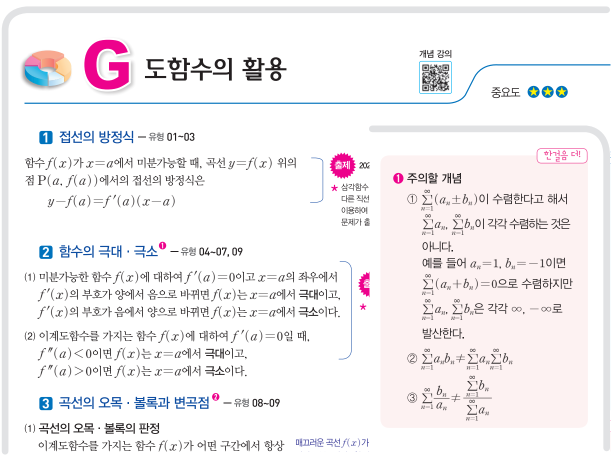
‘수학문제 다깨기’

세분화된 유형 문제 + 1등급 대비 문제로 내신 1등급 완성

1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

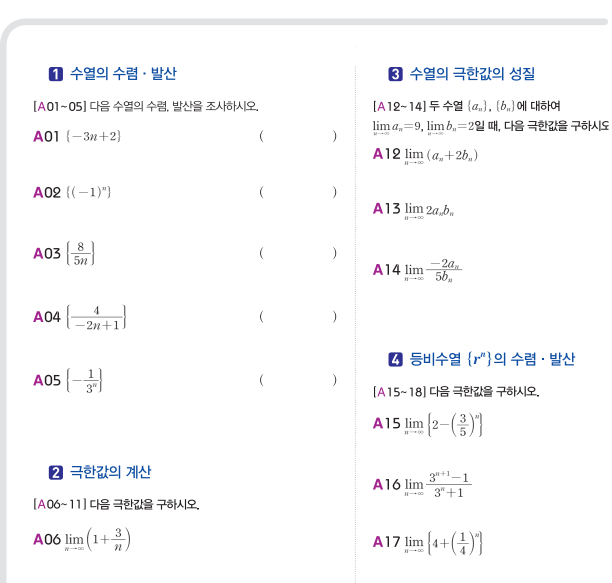
고2 수학의 각 단원에서 가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념을 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 개념과 공식을 쉽게 이해하고 적용할 수 있도록 하였습니다.

- 중요도 ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- +개념보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2023 수능과 2024 대비 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시



2 개념 확인 문제 – 개념에 대한 이해도 확인 문제

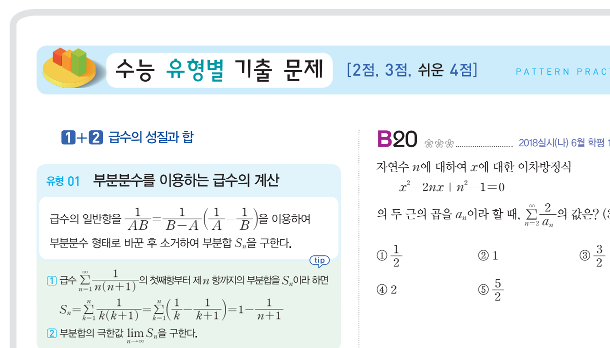
앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 개념 이해를 위한 필수 문제를 수록하였습니다.



3 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하고 유형을 촘촘하게 세분화하여 유형순, 개념순, 난이도순으로 문항을 배열하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- QR코드 : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.



- 유형 분류 : 빈출 – 시험에서 자주 출제되는 유형입니다.
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- 대표 : 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.

- 난이도 : ❀❀❀ – 기본 문제 ✿❀❀ – 중급 문제 ✿✿❀ – 중상급 문제

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2022대비 수능(홀) 1(고3) : 2021년 11월에 실시한 수능
  - 2022대비 6월 모평 2(고3) : 2021년 6월에 실시한 평가원
  - 2022실시 4월 학평 3(고3) : 2022년 4월에 실시한 학력평가
  - 2023대비 9월 모평 4(고3) : 2022년 9월에 실시한 평가원

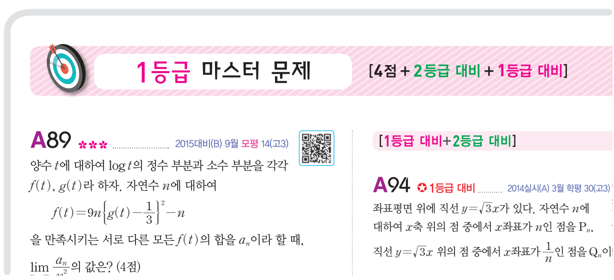
4 내신+수능 대비 단원별 모의고사 – 최종 실력 점검

중단원별 학교 시험 필수 문제와 수능형 문항을 종합하여 공부할 수 있습니다. 또한, 서술형 문항도 수록하여 학교시험을 더욱 충실히 대비할 수 있습니다.

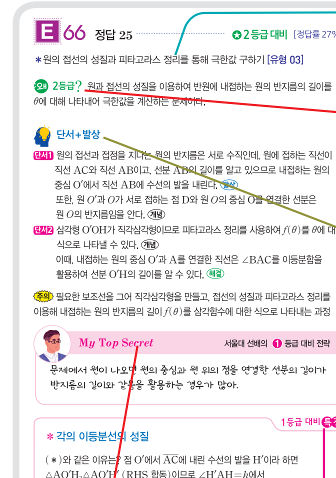
5 1등급 마스터 문제 – 대비 문제로 1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 길러서 반드시 수학 1등급에 달성할 수 있도록 구성했습니다.

