고등 수학,
개념과 유형을 제대로 익히면 누구나 잘 할 수 있습니다.

고등학교 수학은 개념이 어렵다고
공식만 암기하면서 공부해서는 안 됩니다.
개념을 꼼꼼히 이해하고 각 개념의 필수 공식과 문제 유형들을
단계화된 문제를 통해서 정확히 익혀야 합니다.

자이스토리는 학교시험과 최신 학력평가 문제를
철저히 분석해 촘촘하게 유형을 분류하고 개념을 알맞게 적용시키는
세분화된 문제 유형 훈련으로 수학 기본 실력이 탄탄하게 다져집니다.
그래서 하루가 다르게 수학 성적이 향상됨을 느낄 수 있습니다.

또한, 자이스토리의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설,
다른 풀이, 톡톡 풀이, 쉬운 풀이 등은 수학 공부에
흥미와 성취감을 북돋아 줄 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 **자이스토리** –

학교시험 1등급 완성 학습 계획표 [34일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~81		월 일	월 일
2	82~126		월 일	월 일
3	127~151		월 일	월 일
4	B 01~76		월 일	월 일
5	77~119		월 일	월 일
6	120~173		월 일	월 일
7	C 01~64		월 일	월 일
8	65~104		월 일	월 일
9	105~145		월 일	월 일
10	146~187		월 일	월 일
11	188~217		월 일	월 일
12	D 01~71		월 일	월 일
13	72~130		월 일	월 일
14	131~170		월 일	월 일
15	E 01~70		월 일	월 일
16	71~106		월 일	월 일
17	107~147		월 일	월 일
18	148~207		월 일	월 일
19	208~230		월 일	월 일
20	F 01~64		월 일	월 일
21	65~98		월 일	월 일
22	99~137		월 일	월 일
23	G 01~67		월 일	월 일
24	68~107		월 일	월 일
25	108~145		월 일	월 일
26	146~161		월 일	월 일
27	H 01~78		월 일	월 일
28	79~129		월 일	월 일
29	130~171		월 일	월 일
30	I 01~57		월 일	월 일
31	58~89		월 일	월 일
32	모의 A, B, C		월 일	월 일
33	모의 D, E, F		월 일	월 일
34	모의 G, H, I		월 일	월 일

- 나는 ________________ 대학교 ________________ 학과 ____________ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여고
김대식 경기 하남고
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 안양 안양외고
박숙녀 아산 충남삼성고
배수나 서울 가인아카데미
신명선 안양 신성고
신현준 안양 신성고
윤장노 안양 신성고
윤혜미 서울 세종과학고
이종석 일등급 수학 저자
이창희 서울 다원교육 고등부
위경아 서울 강남대성기숙의대관
장광걸 김포 김포외고
장경호 오산 운천고
장철희 서울 보성고
전경준 서울 풍문고
조승원 수원 경기과학고
지강현 안양 신성고
홍지우 안양 평촌고
수경 수학 컨텐츠 연구소

[다른 풀이 집필]

김연주 목동쌤올림수학
김호원 성남 원수학학원
박소영 분당 수이학원
사공 원 의정부 호연지기
유대호 서울 잉글리쉬앤매쓰매니저
이강수 반포 뉴파인
장영환 제주 제로링수학교실
정광조 서울 로드맵수학

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널
‘수학문제 다깨기’

[감수진]

강경혜 제주 강경혜수학
강동은 반포 세정학원
권연정 대구 하마수학학원
기미나 인천 기쌤수학
김단비 순천 올바른수학국어학원
김문호 인천 MTM수학
김봉수 울산 원명문학원
김상완 서울 서로수학교습소
김수민 서울 고려대학교 대학원
김영훈 남양주 성원영어수학학원
김우진 세종 정진수학학원
김유찬 부천 오길수학
김의진 서울 채움수학학원
김재현 세종 세종국제고
김지혜 제주 즐거운공부학원
김현지 서울 수능수학 전문컨설턴트
김희철 서울 4공간수학교습소
나은영 서울 메가스터디 러셀
남구현 내포 강의하는 아이들
남정민 서울 강동중학교
마정곤 파주 마쌤의 수학교실
민동록 거제 민쌤수학
박경수 서울 제이에스학원
박경호 부산 MATH CLASS
박경후 광주 더브릿지수학학원&위니드수학학원
박동민 울산 동지수학과학전문학원
박미옥 목포 폴리아학원
박소연 광주 강남청솔기숙학원
박신태 수원 디엘수학전문학원
박은주 수원 은주짱샘 수학공부방
박종범 용인 돌격수학학원
박충현 광주 본수학과학전문학원
박현욱 고양 대치이강학원
박현정 의정부 탑수학 공부방
박현주 대구 매쓰플래너
배지후 세종 해밀수학과학학원
백승봉 서울 대치위더스학원
서가영 용인 누리수학교습소
선민국 광주 온앤오프영수전문학원
성정화 서울 LNS 수학학원
송미경 영천 강의하는 아이들
송승용 광주 송승용수학전문학원
송태주 성남 메가스터디 러셀
신아영 거창 신아영수학
신은숙 서울 펜타곤학원
신주영 광주 이룸수학학원
안수호 화성 수능수학 전문컨설턴트
양진철 서울 수학의길
양호석 남양주 광동고
엄시온 서울 올마이티캠퍼스
우진형 고양 대치이강
우현석 대전 EBS 수학우수학원
유창훈 충남 시그마학원
유혜원 서울 아드폰테스학원
이경복 강릉 수능수학 전문컨설턴트
이계은 서울 수능수학 전문컨설턴트
이명희 부산 조이수학학원
이보형 성남 매쓰코드학원
이성우 서울 상상미학
이승준 부산 캥거루 수학교실
이애희 인천 부평해법수학교실
이종숙 강남 센티움학원
이지근 아산 충남외국어고
이현구 서울 성남고
임경수 인천 류수학영어전문학원
장보현 청주 대치동입시학원
장주영 고양 화수고
전진우 안양 플랜지에듀학원
정석균 천안 힐베르트수학과학학원
정태성 부산 엘리트 에듀 학원
주종대 서울 강북세일학원
주진돈 안양 평촌 메가스터디학원
천소현 부천 일신중
천현필 서울 미래탐구학원
최유택 서울 미래탐구 오목캠퍼스
태 인 수원 메가스터디 러셀
편순창 서울 알면쉽다연세수학학원
한상원 성남 수학전문 일비충천
한호선 부여 두드림영어수학학원
허재민 안동 성희여자고
홍성윤 서울 수능수학 전문컨설턴트
황대연 세종 해밀고
황성관 세종 카이젠프리미엄학원
황유미 김포 대치명인학원
황종선 남양주 클래스원수학학원
황혜숙 창원 명지여자고

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
황대윤 서울대 수리과학부

차 례 [총 156개 유형 분류]

다른 풀이,
쉬운, 톡톡 풀이
대폭 강화

Ⅰ 지수함수와 로그함수

A 지수 – 12개 유형 분류

핵심 개념 정리 10
개념 확인 문제 11
수능 유형별 기출 문제 12
내신 유형별 서술형 문제 30
1등급 마스터 문제 32
동아리 소개 / 서울대 방그사 34

B 로그 – 16개 유형 분류

핵심 개념 정리 36
개념 확인 문제 37
수능 유형별 기출 문제 38
내신 유형별 서술형 문제 60
1등급 마스터 문제 62
동아리 소개 / 연세대 연세문학회 64

C 지수함수와 로그함수 – 23개 유형 분류

핵심 개념 정리 66
개념 확인 문제 67
수능 유형별 기출 문제 68
내신 유형별 서술형 문제 104
1등급 마스터 문제 106
동아리 소개 / 서울대 Caffe 人 110

D 지수함수와 로그함수의 활용 – 19개 유형 분류

핵심 개념 정리 112
개념 확인 문제 113
수능 유형별 기출 문제 114
내신 유형별 서술형 문제 142
1등급 마스터 문제 144

Ⅱ 삼각함수

E 삼각함수 – 27개 유형 분류

핵심 개념 정리 146
개념 확인 문제 147
수능 유형별 기출 문제 148
내신 유형별 서술형 문제 182
1등급 마스터 문제 184

F 삼각함수의 활용 – 12개 유형 분류

핵심 개념 정리 188
개념 확인 문제 189
수능 유형별 기출 문제 190
내신 유형별 서술형 문제 214
1등급 마스터 문제 216
동아리 소개 / 포항공대 CHEERO 220

Ⅲ 수열

G 등차수열과 등비수열 – 23개 유형 분류

핵심 개념 정리 222
개념 확인 문제 223
수능 유형별 기출 문제 224
내신 유형별 서술형 문제 246
1등급 마스터 문제 248
동아리 소개 / 성균관대 성균지 250

H 수열의 합 – 16개 유형 분류

핵심 개념 정리 252
개념 확인 문제 253
수능 유형별 기출 문제 254
내신 유형별 서술형 문제 280
1등급 마스터 문제 282

I 수학적 귀납법 – 8개 유형 분류

핵심 개념 정리 288
개념 확인 문제 289
수능 유형별 기출 문제 290
내신 유형별 서술형 문제 306
1등급 마스터 문제 308
동아리 소개 / 카이스트 여로 310

Special 내신+수능 대비 단원별 모의고사

A 지수 312
B 로그 314
C 지수함수와 로그함수 316
D 지수함수와 로그함수의 활용 318
E 삼각함수 320
F 삼각함수의 활용 322
G 등차수열과 등비수열 324
H 수열의 합 326
I 수학적 귀납법 328

빠른 정답 찾기 330

개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

'수학문제 다깨기'

세분화된 유형 문제 + 서술형 문제 훈련으로 내신 1등급 완성

1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

고2 수학의 각 단원에서 가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념을 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 개념과 공식을 쉽게 이해하고 적용할 수 있도록 하였습니다.

- 중요도 ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- +개념보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2023 수능과 2024 대비 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시

A 지수

개념 강의 / 중요도 ★★★

1 거듭제곱과 거듭제곱근 – 유형 01

(1) 거듭제곱: 임의의 실수 a와 자연수 n에 대하여 $a^n = a\times a\times a\times\cdots\times a$ (n개)와 같이 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 한다. 또, a의 제곱, 세제곱, 네제곱, …을 통틀어 a의 거듭제곱이라 하고, a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 거듭제곱의 지수라 한다.

(2) 거듭제곱근: 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 n제곱근이라 한다. 이때, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라 한다.

+개념 보충

1 $(\sqrt[n]{a})^n$과 $\sqrt[n]{a^n}$의 차이

	$(\sqrt[n]{a})^n$	$\sqrt[n]{a^n}$
n이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n=a$	$\sqrt[n]{a^n}=a$
n이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n=a\ (a>0)$	$\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert$

한걸음 더!

