고등 수학,
개념과 유형을 제대로 익히면 누구나 잘 할 수 있습니다.

고등학교 수학은 개념이 어렵다고
공식만 암기하면서 공부해서는 안 됩니다.
개념을 꼼꼼히 이해하고 각 개념의 필수 공식과 문제 유형들을
단계화된 문제를 통해서 정확히 익혀야 합니다.

자이스토리는 학교시험과 최신 학력평가 문제를
철저히 분석해 촘촘하게 유형을 분류하고 개념을 알맞게 적용시키는
세분화된 문제 유형 훈련으로 수학 기본 실력이 탄탄하게 다져집니다.
그래서 하루가 다르게 수학 성적이 향상됨을 느낄 수 있습니다.

또한, 자이스토리의 명쾌한 문제 분석과 풍부한 보충 첨삭 해설,
다른 풀이, 톡톡 풀이, 쉬운 풀이 등은 수학 공부에
흥미와 성취감을 북돋아 줄 것입니다.

어떤 목표를 달성하는 데 가장 중요한 것은 자신감이라고 하지요?
해낼 수 있다는 자신감을 갖고 자이스토리와 함께 하면
수학 1 등급을 반드시 이룰 수 있습니다.

– 대한민국 No.1 수능 문제집 자이스토리 –

학교시험+수능 1등급 완성 학습 계획표 [28일]

Day	문항 번호	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	날짜	복습 날짜
1	A 01~57		월 일	월 일
2	58~110		월 일	월 일
3	111~151		월 일	월 일
4	152~186		월 일	월 일
5	B 01~49		월 일	월 일
6	50~97		월 일	월 일
7	98~134		월 일	월 일
8	C 01~54		월 일	월 일
9	55~103		월 일	월 일
10	104~139		월 일	월 일
11	140~162		월 일	월 일
12	D 01~47		월 일	월 일
13	48~85		월 일	월 일
14	86~124		월 일	월 일
15	125~148		월 일	월 일
16	E 01~56		월 일	월 일
17	57~105		월 일	월 일
18	106~137		월 일	월 일
19	F 01~48		월 일	월 일
20	49~94		월 일	월 일
21	95~129		월 일	월 일
22	130~168		월 일	월 일
23	169~188		월 일	월 일
24	G 01~49		월 일	월 일
25	50~92		월 일	월 일
26	93~121		월 일	월 일
27	모의 A~D		월 일	월 일
28	모의 E~G		월 일	월 일

- 나는 ____________ 대학교 ____________ 학과 ________ 학번이 된다.
- 磨斧作針 (마부작침) – 도끼를 갈아 바늘을 만든다. (아무리 어려운 일이라도 끈기 있게 노력하면 이룰 수 있음을 비유하는 말)

집필진 · 감수진 선생님들

자이스토리는 수능 준비를 가장 효과적으로 할 수 있도록
수능, 평가원, 학력평가 기출문제를 개념별, 유형별, 난이도별로
수록하였으며, 명강의로 소문난 학교·학원 선생님들께서
명쾌한 해설을 입체 첨삭으로 집필하셨습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여고
김대식 경기 하남고
민경도 서울 강남 종로학원
박소희 안양 안양외고
박숙녀 아산 충남삼성고
배수나 서울 가인아카데미
신명선 안양 신성고
신현준 안양 신성고
윤장노 안양 신성고
윤혜미 서울 세종과학고
이종석 저)일등급 수학
이창희 THE 다원수학
위경아 서울 강남대성기숙의대관
장광걸 김포 김포외고
장경호 오산 운천고
장철희 서울 보성고
전경준 서울 풍문고
조승원 수원 경기과학고
지강현 안양 신성고
홍지언 부산 피보나치수학
홍지우 안양 평촌고
황광희 경기 시흥고
수경 수학 컨텐츠 연구소

개념&문제 풀이
강의 선생님
유튜브 채널
'수학문제 다깨기'

[다른 풀이 집필]

강성운 광주 더오름학원
신건률 대치 오름학원
어성웅 수원 어쌤수학학원
장영환 제주 제로링수학교실
진우승 오산 보성학원(주)

[감수진]

강동은 반포 세정학원
강성철 서울 일타수학학원
강현아 서울 수능수학 전문컨설턴트
강효선 광주 강효선수학학원
고지윤 김포 고수학전문학원
곽웅수 광주 카르페영수학원
권혁재 성남 수학의 아침
김건우 부산 4퍼센트의 논리
김기호 서울 대치파인만학원
김대운 대구 중앙SKY학원
김덕한 대전 더칸수학학원
김민수 서울 원수학
김선영 대구 청림수학학원
김성민 부산 직관수학학원
김연일 서울 미래인재학원
김유진 서울 수능수학 전문컨설턴트
김인하 김포 양곡고
김지은 김포 수학학원
김찬규 의왕 올마이티매쓰학원
김태환 대구 로고스 수학학원(침산원)
김혜정 서울 우리샘수학학원
남지혜 부산 수능수학 전문컨설턴트
마지희 고양 이안의학원
문재웅 수원 수학의공간
박경준 용인 수학의준석
박미화 전주 엄쌤수학전문학원
박보경 부산 화명고
박성찬 수원 성찬쌤's 수학의공간
박신태 수원 디엘수학전문학원
박은하 서울 이지매쓰수학학원
박장호 구미 현일고
박재윤 천안 박재윤수학학원
박정일 통영 SM학원
박혜인 양산 참좋은학원
박희수 광주 태전고
배진수 용인 수학의 진수 학원
송지민 창원 석동 지음학원
신영진 전주 유나이츠학원
심재인 김포 현준쌤 수학학원
심혜정 부산 영품수학
안보현 군포 LSE학원
안준석 부산 이든수학교습소
안지환 울산 수능수학 전문컨설턴트
양형준 전주 대들보 수학
원기찬 부산 양운고
유선형 강릉 Pf math
유승준 서울 해볼수학학원
윤성호 서울 혜성코멧학원 의대관
윤혜영 성남 뷰티풀수학
이경미 포천 학원빡쎈
이경민 서울 대치에스학원
이경수 부산 경수학
이경화 의정부 의정부여고
이경효 고양 효수학학원
이상협 인천 마스터수학학원
이상훈 대구 명석수학학원
이영현 파주 대치명인학원
이용희 청주 주성박미숙수학학원
이재선 김해 하이퍼 학원
이재희 대전 집단지성학원
이정민 김해 하이퍼 수학, 영어 전문학원
이준현 구미 진샘제이에스학원
이진희 서울 서준학원
이현웅 서울 웅수학학원
인수진 청주 청주여상
임정혁 김포 하이엔드 수학
임지민 시흥 피타고라스 수학학원
임현아 성남 분당 수이학원
장우희 남양주 서연고학원
장진영 충주 수능수학 전문컨설턴트
전하윤 대전 하몽수학
정다원 광주 인성고
정은경 목포 베스트 수학
정희정 부산 정쌤수학교습소
조용희 부산 최상위수학학원
주기호 창원 비상한수학국어학원
차슬기 고양 브레인리그
차영진 울산 창조적소수수학전문학원
최경락 인천 경서대신학원
최규식 서울 CMS관악영재관
최규종 울산 뉴토모수학전문학원
최동훈 김포 고수학전문학원
최세남 서울 엑시엄수학학원
최영광 대전 우범석영어수학전문학원
최정현 부산 더쎈수학학원
하수민 창원 퀀덤영재학원
한양근 광주 TAP라온학원
현제윤 서울 정명수학학원
홍승원 계룡 The채움수학
홍유미 광주 채홍수학학원