- ✽✽✽ – 상급 문제
- 2등급 대비 : 정답률이 20~30%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- 1등급 대비 : 정답률이 20% 미만인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제



6 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설



문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

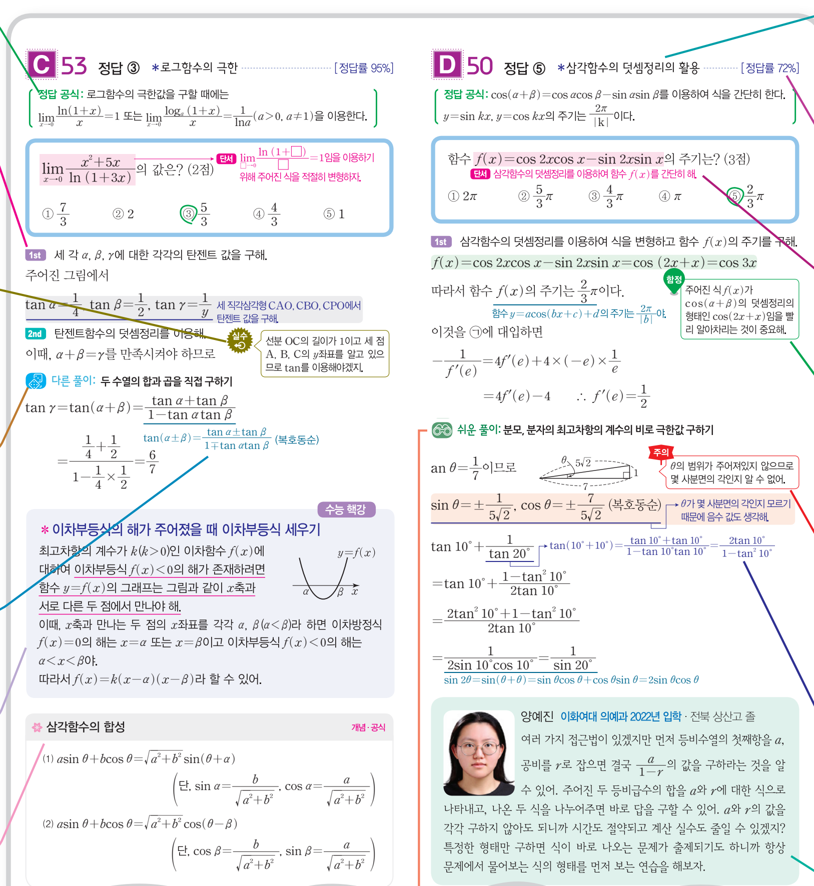
왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

7 입체 첨삭 해설!



정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빠먹거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

생생체험
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

문항 배열 및 구성 [793제]

❶ 개념 이해를 체크할 수 있는 개념 확인 문제 [181제]

개념 하나하나에 대한 맞춤 확인 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 학력평가 기출 문제+수능 유형 완전 정복 문제 [94유형, 문제 493제]

• 2018~2008 고2 학력평가 문항 중에서 새교육과정에 꼭 맞는 문제 선별 수록 [33제]
• 고2 난이도에 맞는 전개년 수능+평가원 문제 선별 수록 [222제]
• 2023~2005 고3 학력평가 기출 문제 중에서 필수 개념 문제 선별 수록 [238제]

❸ 학교시험+새 수능 대비를 위한 수능 기출 변형 문제 [41제]

새 수능에 적합한 개념과 공식을 이해하고 활용할 수 있도록 수능 기출 문제를 변형하여 추가 수록하였습니다.

❹ 내신+수능 단원별 모의고사 [기출 문제+수능 기출 변형 문제 99제]

각 단원에 출제 빈도가 높은 문제를 최신 출제 경향에 따라 구성하였습니다.

[고2 미적분 문항 구성표]

	고2(실시 연도)				고3(대비 연도) – 고2 난이도 수준							
연도	3월 학평	6월 학평	9월 학평	11월 학평	3월 학평	4,5월 학평	6월 모평	7월 학평	9월 모평	10월 학평	수능	합계
2024					6	4	5	6				21
2023					7	5	6	4	7	0	6	35
2022	출제 되지 않음				7	7	8	7	7	1	5	42
2021					1	6	9	8	11	7	8	50
2020					17	14	16	10	15	10	14	96
2019					10	7	8	4	9	4	4	46
2018	0	1	1	9	10	7	9	6	6	6	4	59
2017	0	0	2	2	8	5	7	5	5	4	5	43
2016	0	0	0	3	4	5	7	1	6	6	2	34
2016이전	0	1	5	7	14	18	24	8	25	11	20	133
2022, 2014, 2005 대비 예비 평가 문항 수												12
수능 기출 변형 문항 수 (94개 유형 수능 기출 변형 문제)												41
개념 확인 문항 수												181
총 문항 수												793

A 수열의 극한

★ 유형 차례

중요 유형 01 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산

유형 02 수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산

유형 03 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 활용

유형 04 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산

유형 05 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 활용

중요 유형 06 등비수열의 수렴 조건

유형 07 등비수열의 극한값의 계산

유형 08 x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수

유형 09 등비수열의 극한과 함수의 연속

유형 10 a_n과 S_n의 관계를 이용한 수열의 극한

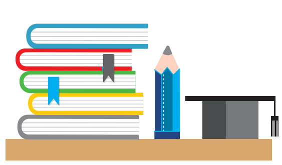
중요 유형 11 수열의 극한을 이용한 대소 관계

유형 12 치환을 이용한 수열의 극한

유형 13 수열의 수렴과 발산의 진위 판정

중요 유형 14 좌표평면에서 여러 가지 극한

유형 15 무한히 반복되는 도형에서의 극한



★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2024	수능		
	9월	유형 07 등비수열의 극한값의 계산	★★☆
	6월	유형 04 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산	☆☆☆
2023	수능	유형 07 등비수열의 극한값의 계산	☆☆☆
	9월	유형 02 수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산	☆☆☆
	6월	유형 04 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산	☆☆☆
2022	수능	유형 01 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산	☆☆☆
	9월	유형 07 등비수열의 극한값의 계산	☆☆☆
	6월	유형 04 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산	☆☆☆
	예시	유형 06 등비수열의 수렴 조건	☆☆☆