2 ① n이 짝수일 때

2 개념 확인 문제 – 개념에 대한 이해도 확인 문제

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 개념 이해를 위한 필수 문제를 수록하였습니다.

1 거듭제곱과 거듭제곱근

[A01~02] 다음 거듭제곱근을 구하시오.

A01 -1의 세제곱근

A02 16의 네제곱근

[A03~04] 다음 거듭제곱근 중 실수인 것을 구하시오.

3 지수의 확장

[A17~20] 다음 값을 구하시오.

A17 $(-3)^0$ A18 5^{-2}

A19 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ A20 $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

[A21~23] 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a\neq 0$)

3 내신 유형별 서술형 문제 – 단계별 문제 해결 방법 제시

NEW

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계적으로 풀어 나가는 과정을 제시하여 서술형 문제에 대한 자신감을 얻을 수 있게 구성하였습니다.

내신 유형별 서술형 문제 — 문제에서 단서를 찾고 풀이 방법을 생각해 냅니다

C194 유형 13

좌표평면에서 함수 $f(x)=\log_3(5x)$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 하자. x축이 선분 PQ의 길이를 이등분할 때, $100pq$의 값을 구하고

C197

좌표평면에서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 m

- 1st, 2nd, 3rd : 풀이의 시작과 끝을 막힘없이 따라갈 수 있게 도와주는 단계별 접근을 제시하였습니다.

4 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하고 유형을 촘촘하게 세분화하여 유형순, 개념순, 난이도순으로 문항을 배열하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- QR 코드 : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

1 거듭제곱과 거듭제곱근

고난도 / 유형 01 거듭제곱근의 정의 / 빈출

(1) 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수 x를 a의 n제곱근이라 한다.

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

tip a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 n이 짝수일 때에는 a의 부호에 따라 0개, 1개, 2개가 될 수 있다.

A37 2019실시(가) 6월 학평 26

두 집합 $A=\{5, 6\}$, $B=\{-3, -2, 2, 3, 4\}$가 있다. 집합 $C=\{x \mid x^a=b,\ x$는 실수, $a\in A$, $b\in$ … 대하여 $n(C)$의 값을 구하시오. (4점)

- 유형 분류 : 빈출 – 시험에서 자주 출제되는 유형
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- 대표 : 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.

- 난이도 : ❀❀❀ – 기본 문제 ✿❀❀ – 중급 문제
  ✿✿❀ – 중상급 문제
- Pass : 간단한 계산 문제로 출제 흐름만 확인하고 넘어가도 되는 문제입니다.

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2022대비 수능(홀) 1(고3) : 2021년 11월에 실시한 수능
  - 2022대비 6월 모평 2(고3) : 2021년 6월에 실시한 평가원
  - 2022실시 4월 학평 3(고3) : 2022년 4월에 실시한 학력평가
  - 2023대비 9월 모평 4(고3) : 2022년 9월에 실시한 평가원

5 내신+수능 대비 단원별 모의고사 – 최종 실력 점검

중단원별 학교시험 필수 문제와 수능형 문항을 종합하여 공부할 수 있습니다. 또한, 서술형 문항도 수록하여 학교시험을 더욱 충실히 대비할 수 있습니다.

내신+수능 대비 단원별 모의고사 A 지수

A01

-216의 세제곱근 중 실수인 것을 a, $\frac{1}{81}$의 네제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, ab의 최댓값을 구하시오. (3점)

A04 2013(나)/수능(홀) 26

$2\le n\le 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{3})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오

6 1등급 마스터 문제 – 대비 문제로 1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 길러서 반드시 수학 1등급을 달성할 수 있도록 구성했습니다.

- ✲✲✲ – 상급 문제
- 2등급 대비 : 정답률이 9~15%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- 1등급 대비 : 정답률이 9% 미만인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제

1등급 마스터 문제 [4점+2등급 대비+1등급 대비]

A135 ✲✲✲ 2022 6월/평가원 21(고3)

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

[1등급 대비+2등급 대비]

A203 2등급 대비

세 집합

$A=\left\{i^n+\frac{1}{i^n} \middle| n\text{은 자연수}\right\}$,

$B=\{z \mid z^2=\bar{z},\ z\text{는 허수}\}$,

$C=\left\{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n \middle| n\text{은 자연수}\right\}$

7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설

D170 정답 24 2등급 대비

*주어진 조건으로부터 이차함수의 그래프 추론하기

문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

8 입체 첨삭 해설!

A51 정답 ② *거듭제곱근의 성질 [정답률 71%]

(정답 공식: 괄호 안의 제일 안쪽 근호부터 정리하여 밑을 2로 바꾼다.)

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? (3점)

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

1st 거듭제곱근을 지수로 바꿔 간단히 정리하여 값을 구해.

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=\left(2\times\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2\times2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$

이때, $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로 $\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

다른 풀이: 거듭제곱근을 지수로 고친 뒤, 자연수 n에 대한 부등식으로 바꾸고, 부등식의 성질 및 지수법칙을 이용하여 값 찾기

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=2^{\frac{5}{2}}$이므로 자연수 n에 대하여 $n>2^{\frac{5}{2}}$이라 하면 $n^2>2^5$

$\therefore n=6, 7, \cdots$

따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

수능 핵강

*삼각함수의 그래프가 주어진 경우 주기, 최댓값, 최솟값 쉽게 구하기

삼각함수의 가장 큰 특징은 같은 모양의 그래프가 반복된다는 점이므로 이를 이용하여 주기, 최댓값, 최솟값을 쉽게 구해 보자.

(i) 위로 볼록한 부분 중 가까운 두 곳의 x좌표의 차가 주기이다.
(ii) 위로 볼록한 부분의 y좌표가 최댓값이다.
(iii) 아래로 볼록한 부분의 y좌표가 최솟값이다.

거듭제곱근의 성질 개념·공식

$a>0,\ b>0$이고 $m,\ n$이 양의 정수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

윤혁 서울대 건설환경공학부 2021년 입학 · 서울 동양고 졸

A108 정답 ③ *지수법칙의 활용 – 식 변형 [정답률 45%]

두 양수 $a,\ b$에 대하여

$2^a=3^b,\ (a-2)(b-2)=4$

일 때, $4^a\times3^{-b}$의 값은? (4점)

① 12 ② 18 ③ 36 ④ 54 ⑤ 72

1st 분자, 분모에 3^a을 곱해.

2nd $(a-2)(b-2)=4$를 전개하여 $\frac{a+b}{ab}$의 값을 구하자.

$(a-2)(b-2)=4$를 전개하면

$ab-2(a+b)=0$ 즉, $ab=2(a+b)$이므로 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}\ \cdots$ ⓒ

3rd $4^a\times3^{-b}$의 값을 구하자.

따라서 ⓐ, ⓒ에 의하여 $6=k^{\frac{1}{2}}$이므로 $k=6^2=36$

톡톡 풀이: 밑, 지수가 모두 다른 식이라도 지수의 공약수를 이용하여 값 구하기

$\therefore 12xyz=6yz+3xz+2xy$

평가원 해설

정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체적으로 단계를 나누어 제시하였습니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

생생체험
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

평가원 해설
오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형의 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빠뜨리거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

문항 배열 및 구성 [1592제]

❶ 개념 이해를 체크할 수 있는 개념 확인 문제 [227제]

개념 하나하나에 대한 맞춤 확인 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 고2 최신 6개년 학력평가 기출 문제+수능 유형 완전 정복 문제 [156유형, 문제 1038제]

- 고1, 2 학력평가 문항 중에서 새교육과정에 꼭 맞는 문제 선별 수록 [527제]
- 고2 난이도에 맞는 전개년 수능+평가원 문제 선별 수록 [287제]
- 2022~2005 고3 학력평가 기출 문제 중에서 필수 개념 문제 선별 수록 [224제]

❸ 학교시험+새 수능 대비를 위한 수능 기출 변형 문제 [144제]

새 수능에 적합한 개념과 공식을 이해하고 활용할 수 있도록 수능 기출 문제를 변형하여 추가 수록하였습니다.

❹ 서술형 단계별 훈련 – 내신 기출 변형 서술형 문제 [90제]

각 단원 중 서술형 출제 방식에 적합하고 출제 비율이 높은 내신 기출 변형 문제를 새롭게 구성하였습니다.

❺ 내신+수능 단원별 모의고사 [기출 문제+수능 기출 변형 문제 93제]

각 단원에 출제 빈도가 높은 문제를 최신 출제 경향에 따라 구성하였습니다.

[고2 수학 Ⅰ 문항 구성표]

	고1, 2(실시 연도)				고3(대비 연도) – 고2 난이도 수준							
연도	3월 학평	6월 학평	9월 학평	11월 학평	3월 학평	4,5월 학평	6월 모평	7월 학평	9월 모평	10월 학평	수능	합계
2023		29	25									54
2022		30	27	19	6	4	6	5	2	1	3	103
2021		25	22	19	5	6	6	3	5	7	4	102
2020		24	24	18	10	5	5	3	5		2	96
2019		49	31	30	14	11	6	7	4		4	156
2018	3	3	15	11	12	10	5	7	6	2	5	79
2017	7	7	3	2	12	8	4	5	7	8	6	69
2016	4	5	4	4	14	14	7	5	4	7	4	72
2016 이전	30	34	15	8	37	45	63	26	49	20	61	388
2022, 2014, 2005 대비 예비 평가 문항 수												12
수능 기출 변형 문항 수 (156개 유형 수능 기출 변형 문제)												144
개념 확인 문항 수												227
서술형 문항 수												90
총 문항 수												1592

A 지수

★ 유형 차례

유형 01 거듭제곱근의 정의

중요 유형 02 거듭제곱근의 성질

유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산

중요 유형 04 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈)

유형 05 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (덧셈)

유형 06 거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건

유형 07 지수법칙의 활용 – 문자로 표현하기

유형 08 지수법칙의 활용 – 식 변형

유형 09 지수법칙의 활용 – a^x+a^{-x} 꼴

유형 10 지수법칙의 활용 – $\dfrac{a^{kx}\pm a^{-kx}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴

유형 11 지수법칙의 활용

유형 12 지수법칙의 실생활 응용

★ 최신 3개년 수능+모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2024	수능		
	9월	유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 04 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈)	❀❀❀
2023	수능	유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	9월	유형 02 거듭제곱근의 성질 유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산	✿✿❀ ✿❀❀
	6월	유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산	✿❀❀
2022	수능	유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	9월	유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀
	6월	유형 04 지수법칙 – 밑이 다른 계산 (곱셈) 유형 02 거듭제곱근의 성질	❀❀❀ ❀❀❀
	예시	유형 03 지수법칙 – 밑이 같은 계산	❀❀❀

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 최근 거듭제곱근의 성질을 이용하여 거듭제곱근이 자연수가 되도록 하는 자연수를 구하는 유형의 문제의 출제 빈도가 높아지고 있다. 기본적인 거듭제곱근에 대한 성질을 정확히 알고 있으면 풀리는 문제들이다. 그리고 거듭제곱근으로 나오는 실근의 개수에 대한 문제도 종종 나오고 있으므로 거듭제곱근의 해에 대한 지식이 필요하다.
- 지수법칙을 이용하는 간단한 계산문제는 지수의 여러 가지 성질과 함께 출제될 가능성이 높다. 쉬운 문제이지만 계산 실수에 주의하여야 하고 지수법칙을 정확히 알고 있어야 한다.
- 지수를 포함한 등식의 활용 문제는 곱셈 공식, 인수분해, 유리식이나 비례식 등을 활용하여 변형하는 연습이 충분히 되어야 한다. 고1 수학에서 배웠던 내용도 한 번 더 정리하자.
- 지수를 사용하여 정의된 식이 주어지는 실생활 문제의 출제 비율이 높으므로 문제의 문자가 의미하는 것을 바르게 파악하여 주어진 식에 정확히 대입하도록 충분한 연습이 필요하다.