[My Top Secret 집필]

곽지훈 서울대 수학교육과
정서린 서울대 약학과
정호재 서울대 경제학부
황대운 서울대 수리과학부

차 례 [총 140개 유형 분류]

다른 풀이, 쉬운, 톡톡 풀이 대폭 강화

I 함수의 극한과 연속

II 미분

Ⅲ 적분

Special 내신+수능 대비 단원별 모의고사

개념 & 문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널

'수학문제 다깨기'

세분화된 유형 문제 + 서술형 문제 훈련으로 내신 1등급 완성

1 핵심 개념 정리 – 쉽게 이해되는 개념과 공식

고2 수학의 각 단원에서 가장 중요하고 꼭 알아야 하는 개념을 요약 정리하였습니다. 또한, QR코드를 통해 개념과 공식을 쉽게 이해하고 적용할 수 있도록 하였습니다.

- **중요도** ★★★ : 시험에 자주 나오는 개념과 유형의 중요 정도 제시
- +개념보충, 한걸음 더!, 왜 그럴까? : 공식이 유도되는 과정 중 반드시 알아야 하는 내용이나 확장 개념을 제시
- 출제 : 2023 수능과 2024 대비 평가원 기출을 분석하여 출제된 개념과 경향을 제시


A 함수의 극한

개념 강의

중요도

1 좌극한과 우극한 – 유형 01~02

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ (α는 실수)이면 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 α로 같다.

또, 그 역도 성립하므로

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=\alpha$

+개념 보충

① 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하지 않는 경우는

(i) $\lim_{x\to a-} f(x)$의 값이 존재하지 않거나

(ii) $\lim_{x\to a+} f(x)$의 값이 존재하지 않거나

(iii) $\lim_{x\to a-} f(x) \neq \lim_{x\to a+} f(x)$일 때이다.

2 함수의 극한에 대한 성질 – 유형 03, 14~16

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

(1) $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

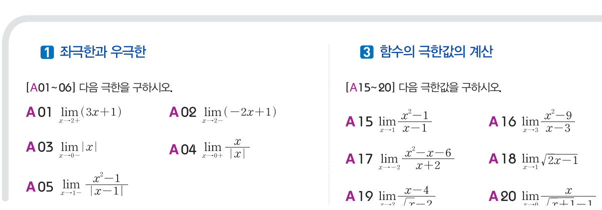
(2) $\lim_{x\to a} \{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\pm\beta$ (복호동순)

한걸음 더!

② 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값은

2 개념 확인 문제 – 개념에 대한 이해도 확인 문제

앞에서 공부한 핵심 개념을 잘 기억하고 있는지, 놓친 것은 없는지 확인할 수 있도록 개념 이해를 위한 필수 문제를 수록하였습니다.


1 좌극한과 우극한

[A01~06] 다음 극한을 구하시오.

A01 $\lim_{x\to 2+}(3x+1)$ A02 $\lim_{x\to 2-}(-2x+1)$

A03 $\lim_{x\to 0-}|x|$ A04 $\lim_{x\to 0+}\frac{x}{|x|}$

A05 $\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

3 함수의 극한값의 계산

[A15~20] 다음 극한값을 구하시오.

A15 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ A16 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

A17 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}$ A18 $\lim_{x\to 5}\sqrt{2x-1}$

A19 A20

NEW 3 내신 유형별 서술형 문제 – 단계별 문제 해결 방법 제시

학교시험에서 출제되는 다양한 서술형 문제를 단계적으로 풀어 나가는 과정을 제시하여 서술형 문제에 대한 자신감을 얻을 수 있게 구성하였습니다.


내신 유형별 서술형 문제

문제에서 단서를 찾고 풀이 방법을 생각해 냅니다!

A169 유형 16

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x+3f(x)}}-\frac{1}{2f(x)}\right\}=-\frac{1}{32}$

일 때, $f(3)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

A171 유형 03

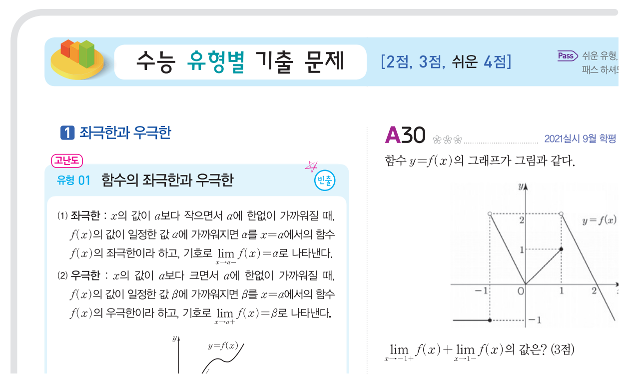
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} h(x)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

- 1st, 2nd, 3rd : 풀이의 시작과 끝을 막힘없이 따라갈 수 있게 도와주는 단계별 접근을 제시하였습니다.

4 유형별 기출 문제 – 유형+개념+난이도에 따른 문제 배열

최신 수능 경향을 꼼꼼히 분석하고 유형을 촘촘하게 세분화하여 유형순, 개념순, 난이도순으로 문항을 배열하였습니다.

- tip : 유형에 따라 다시 한 번 더 상기해야 할 개념과 접근법을 제시하였습니다.
- QR 코드 : 유형별 핵심 문제와 혼자 풀기 어려운 문제의 풀이 과정을 동영상 강의를 통해 한 번 더 학습할 수 있도록 하였습니다.


수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

Pass 쉬운 유형, 패스 하세요

1 좌극한과 우극한

고난도

유형 01 함수의 좌극한과 우극한 빈출

(1) 좌극한 : x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라 하고, 기호로 $\lim_{x\to a-} f(x)=\alpha$로 나타낸다.

(2) 우극한 : x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 가까워지면 β를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라 하고, 기호로 $\lim_{x\to a+} f(x)=\beta$로 나타낸다.

A30 2021실시 9월 학평

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? (3점)

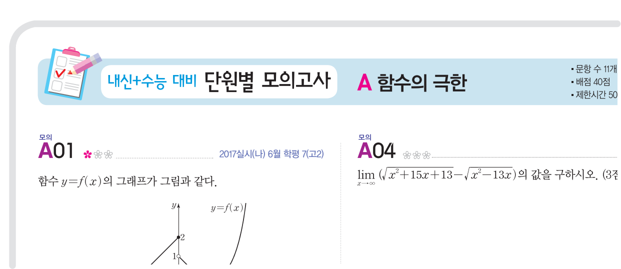
- **유형 분류** : 빈출 – 시험에서 자주 출제되는 유형입니다.
  고난도 – 여러 개념을 복합적으로 묻는 고난도 유형입니다.
- 대표 : 제시된 유형에서 가장 자주 출제되는 대표 유형 문제입니다.

- **난이도** : ✿✿✿ – 기본 문제 ✿✿✿ – 중급 문제
  ✿✿✿ – 중상급 문제
- Pass : 간단한 계산 문제로 출제 흐름만 확인하고 넘어가도 되는 문제입니다.