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 수열의 극한값을 계산하는 문제는 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 또는 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값을 구하거나 등비수열이 포함된 수열의 극한값을 구하는 간단한 형태이므로 계산 과정에서 실수를 하지 않도록 많은 연습을 해야 한다.
- 극한의 성질을 이용하거나 수열의 대소 관계를 이용하여 새롭게 정의된 수열의 극한값을 구하는 유형이 고난도 문항으로 출제될 가능성이 있으므로 수열의 극한의 성질을 종합적으로 정확히 알고 적용할 수 있도록 하자.
- 다항함수, 유리함수, 무리함수, 지수함수 등의 그래프에서의 도형의 선분의 길이, 넓이 조건을 이용하여 수열의 일반항을 구한 후 극한값을 구하는 문제는 출제 가능성이 매우 높으므로 함수의 그래프에 대한 개념과 성질 및 도형의 특성 등을 체계적으로 정리해 놓도록 하자.

A 수열의 극한

개념 강의

중요도 ★★★

1 수열의 수렴 · 발산 — 유형 01, 04, 06, 13

(1) **수렴** : $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (단, α는 일정한 값) 예 $a_n=\frac{1}{n}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

(2) **발산** :
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (양의 무한대로 발산) 예 $a_n=n$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (음의 무한대로 발산) 예 $a_n=-n$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$
- 진동 (수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.)

예 $a_n=(-1)^n$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$은 -1과 1로 진동한다.

2 극한값의 계산 — 유형 01~05, 10~15

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

주어진 수열이 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴인데 수렴할 때, (분자의 차수)>(분모의 차수)인 모양은 분자의 최고차항의 계수에 미지수가 존재하는 경우가 대부분이므로 정리한 최고차항의 계수가 0이 되도록 미지수를 정하면 된다.

① (분자의 차수)>(분모의 차수)
: ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.

② (분자의 차수)=(분모의 차수)
: 최고차항의 계수의 비로 수렴한다.[1]

③ (분자의 차수)<(분모의 차수) : 0으로 수렴한다.

(2) $\infty-\infty$ 꼴

(i) 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.[2]

(ii) 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

출제 2024 6월 모평 23번

★ $\infty-\infty$ 꼴의 근호가 포함된 극한의 계산은 유리화를 통해 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 계산하는 기초적인 문제가 출제되었다.

3 수열의 극한값의 성질[3] — 유형 01~15

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$($\alpha$, β는 실수)일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\pm\beta$(복호동순)

(2) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = c\alpha$(단, c는 상수)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq 0$, $\beta\neq 0$)

4 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산 — 유형 06~15

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\leq -1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n$은 진동한다. (발산)

출제 2024 9월 모평 29번

★ 등비수열과 극한이 혼합된 문제로 등비수열의 수렴에 대한 개념을 바르게 알아야 풀 수 있는 고난도 문제가 출제되었다.

5 수열의 극한값의 대소 관계 — 유형 11~13

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$($\alpha$, β는 실수)일 때,

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\leq b_n$이면 $\alpha\leq\beta$이다.[4]

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\leq c_n\leq b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

+개념 보충

1 $\frac{\infty}{\infty}$ **꼴의 극한값**

$f(n)$과 $g(n)$의 차수가 같으면

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$

$=\frac{(f(n)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(n)\text{의 최고차항의 계수})}$

2 유리화

유리화는 근호를 제곱하여 없애는 것으로 곱셈 공식 중에서 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

① $\frac{A}{\sqrt{B}-C}=\frac{A(\sqrt{B}+C)}{B-C^2}$

② $\sqrt{A}-B=\frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$

③ $\frac{\sqrt{A}+B}{C}=\frac{A-B^2}{C(\sqrt{A}-B)}$

왜 그럴까?

3 수열의 극한값의 성질은 두 수열이 모두 수렴할 때만 성립한다. 만약 수렴하지 않는다면 그 성질을 쓸 수 없다.

예를 들면 $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$일 때,

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n=\infty\times 0$이고

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\times\frac{1}{n}\right)=1$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n \neq \lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n$

한걸음 더!

4 수열의 극한값의 대소 관계에서 (1)은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이면 $\alpha\leq\beta$가 성립한다.
즉, $a_n<b_n$과 같이 등호가 포함되지 않아도 $\alpha\leq\beta$에는 등호가 붙는 것에 주의하자.
예를 들어

$a_n=1+\frac{1}{n}$, $b_n=1+\frac{2}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=1$로 같다.

1 수열의 수렴 · 발산

[A01~05] 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하시오.

A01 $\{-3n+2\}$ ( )

A02 $\{(-1)^n\}$ ( )

A03 $\left\{\frac{8}{5n}\right\}$ ( )

A04 $\left\{\frac{4}{-2n+1}\right\}$ ( )

A05 $\left\{-\frac{1}{3^n}\right\}$ ( )

2 극한값의 계산

[A06~11] 다음 극한값을 구하시오.

A06 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$

A07 $\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{5}{n}}{2-\frac{7}{n}}$

A08 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2}$

A09 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-1}{3n^2+7}$

A10 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+n+1}}$

A11 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{-n^2+1}$

3 수열의 극한값의 성질

[A12~14] 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=9$, $\lim_{n\to\infty}b_n=2$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

A12 $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$

A13 $\lim_{n\to\infty}2a_nb_n$

A14 $\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n}{5b_n}$

4 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

[A15~18] 다음 극한값을 구하시오.