A 지수

개념 강의

중요도 ★★★

1 거듭제곱과 거듭제곱근[1] — 유형 01

(1) **거듭제곱**: 임의의 실수 a와 자연수 n에 대하여

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{개}}$$

2^{3} ← 지수, ↑ 밑

와 같이 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 한다.
또, a의 제곱, 세제곱, 네제곱, …을 통틀어 a의 **거듭제곱**이라 하고,
a^n에서 a를 거듭제곱의 **밑**, n을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

(2) **거듭제곱근**: 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉
방정식 $x^n = a$를 만족시키는 x를 a의 **n제곱근**이라 한다.
이때, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.

(3) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.[2]

① **n이 짝수일 때**

$a>0$이면 양수 $\sqrt[n]{a}$와 음수 $-\sqrt[n]{a}$의 2개가 있고,
그 절댓값은 같다.
$a=0$이면 $\sqrt[n]{0}$, 즉 0뿐이다.
$a<0$이면 없다.

② **n이 홀수일 때**

a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ 오직 하나뿐이다.

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수일 때	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수일 때	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

2 거듭제곱근의 성질[3] — 유형 02

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 양의 정수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

3 지수의 확장[4] — 유형 03~12

(1) **지수가 0 또는 음의 정수인 경우**

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (단, $a>0$, n은 자연수)

(2) **지수가 유리수인 경우**

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (단, $a>0$, m, n은 정수, $n>0$)

(3) **지수법칙**[5]

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때,

① $a^x a^y = a^{x+y}$ 예 $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

② $a^x \div a^y = a^{x-y}$ 예 $3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$ 예 $(5^2)^4 = 5^{2\times4} = 5^8$

④ $(ab)^x = a^x b^x$ 예 $(7\times11)^2 = 7^2 \times 11^2$

출제 2024 9월 모평 1번
2024 6월 모평 1번
2023 수능 1번

★ 밑이 같은 식을 지수법칙으로 계산하는 문제가 1번으로 고정되어 나오고 있다. 쉽지만 방심하지 말고 정확히 풀어야 한다. 지수법칙은 기본적으로 밑이 같을 때의 곱셈과 나눗셈의 연산법칙이므로 밑이 같은지 확인하고 풀어야 한다. 지수로 된 과학적 공식들을 제시한 실생활 응용 문제도 난이도 있는 문제로 출제되고 있는데 지수법칙을 정확히 적용할 수 있으면 풀 수 있다.

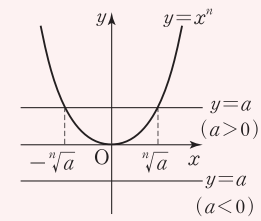
+개념 보충

❶ $(\sqrt[n]{a})^n$과 $\sqrt[n]{a^n}$의 차이

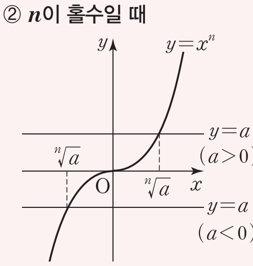
n이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a$
n이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n = a$ $(a>0)$	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$

한걸음 더!

❷ ① n이 짝수일 때



② n이 홀수일 때



❸ $a>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때,
$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

+개념 보충

❹ $a^{\frac{m}{n}}$과 같이 지수가 유리수인 경우,
a가 자연수일 때, $a^{\frac{m}{n}}$이 자연수가 되기 위한 조건은 m이 n의 배수 또는 n이 m의 약수일 때이다.

❺ 밑이 같을 때와 다를 때를 구분해!
간단한 계산 문제뿐만 아니라 문장제 문제도 꼭 하나씩 출제된다.
지수법칙을 이용할 때는 먼저 밑이 같은지 다른지를 확인하고 같은 밑에 대해서 지수끼리 더할지, 곱할지를 정확하게 계산하자.

1 거듭제곱과 거듭제곱근

[A01~02] 다음 거듭제곱근을 구하시오.

A01 -1의 세제곱근

A02 16의 네제곱근

[A03~04] 다음 거듭제곱근 중 실수인 것을 구하시오.

A03 -8의 세제곱근

A04 81의 네제곱근

[A05~08] 다음 값을 구하시오.

A05 $\sqrt[3]{8}$

A06 $-\sqrt[4]{16}$

A07 $\sqrt[5]{(-5)^5}$

A08 $\sqrt[4]{256}$

2 거듭제곱근의 성질

[A09~12] 다음 식을 간단히 하시오.

A09 $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25}$

A10 $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$

A11 $(\sqrt[8]{100})^4$

A12 $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

[A13~14] 다음 식을 간단히 하시오.

A13 $\sqrt[3]{3\sqrt{4}}\times\sqrt[6]{\dfrac{16}{9}}$

A14 $\dfrac{\sqrt[6]{27}\times\sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}$

[A15~16] 다음 거듭제곱근의 값을 구하시오.

A15 $\sqrt{\dfrac{9^7+3^{11}}{9^4+3^5}}$

A16 $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$

3 지수의 확장

[A17~20] 다음 값을 구하시오.

A17 $(-3)^0$

A18 5^{-2}

A19 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$

A20 $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}$

[A21~23] 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a\neq0$)

A21 $a^4\times a^3\div a^6$

A22 $(a^{-2})^4\times(a^{-3})^{-5}$

A23 $\dfrac{(a^{-6})^3\times(a^3)^6}{a^3\times a^{-6}}$

[A24~26] 다음 식을 간단히 하시오.

A24 $2^{-2}\times8^{\frac{7}{3}}$

A25 $(5^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}}\div125$

A26 $9^{\frac{1}{2}}\times3^{-3}\div27^{-\frac{2}{3}}$

[A27~28] $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$일 때, 다음 거듭제곱을 a, b를 이용하여 나타내시오.

A27 $\sqrt[6]{12}$

A28 6^6

[A29~31] 곱셈공식을 이용하여 다음 식을 간단히 하시오.

A29 $(a-b)\div\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$

A30 $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

A31 $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

A32 두 실수 x, y에 대하여 $15^x=25$, $375^y=125$일 때, $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}$의 값을 구하시오.

A33 $a^{2x}=\sqrt{2}-1$일 때, $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 값을 구하시오.

❖ 정답 및 해설 2~3p

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

Pass 쉬운 유형, 반복 계산 문제로 패스 하셔도 좋습니다.

1 거듭제곱과 거듭제곱근

유형 01 거듭제곱근의 정의

(1) 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수 x를 a의 n제곱근이라 한다.

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

tip

a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는

1 n이 짝수일 때에는 a의 부호에 따라 0개, 1개, 2개가 될 수 있다.

2 n이 홀수일 때에는 항상 1개이다.

A34 대표 2016실시(나) 4월 학평 9(고3)

16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A35 2016실시(나) 11월 학평 13(고2)

실수 a, b에 대하여 a는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근일 때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

A36 2020실시 11월 학평 11(고2)

양수 k의 세제곱근 중 실수인 것을 a라 할 때, a의 네제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[3]{4}$이다. k의 값은? (3점)

① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

A37 2019실시(가) 6월 학평 26(고2)

두 집합 $A=\{5, 6\}$, $B=\{-3, -2, 2, 3, 4\}$가 있다. 집합 $C=\{x \mid x^a=b,\ x$는 실수, $a\in A,\ b\in B\}$에 대하여 $n(C)$의 값을 구하시오. (4점)

A38 2014실시(A) 6월 학평 7(고2)

자연수 $n(n\geq2)$에 대하여 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$라 할 때, $f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A39 2021대비(가) 6월 모평 12(고3)

자연수 n이 $2\leq n\leq11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

A40 2023실시 9월 학평 14(고2)

$4 \le n \le 12$인 자연수 n에 대하여 $n^2-15n+50$의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(n)=f(n+1)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? (4점)

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

2 거듭제곱근의 성질

유형 02 거듭제곱근의 성질

(1) **거듭제곱근의 성질**

두 양수 a, b에 대하여 m, n이 2 이상의 정수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

(2) **거듭제곱근의 대소 관계**

자연수 n에 대하여 $a>0$, $b>0$일 때,

$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$이면 $a<b$이다.

tip

1 거듭제곱근의 성질은 양수에서만 적용된다.

2 실수 a에 대하여 $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a| & (n\text{이 짝수})\\ a & (n\text{이 홀수})\end{cases}$를 이용하여 식을 간단히 하기도 한다.

3 거듭제곱근의 대소 비교는 $\sqrt[n]{}$에서 n의 값을 통일시킨다.

A41 대표 2018실시(나) 3월 학평 2(고3)

$\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}$의 값은? (2점)

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

A42 2021실시 6월 학평 1(고2)

$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A43 2020실시 9월 학평 3(고2)

$\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{81}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A44 Pass 2020실시 6월 학평 1(고2)

$\sqrt[3]{27}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A45 Pass 2019실시(나) 6월 학평 1(고2)

$(\sqrt[3]{3})^3$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

❖ 정답 및 해설 3~6p

내신 유형별 서술형 문제

문제에서 단서를 찾고
풀이 방법을 생각해 냅니다!

A137

유형 01

2 이상 30 이하인 자연수 n에 대하여 $n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하고, $n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st $n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하는 n의 조건을 구한다.

2nd $n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하는 n의 조건을 구한다.

3rd 자연수 n의 개수를 구한다.

A138

유형 06

2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$$

이 서로 다른 세 실근 α_1, α_2, α_3을 가진다. 세 수 α_1, α_2, α_3이 모두 정수일 때, $m+n=k$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st 세 실근을 가지기 위한 m, n의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$을 구한다.

2nd α_1, α_2, α_3이 서로 다른 정수가 되기 위한 m, n, k의 값을 각각 구한다.