- 출처표시 : 수능, 평가원 – 대비연도, 학력평가 – 실시연도
  - 2022대비 수능 1(고3) : 2021년 11월에 실시한 수능
  - 2022대비 6월 모평 2(고3) : 2021년 6월에 실시한 평가원
  - 2022실시 4월 학평 3(고3) : 2022년 4월에 실시한 학력평가
  - 2023대비 9월 모평 4(고3) : 2022년 9월에 실시한 평가원

5 내신+수능 대비 단원별 모의고사 – 최종 실력 점검

중단원별 학교시험 필수 문제와 수능형 문항을 종합하여 공부할 수 있습니다. 또한, 서술형 문항도 수록하여 학교시험을 더욱 충실히 대비할 수 있습니다.


내신+수능 대비 단원별 모의고사 A 함수의 극한

• 문항 수 11개 • 배점 40점 • 제한시간 50분

A01 2017실시(나) 6월 학평 7(고2)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

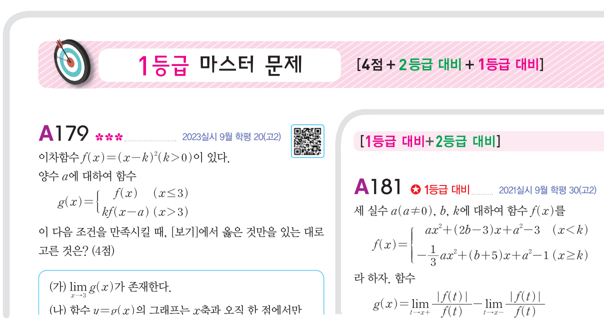
A04

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+15x+13}-\sqrt{x^2-13x})$의 값을 구하시오.

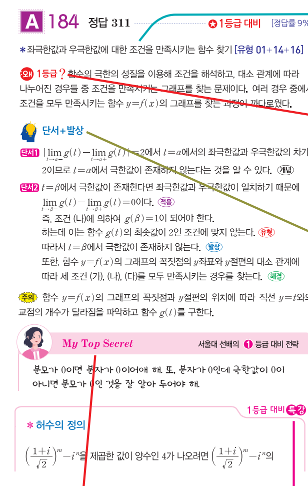
6 1등급 마스터 문제 – 대비 문제로 1등급 대비

1등급을 가르는 변별력 있는 고난도 문제를 엄선하여 별도로 수록하였습니다. 종합적인 사고력과 응용력을 길러서 반드시 수학 1등급을 달성할 수 있도록 구성했습니다.

- ✲✲✲ – 상급 문제
- 2등급 대비 : 정답률이 9~15%인 문제로 1, 2등급으로 발돋움하는 데 도움이 되는 고난도 문제
- 1등급 대비 : 정답률이 9% 미만인 문제로 1등급을 가르는 최고난도 문제



7 1등급 대비 · 2등급 대비 문제 특별 해설



문제 분석
어떤 유형이 1, 2등급 대비 문제로 출제되었는지 알려줍니다.

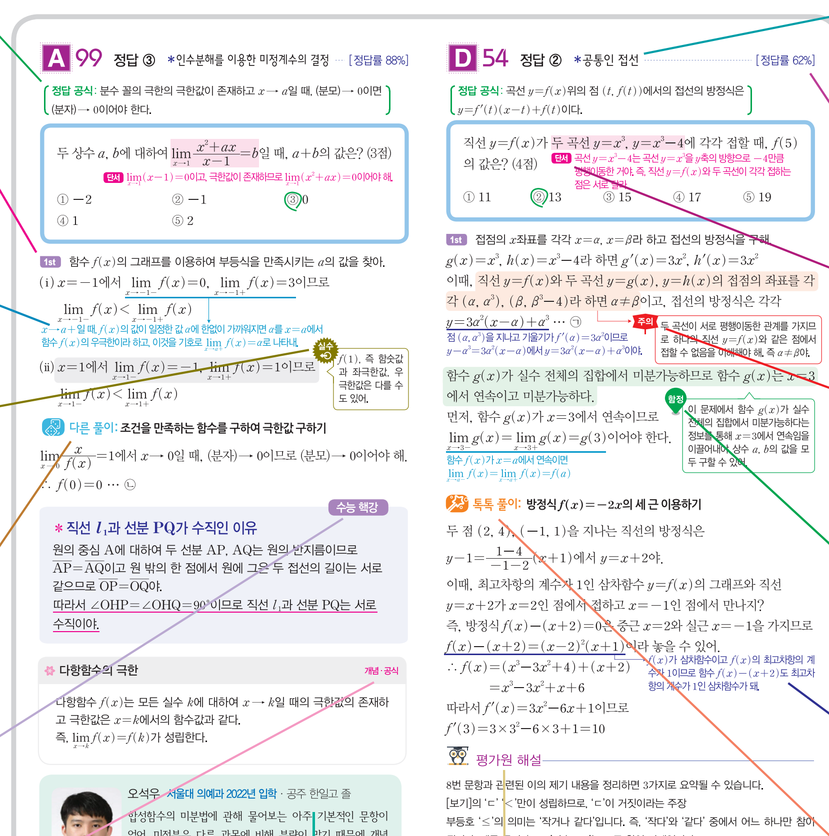
왜 1등급, 왜 2등급
1, 2등급 대비 문제의 핵심 내용과 구하고자 하는 목표를 확실히 알도록 제시해줍니다.

단서+발상
단서 문제 풀이의 핵심이 되는 단서를 꼭 짚어 설명합니다.
개념 문제 풀이에 필요한 개념을 다시 한 번 확인합니다.
유형 숨어 있는 기출 유형을 찾아 설명합니다.
발상 핵심 단서로 문제 풀이 방법을 구체적으로 설명합니다.
적용 생각하기 힘든 개념이나 꼬여 있는 문제의 답을 얻기 위해 적용해야 할 내용입니다.
해결 찾아야 하는 것들을 다 찾은 뒤 공식을 적용하여 해결합니다.

My Top Secret
1, 2등급 대비 문제를 다루는 서울대 선배의 특별 비법을 수록했습니다.

1등급 대비 특강
고난도 문제에서 특별히 알고 있으면 유용한 개념이나 Tip을 제시합니다.

8 입체 첨삭 해설!



정답 공식
출제 의도를 짚어 주고, 문제 속의 숨은 조건을 해석하여 풀이 전략을 세우도록 도와줍니다.

단계별 명쾌 풀이
문제를 푸는 데 요구되는 사고의 순서를 구체화하여 단계를 나누어 제시하였습니다.

해설 적용 공식
해설에 직접적, 간접적으로 사용된 개념, 공식을 보여줍니다.

실수
문제를 푸는 과정이나 잘못된 개념을 적용하는 실수를 지적해 주고 해결의 열쇠를 제공해 주는 코너입니다.

다른 풀이
문제를 풀 때는 다각적으로 사고하는 연습이 필요합니다. 이에 다른 방법으로 문제에 접근할 수 있는 방법을 알려줍니다.

수능 핵강
문제를 조금 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.

개념 공식
문제를 풀기 위해 요구되는 주요 개념과 공식을 정리하였습니다.

생생체험
수능을 먼저 정복한 선배들의 경험이 100% 녹아 있는 실제적인 조언을 담았습니다.

평가원 해설
오답 이의제기된 문항에 대해 평가원 출제 위원들이 요구한 사고 과정을 확인할 수 있습니다.