A15 $\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$

A16 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-1}{3^n+1}$

A17 $\lim_{n\to\infty}\left\{4+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

A18 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+4^n}{5^n-1}$

5 수열의 극한값의 대소 관계

[A19~20] 다음 물음에 답하시오.

A19 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}na_n$의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{2n+1}\le a_n\le\frac{1}{2n-1}$$

A20 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n-1<na_n<n+1$을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

❖ 정답 및 해설 2~3p

1+2+3 수열의 극한값의 성질과 계산

유형 01 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서

(1) (분자의 차수)=(분모의 차수)이면

(극한값)$=\dfrac{\text{(분자의 최고차항의 계수)}}{\text{(분모의 최고차항의 계수)}}$

(2) (분자의 차수)<(분모의 차수)이면

(극한값)$=0$

(3) (분자의 차수)>(분모의 차수)이면

극한값은 없다. (양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산)

tip

1 분모의 차수와 분자의 차수를 비교한다.

2 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\text{(상수)}}{n}=0$을 이용한다.

A21 대표 2023실시 3월 학평 미적분 23(고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$의 값은? (2점)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

A22 2022대비 수능 23(고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A23 2021실시 3월 학평 23(고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A24 2020대비(나) 수능 3(고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}$의 값은? (2점)

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{3}{5}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ 1

A25 2021대비(가) 9월 모평 (고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A26 2020실시(가) 4월 학평 2(고3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-3}{2n^2+7n-9}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A27 ❀❀❀ 2023실시 3월 학평 미적분 25(고3)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=4$$

일 때, a_2-a_1의 값은? (3점)

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

A28 ✿❀❀ 2018실시(나) 11월 학평 24(고2)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)n^2+bn}{2n-1}=5$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (3점)

A29 ✿❀❀ 2014대비(A) 수능 20(고3)

양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(x)-(n+1)g(x)=n$을 만족시키는 모든 x의 값의 곱을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{n^2}$의 값은? (4점)

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

유형 02 수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty}ka_n=k\alpha$ (k는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$ (복호동순)

(3) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

tip

1 수열의 극한에 대한 기본 성질은 수열이 반드시 수렴할 때만 성립한다.

2 0이 아닌 임의의 실수 k에 대하여
$k>0$이면 $k\times\infty=\infty$, $k\times(-\infty)=-\infty$이고,
$k<0$이면 $k\times\infty=-\infty$, $k\times(-\infty)=\infty$이다.

A30 대표 2017실시(나) 3월 학평 24(고3)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=2,\ \lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n(1+b_n)$의 값을 구하시오. (3점)

A31 ❀❀❀ 2023대비 9월 모평 미적분 25(고3)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? (3점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

❖ 정답 및 해설 3~5p

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A89 ✲✲✲ 2015대비(B) 9월 모평 21(고3)

양수 t에 대하여 $\log t$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? (4점)

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

A90 ✲✲✲ 2019실시(나) 4월 학평 21(고3)

함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}\ (k>0)$$

에 대하여 함수

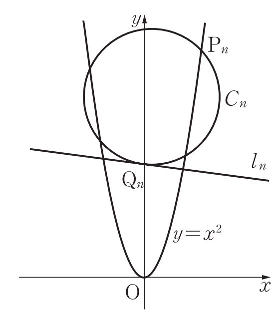
$$g(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) & (x=k)\\ (x-k)^2 & (x\neq k)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 상수 k에 대하여 $(g\circ f)(k)$의 값은? (4점)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

A91 ✲✲✲ 2021실시 3월 학평 29(고3)

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0,\ 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. (4점)



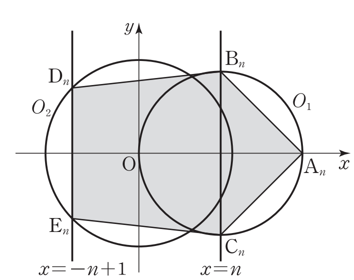
A92 ✲✲✲ 2017실시(가) 11월 학평 19(고2)

그림과 같이 1보다 큰 자연수 n에 대하여 두 원

O_1 : $(x-n)^2+y^2=n^2$

O_2 : $x^2+y^2=2(n-1)^2$

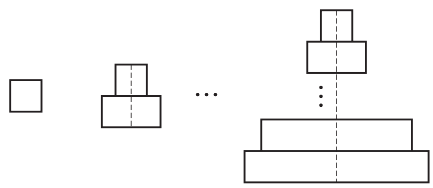
과 점 $\mathrm{A}_n(2n,\ 0)$이 있다. 원 O_1과 직선 $x=n$이 만나는 두 점을 각각 B_n, C_n, 원 O_2와 직선 $x=-n+1$이 만나는 두 점을 각각 D_n, E_n이라 하자. 오각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n\mathrm{C}_n$의 둘레 및 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점들의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5}n-\sqrt{a_n})$의 값은? (4점)



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

A93 ✽✽✽ 2015실시(나) 6월 학평 30(고2)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 [도형 1]이라 하자. [도형 1]의 아랫변에 가로의 길이 4, 세로의 길이 2인 직사각형을 한 직선에 대해 대칭이 되도록 이어 붙여 만든 도형을 [도형 2]라 하자. 이때 한 직선은 [도형 2]의 가장 긴 변의 중점을 지난다.
이와 같은 방법으로 3 이상의 자연수 n에 대하여 [도형 $(n-1)$]의 아랫변에 가로의 길이 $2n$, 세로의 길이 2인 직사각형을 이어 붙여 만든 도형을 [도형 n]이라 하자.