A139

유형 11

등식

$$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$$
$$=(2^a+2^b)^3$$

을 만족시키는 유리수 a, b에 대하여 $3a+b$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st $\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}$의 값을 구한다.

2nd $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$의 값을 구한다.

3rd $3a+b$의 값을 구한다.

A140

유형 02

1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) a는 b의 5제곱근이다.
(나) c는 $\sqrt[3]{a}$의 네제곱근이다.

$\frac{b}{c}=a^x$일 때, 실수 x의 값을 $\frac{q}{p}$라 하자. $q-p$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (10점)

1st 거듭제곱근의 정의를 활용해서 a, b, c의 관계를 구한다.

2nd a, b, c를 한 문자로 표현하여 x의 값을 구한다.

A141

유형 08

0이 아닌 네 실수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

(가) $27^{a}=25^{b}=15^{c}$
(나) $kab=(2b+3a)c$

A142

유형 11

x에 대한 이차방정식

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x^{2}-18x+\sqrt{a}\times\sqrt[2\times 3]{\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3\times 4]{\sqrt[4]{a}}=0$$

의 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha\times\beta$의 값이 정수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A143

유형 09

1이 아닌 두 양수 a, b와 두 실수 x, y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a^{\frac{b}{a}}=b^{a}=(ab)^{ab}$
(나) $a^{\frac{2}{x}}=3$
(다) $b^{2y}+1=6b^{y+1}$

$36\times 3^{x}-\dfrac{2+b^{2y}+b^{-2y}}{3^{x}-1}$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A144

유형 06

$\left(\dfrac{n}{18}\right)^{\frac{n}{12}}$이 자연수가 되도록 하는 500보다 작은 모든 자연수 n의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A145

유형 06

$x=\dfrac{1}{2}(3^{10}-2\times 3^{-10})$일 때, $\sqrt[n]{x+\sqrt{x^{2}+2}}$가 자연수가 되는 1보다 큰 자연수 n의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A146

유형 12

사람의 몸 안에 들어온 방사성 물질 세슘 137은 신체 대사 작용을 통해 시간이 지남에 따라 일정한 비율로 몸 밖으로 빠져나간다. 이때 이 물질이 절반만큼 몸 밖으로 빠져나가는 데 걸리는 시간을 세슘 137의 생물학적 반감기라 하고 세슘 137의 생물학적 반감기는 110일이다. 세슘 137이 몸 안에 들어왔을 때 응급약인 프러시안 블루를 처방하면 세슘 137의 생물학적 반감기를 30일로 줄일 수 있다고 한다.
어떤 사고로 A와 B의 몸 안에 세슘 137이 각각 320 mg, 20 mg이 들어와서 응급조치가 필요한 A에게만 프러시안 블루를 처방하였을 때, A의 체내 세슘 137의 양이 B의 세슘 137의 양과 같아지는 시점은 사고일로부터 n일 후라고 한다. 자연수 n의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.
(단, n은 자연수) (10점)

❖ 정답 및 해설 26~31p

A147 ✽✽✽

2022대비 6월 모평 21(고3)

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

A148 ✽✽✽

2019실시(가) 6월 학평 21(고2)

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases} \sqrt[4]{9\times 2^{n+1}} & (n\text{이 홀수}) \\ \sqrt[4]{4\times 3^n} & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는? (4점)

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

[1등급 대비+2등급 대비]

A149 ✽✽✽ 2017실시(가) 6월 학평 17(고2)

두 집합 $A=\{3, 4\}$, $B=\{-9, -3, 3, 9\}$에 대하여 집합 X를

$$X=\{x \mid x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x \text{ 는 실수}\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다.

ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 $\sqrt[4]{3^7}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A150 ✪ 2등급 대비 2017실시(나) 3월 학평 21(고3)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\left\{(a, b)\,\middle|\, 2^a=\frac{m}{b},\ a,\ b\text{는 자연수}\right\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_4=\{(1, 2), (2, 1)\}$

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m=2^k$이면 $n(A_m)=k$이다.

ㄷ. $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A151 ✪ 2등급 대비 2016대비(A) 수능 16(고3)

어느 금융상품에 초기자산 W_0을 투자하고 t년이 지난 시점에서의 기대자산 W가 다음과 같이 주어진다고 한다.

$$W=\frac{W_0}{2}\times 10^{at}(1+10^{at})$$

(단, $W_0>0$, $t\geq 0$이고, a는 상수이다.)

이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k배일 때, 실수 k의 값은? (단, $w_0>0$) (4점)

① 9　② 10　③ 11
④ 12　⑤ 13

03 DAY

❖ 정답 및 해설 32~34p

★ 내신+수능 대비

단원별 모의고사

[제한시간 50분]

A **지수** – 10문항

B **로그** – 10문항

C **지수와 로그함수** – 10문항

D **지수와 로그함수의 활용** – 11문항

E **삼각함수** – 11문항

F **삼각함수의 수** – 10문항

G **등차수열과 등비수열** – 13문항

H **수열의 합** – 10문항

I **수학적 귀납법** – 8문항

내신+수능 대비 단원별 모의고사 A 지수

- 문항 수 10개
- 배점 40점
- 제한시간 50분

모의
A01 ❀❀❀

-216의 세제곱근 중 실수인 것을 a, $\frac{1}{81}$의 네제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, ab의 최댓값을 구하시오. (3점)

모의
A02 ❀❀❀

$3\times\sqrt[3]{16}+2\times\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{k}$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 $\frac{k}{48}$의 값은? (4점)

① 12 ② 36 ③ 54
④ 72 ⑤ 96

모의
A03 ❀❀❀ 2017실시(나) 3월 학평 3(고2)

$8^{\frac{2}{3}}\times 27^{-\frac{1}{3}}$의 값은? (2점)

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

모의
A04 ✿❀❀ 2013대비(나) 수능 26(고3)

$2\le n\le 100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (4점)

모의
A05 ✿❀❀ 2007대비(나) 9월 모평 20(고3)

세 양수 a, b, c에 대하여 $a^6=3$, $b^5=7$, $c^2=11$일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하시오. (3점)

모의
A06 ❀❀❀ 2015실시(A) 3월 학평 7(고3)

두 실수 a, b에 대하여 $2^a=3$, $3^b=\sqrt{2}$가 성립할 때, ab의 값은? (3점)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

차 례

Ⅰ 지수함수와 로그함수

A 지수 2

B 로그 35

C 지수함수와 로그함수 78

D 지수함수와 로그함수의 활용 167

Ⅱ 삼각함수

E 삼각함수 223

F 삼각함수의 활용 307

Ⅲ 수열

G 등차수열과 등비수열 368

H 수열의 합 420

I 수학적 귀납법 488

Special 내신+수능 대비 단원별 모의고사

A 지수 529

B 로그 531

C 지수함수와 로그함수 534

D 지수함수와 로그함수의 활용 537

E 삼각함수 541

F 삼각함수의 활용 545

G 등차수열과 등비수열 549

H 수열의 합 553

I 수학적 귀납법 555

A 지수

개념 확인 문제

A 01 정답 $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ ＊거듭제곱과 거듭제곱근

-1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-1$이므로
$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
따라서 -1의 세제곱근은 -1, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

A 02 정답 $\pm 2i, \pm 2$ ＊거듭제곱과 거듭제곱근

16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로
$x^4-16=0$, $(x^2+4)(x^2-4)=0$
$(x+2i)(x-2i)(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm 2$
따라서 16의 네제곱근은 $\pm 2i$, ± 2이다.

A 03 정답 -2 ＊거듭제곱과 거듭제곱근

-8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로
$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$
이때, $x^2-2x+4=0$은 실근을 갖지 않으므로 $x+2=0$에서 $x=-2$
따라서 -8의 세제곱근 중 실근인 것은 -2이다.

A 04 정답 $-3, 3$ ＊거듭제곱과 거듭제곱근

81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로
$x^4-81=0$, $(x^2-9)(x^2+9)=0$
이때, $x^2+9=0$은 실근을 갖지 않으므로 $x^2-9=0$에서
$(x+3)(x-3)=0$　　$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$
따라서 81의 네제곱근 중 실근인 것은 -3, 3이다.

A 05 정답 2 ＊거듭제곱과 거듭제곱근

$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

A 06 정답 -2 ＊거듭제곱과 거듭제곱근

$-\sqrt[4]{16}=-\sqrt[4]{2^4}=-2$

A 07 정답 -5 ＊거듭제곱과 거듭제곱근

$\sqrt[5]{(-5)^5}=-5$

A 08 정답 4 ＊거듭제곱과 거듭제곱근

$\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$

A 09 정답 5 ＊거듭제곱근의 성질

$\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5\times25}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

A 10 정답 3 ＊거듭제곱근의 성질

$\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}=\sqrt[4]{\frac{729}{9}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

A 11 정답 10 ＊거듭제곱근의 성질

$(\sqrt[8]{100})^4=\sqrt[8]{100^4}=\sqrt[8]{10^8}=10$

A 12 정답 2 ＊거듭제곱근의 성질

$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

A 13 정답 2 ＊거듭제곱근의 성질

$\sqrt[3]{3\sqrt{4}}\times\sqrt[6]{\frac{16}{9}}=\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{6\times\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

A 14 정답 1 ＊거듭제곱근의 성질

$\frac{\sqrt[6]{27}\times\sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[12]{3^2}}{\sqrt[6]{3^4}}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{3^4}}=\sqrt[6]{\frac{3^3\times3}{3^4}}=\sqrt[6]{\frac{3^4}{3^4}}=\sqrt[6]{1}=1$

A 15 정답 27 ＊거듭제곱근의 성질

$\sqrt{\frac{9^7+3^{11}}{9^4+3^5}}=\sqrt{\frac{3^{14}+3^{11}}{3^8+3^5}}=\sqrt{\frac{3^{11}(3^3+1)}{3^5(3^3+1)}}=\sqrt{3^6}=3^3=27$

A 16 정답 16 ＊거듭제곱근의 성질

$\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}=\sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}=\sqrt{\frac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}}=\sqrt{2^8}=2^4=16$

A 17 정답 1 ＊지수의 확장

$(-3)^0=1$

A 18 정답 $\frac{1}{25}$ ＊지수의 확장

$5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

A 19 정답 32 ＊지수의 확장

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=2^5=32$

A 20 정답 $\frac{27}{64}$ ＊지수의 확장

$\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

A 21 정답 a ＊지수의 확장

$a^4\times a^3\div a^6=a^{4+3-6}=a$

A 22 정답 a^7 ＊지수의 확장

$(a^{-2})^4\times(a^{-3})^{-5}=a^{-8}\times a^{15}=a^{-8+15}=a^7$

A 23 정답 a^3 ∗지수의 확장

$$\frac{(a^{-6})^3\times(a^3)^6}{a^3\times a^{-6}}=\frac{a^{-18}\times a^{18}}{a^{3+(-6)}}=\frac{a^{(-18)+18}}{a^{-3}}=a^{0-(-3)}=a^3$$