출제 개념
문제에 적용된 핵심 개념을 제시하여 비슷한 유형이 문제에서 같은 개념을 사용할 수 있도록 하였습니다.

정답률
교육청 자료, 기타 기관 공지 자료와 내부 분석 검토 과정을 거쳐서 제시됩니다.

핵심 단서
문제를 푸는 데 핵심이 되는 단서와 그 단서를 문제 풀이에 적용하는 방법을 설명하였습니다.

주의
풀이 과정에서 주어진 조건을 빠뜨리거나 잘못 이용할 가능성이 있을 때, 적절한 주의를 주어서 올바른 풀이로 나아갈 수 있도록 한 코너입니다.

함정
개념을 정확히 이해하지 못한다면 반드시 빠지게 되어 있는 함정을 체크해 주고 해결할 수 있는 방법을 제시하였습니다.

보충 설명
더욱 정확하고 완벽하게 해설을 이해할 수 있도록 해설에 내재된 내용을 설명하였습니다.

쉬운 풀이, 톡톡 풀이
직관적으로 풀거나, 교육과정 외의 개념 또는 특이한 풀이 방법을 알려줍니다.

문항 배열 및 구성 [1152제]

❶ 개념 이해를 체크할 수 있는 개념 확인 문제 [154제]

개념 하나하나에 대한 맞춤 확인 문제를 제시하여 개념 이해도를 높이고 기초실력을 쌓도록 구성하였습니다.

❷ 고2 최신 6개년 학력평가 기출 문제+수능 유형 완전 정복 문제 [140유형, 문제 774제]

- 고2 학력평가 문항 중에서 새교육과정에 꼭 맞는 문제 선별 수록 [175제]
- 고2 난이도에 맞는 전개년 수능+평가원 문제 선별 수록 [363제]
- 2022~2005 고3 학력평가 기출 문제 중에서 필수 개념 문제 선별 수록 [236제]

❸ 학교시험+새 수능 대비를 위한 수능 기출 변형 문제 [165제]

새 수능에 적합한 개념과 공식을 이해하고 활용할 수 있도록 수능 기출 문제를 변형하여 추가 수록하였습니다.

❹ 서술형 단계별 훈련 – 내신 기출 변형 서술형 문제 [70제]

각 단원 중 서술형 출제 방식에 적합하고 출제 비율이 높은 내신 기출 변형 문제를 새롭게 구성하였습니다.

❺ 내신+수능 단원별 모의고사 [기출 문제+수능 기출 변형 문제 76제]

각 단원에 출제 빈도가 높은 문제를 최신 출제 경향에 따라 구성하였습니다.

[고2 수학Ⅱ 문항 구성표]

	고2(실시 연도)				고3(대비 연도) – 고2 난이도 수준							
연도	3월 학평	6월 학평	9월 학평	11월 학평	3월 학평	4,5월 학평	6월 모평	7월 학평	9월 모평	10월 학평	수능	합계
2023			5		6	7	6	5	6	1	6	42
2022			3	11	6	5	5	5	7	7	6	55
2021			3	10	9	5	5	4	6	5	8	55
2020			3	7		2	6	5	8	2	4	37
2019			6	18			2	5	9	5	9	54
2018		4	18	23		1	8	7	8	7	8	84
2017		3	5	5		4	6	4	6	5	7	45
2016		2	7	11	1	3	8	7	7	6	8	60
2016이전		3	5	12	12	15	75	46	48	35	59	310
2022, 2014, 2005 대비 예비 평가 문항 수												21
수능 기출 변형 문항 수 (140개 유형 수능 기출 변형 문제)												165
개념 확인 문항 수												154
서술형 문항 수												70
총 문항 수												1152

A 함수의 극한

★ 유형 차례

★ 최신 3개년 수능 + 모평 출제 경향

학년도		출제 유형	난이도
2024	수능		
	9월	유형 01 함수의 좌극한과 우극한	❀❀❀
	6월	출제되지 않음	
2023	수능	유형 08 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 – 분수식	❀❀❀
	9월	유형 18 도형의 길이에 대한 극한	✿❀❀
	6월	유형 01 함수의 좌극한과 우극한	❀❀❀
2022	수능	유형 01 함수의 좌극한과 우극한	❀❀❀
	9월	출제되지 않음	
	6월	유형 01 함수의 좌극한과 우극한	❀❀❀
	예시	유형 01 함수의 좌극한과 우극한	❀❀❀

★ 자주 출제되는 필수 개념 학습법

- 그래프를 주고 우극한값 또는 좌극한값을 구하는 문제가 최근 계속해서 출제되고 있으므로 극한, 우극한, 좌극한의 개념을 확실히 알고 있어야 한다.
- 분수식의 극한값이 존재하는 조건에서의 분모와 분자의 미정계수를 결정하는 유형은 출제 가능성이 매우 높은 유형이다. 극한값이 존재하고 분모(또는 분자)가 0으로 다가갈 때, 분자(또는 분모)의 극한값이 어떻게 되는지 꼭 기억하자.
- 두 함수 이상을 사칙연산으로 정의한 함수나 합성함수의 극한값을 구하는 문제는 함수의 극한 단원에서 고난도로 출제될 수 있는 유형으로 극한의 성질, 합성함수의 성질 등을 정확히 파악하고 있어야 문제에 접근할 수 있다. 고1때 배운 함수의 정의를 한 번 더 복습해 놓자.

A 함수의 극한

개념 강의

중요도 ★★○

1 좌극한과 우극한 – 유형 01~02

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ (α는 실수)이면 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 α로 같다.
또, 그 역도 성립하므로

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=\alpha$$[1]

출제 2024 9월 모평 4번

★ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 보고 임의의 x에 값에 대한 함수 $f(x)$의 좌극한값과 우극한값을 구하는 쉬운 문제가 출제되었다. 함수의 우극한과 좌극한에 대한 정의를 알아야 하는 문제였다.

2 함수의 극한에 대한 성질 – 유형 03, 14~16

함수의 극한에 대한 성질은 극한값이 존재할 때만 성립하고 $x\to a+, x\to a-, x\to\infty, x\to-\infty$일 때도 성립한다.

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

(1) $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\pm\beta$ (복호동순)

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

(4) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq 0$, $\beta\neq 0$)

3 함수의 극한값의 계산 – 유형 04~10, 14~16, 18~20

실수 k에 대하여 다항함수 $f(x)$의 $x=k$에서의 극한값은 $x=k$에서의 함숫값 $f(k)$와 같다. 즉, $\lim_{x\to k} f(x)=f(k)$이다.

(1) $\dfrac{0}{0}$ 꼴 : 분자, 분모가 모두 다항식이면 분자, 분모를 각각 인수분해한 다음 약분한다. 분모, 분자 중 무리식이 있으면 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴[2] : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

(3) $\infty-\infty$ 꼴 : 다항식은 최고차항으로 묶고, 무리식은 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(4) $\infty\times 0$ 꼴 : 통분이나 유리화하여 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴 또는 $\dfrac{0}{0}$ 꼴로 변형한다.

출제 2023 수능 2번

★ 분모와 분자의 차수가 같은 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구하는 아주 쉬운 문제가 출제되었다. 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비가 극한값이 됨을 알면 되는 문제였다.

4 미정계수의 결정[3] – 유형 11~13, 16

실수 α와 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때,

(1) $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이다.