[도형 1]　[도형 2]　…　[도형 n]

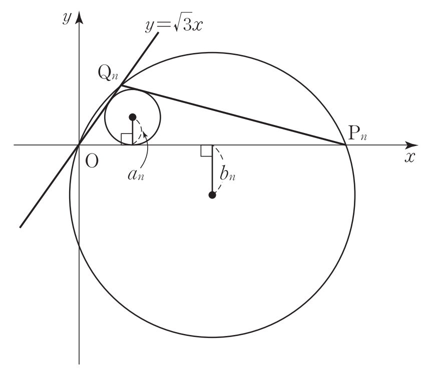
자연수 n에 대하여 [도형 n]을 포함하는 원들 중 가장 작은 원의 넓이를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{80a_n}{\pi n^2}$의 값을 구하시오. (4점)

[1등급 대비+2등급 대비]

A94 ✪ 1등급 대비 2014실시(A) 3월 학평 30(고3)

좌표평면 위에 직선 $y=\sqrt{3}x$가 있다. 자연수 n에 대하여 x축 위의 점 중에서 x좌표가 n인 점을 P_n, 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 Q_n이라 하자.
삼각형 OP_nQ_n의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리를 a_n, 삼각형 OP_nQ_n의 외접원의 중심에서 x축까지의 거리를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=L$이다. $100L$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.) (4점)



A95 ✪ 2등급 대비 2015실시(A) 10월 학평 21(고3)

좌표평면 위의 점 $P_n(n=1, 2, 3, \cdots)$은 다음 규칙을 만족시킨다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1, 1)$이다.
(나) $\overline{P_nP_{n+1}}=1$
(다) 점 P_{n+2}는 점 P_{n+1}을 지나고 직선 P_nP_{n+1}에 수직인 직선 위의 점 중 $\overline{P_1P_{n+2}}$가 최대인 점이다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=0$, $a_2=1$이고,
$a_n=\overline{P_1P_n}(n=3, 4, 5, \cdots)$
일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$의 값은? (4점)

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ 1　⑤ 2

❖ 정답 및 해설 28~34p

모의
A01
2012대비(나) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}$의 값은? (2점)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

모의
A02
2008대비(나) 6월 모평 7(고3)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=\frac{3}{4}$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

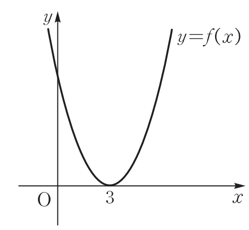
모의
A03
2011대비(나) 9월 모평 2(고3)

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

모의
A04
2016대비(A) 6월 모평 14(고3)

함수 $f(x)$가 $f(x)=(x-3)^2$이고, 자연수 n에 대하여 방정식 $f(x)=n$의 두 근이 α, β일 때, $h(n)=|\alpha-\beta|$라 하자. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$의 값은? (4점)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

모의
A05
2014예비(A) 5월 모평 3(고3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times5^n-3^n}{5^{n+1}+2^n}$의 값은? (2점)

① 1 ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

모의
A06
2006대비(나) 수능 7(고3)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n<a_n<n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A 수열의 극한

개념 확인 문제

A 01 정답 발산 *수열의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}(-3n+2)=-\infty$ (발산)

A 02 정답 진동(발산) *수열의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}-1 & (n\text{이 홀수})\\ 1 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$ (진동(발산))

A 03 정답 수렴 *수열의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\frac{8}{5n}=0$ (수렴)

A 04 정답 수렴 *수열의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{-2n+1}=0$ (수렴)

A 05 정답 수렴 *수열의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3^n}\right)=0$ (수렴)

A 06 정답 1 *극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=1$

A 07 정답 2 *극한값의 계산

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{5}{n}}{2-\frac{7}{n}}=\frac{4}{2}=2$$

A 08 정답 0 *극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2}=0$

A 09 정답 $\frac{4}{3}$ *극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-1}{3n^2+7}=\frac{4}{3}$

A 10 정답 2 *극한값의 계산

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+n+1}}{(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+n+1})(\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+n+1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+n+1}}{(\sqrt{n^2+2n+2})^2-(\sqrt{n^2+n+1})^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+n+1}}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=2$$

A 11 정답 -1 *극한값의 계산

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{-n^2+1}=\frac{1}{-1}=-1$

A 12 정답 13 *수열의 극한값의 성질

$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}2b_n=\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n$
$=9+2\times2=13$

A 13 정답 36 *수열의 극한값의 성질

$\lim_{n\to\infty}2a_nb_n=2\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=2\times9\times2=36$

A 14 정답 $-\frac{9}{5}$ *수열의 극한값의 성질

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n}{5b_n}=\left(-\frac{2}{5}\right)\times\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{9}{2}=-\frac{9}{5}$$

A 15 정답 2 *등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=2$

A 16 정답 3 *등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-1}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}}=\frac{3}{1}=3$$

A 17 정답 4 *등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

$\lim_{n\to\infty}\left\{4+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}4+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=4$

A 18 정답 5 *등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 · 발산

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+4^n}{5^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{4^n}{5^n}}{1-\frac{1}{5^n}}=\frac{5}{1}=5$$

A 19 정답 $\frac{1}{2}$ *수열의 극한값의 대소 관계

$\frac{1}{2n+1} \le a_n \le \frac{1}{2n-1}$에서 $\frac{n}{2n+1} \le na_n \le \frac{n}{2n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} \le \lim_{n\to\infty} na_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}$

여기서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{1}{2}$

A 20 정답 1 *수열의 극한값의 대소 관계

$n-1 < na_n < n+1$에서 $\frac{n-1}{n} < a_n < \frac{n+1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$

여기서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 21 정답 ④ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 93%]

(**정답 공식**: 분모, 분자를 n^2으로 나눠서 $\frac{1}{\infty} \longrightarrow 0$임을 이용한다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$의 값은? (2점)

단서 극한의 형태가 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴임을 알 수 있어.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

1st 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n-1}{n^2+1}$에서

분모, 분자를 각각 n^2으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$

2nd 극한값을 구해.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$이므로 극한값의 성질에 의해서

모든 항이 수렴하면 합, 차, 곱 등의 형태로 이루어져 있어도 각 항의 극한값을 대입할 수 있어.