A 24 정답 32 ∗지수의 확장

$$2^{-2}\times8^{\frac{7}{3}}=2^{-2}\times(2^3)^{\frac{7}{3}}=2^{-2}\times2^7=2^{-2+7}=2^5=32$$

A 25 정답 5 ∗지수의 확장

$$(5^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}}\div125=5^{\sqrt{16}}\div5^3=5^4\div5^3=5^{4-3}=5$$

A 26 정답 1 ∗지수의 확장

$$\begin{aligned}9^{\frac{1}{2}}\times3^{-3}\div27^{-\frac{2}{3}}&=(3^2)^{\frac{1}{2}}\times3^{-3}\div(3^3)^{-\frac{2}{3}}\\&=3\times3^{-3}\div3^{-2}\\&=3^{1+(-3)-(-2)}=3^0=1\end{aligned}$$

A 27 정답 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ∗지수의 확장

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$$\sqrt[6]{12}=12^{\frac{1}{6}}=(2^2)^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}\times(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$$

A 28 정답 $a^{12}b^{18}$ ∗지수의 확장

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$$6^6=2^6\times3^6=(2^{\frac{1}{2}})^{12}\times(3^{\frac{1}{3}})^{18}=a^{12}b^{18}$$

A 29 정답 $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ ∗지수의 확장

$$(a-b)\div(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=\frac{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$$

A 30 정답 $a+b$ ∗지수의 확장

$$(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3=a+b$$

A 31 정답 $a-b$ ∗지수의 확장

$$\begin{aligned}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})&=\{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})\\&=(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})\\&=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2\\&=a-b\end{aligned}$$

A 32 정답 -2 ∗지수의 확장

$25^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{2}{x}}=15$, $125^{\frac{1}{y}}=5^{\frac{3}{y}}=375$이므로

$$5^{\frac{2}{x}}\div5^{\frac{3}{y}}=5^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}=\frac{15}{375}=\frac{1}{25}=5^{-2}$$

$$\therefore\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-2$$

A 33 정답 $2\sqrt{2}-1$ ∗지수의 확장

분모, 분자에 a^x을 각각 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}&=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2+\frac{1}{\sqrt{2}-1}}{(\sqrt{2}-1)+1}\\&=\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}-2}{2}=2\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

A 34 정답 ⑤ ∗거듭제곱근의 정의 [정답률 89%]

정답 공식: 16의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{16}$, -27의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-27}$이다.

❶16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, ❷-27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? (3점)

단서 거듭제곱근의 정의를 알아야 해. 이때, ❶은 양수, ❷는 음수의 거듭제곱근이니까 주의하자.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 거듭제곱근의 정의를 이용하여 실수 a, b의 값을 찾자.

$x^n=a$(a는 상수)라 할 때, x는 a의 n제곱근이야.

16의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=16$이므로

$x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

$x^2=-4$에서 $x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}i$

$x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$ → 실수가 아닌 허수이지?

주의 판별식을 이용하면 $D=0^2-4\times1\times4<0$으로 허근을 가져.

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-2$

-27의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=-27$이므로

$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)=0$

→ 판별식을 이용하면 $D=(-3)^2-4\times1\times9<0$으로 허근이야.

$x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ b=-3$

2nd $a-b$의 최댓값을 구해.

$a-b=2-(-3)=5$ 또는 $a-b=-2-(-3)=1$

이므로 $a-b$의 최댓값은 5이다.

두 수의 차의 최대는 a가 양수, b가 음수일 때야.

A 35 정답 ⑤ ∗거듭제곱근의 정의 [정답률 55%]

정답 공식: a의 n제곱근은 $\sqrt[n]{a}$이다.

실수 a, b에 대하여 a는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$는 b의 네제곱근일 때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$의 값은? (3점)

단서 거듭제곱근의 정의를 알고 있는지 물어보고 있어.

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

1st a, b를 거듭제곱근을 이용하여 표현해 봐.

a는 2의 세제곱근이므로 $a^3=2$

$\sqrt{2}$는 b의 네제곱근이므로 $(\sqrt{2})^4=b$

2nd 1st에서 구한 값을 $\left(\frac{b}{a}\right)^3$에 대입하자.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{a^3}=\frac{\{(\sqrt{2})^4\}^3}{2}=\frac{2^6}{2}=2^5=32$$

A 36 정답 ⑤ *거듭제곱근의 정의 [정답률 75%]

정답 공식: 양수 k의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{k}$, a의 네제곱근 중 실수는 $\pm\sqrt[4]{a}$이다. 이때, $\sqrt[3]{k}=a$임을 이용한다.

양수 k의 세제곱근 중 실수인 것을 a라 할 때, a의 네제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[3]{4}$이다. k의 값은? (3점)

단서1 거듭제곱근의 정의를 이용하여 세제곱근 중 실수를 찾아.
단서2 양수 a의 네제곱근 중 양수는 $\sqrt[4]{a}$임을 이용하자.

① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256

1st k의 세제곱근과 네제곱근을 구해 보자.

양수 k의 세제곱근 중 실수인 것이 a이므로

k의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{k}$와 같아.

$a=\sqrt[3]{k}$에서 $a=k^{\frac{1}{3}}$ $(a>0)$ ⋯ ㉠

지수로 나타내면 계산이 쉬워.

a의 네제곱근 중 양수인 것이 $\sqrt[3]{4}$이므로

a의 네제곱근 중 실수는 $\pm\sqrt[4]{a}$이고 그중 양수이므로 $\sqrt[4]{a}$

$\sqrt[3]{4}=\sqrt[4]{a}$에서 $4^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{4}}$, $(2^2)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{4}}$

$2^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{4}}$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2^{\frac{2}{3}}=\left(k^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$, $2^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{1}{12}}$

$(a^m)^n=a^{mn}$

$\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{12}=\left(k^{\frac{1}{12}}\right)^{12}$

$\therefore k=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{12}=2^8=256$

A 37 정답 11 *거듭제곱근의 정의 [정답률 58%]

정답 공식: 집합 C의 원소는 b의 a제곱근 중 실수인 것만 해당되므로 a가 홀수인지 짝수인지 확인하고, b의 부호에 주의해서 $x^a=b$의 실근의 개수를 구한다.

두 집합 $A=\{5, 6\}$, $B=\{-3, -2, 2, 3, 4\}$가 있다. 집합 $C=\{x\,|\,x^a=b,\ x$는 실수, $a\in A,\ b\in B\}$에 대하여 $n(C)$의 값을 구하시오. (4점)

단서 a에 5, 6을 대입하고, b 대신 $-3, -2, 2, 3, 4$를 대입해서 집합 C의 원소를 모두 찾아.

1st 방정식 $x^a=b$의 근 중 실수인 것의 개수를 구해.

(i) a가 짝수, b가 양수일 때 $x=\pm\sqrt[a]{b}$ (두 개)
(ii) a가 짝수, b가 음수일 때 만족하는 x의 값은 없다.
(iii) a가 홀수일 때, b의 값에 관계없이 $x=\sqrt[a]{b}$ (한 개)

$x^a=b$에서 x는 b의 a제곱근이다. a에 5, 6을 각각 대입하여 b의 값에 따른 실수 x의 값을 구한다.

(i) $a=5$일 때, b의 5제곱근 중에서 실수인 것은 b의 값에 관계없이 오직 하나 존재한다. 실수인 x는 $\sqrt[5]{-3}$, $\sqrt[5]{-2}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[5]{4}$로 5개이다.

b의 5제곱근 중에서 실수인 것은 b가 양수든 음수든 오직 하나만 존재해.

(ii) $a=6$일 때,

i) $b>0$, 즉 $b=2, 3, 4$일 때,
b의 a제곱근 중 실수인 것은 양수와 음수 각각 한 개씩 존재한다.
즉, 실수인 x는 $\sqrt[6]{2}$, $-\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[6]{3}$, $-\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[6]{4}$, $-\sqrt[6]{4}$로 6개이다.

ii) $b<0$, 즉 $b=-3, -2$일 때, b의 a제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 공통인 x의 값은 존재하지 않는다.

주의 (i), (ii)에서 구한 x의 값 중 중복된 것이 있는지 항상 체크해야 해.

$\therefore n(C)=5+6=11$

A 38 정답 ③ *거듭제곱근의 정의 [정답률 53%]

정답 공식: 음수의 제곱근은 존재하지 않는다. 홀수제곱근 중 실수는 1개이고, 양수의 짝수제곱근 중 실수는 2개이다.

자연수 $n(n\geq2)$에 대하여 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$라 할 때, $f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

단서 $x^n=a$가 실수인 해를 가지는 조건을 생각하여 $f_n(a)$를 계산해 볼까?

1st a, n의 값에 실수 a의 n제곱근을 식으로 나타내어 $f_n(a)$를 구해.

방정식 $x^n=a$의 근 중에서 실수의 개수야.

-3의 제곱근 중 실수는 없으므로

$x^2=-3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-3}$이니까 허수야.

$f_2(-3)=0$

-2의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{-2}$로 한 개뿐이므로 $f_3(-2)=1$

$x^3=-2$

5의 네제곱근 중 실수는 $\sqrt[4]{5}$, $-\sqrt[4]{5}$로 2개이므로 $f_4(5)=2$

$x^4=5$

$\therefore f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)=0+1+2=3$

A 39 정답 ① *거듭제곱근의 정의 [정답률 67%]

정답 공식: a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 n이 홀수일 때 a가 음수이어야 하고 n이 짝수일 때 a가 양수이어야 한다.

자연수 n이 $2\leq n\leq11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)

단서 x에 대한 방정식 $x^n=-n^2+9n-18$을 만족시키는 음의 실근이 존재하는 경우를 찾는 것과 같아.

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

1st $-n^2+9n-18$의 값의 부호에 따라 조건을 만족시키는 n의 값을 구해.

a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 a가 양수이고 n이 짝수이거나 a가 음수이고 n이 홀수이어야 해.

(i) $-n^2+9n-18>0$일 때, n이 짝수이면 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재한다.

이때, $-n^2+9n-18>0$에서 $n^2-9n+18<0$

$(n-3)(n-6)<0$ $\therefore 3<n<6$

$\alpha<\beta$일 때, 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$

이때, $2\leq n\leq11$이므로 $3<n<6$

따라서 이것을 만족시키고 자연수 n이 짝수이어야 하므로 $n=4$

(ii) $-n^2+9n-18<0$일 때, n이 홀수이면 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재한다.