(2) $\lim_{x\to a} f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} g(x)=0$이다. (단, $\alpha\neq 0$)[4]

5 함수의 극한과 대소 관계[5] – 유형 17

실수 a와 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여
$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$

+개념 보충

[1] 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하지 않는 경우는
(ⅰ) $\lim_{x\to a-} f(x)$의 값이 존재하지 않거나
(ⅱ) $\lim_{x\to a+} f(x)$의 값이 존재하지 않거나
(ⅲ) $\lim_{x\to a-} f(x)\neq\lim_{x\to a+} f(x)$일 때이다.

한걸음 더!

[2] 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 값은
(1) (분모의 차수)<(분자의 차수)이면 ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.
(2) (분모의 차수)=(분자의 차수)이면 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비로 수렴한다.
(3) (분모의 차수)>(분자의 차수)이면 0으로 수렴한다.

+개념 보충

[3] 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때
(1) $\alpha\neq 0$이면
$\alpha=\dfrac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})}$
이고 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같다.
(2) $\alpha=0$이면 $g(x)$의 차수가 $f(x)$의 차수보다 크다.

왜 그럴까?

[4] $\alpha\neq 0$이라는 조건이 필요하다.
$f(x)=x-1$, $g(x)=x+1$이라 하면
$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)=0$,
$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$
이지만
$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\neq 0$

한걸음 더!

[5] a에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만 $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)$인 경우가 있기 때문에 $f(x)<g(x)$의 양변에 $\lim_{x\to a}$를 취하면 $\lim_{x\to a} f(x)\le\lim_{x\to a} g(x)$이다.

1 좌극한과 우극한

[A01~06] 다음 극한을 구하시오.

A01 $\lim\limits_{x\to 2+}(3x+1)$

A02 $\lim\limits_{x\to 2-}(-2x+1)$

A03 $\lim\limits_{x\to 0-}|x|$

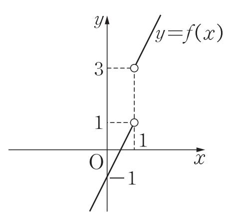
A04 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{|x|}$

A05 $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

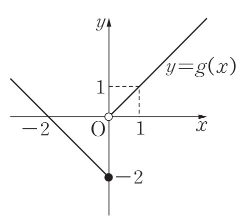
A06 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\ge 0) \\ -x-1 & (x<0)\end{cases}$일 때, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)+\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$

[A07~09] 다음 물음에 답하시오.

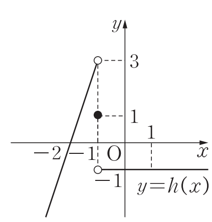
A07 그림과 같은 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)$의 값을 구하시오.



A08 그림과 같은 함수 $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)$의 값을 구하시오.



A09 그림과 같은 함수 $h(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to -1-}h(x)$의 값을 구하시오.



2 함수의 극한에 대한 성질

[A10~14] 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=6$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

A10 $\lim\limits_{x\to 1}8f(x)$

A11 $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}$

A12 $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}$

A13 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)g(x)$

A14 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

3 함수의 극한값의 계산

[A15~20] 다음 극한값을 구하시오.

A15 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

A16 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

A17 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x+2}$

A18 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2x-1}$

A19 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

A20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

[A21~24] 다음 극한값을 구하시오.

A21 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{x+1}$

A22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x^2+3}$

A23 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+2}{3x^2+x+1}$

A24 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4x}-7}$

4 미정계수의 결정

[A25~26] 다음 물음에 답하시오.

A25 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+a}{x+1}$가 수렴할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

A26 두 상수 a, b에 대하여 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{2}x+a}{x-2}=b$를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

5 함수의 극한과 대소 관계

[A27~28] 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$의 값을 구하시오.

A27 $\dfrac{3x^2+1}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{3x+1}{x}$

A28 $x+7<(x+1)f(x)<x+9$

❖ 정답 및 해설 2~3p

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

Pass 쉬운 유형, 반복 계산 문제로 패스 하셔도 좋습니다.

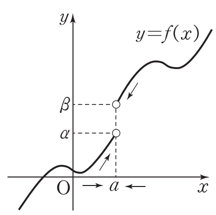
1 좌극한과 우극한

유형 01 함수의 좌극한과 우극한

빈출

(1) **좌극한** : x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라 하고, 기호로 $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\alpha$로 나타낸다.

(2) **우극한** : x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 가까워지면 β를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라 하고, 기호로 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\beta$로 나타낸다.

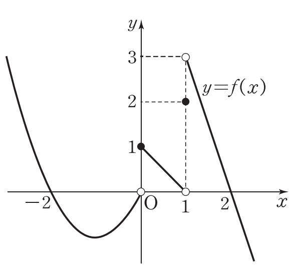


tip

x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x\to a+$와 같이 나타내고, x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x\to a-$와 같이 나타낸다.

A29 대표 .... 2018대비(나) 수능 5(고3)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

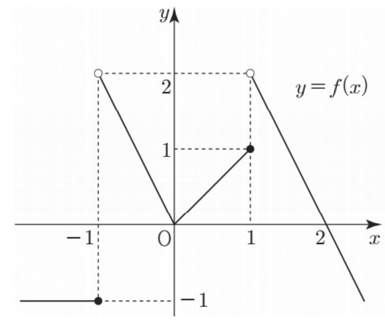


$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A30 .... 2021실시 9월 학평 5(고2)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

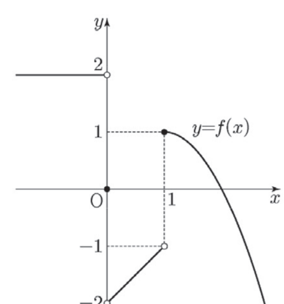


$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$의 값은? (3점)

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

A31 .... 2022대비 5월 예시 4(고2)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)-\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은? (3점)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

내신 유형별 서술형 문제

문제에서 단서를 찾고
풀이 방법을 생각해 냅니다!

A169

유형 16

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x+3f(x)}}-\frac{1}{2f(x)}\right\}=-\frac{1}{32}$$

일 때, $f(3)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st $f(x)=2x^2+ax+b$라 하고 식을 정리한다.

2nd 함수의 극한에 대한 성질을 적용하여 $f(x)$를 구한다.

3rd $f(3)$의 값을 구한다.

A170

유형 16

최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} x-3 & (x\ge 4) \\ -x+2 & (2<x<4) \\ 1 & (x=2) \\ -3x+6 & (x<2) \end{cases}$$

에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x+2)}$와 $\lim_{x\to 4} f(2x-3)g(x)$의 값이 모두 존재할 때, $f(10)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

1st $f(x)=3x^2+ax+b$라 하고 b의 값을 구한다.

2nd $\lim_{x\to 4-} f(2x-3)g(x)=\lim_{x\to 4+} f(2x-3)g(x)$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

3rd $f(10)$의 값을 구한다.

A171

유형 03

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} h(x)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

(가) $\lim_{x\to\infty} x^2f(x)=\frac{1}{3}$

(나) $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=4$

(다) $h(x)=\frac{2g(x)+x^3f(x)}{6g(x)-7x^2f(x)g(x)}$

1st 분모, 분자를 x로 나누어 함수의 극한의 성질을 적용할 수 있는 형태로 $h(x)$의 식을 변형한다.