구하는 극한값은

$\frac{6+0-0}{1+0} = 6$

쉬운 풀이: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 분모, 분자의 최고차항을 비교하여 구하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모, 분자의 최고차항을 비교하면 분모의 최고차항은 n^2, 분자의 최고차항은 $6n^2$이야.

따라서 구하는 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{n^2} = 6$

A 22 정답 ⑤ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 95%]

(**정답 공식**: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$의 값은? (2점)

단서 분모, 분자에 각각 n을 곱하여 극한값을 계산하자.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 분모, 분자에 n을 곱하여 극한값을 계산하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} = \frac{5+0}{1-0} = 5$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$

다른 풀이: 분모, 분자에 각각 n^3을 곱하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 바꾸어 극한값 구하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{n^2-2} = 5$

분모, 분자에 각각 n^3을 곱하면 분자, 분모가 모두 다항식이고 차수가 같게 돼.

양예진 이화여대 의예과 2022년 입학 · 전북 상산고 졸

미적분의 시작을 알리는 첫 문항! 다행히 기출에서 많이 출제되던 수열의 극한값을 계산하는 문항이라 가볍게 선택과목을 시작할 수 있었지. 가장 중요한건 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이라는 걸 알고 있어야 한다는 거야. 분모, 분자에 각각 n을 곱하면 0으로 수렴하는 항과 상수가 되는 항들이 구분되겠지? 어떤 항들이 0으로 수렴하게 되는지 파악하는 연습을 하면 가볍게 풀 수 있는 문제였어.

A 23 정답 ⑤ * $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 98%]

(**정답 공식**: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$의 값은? (2점)

단서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모, 분자를 최고차항으로 나눠서 구해.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 분모, 분자를 n^3으로 나눈 후 극한값을 구하자.

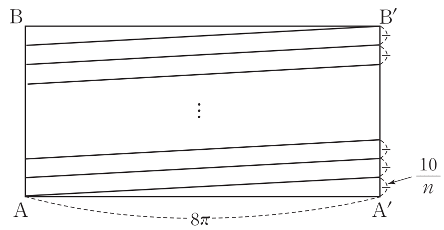
$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{10-\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{10}{1\times2} = 5$

분모를 모두 전개할 필요없이 n에 대한 일차식과 이차식의 곱이므로 최고차항은 n^3임을 확인할 수 있어.

쉬운 풀이: 분모, 분자의 최고차항의 계수의 비로 극한값 구하기

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 분모와 분자의 차수가 같으면 극한값은 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비로 바로 구할 수 있어.

$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)} = \frac{10}{1\times2} = 5$



$\therefore a_n = n\times\sqrt{64\pi^2+\left(\frac{10}{n}\right)^2}$

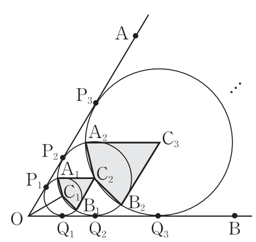
3rd 주어진 극한값을 구하자.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{64\pi^2+\left(\frac{10}{n}\right)^2}=\sqrt{64\pi^2}=8\pi$

A 88 정답 ⑤ ＊무한히 반복되는 도형에서의 극한값 [정답률 42%]

정답 공식: 첫 번째 도형의 넓이를 구하고, 도형의 닮음을 이용해서 공비를 구한다.

그림과 같이 크기가 60°인 $\angle AOB$의 이등분선 위에 $\overline{OC_1}=2$인 점 C_1을 잡아 점 C_1을 중심으로 하고 반직선 OA와 OB에 접하는 원 C_1을 그릴 때, 원 C_1과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_1, Q_1이라 하자. 점 C_1을 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_2, 원 C_2와 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 할 때, 사각형 $A_1C_1B_1C_2$의 넓이를 S_1이라 하자. 점 C_2를 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_3, 원 C_3과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 원 C_2와 원 C_3이 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 할 때, 사각형 $A_2C_2B_2C_3$의 넓이를 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}$의 값은? (4점)



단서 계속하여 만들어지는 사각형들은 모두 닮음이고 닮음비가 일정하니까 이웃하는 두 사각형의 닮음비만 구하면 넓이의 비를 구할 수 있어.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{8}$

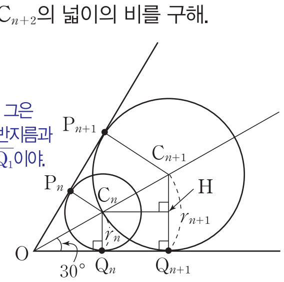
1st 두 사각형 $A_nC_nB_nC_{n+1}$, $A_{n+1}C_{n+1}B_{n+1}C_{n+2}$의 넓이의 비를 구해.

직각삼각형 C_1OQ_1에서 $\angle C_1OQ_1=30^\circ$이고 $\overline{OC_1}=2$이므로 원 C_1의 반지름 $\overline{C_1Q_1}=r_1$이라 하면

원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선은 접점을 지나는 반지름과 수직이므로 $\overline{OQ_1}\perp\overline{C_1Q_1}$이야.

$r_1=\overline{OC_1}\sin 30^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$

또, 원 C_n의 반지름 $\overline{C_nQ_n}=r_n$,
원 C_{n+1}의 반지름 $\overline{C_{n+1}Q_{n+1}}=r_{n+1}$,
점 C_n에서 $\overline{C_{n+1}Q_{n+1}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 $C_nC_{n+1}H$에서



$\sin 30^\circ=\frac{\overline{C_{n+1}H}}{\overline{C_nC_{n+1}}}=\frac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}}=\frac{1}{2}$

즉, $r_{n+1}=2r_n$이므로

$r_n=2^{n-1}(\because r_1=1)$ … ㉠

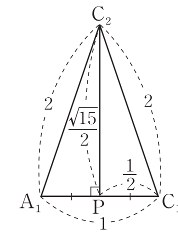
따라서 반지름의 길이의 비가 1 : 2이면 넓이의 비는 1 : 4이므로

$S_{n+1}=4S_n$ … ㉡

닮음비가 $a:b$인 두 도형의 넓이의 비는 $a^2:b^2$이야.