이때, $-n^2+9n-18<0$에서 $n^2-9n+18>0$

$(n-3)(n-6)>0$ $\therefore n<3$ 또는 $n>6$

$\alpha<\beta$일 때, 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

이때, $2\leq n\leq11$이므로 $2\leq n<3$ 또는 $6<n\leq11$

이것을 만족시키는 자연수 중 n이 홀수이어야 하므로 $n=7$ 또는 $n=9$ 또는 $n=11$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

A 135 정답 ② *지수법칙의 실생활 응용 [정답률 65%]

정답 공식: 부패지수가 각각 P_1, $4P_1$일 때 관계식의 각 문자에 해당하는 값을 대입하고, 두 식을 나눠서 구하고자 하는 값을 찾는다.

어떤 물질의 부패지수 P와 일평균 습도 $H(\%)$, 일평균 기온 $t(℃)$ 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$P=\frac{H-65}{14}\times(1.05)^t \cdots ⓐ$$

❶일평균 습도가 72 %, 일평균 기온이 10 ℃인 날에 이 물질의 부패지수를 P_1이라 하자. ❷일평균 습도가 79 %, 일평균 기온이 x ℃인 날에 이 물질의 부패지수가 $4P_1$일 때, x의 값은? (단, $1.05^{14}=2$로 계산한다.) (4점)

단서 ⓐ를 가지고 ❶과 ❷의 자료를 대입하여 정리해. 이때, ❷는 ❶의 4배이지?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

1st 주어진 식에 조건을 각각 대입해.

P_1일 때 $H=72(\%)$, $t=10(℃)$이므로

$P_1=\frac{72-65}{14}\times(1.05)^{10}=\frac{1}{2}\times(1.05)^{10} \cdots$ ㉠

P_2일 때 $H=79(\%)$, $t=x(℃)$이므로

$4P_1=\frac{79-65}{14}\times(1.05)^{x}=(1.05)^x \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 → ㉡은 ㉠의 4배이니까 $4\times$㉠$=$㉡

$4\times\left\{\frac{1}{2}\times(1.05)^{10}\right\}=(1.05)^x$ → $a^m=a^n$일 때 $a^m\div a^n=1$, 즉 $a^{m-n}=1$

$(1.05)^{x-10}=2$

그런데 $1.05^{14}=2$이므로 $(1.05)^{x-10}=1.05^{14}$ 밑이 1.05로 같으니까 지수를 비교해.

$x-10=14$ $\therefore x=24$

A 136 정답 ③ *지수법칙의 실생활 응용 [정답률 71%]

정답 공식: 2006년도 인구수를 구하고 그 값의 2배가 될 때, t의 값은 어떻게 될지 구해본다.

어느 도시의 t년도 인구수를 $P\times10^6$(명)이라 하면

$$P=5\times2^{\frac{t-2001}{15}}$$ $t=2006$을 대입!

단서 2006년의 인구수를 구한 뒤, 그 2배가 되는 해를 찾자.

인 관계가 성립한다고 한다. 이 도시의 인구수가 2006년 인구수의 2배가 되는 해는? (3점)

① 2017년 ② 2019년 ③ 2021년
④ 2023년 ⑤ 2025년

1st 먼저 2006년도의 인구수 P를 구해야겠지?

2006년도의 인구수를 $P\times10^6$(명)이라 하면

$P=5\times2^{\frac{2006-2001}{15}}=5\times2^{\frac{5}{15}}=5\times2^{\frac{1}{3}} \cdots$ ㉠

2nd 인구수가 2배가 되는 해를 구하자.

이 도시의 인구수 $P'\times10^6$(명)이 2006년 인구수의 2배가 되는 해를 t라 하자.

$P'=5\times2^{\frac{t-2001}{15}}=2P$

㉠에서 $2P=2\times5\times2^{\frac{1}{3}}=5\times2^{\frac{4}{3}}$이므로 지수를 비교하면

[지수법칙] $a^n\times a^m=a^{n+m}$

$\frac{4}{3}=\frac{t-2001}{15}$, $20=t-2001$

$\therefore t=2021$

내신 유형별 서술형 문제

A 137 정답 10 *거듭제곱근의 정의 [정답률 67%]

정답 공식: a의 n제곱근 중 실수는 x에 대한 방정식 $x^n=a$의 실근이다.

단서 n의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 각 경우에서의 부호에 따른 실근을 조사해.

2 이상 30 이하인 자연수 n에 대하여 $n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하고, $n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

단서+발상

단서 a의 n제곱근 중 실수는 x에 대한 방정식 $x^n=a$의 실근과 같다. a의 n제곱근 중 양의 실근이 존재하기 위해서 $a>0$이어야 하고, a의 n제곱근 중 음의 실근이 존재하기 위해서 $a>0$이고 n은 짝수이거나, $a<0$이고 n은 홀수이어야 한다. (개념)

따라서 n의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 $n-9$와 $n-20$의 부호에 따른 실수가 존재하는 n의 조건을 구할 수 있다. (적용)

[문제 풀이 순서]

1st $n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하는 n의 조건을 구하자.

$n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하기 위해서는

$n-9>0$이어야 한다. $\therefore n>9 \cdots$ ㉠

2nd $n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하는 n의 조건을 구하자.

$n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하기 위해서는

[a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하는 경우]
$a>0$, n이 짝수인 경우 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$, $x=-a^{\frac{1}{n}}$이고 $-a^{\frac{1}{n}}<0$이야.
$a<0$, n이 홀수인 경우 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$이고 $a^{\frac{1}{n}}<0$이야.

n이 홀수이고 $n-20<0$이거나 n이 짝수이고 $n-20>0$이어야 한다.

따라서 자연수 n은

$n<20$인 홀수 또는 $n>20$인 짝수이다. $\cdots$ ㉡

3rd 자연수 n의 개수를 구하자.

㉠, ㉡에 의하여 30 이하인 자연수 n은 $9<n<20$인 홀수 또는 $20<n\le30$인 짝수이다.

(i) n이 $9<n<20$인 홀수 ⇒ $n=11, 13, 15, 17, 19$이므로 5개이다.

(ii) n이 $20<n\le30$인 짝수
$n=22, 24, 26, 28, 30$이므로 5개이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 자연수 n의 개수는 10이다.

[채점 기준표]

1st $n-9$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하는 n의 조건을 구한다.	3점
2nd $n-20$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하는 n의 조건을 구한다.	4.5점
3rd 자연수 n의 개수를 구한다.	2.5점

A 138 정답 20 *거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 57%]

정답 공식: a의 n제곱근 중 실근은 $a^{\frac{1}{n}}$ 또는 $-a^{\frac{1}{n}}$이다.

단서 서로 다른 실근이 3개 가지고 있음을 알 수 있고, m, n의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 실근의 개수를 확인해 보자.

2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$$

이 서로 다른 세 실근 α_1, α_2, α_3을 가진다. 세 수 α_1, α_2, α_3이 모두 정수일 때, $m+n=k$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

단서+발상

단서 $x^n=a$의 실근에서 n이 짝수인 경우 실수 a에 대하여 $a>0$이면 a의 n제곱근 중 실근은 $a^{\frac{1}{n}}$, $-a^{\frac{1}{n}}$이고, n이 홀수인 경우 a의 n제곱근 중 실근은 $a^{\frac{1}{n}}$이다. 개념

방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 해는 방정식 $x^m=2^6$ 또는 $x^n=-2^9$의 해와 같고, 이때 x의 지수 m, n의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 상황을 나누어 각 경우의 실근의 개수를 구할 수 있다. 적용

실근 α_1, α_2, α_3에서 같은 근이 생기는 m, n의 값이 존재하는지 확인하여 자연수 k의 값을 구할 수 있다. 해결

[문제 풀이 순서]

1st 세 실근을 가지기 위한 m, n의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$을 구하자.

방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$이려면 $x^m=2^6$ 또는 $x^n=-2^9$이다.

n이 짝수이면 방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 존재하지 않는다.

n이 짝수일 때, 방정식 $x^n=a$에서 $a\ge0$이어야 실근이 존재해.

방정식 $x^m=2^6$의 실근은 최대 2개이므로

방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$이 세 실근을 가질 수 없다.

따라서 n은 홀수이다.

n은 홀수이므로 방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 $x=-2^{\frac{9}{n}}$으로 1개,

n이 홀수일 때, 실수 a에 대해 방정식 $x^n=a$의 실근은 항상 1개야.

방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 3개이므로

방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2개이다.

따라서 m은 짝수이고 방정식 $x^m=2^6$의 실근은 $x=2^{\frac{6}{m}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{m}}$이다.

$a>0$, n이 짝수인 경우 $x^n=a$의 실근은 $x=a^{\frac{1}{n}}$ 또는 $x=-a^{\frac{1}{n}}$

$\therefore \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}=\left\{-2^{\frac{9}{n}}, 2^{\frac{6}{m}}, -2^{\frac{6}{m}}\right\}$

2nd α_1, α_2, α_3이 서로 다른 정수가 되기 위한 m, n, k의 값을 각각 구하자.

$2^{\frac{6}{m}}$, $-2^{\frac{6}{m}}$이 정수이므로 $m=2, 6$

m이 2 이상인 자연수 중 짝수이면서 6의 약수는 2, 6이야.

$-2^{\frac{9}{n}}$이 정수이므로 $n=3, 9$

조건을 만족시키는 m, n의 값을 순서쌍 (m, n)으로 나타내자.

(i) $(2, 3)$인 경우

방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2^3, -2^3

방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 -2^3

따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 2^3, -2^3으로 서로 다른 세 정수가 될 수 없다.

(ii) $(2, 9)$인 경우

방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2^3, -2^3

방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 -2

따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 2^3, -2^3, -2이므로 서로 다른 세 정수이다.

$\therefore m+n=11$

(iii) $(6, 3)$인 경우

방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2, -2

방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 -2^3

따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 2, -2, -2^3이므로 서로 다른 세 정수이다.

$\therefore m+n=9$

(iv) $(6, 9)$인 경우

방정식 $x^m=2^6$의 실근은 2, -2

방정식 $x^n=-2^9$의 실근은 -2

따라서 방정식 $(x^m-2^6)(x^n+2^9)=0$의 실근은 서로 다른 세 정수가 될 수 없다.

(i)~(iv)에 의해 모든 자연수 k의 값의 합은 $11+9=20$

서로 다른 근이 나오는지 확인하기 위해 가능한 경우의 자연수 m, n을 대입해봐야 해.