2nd 함수의 극한의 성질을 이용하여 $\lim_{x\to\infty} h(x)$의 값을 구한다.

A172

유형 16

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\left(\frac{6}{x^2+x+2}-3\right)=-\frac{3}{2}$

1st 함수의 극한의 성질을 이용하여 $f(1)$, $f(0)$의 값을 구한다.

2nd 함수의 극한의 성질을 이용하여 $f(x)$를 결정한다.

3rd $f(2)$의 값을 구한다.

1등급 마스터 문제 [4점 + 2등급 대비 + 1등급 대비]

A179 ★★★ 2023실시 9월 학평 20(고2)

이차함수 $f(x)=(x-k)^2(k>0)$이 있다.
양수 a에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 3) \\ kf(x-a) & (x>3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (4점)

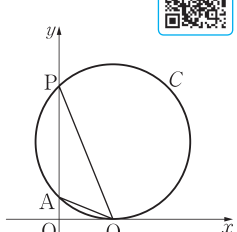
(가) $\lim_{x\to 3} g(x)$가 존재한다.
(나) 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서만 만난다.

[보기]
ㄱ. $f(1)=1$이면 $g(2)=0$이다.
ㄴ. $g(k+a)<g(3)$
ㄷ. $(k-1)(k-2)\ge 0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A180 ★★★ 2015실시(가) 6월 학평 15(고2)

그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(0, 1)$을 지나고 x축에 접하는 원 C가 있다. 원 C가 y축과 만나는 또 다른 점을 P라 하고, x축과 접하는 점을 $\mathrm{Q}(t, 0)$이라 하자. 삼각형 APQ의 넓이를 $S(t)$, 원 C의 반지름의 길이를 $r(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t\times r(t)}$의 값은? (단, $t>1$이다.) (4점)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[1등급 대비+2등급 대비]

A181 1등급 대비 2021실시 9월 학평 30(고2)

세 실수 $a(a\ne 0)$, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+(2b-3)x+a^2-3 & (x<k) \\ -\frac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1 & (x\ge k) \end{cases}$$

라 하자. 함수

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha} f(x)$가 존재한다.
(나) 두 함수 $y=g(x)$와 $y=-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 5이다.

$k=p+q\sqrt{17}$일 때, $16(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) (4점)

A182 2등급 대비 2022실시 9월 학평 29(고2)

양수 m과 0이 아닌 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(a-1)x-a^2+2 & (x\le 2m) \\ -3x+4a & (x>2m) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} ax-a & (x\le m+1) \\ x-a+1 & (x>m+1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\alpha-} f(x)\ne\lim_{x\to\alpha+} f(x)$, $\lim_{x\to\beta-} g(x)\ne\lim_{x\to\beta+} g(x)$인 실수 α, β가 존재한다.
(나) 모든 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재한다.

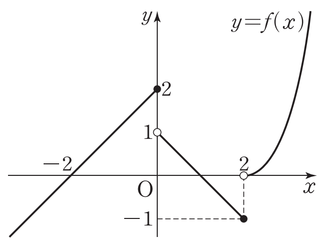
$m+g(a^2)$의 값을 구하시오. (4점)

내신+수능 대비 단원별 모의고사 A 함수의 극한

- 문항 수 11개
- 배점 40점
- 제한시간 50분

모의
A01
2017실시(나) 6월 학평 7(고2)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 2+} f(x)+\lim_{x\to 0-} f(x)$의 값은? (3점)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

모의
A02
2015대비(A) 6월 모평 3(고3)

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$의 값은? (2점)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

모의
A03
2014실시(B) 7월 학평 3(고3)

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$의 값은? (2점)

① 12 ② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

모의
A04

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+15x+13}-\sqrt{x^2-13x})$의 값을 구하시오. (3점)

모의
A05
2006대비(가) 6월 모평 3(고3)

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}=b$(단, $b\neq 0$)가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? (2점)

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

모의
A06
2015실시(나) 9월 학평 13(고2)

이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(4+x)=f(4-x)$를 만족시킨다. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=1$일 때, $f(0)$의 값은? (3점)

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

A 함수의 극한

개념 확인 문제

A 01 정답 7 ······ *좌극한과 우극한

$\lim_{x\to 2+}(3x+1)=3\times2+1=7$

A 02 정답 -3 ······ *좌극한과 우극한

$\lim_{x\to 2-}(-2x+1)=(-2)\times2+1=-3$

A 03 정답 0 ······ *좌극한과 우극한

$\lim_{x\to 0-}|x|=0$

A 04 정답 1 ······ *좌극한과 우극한

$\lim_{x\to 0+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$

A 05 정답 -2 ······ *좌극한과 우극한

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{|x-1|}&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}\\&=-\lim_{x\to 1-}(x+1)=-2\end{aligned}$$

A 06 정답 0 ······ *좌극한과 우극한

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 0-}f(x)&=\lim_{x\to 0+}(x+1)+\lim_{x\to 0-}(-x-1)\\&=1+(-1)=0\end{aligned}$$

A 07 정답 1 ······ *좌극한과 우극한

그림에서 x값이 1보다 작으면서 1에 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1보다 작으면서 1에 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 1-}f(x)=1$

A 08 정답 0 ······ *좌극한과 우극한

그림에서 x값이 0보다 크면서 0에 가까워질 때, $g(x)$의 값은 0보다 크면서 0에 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 0+}g(x)=0$

A 09 정답 3 ······ *좌극한과 우극한

그림에서 x값이 -1보다 작으면서 -1에 가까워질 때, $h(x)$의 값은 3보다 작으면서 3에 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to -1-}h(x)=3$

A 10 정답 -8 ······ *함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to 1}8f(x)=8\lim_{x\to 1}f(x)=8\times(-1)=-8$

A 11 정답 5 ······ *함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 1}g(x)=-1+6=5$

A 12 정답 -7 ······ *함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to 1}f(x)-\lim_{x\to 1}g(x)=-1-6=-7$

A 13 정답 -6 ······ *함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1}f(x)\times\lim_{x\to 1}g(x)=(-1)\times6=-6$

A 14 정답 $-\frac{1}{6}$ ······ *함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to 1}f(x)}{\lim_{x\to 1}g(x)}=\frac{-1}{6}=-\frac{1}{6}$

A 15 정답 2 ······ *함수의 극한값의 계산

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

A 16 정답 6 ······ *함수의 극한값의 계산

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$

A 17 정답 -5 ······ *함수의 극한값의 계산

$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-3)=-5$

A 18 정답 1 ······ *함수의 극한값의 계산

$\lim_{x\to 1}\sqrt{2x-1}=\sqrt{2\times1-1}=1$

A 19 정답 $\sqrt{2}+2$ ······ *함수의 극한값의 계산

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{\sqrt{x}-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}\\&=\sqrt{2}+2\end{aligned}$$

A 20 정답 2 ······ *함수의 극한값의 계산

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}\\&=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)\\&=\sqrt{1}+1=2\end{aligned}$$

A 21 정답 3 ······ *함수의 극한값의 계산

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x+1}=\frac{3}{1}=3$

A 22 정답 $\frac{1}{2}$ ········· *함수의 극한값의 계산

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{2x^2+3}=\frac{1}{2}$

A 23 정답 0 ········· *함수의 극한값의 계산

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{3x^2+x+1}=0$

A 24 정답 3 ········· *함수의 극한값의 계산

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+4x}-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\frac{7}{x}}=\frac{3}{\sqrt{1}}=3$