2nd S_1을 구하고, 수열 $\{S_n\}$의 일반항을 구해 보자.

$\overline{A_1C_2}=\overline{C_1C_2}=r_2=2(\because ㉠)$, $\overline{A_1C_1}=r_1=1$이므로 삼각형 $C_1A_1C_2$는 이등변삼각형이고 꼭짓점 C_2에서 $\overline{A_1C_1}$에 내린 수선의 발을 P라 하면 점 P는 $\overline{A_1C_1}$을 수직이등분하므로 직각삼각형 C_1C_2P에서



$\overline{C_2P}=\sqrt{\overline{C_2C_1}^2-\overline{C_1P}^2}=\sqrt{4-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

$\therefore S_1=2\triangle C_1A_1C_2=2\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=\frac{\sqrt{15}}{2}$

따라서 ㉡에 의해 수열 $\{S_n\}$은 공비가 4이고 첫째항이 $S_1=\frac{\sqrt{15}}{2}$인 등비수열이므로 $S_n=\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot4^{n-1}=\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot4^n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot4^n}{4^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{\sqrt{15}}{8}$

분모, 분자를 분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 4^n으로 각각 나누자.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A 89 정답 ① ＊$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 활용 [정답률 35%]

정답 공식: $0\le g(t)<1$을 이용해서 $f(t)$의 범위를 구하고 가능한 $f(t)$를 구한다.

양수 t에 대하여 $\log t$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

단서 1 $\log t$의 소수 부분이 $g(t)$니까 $g(t)$의 범위는 $0\le g(t)<1$이야.

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? (4점)

단서 2 $g(t)$의 범위에 의하여 $f(t)$의 범위를 구할 수 있어. 이때, $f(t)$는 정수이니까 구해낸 $f(t)$의 범위에서 모든 $f(t)$의 값을 찾을 수 있겠지?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

1st 상용로그의 소수 부분의 범위를 이용하여 $f(t)$의 범위를 구하자.

함정 함수 $f(t)$가 $g(t)$에 대한 이차식으로 표현되어 있고, $g(t)$의 범위가 $0\le g(t)<1$이므로 함숫값 $f(t)$의 범위를 구할 수 있겠지.

$\log t$의 소수 부분인 $g(t)$의 범위는 $0\le g(t)<1$이므로

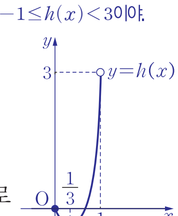
$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$

$\quad=n\left[9\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-1\right]$에서

$g(t)=x$, $h(x)=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-1$이라 하면

$0\le x<1$에서 이차함수 $h(x)$의 범위는 $-1\le h(x)<3$이다.

$0\le x<1$에서 함수 $y=h(x)$ 그래프는 그림과 같으므로 $h(x)$의 범위는 $-1\le h(x)<3$이야.



따라서 $f(t)=nh(x)$에서 $-n\le nh(x)<3n$이므로

$-n\le f(t)<3n$ … ㉠

2nd 자연수 n에 대하여 가능한 $f(t)$의 값을 찾아보자.

이때, $\log t$의 정수 부분인 $f(t)$는 정수이므로 ㉠에 의해 가능한 정수 $f(t)$의 값은

$f(t)=-n,\ -n+1,\ \cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 3n-1$

즉, 서로 다른 모든 $f(t)$의 합은

A 95 정답 ② ✪2등급 대비 [정답률 24%]

*조건을 만족시키는 점의 좌표를 구한 후 극한값 구하기 [유형 09]

좌표평면 위의 점 $P_n(n=1, 2, 3, \cdots)$은 다음 규칙을 만족시킨다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(1, 1)$이다.
> (나) $\overline{P_nP_{n+1}}=1$ **단서1** 점 $P_1(1, 1)$에 대하여 두 조건 (나), (다)를 만족시키도록 P_2, P_3, P_4를 좌표평면에 나타내어 생각해.
> (다) 점 P_{n+2}는 점 P_{n+1}을 지나고 직선 P_nP_{n+1}에 수직인 직선 위의 점 중 $\overline{P_1P_{n+2}}$가 최대인 점이다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=0$, $a_2=1$이고, $a_n=\overline{P_1P_n}(n=3, 4, 5, \cdots)$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$의 값은? (4점) **단서2** 점 P_1, P_2, P_3, P_4, …를 이용하여 a_n을 구해. 이때, n이 짝수인 경우와 홀수인 경우에 대해 나누어서 생각해봐.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ 1 ⑤ 2

왜 2등급? 주어진 조건을 만족시키는 점 P_n에 대하여 $\overline{P_1P_{n+2}}$가 최대가 되도록 하는 점 P_n의 위치를 구하고, 이를 바탕으로 $\overline{P_1P_{n+1}}-\overline{P_1P_n}$의 극한값을 구하는 문제로 점 P_1, P_2, P_3, P_4, …를 좌표평면에 나타낸 후 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 a_n의 값을 따져보는 것이 이 문제 해결의 키포인트이다.