[채점 기준표]

1st	세 실근을 가지기 위한 m, n의 조건과 실근의 집합 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$을 구한다.	4점
2nd	α_1, α_2, α_3가 서로 다른 정수가 되기 위한 m, n, k의 값을 각각 구한다.	6점

A 139 정답 21 *지수법칙의 활용 [정답률 68%]

정답 공식: $(ab)^n=a^nb^n$, $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$

등식 단서1 분자의 항이 복잡하므로 분모와 분자에 일정한 값을 곱하여 식을 간단히 만들 수 있어.

$$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$$

단서2 곱셈공식을 활용해 식을 변형하여 계산할 수 있어.

$$=(2^a+2^b)^3$$

을 만족시키는 유리수 a, b에 대하여 $3a+b$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

단서+발상

단서1 분자가 계산이 번거로운 2^{-k} 꼴의 항들로 이루어져 있으므로 분모와 분자에 2^5을 곱하여 식을 간단히 만들고 같은 부호의 항끼리 묶어 계산할 수 있다. 발상

단서2 $\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{2})^2$이므로 $\sqrt[3]{2}=A$라 하면 $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$는 A^2-A+1로 나타낼 수 있다. 발상

곱셈공식 $(A+1)(A^2-A+1)=A^3+1$을 활용해 식을 변형하여 계산할 수 있다. 적용

[문제 풀이 순서]

1st $\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}$의 값을 구하자.

$$\left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-1}$$

$$=\frac{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}=\frac{1}{2^{-5}}\left(\frac{1+2+2^2+2^3+2^4+2^5}{2^5-2^4+2^3-2^2+2-1}\right)$$

$$=2^5\left\{\frac{1+2^2+2^4+2(1+2^2+2^4)}{2(1+2^2+2^4)-(1+2^2+2^4)}\right\}=2^5\left\{\frac{3(1+2^2+2^4)}{1+2^2+2^4}\right\}=3\times2^5$$

$$\therefore \left(\frac{1-2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}+2^{-4}-2^{-5}}{2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}\right)^{-3}=(3\times2^5)^3 \cdots ㉠$$

2nd $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}$의 값을 구하자.

$$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^{-3}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}\right)^3=\left\{\frac{\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3+1}\right\}^3$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{2}+1)^3}{27} \cdots ㉡$$

$$\left\{\frac{\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}\right\}^3$$

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A 147 정답 24 ＊거듭제곱근의 활용 ······ [정답률 41%]

정답 공식: n이 짝수일 때 양수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 2이고 n이 홀수일 때 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 1이다.

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (4점)

단서 2 단서 1에서 찾은 $f(x)=0$의 실근이 모두 방정식 $x^n-64=0$의 실근이 되어야 각각의 실근이 중근이 돼.

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.

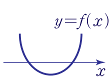
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

단서 1 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음의 정수이므로 방정식 $f(x)=0$의 실근을 개수를 알 수 있어.

1st 자연수 n의 조건을 찾아내.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음의 정수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

최고차항의 계수가 양수인 이차함수의 그래프는 아래로 볼록한 포물선이야. 그런데 $f(x)$의 최솟값이 음수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가져.



이때, $(x^n-64)f(x)=0$에서 $x^n-64=0$ 또는 $f(x)=0$이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 방정식 $x^n-64=0$의 실근과 동일해야 중근이 되어 조건 (가)를 만족시킨다.

α, β라 하자.

① α, β를 근으로 가져야하므로 n은 짝수야.
② α, β 이외의 근을 가질 수 있고, 그들도 모두 중근이어야 조건 (가)를 만족시켜.

(i) n이 홀수일 때,

$x^n-64=0$의 실근은 $x=\sqrt[n]{64}$로 1개이다.

따라서 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 실근이 모두 중근일 수 없다.

$x=\sqrt[n]{64}$가 방정식 $f(x)=0$의 실근이면 $x=\sqrt[n]{64}$는 중근이 돼. 그런데 방정식 $f(x)=0$의 실근이 또 하나 있고 그 실근은 중근이 될 수 없지?

(ii) n이 짝수일 때,

$x^n-64=0$의 실근은 $x=\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}$로 2개이다.

따라서 $x=\sqrt[n]{64}$, $x=-\sqrt[n]{64}$가 방정식 $f(x)=0$의 실근이면 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 실근이 모두 중근일 수 있다.

(i), (ii)에 의하여 n은 짝수이다.

2nd 함수 $f(x)$를 구하고 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수가 되기 위한 자연수 n의 값을 모두 구해.

(ii)에 의하여

$x=\sqrt[n]{64}$, $x=-\sqrt[n]{64}$가 방정식 $f(x)=0$의 실근이 되어야 하므로

$$f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$$
$$=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$$

이어야 한다.

이때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=-2^{\frac{6}{n}}\times2^{\frac{6}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$이고 이 값이 음

이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭이지? 그리고 최고차항의 계수가 양수인 이차함수는 꼭짓점에서 최솟값을 가져. 이때, 방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{n}}$이므로 $f(x)$는 $x=\dfrac{2^{\frac{n}{6}}+(-2^{\frac{n}{6}})}{2}=0$에서 최솟값을 가져.

의 정수이어야 하므로 $\dfrac{12}{n}$는 자연수가 되어야 한다.

즉, 자연수 n은 12의 약수이면서 짝수이어야 하므로 가능한 n의 값은 2, 4, 6, 12이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은 $2+4+6+12=24$이다.

A 148 정답 ⑤ ＊거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 ··· [정답률 32%]

정답 공식: $\sqrt[n]{a^m}$이 자연수가 되기 위해서는 m이 n의 배수(n이 m의 약수)이어야 한다.

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\sqrt[4]{9\times2^{n+1}} & (n\text{이 홀수})\\ \sqrt[4]{4\times3^n} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는? (4점)

단서 자연수가 되기 위해서는 거듭제곱근의 근호가 없어져야 하지.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

1st p, q가 모두 홀수일 때, 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하자.

(i) p, q가 모두 홀수일 때,

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\,(a>0, b>0)$

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times2^{p+1}}\times\sqrt[4]{9\times2^{q+1}}=\sqrt[4]{81\times2^{p+q+2}}$$
$$=\sqrt[4]{81}\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}=3\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}$$

여기서 $p+q+2$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하의 홀수이므로 조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

$p+q+2=4m$(m은 자연수)이면 $\sqrt[4]{2^{p+q+2}}=\sqrt[4]{2^{4m}}=(\sqrt[4]{2^4})^m=2^m$

i) $p+q+2=4$일 때, $p+q=2$이므로 $(1, 1)$

ii) $p+q+2=8$일 때, $p+q=6$이므로 $(1, 5)$, $(3, 3)$, $(5, 1)$

iii) $p+q+2=12$일 때, $p+q=10$이므로 $(1, 9)$, $(3, 7)$, $(5, 5)$, $(7, 3)$, $(9, 1)$

$p+q=6$인 두 자연수 p, q의 순서쌍을 구하기 위해서는 p가 홀수이므로 1, 3, 5를 대입하여 q의 값을 찾으면 돼.

iv) $p+q+2=16$일 때, $p+q=14$이므로 $(5, 9)$, $(7, 7)$, $(9, 5)$

v) $p+q+2=20$일 때, $p+q=18$이므로 $(9, 9)$

즉, 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 $1+3+5+3+1=13$이다.

2nd p가 홀수, q가 짝수일 때, 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하자.

(ii) p는 홀수, q는 짝수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times2^{p+1}}\times\sqrt[4]{4\times3^q}=\sqrt[4]{2^{p+3}\times3^{q+2}}=\sqrt[4]{2^{p+3}}\times\sqrt[4]{3^{q+2}}$$

여기서 $p+3$과 $q+2$가 각각 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

$p+3$과 $q+2$가 각각 4의 배수이어야 $\sqrt[4]{2^{p+3}}$, $\sqrt[4]{3^{q+2}}$이 각각 자연수가 되지.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하의 홀수, 짝수이므로

$p+3$은 4, 8, 12이고, $q+2$는 4, 8, 12

즉, p는 1, 5, 9 중 하나이고, q는 2, 6, 10 중 하나이다.

p가 될 수 있는 수가 1, 5, 9이고, q가 될 수 있는 수가 2, 6, 10이므로 순서쌍 (p, q)의 개수는 $3\times3=9$야.

조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

$(1, 2)$, $(1, 6)$, $(1, 10)$, $(5, 2)$, $(5, 6)$, $(5, 10)$, $(9, 2)$, $(9, 6)$, $(9, 10)$이므로 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 9이다.

3rd p가 짝수, q가 홀수일 때, 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하자.

(iii) p는 짝수, q는 홀수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times3^p}\times\sqrt[4]{9\times2^{q+1}}$$
$$=\sqrt[4]{2^{q+3}\times3^{p+2}}$$
$$=\sqrt[4]{2^{q+3}}\times\sqrt[4]{3^{p+2}}$$

여기서 $q+3$과 $p+2$가 각각 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하의 짝수, 홀수이므로 $p+2$는 4, 8, 12이고, $q+3$은 4, 8, 12

즉, p는 2, 6, 10 중 하나이고, q는 1, 5, 9 중 하나이다.

조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

$(2, 1)$, $(2, 5)$, $(2, 9)$, $(6, 1)$, $(6, 5)$, $(6, 9)$, $(10, 1)$, $(10, 5)$, $(10, 9)$이므로 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 9이다.

4th p, q가 모두 짝수일 때, 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하자.

(iv) p, q가 모두 짝수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^p}\times\sqrt[4]{4\times 3^q}=\sqrt[4]{16\times 3^{p+q}}=\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{3^{p+q}}=2\times\sqrt[4]{3^{p+q}}$$

여기서 $p+q$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

두 자연수 p, q가 각각 10 이하의 짝수이므로 조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는

i) $p+q=4$일 때, $(2, 2)$

ii) $p+q=8$일 때, $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$

iii) $p+q=12$일 때, $(2, 10)$, $(4, 8)$, $(6, 6)$, $(8, 4)$, $(10, 2)$

iv) $p+q=16$일 때, $(6, 10)$, $(8, 8)$, $(10, 6)$

v) $p+q=20$일 때, $(10, 10)$

즉, 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 $1+3+5+3+1=13$이다.

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 $13+9+9+13=44$이다.

A 149 정답 ⑤ *지수법칙의 활용 [정답률 36%]

(정답 공식: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^m\times a^n=a^{m+n}$)

두 집합 $A=\{3, 4\}$, $B=\{-9, -3, 3, 9\}$에 대하여 집합 X를

$X=\{x\,|\,x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x는\ 실수\}$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

단서 1 a 대신 3, 4를 대입하고, b 대신 -9, -3, 3, 9를 대입해서 집합 X의 원소를 모두 찾아보자.

[보기]

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$ 단서 2 집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중 실수인 것만 해당되므로 $\pm\sqrt[a]{b}$의 값 중 실수인 것이 몇 개인지 찾아야 해.

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다.

ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 $\sqrt[4]{3^7}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st $a=3$, 4를 대입하고, $b=-9$, -3, 3, 9를 대입해서 집합 X의 원소를 모두 찾아보자.

x에 대한 방정식 $x^a=b$의 근 중 실수인 것은
① a가 짝수, b가 양수일 때 $x=\pm\sqrt[a]{b}$ (두 개) ② a가 짝수, b가 음수일 때 없다.
③ a가 홀수일 때, b의 값에 관계없이 $x=\sqrt[a]{b}$ (한 개)

집합 X의 원소는

a \ b	-9	-3	3	9
3	$\sqrt[3]{-9}$	$\sqrt[3]{-3}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{9}$
4	없다.	없다.	$\pm\sqrt[4]{3}$	$\pm\sqrt[4]{9}$

이므로

$X=\{\sqrt[3]{-9}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, -\sqrt{3}, -\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt{3}\}$

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$ (참)

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다. (참)

ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 것은 $x=\sqrt[a]{b}$에서 x가 양수이려면 b가 양수이어야 해.

$\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{3}$이므로 양수인 모든 원소의 곱은

$$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt{3}=3^{\frac{1}{3}}\times 9^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=3^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{3^7}\ (참)$$

$a^m\times a^n=a^{m+n}$, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

실수 $\sqrt[b]{a}$는 $a^{\frac{1}{b}}$로 나타낼 수 있어. 지수법칙을 잘 지켜서 계산하도록 하자.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

A 150 정답 ⑤ ✪2등급 대비 [정답률 15%]

*m의 값에 따라 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 순서쌍의 개수 구하기 [유형 06]

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\left\{(a, b)\,\middle|\,2^a=\frac{m}{b},\ a,\ b는\ 자연수\right\}$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

[보기]

ㄱ. $A_4=\{(1, 2), (2, 1)\}$ 단서 1 $m=4$를 직접 대입해서 A_4의 원소를 나타내봐.

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m=2^k$이면 $n(A_m)=k$이다.

ㄷ. $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다. 단서 2 $n(A_m)=1$이 되도록 하는 집합 A_m의 원소 (a, b)에 대하여 a, b의 조건을 따져보자.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

왜 2등급? 이 문제는 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 순서쌍의 개수를 구하는 문제이다. m을 소인수분해할 때 2의 지수가 얼마인지 따져볼 수 있어야 한다.

단서+발상

단서1 $m=4$를 대입하여 $2^a\times b=4$가 되도록 하는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다. 이때 a가 지수에 있으므로 $a=1$부터 차례대로 b가 자연수가 될 수 있는지 따져본다. 적용

단서2 $b=\frac{m}{2^a}$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수가 1이 되도록 하는 m의 조건을 따져볼 수 있다. 적용

$a=1$부터 차례대로 b가 자연수가 될 수 있는지 따져보면서 순서쌍의 개수를 세었으므로 $a=1$일 때만 되도록 하는 m의 조건을 구할 수 있다. 해결

주의 $b=\frac{m}{2^a}$에서 $a=p$일 때, b가 자연수가 아니면 $a>p$일 때도 b가 자연수가 될 수 없으므로 $a=1$일 때부터 차례대로 따져본다.

(핵심 정답 공식: $2^a\times b=m$, $m=2^k$이면 a는 1부터 k까지 가능하다.)

[문제 풀이 순서]

1st $m=4$를 대입하여 ㄱ의 진위를 판단하자.

ㄱ. 집합 A_4는 $2^a=\frac{4}{b}$에서 $4=2^a\times b$인 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 갖는 집합이므로 $4=2^1\times 2$, $4=2^2\times 1$

$\therefore A_4=\{(1, 2), (2, 1)\}$ (참)

2nd $m=2^k$을 대입하여 집합 A_m을 직접 구해보자.

ㄴ. $m=2^k$일 때, $A_m=A_{2^k}$

A_{2^k}은 $2^a=\frac{2^k}{b}$에서

$2^k=2^a\times b$인 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 갖는 집합이므로 (지수법칙에 의해 $2^{k-a}=b$)

$A_m=\{(1, 2^{k-1}), (2, 2^{k-2}), (3, 2^{k-3}), \cdots, (k, 2^0)\}$

$\therefore n(A_m)=k$ (참)

A 내신+수능 대비 단원별 모의고사 문제편 p. 312

모의
A 01 정답 2 *거듭제곱근의 정의 [정답률 89%]

(정답 공식: $a>0$일 때, n이 홀수이면 $\sqrt[n]{a}$이고, n이 짝수이면 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$이다.)

❶ -216의 세제곱근 중 실수인 것을 a, ❷ $\dfrac{1}{81}$의 네제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, ab의 최댓값을 구하시오. (3점)

단서 거듭제곱근의 정의를 알아야 해. 이때, ❶은 음수, ❷는 실수의 거듭제곱근이므로 주의하자.

1st 거듭제곱근의 정의를 이용하여 두 실수 a, b의 값을 각각 구하자.

-216의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=-216$이므로 $x^3+216=0$

$(x+6)(x^2-6x+36)=0$

이때, $x^2-6x+36=0$은 실근을 갖지 않으므로

$x^2-6x+36=0$에서 $x=3\pm3\sqrt{3}i$이므로 실수가 아닌 허수야.

$x+6=0$에서 $x=-6$

$\therefore a=-6$

주의 실근과 허근의 차이를 잘 알고 있자.

$\dfrac{1}{81}$의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=\dfrac{1}{81}$이므로 $81x^4-1=0$

$(3x+1)(3x-1)(9x^2+1)=0$

이때, $9x^2+1=0$은 실근을 갖지 않으므로

$9x^2+1=0$에서 $x^2\geq0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $9x^2+1\geq1$이야. 즉, $9x^2+1=0$을 만족시키는 실근은 존재하지 않아.

$(3x+1)(3x-1)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

$\therefore b=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $b=\dfrac{1}{3}$

2nd ab의 최댓값을 구하자.

$ab=-6\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2$ 또는 $ab=-6\times\dfrac{1}{3}=-2$이므로

ab의 최댓값은 2이다.

모의
A 02 정답 ④ *거듭제곱근의 성질 [정답률 87%]

(정답 공식: $\sqrt[n]{a^n}=a\,(a>0)$)

$3\times\sqrt[3]{16}+2\times\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{k}$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 $\dfrac{k}{48}$의 값은? (4점)

단서 $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^n}=a$임을 이용하자.

① 12 ② 36 ③ 54 ④ 72 ⑤ 96

1st $a>0$일 때, $\sqrt[n]{a^n}=a$지?

$3\times\sqrt[3]{16}+2\times\sqrt[3]{54}$

$=3\times\sqrt[3]{2^3\times2}+2\times\sqrt[3]{3^3\times2}$

$=6\times\sqrt[3]{2}+6\times\sqrt[3]{2}$ $\quad\sqrt[n]{a^n}=a\,(a>0)$

$=12\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{12^3\times2}$

따라서 $k=12^3\times2$이므로

$\dfrac{k}{48}=\dfrac{12^3\times2}{48}=\dfrac{12^3\times2}{12\times2^2}=\dfrac{144}{2}=72$

모의
A 03 정답 ② *지수법칙 – 밑이 다른 계산(곱셈) [정답률 92%]

(정답 공식: $(a^m)^n=a^{mn}$, $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$임을 이용한다.)

$8^{\frac{2}{3}}\times27^{-\frac{1}{3}}$의 값은? (2점)

단서 $8=2^3$, $27=3^3$임을 이용하자.

① $\dfrac{7}{6}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$

1st 지수법칙을 이용하자.

$8^{\frac{2}{3}}\times27^{-\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}\times(3^3)^{-\frac{1}{3}}$ $\quad (a^m)^n=a^{mn}$

$=2^2\times3^{-1}$ $\quad a^{-1}=\dfrac{1}{a}$

$=\dfrac{4}{3}$

모의
A 04 정답 16 *거듭제곱근이 자연수, 유리수가 되는 조건 [정답률 67%]

(정답 공식: 어떤 자연수의 n제곱근은 n제곱을 했을 때 자연수가 나옴을 의미한다.)

$2\leq n\leq100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (4점)

단서 어떤 자연수를 N이라 하면 $\sqrt[n]{N}$이지? 이때, n은 자연수이고 $2\leq n\leq100$이야.

1st 어떤 자연수를 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$으로 나타내.

어떤 자연수를 N이라 하면 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 자연수 N의 n제곱근이므로

x가 a의 n제곱근이면 $x^n=a$이야.

$\left\{(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}\right\}^n=\left\{(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}\right\}^n=3^{\frac{5n}{6}}=N$

$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

$n=6k$ (k는 자연수)라 하면 $\dfrac{5}{6}n=\dfrac{5}{6}\times6k=5k$도 자연수야.

2nd N, n이 자연수이니까 $2\leq n\leq100$에서 n의 개수를 구해.

n이 6의 배수이면 N은 3의 거듭제곱으로 자연수가 된다.

즉, n의 개수는 100 이하의 자연수 중 6의 배수의 개수와 같다.

따라서 자연수 n의 개수는 16이다. $\quad\dfrac{100}{6}=16.\times\times\times$

모의
A 05 정답 30 *지수법칙의 활용 [정답률 69%]

(정답 공식: 최소의 자연수 n은 2, 5, 6의 최소공배수가 되어야 한다.)

세 양수 a, b, c에 대하여 $a^6=3$, $b^5=7$, $c^2=11$일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하시오. (3점)

단서 $(abc)^n$이 자연수가 되려면 (abc)의 지수가 0, 1, 2, …가 되어야 해. 이때, a, b, c는 지수가 유리수인 수이니까 그 곱의 지수가 자연수가 되는 경우를 생각해 보자.

1st 세 양수 a, b, c를 지수가 유리수인 수로 간단히 나타내.

$a^6=3$에서 $a=3^{\frac{1}{6}}$

$a^6=3$이면 a는 3의 6제곱근이지? 즉, $a=\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}}$이야.

$b^5=7$에서 $b=7^{\frac{1}{5}}$

$c^2=11$에서 $c=11^{\frac{1}{2}}$

$\therefore (abc)^n=\left(3^{\frac{1}{6}}\times7^{\frac{1}{5}}\times11^{\frac{1}{2}}\right)^n$ ⋯ ㉠

실수 $(a^n\times b^m)^l=a^{n\times l}\times b^{m\times l}$이므로 6, 5, 2의 최소공배수를 구해야 해.

2nd 주어진 값이 자연수가 되기 위한 조건을 생각하여 n의 값을 구해.

㉠이 자연수가 되려면 n은 6, 5, 2의 공배수가 되어야 한다.

세 수 a, b, c를 곱한 수의 지수가 0 또는 자연수이어야 해. 즉 ㉠의 지수로 자연수를 만들어야 하니까 지수의 분수를 통분해야 해.

따라서 최소의 자연수 n은 6, 5, 2의 최소공배수이므로 30이다.

공배수 중에서 가장 작은 것을 최소공배수라 해.