A 25 정답 1 ········· *미정계수의 결정

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x+a}{x+1}$가 수렴하고 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}(x^2+2x+a)=0$

$1-2+a=0 \qquad \therefore a=1$

A 26 정답 $-\frac{1}{2}$ ········· *미정계수의 결정

$\lim_{x\to2}\frac{\frac{1}{2}x+a}{x-2}=b$로 수렴하고 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{2}x+a\right)=0$

$\frac{1}{2}\times2+a=0 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore b=\lim_{x\to2}\frac{\frac{1}{2}x-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{1}{2}(x-2)}{x-2}=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{1}{2}$

A 27 정답 3 ········· *함수의 극한과 대소 관계

$\frac{3x^2+1}{x^2}\le f(x)\le\frac{3x+1}{x}$

각 변에 $\lim_{x\to\infty}$를 취하면

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}\le\lim_{x\to\infty}f(x)\le\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x}$

여기서 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x}=3$

$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=3$

A 28 정답 1 ········· *함수의 극한과 대소 관계

$x+7<(x+1)f(x)<x+9$

각 변에 $\frac{1}{x+1}$을 곱하면

$\frac{x+7}{x+1}<f(x)<\frac{x+9}{x+1}$

각 변에 $\lim_{x\to\infty}$를 취하면

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{x+1}\le\lim_{x\to\infty}f(x)\le\lim_{x\to\infty}\frac{x+9}{x+1}$

여기서 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{x+1}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x+9}{x+1}=1$

$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=1$

수능 유형별 기출 문제 [2점, 3점, 쉬운 4점]

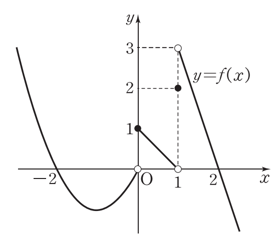
A 29 정답 ③ *함수의 좌극한과 우극한 ········· [정답률 91%]

정답 공식: x가 특정 값에 가까워질 때 함숫값이 가까워지는 값을 그래프에서 찾아본다.

단서1 $x=0$에서의 좌극한값을 찾아.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)$의 값은? (3점)

단서2 $x=1$에서의 우극한값을 찾아.



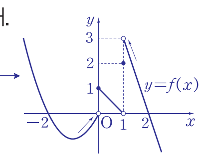
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 각 점에서의 좌극한값과 우극한값을 각각 구해.

$x=0$에서의 좌극한값은 $\lim_{x\to0-}f(x)=0$

$x=1$에서의 우극한값은 $\lim_{x\to1+}f(x)=3$

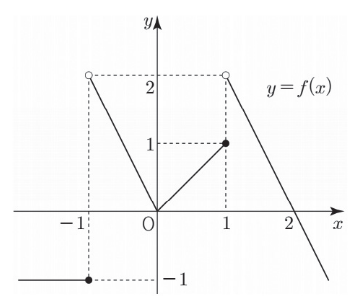
$\therefore \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=0+3=3$



A 30 정답 ⑤ *함수의 좌극한과 우극한 ········· [정답률 98%]

정답 공식: $x\to-1+$는 $x=-1$의 오른쪽에서 그래프를 따라 -1로 접근하는 것이고, $x\to1-$는 $x=1$의 왼쪽에서 그래프를 따라 1로 접근하는 것이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



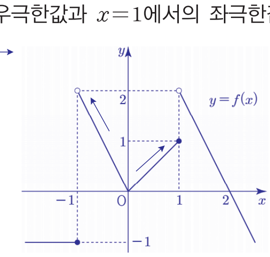
$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)$의 값은? (3점)

단서 그래프를 따라가며 $x=-1$에서의 우극한값과 $x=1$에서의 좌극한값의 합을 구해.

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

1st 그래프를 이용하여 $x=-1$에서의 우극한값과 $x=1$에서의 좌극한값을 찾자.

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=2+1=3$



A 78 정답 ④ * $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산(분수식) …… [정답률 95%]

(**정답 공식**: $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한에서 분모, 분자가 모두 다항식이면 분모, 분자를 각각 인수분해하여 약분한다.)

$\lim_{x\to2}\frac{x^2(x-2)}{x-2}$의 값은? (2점)
단서 $\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한은 분자, 분모를 0으로 만드는 인수를 약분해야 해!

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 분모, 분자를 $x-2$로 나누자.

$\lim_{x\to2}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x^2=4$

분자, 분모를 0으로 만드는 인수 $x-2$를 약분해, $x\neq2$이기 때문에 약분할 수 있어.

A 79 정답 ③ * $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산(분수식) …… [정답률 96%]

(**정답 공식**: $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한은 인수분해한 후 분모, 분자의 공통인수를 약분한다.)

$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}$의 값은? (2점) 단서 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 약분하자.

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

1st 약분한 후 극한값을 계산해.

$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x^2+5)=(-2)^2+5=9$

$x+2$가 분자, 분모의 공통인수이므로 약분하자.

A 80 정답 ③ * $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산(분수식) …… [정답률 95%]

(**정답 공식**: $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한은 인수분해한 후 분모, 분자의 공통인수를 약분한다.)

$\lim_{x\to7}\frac{(x-7)(x+3)}{x-7}$의 값은? (3점) 단서 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 약분하자.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

1st $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한식에서는 분모, 분자의 공통인수를 약분하여 계산하자.

$\lim_{x\to7}\frac{(x-7)(x+3)}{x-7}=\lim_{x\to7}(x+3)=7+3=10$

$x-7$이 분자, 분모의 공통인수이므로 약분하자.

A 81 정답 ① * $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산(분수식) …… [정답률 88%]

(**정답 공식**: $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한은 인수분해한 후 분모, 분자의 공통인수를 약분한다.)

함수 $f(x)=x^2+ax$가 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$를 만족시킬 때, 상수 a의 값은? (3점)
단서 $f(x)$의 식을 직접 대입하여 극한값이 4가 되게 하는 상수 a의 값을 구해야 해.

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

1st $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$에 $f(x)$의 식을 대입하여 a의 값을 구하자.

$x^2+ax=x(x+a)$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(x+a)=a$

$\therefore a=4$

A 82 정답 ③ * $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산(분수식) …… [정답률 71%]

(**정답 공식**: $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한은 인수분해한 후 분모, 분자의 공통인수를 약분한다.)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가
$f(-1)=2,\ f(0)=0,\ f(1)=-2$ 단서1 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓을 수 있어.
를 만족시킬 때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값은? (3점)
단서2 $f(x)$를 인수분해하여 약분해.

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

1st $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓고 $f(x)$의 식을 완성하자.

$f(0)=0$이라 하므로 $f(0)=c=0$ $\quad\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx$

또, $f(-1)=2,\ f(1)=-2$이므로

$f(-1)=-1+a-b=2$에서 $a-b=3$ … ㉠

$f(1)=1+a+b=-2$에서 $a+b=-3$ … ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $a=0,\ b=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x$

2nd $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구하자.

$x^3-3x=x(x^2-3)$이야.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3-3x}{x}=\lim_{x\to0}(x^2-3)=-3$

톡톡 풀이: 방정식 $f(x)=-2x$의 세 근 이용하기

$f(-1)=2,\ f(0)=0,\ f(1)=-2$에서

$f(-1)=-2\times(-1),\ f(0)=-2\times0,\ f(1)=-2\times1$

로 생각하면 방정식 $f(x)=-2x$의 세 근이

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$이야.