단서+발상

단서1 점 P_1의 좌표는 $(1, 1)$이고, $\overline{P_1P_2}=1$이면 되므로 점 P_2의 좌표를 $(2, 1)$이라 두고 풀어도 임의성을 잃지 않는다. (발상)
이 경우 점 P_4는 점 $(2, 2)$를 지나는 직선 중 y축에 수직인 직선 위에 있으므로 좌표가 $(3, 2)$ 또는 $(1, 2)$이다. 이 두 점 중 $\overline{P_1P_4}$의 길이가 최대인 점은 점 $(3, 2)$이므로 점 P_4의 좌표는 $(3, 2)$이다.
즉, 점 P_5부터 위와 같은 방식으로 구할 수 있다. (적용)

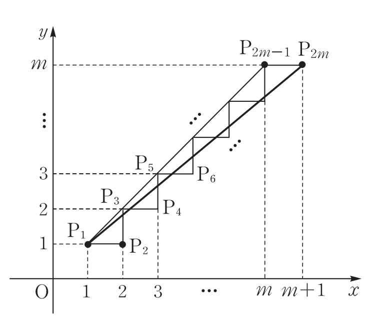
단서2 n이 홀수인 경우 점 P_n은 모두 한 직선 위에 있고, 짝수인 경우도 마찬가지로 점 P_n은 모두 한 직선 위에 있으므로 (발상)
a_n의 값을 구하기 위해 n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 각 점의 좌표를 구해 두 점 사이의 거리 공식을 사용하여 a_n을 구할 수 있다. (해결)

주의 점 P_2, P_3은 여러 경우가 가능했지만, 점 P_4부터는 점 P_2, P_3의 위치에 따라 한 점만 가능하다.

핵심 정답 공식: n이 짝수일 때, 홀수일 때를 나누어 점 P_n의 좌표를 구하고 $a_{n+1}-a_n$의 극한값을 구한다.

[문제 풀이 순서]

1st 점 P_1, P_2, P_3, …을 좌표평면 위에 나타내어 a_3, a_4, a_5, …를 차례대로 구해 봐.



두 조건 (나), (다)에 의해
$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}(n=1, 2, 3, \cdots)$는 $\overline{P_nP_{n+2}}$를 빗변으로 하고 밑변의 길이와 높이가 각각 1인 직각삼각형이다.

즉, 주어진 규칙을 만족시키는 점 P_1, P_2, P_3, …을 좌표평면 위에 나타낸 것 중 하나는 그림과 같다.

$a_3=\overline{P_1P_3}=\sqrt{1^2+1^2}$, $a_4=\overline{P_1P_4}=\sqrt{2^2+1^2}$
$a_5=\overline{P_1P_5}=\sqrt{2^2+2^2}$, $a_6=\overline{P_1P_6}=\sqrt{3^2+2^2}$, …

실수 $a_3=\sqrt{1^2+1^2}$, $a_5=\sqrt{2^2+2^2}$이고 $a_4=\sqrt{1^2+2^2}$, $a_6=\sqrt{2^2+3^2}$이므로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 짝수인 경우와 홀수인 경우는 규칙이 달라. 그러므로 경우를 나누어서 각각의 식을 구해야 해.

2 이상의 자연수 m에 대하여
$a_{2m-1}=\overline{P_1P_{2m-1}}=\sqrt{(m-1)^2+(m-1)^2}$
$a_{2m}=\overline{P_1P_{2m}}=\sqrt{m^2+(m-1)^2}$이 성립한다.
그런데 $a_1=0$, $a_2=1$이므로 자연수 m에 대하여
$a_{2m-1}=\sqrt{(m-1)^2+(m-1)^2}$
$a_{2m}=\sqrt{m^2+(m-1)^2}$이다.

2nd $n=2m-1$일 때와 $n=2m$일 때로 나누어 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$의 값을 구해.

(i) $n=2m-1$(m은 자연수)일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)&=\lim_{m\to\infty}(a_{2m}-a_{2m-1})\\&=\lim_{m\to\infty}\{\sqrt{m^2+(m-1)^2}-\sqrt{(m-1)^2+(m-1)^2}\}\\&=\lim_{m\to\infty}(\sqrt{2m^2-2m+1}-\sqrt{2m^2-4m+2})\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{(2m^2-2m+1)-(2m^2-4m+2)}{\sqrt{2m^2-2m+1}+\sqrt{2m^2-4m+2}}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{2m-1}{\sqrt{2m^2-2m+1}+\sqrt{2m^2-4m+2}}\\&=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

무리식이 포함된 $\infty-\infty$ 꼴이므로 유리화하자.

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모, 분자를 m으로 각각 나누자.

(ii) $n=2m$(m은 자연수)일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)&=\lim_{m\to\infty}(a_{2m+1}-a_{2m})\\&=\lim_{m\to\infty}\{\sqrt{m^2+m^2}-\sqrt{m^2+(m-1)^2}\}\\&=\lim_{m\to\infty}(\sqrt{2m^2}-\sqrt{2m^2-2m+1})\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{2m^2-(2m^2-2m+1)}{\sqrt{2m^2}+\sqrt{2m^2-2m+1}}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{2m-1}{\sqrt{2m^2}+\sqrt{2m^2-2m+1}}\\&=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

1등급 대비 특강

＊ 임의성

임의성이란 어떤 경우를 택해도 그 성질 또는 특징은 여전히 유지되는 것을 의미한다. 그래서 임의성을 잃지 않는다고 하면 어느 경우를 택해도 상관이 없다.
이 문제에서 점 P_2의 좌표를 택할 때, 점 $(2, 1)$이 아닌 다른 좌표를 택하더라도 $\overline{P_1P_2}=1$은 여전히 유지되며 $\overline{P_2P_3}$과 수직이 될 수 있다. 또, 점 P_3의 좌표를 택할 때 역시 점 $(2, 0)$을 택하더라도 $\overline{P_2P_3}$과 수직이다.
만약 점 P_2나 점 P_3에서 다른 점을 택한다면 위의 해설에 제시한 그림을 회전하거나 뒤집은 그림이 되겠지만 $\overline{P_1P_n}$의 길이는 절대 변하지 않는다.