이때, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)+2x=x(x+1)(x-1)$에서

삼차방정식 $f(x)-(-2x)=0$, 즉 $f(x)+2x=0$의 세 근이 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$이니까 삼차식 $f(x)+2x$는 $x+1,\ x,\ x-1$을 인수로 갖겠지?

$f(x)=x(x+1)(x-1)-2x$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+1)(x-1)-2x}{x}$

$=\lim_{x\to0}\{(x+1)(x-1)-2\}$

$=-1-2=-3$

$\frac{0}{0}$ 꼴이므로 분모, 분자를 0으로 만드는 인수 x로 분모, 분자를 각각 나눠.

A 83 정답 ⑤ * $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산(무리식) …… [정답률 91%]

(**정답 공식**: 근호가 포함된 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한은 유리화를 이용하여 식을 정리한다.)

$\lim_{x\to2}\frac{3x-6}{\sqrt{x+2}-2}$의 값은? (2점) 단서 분모에 무리식이 있으니까 유리화해야지?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

1st 분모를 유리화하여 식을 정리하자.

$\lim_{x\to2}\frac{3x-6}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$\frac{0}{0}$ 꼴이고 분모에 무리식이 있으니까 유리화하자.

$=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2})^2-2^2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}$

$=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}3(\sqrt{x+2}+2)=3(\sqrt{2+2}+2)=12$

1st $x\to 2$일 때 (분자)$\to 0$이네? 그럼, 분모는?

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=3$ ⋯ ㉠에서

$\lim\limits_{x\to 2}\{x^2-(a+2)x+2a\}=4-2(a+2)+2a=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-b)=4-b=0$ $\quad\therefore b=4$

2nd 구한 b의 값을 주어진 식에 대입해서 a도 구해.

$b=4$를 ㉠에 대입하면

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{\underbrace{x^2-4}_{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-a}{x+2}$

$=\dfrac{2-a}{4}=3$

$2-a=12$ $\quad\therefore a=-10$

$\therefore a+b=-10+4=-6$

A 109 정답 ④

*인수분해를 이용한 미정계수의 결정 ⋯ [정답률 60%]

정답 공식: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=0$인 경우와 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)\neq 0$인 경우로 나누어 $f(a)$의 값을 추론한다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

단서 주어진 식의 값이 $\frac{3}{5}$이 되기 위한 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값을 결정해 봐.

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) (4점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 주어진 극한값이 $\frac{3}{5}$임을 이용하여 다항식 $f(x)$의 인수를 확인해 보자.

0이 아닌 상수 k에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=k$라 하면

이차함수 $f(x)$는 임의의 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 항상 존재해.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}(x-a)}{\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}(x-a)}$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$일 때, $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha\pm\beta$(복호동순)

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq 0$, $\beta\neq 0$)

$=\dfrac{k-(a-a)}{k+(a-a)}$

$=1\neq\dfrac{3}{5}$

따라서 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이어야 하므로 $f(a)=0$이다. 즉, 방정식 $f(x)=0$의 한 실근이 $x=a$이므로 $\alpha=a$라 하면 $f(x)=(x-a)(x-\beta)$ ⋯ ㉠

라 놓을 수 있다.

방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$에서 $f(x)=(x-a)(x-\beta)$

주의 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수면서 주어진 식을 $\frac{0}{0}$ 꼴이 되게 해야 해.

2nd $|\alpha-\beta|$의 값을 구하자.

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x-\beta)-(x-a)}{(x-a)(x-\beta)+(x-a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x-\beta-1)}{(x-a)(x-\beta+1)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-\beta-1}{x-\beta+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}(x-\beta-1)}{\lim\limits_{x\to a}(x-\beta+1)}=\dfrac{a-\beta-1}{a-\beta+1}=\dfrac{3}{5}$

$5(a-\beta)-5=3(a-\beta)+3$, $2(a-\beta)=8$

$a-\beta=4$ $\quad\therefore|\alpha-\beta|=4$

A 110 정답 15

*인수분해를 이용한 미정계수의 결정 ⋯ [정답률 87%]

정답 공식: 분수 꼴의 극한의 극한값이 존재하고 $x\to a$일 때, (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이어야 한다.

두 상수 a, b에 대하여 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-3}=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (3점)

단서 극한값이 존재해야 하고 $x\to 9$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 해.

1st 극한값이 존재하도록 a의 값부터 결정해.

$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-3}=b$에서 $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}-3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 9}(x-a)=0$이어야 한다.

즉, $9-a=0$이므로 $a=9$이다.

2nd a의 값을 주어진 극한식에 대입하여 b의 값을 구해.

$\therefore\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}+3)=6=b$

근호가 포함된 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한은 근호가 있는 쪽을 유리화하여 계산해.

따라서 $a=9$, $b=6$이므로 $a+b=15$

다른 풀이: $x-9$를 인수분해하여 해결하기

$x-9$를 인수분해하여 해결하는 게 더 편리해.

$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)}=\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}+3)=6=b$

(이하 동일)

A 111 정답 ②

*유리화를 이용한 미정계수의 결정 ⋯ [정답률 81%]

정답 공식: 분수 꼴의 극한의 극한값이 존재하고 $x\to a$일 때, (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이어야 한다.

두 상수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-1}=b$$

단서 주어진 극한이 수렴하고 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+a}-2)=0$이어야 해.

일 때, $a+4b$의 값은? (3점)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

1st 분모가 0으로 수렴함을 이용하여 a의 값을 구해.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+a}-2}{x-1}=b$에서 $x\to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다. 즉, $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+a}-2)=0$에서

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$($c$는 실수)이고 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이야.

$\sqrt{1+a}-2=0$, $\sqrt{1+a}=2$, $1+a=4$ $\quad\therefore a=3$

2nd b의 값을 구하고 $a+4b$의 값을 계산해.

$a=3$을 주어진 극한식에 대입하면

$b=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

유리화를 이용하여 극한값을 구해야겠지?

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+3}+2}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore a+4b=3+4\times\dfrac{1}{4}=4$

A 153 정답 ② *길이에 대한 극한의 활용 [정답률 70%]

정답 공식: 세 점 A, C, H의 좌표를 구한 후 $\overline{\mathrm{AH}}$, $\overline{\mathrm{CH}}$를 t에 대한 식으로 나타내어 극한식에 대입한다.

실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이

단서1 직선과 곡선의 식을 연립하여 두 점 A, B의 좌표를 t에 대한 식으로 나타내봐.

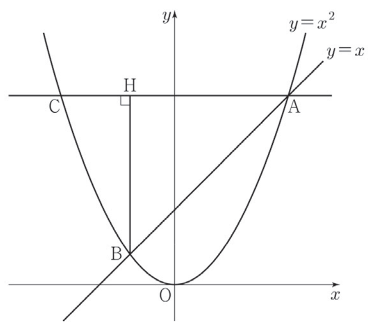
곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분

단서2 점 C는 점 A와 y좌표가 같고, 점 H는 점 B와 x좌표가 같아.

AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은?

(단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) (4점)

단서3 $\overline{\mathrm{AH}}$, $\overline{\mathrm{CH}}$를 t에 대한 식으로 나타내고, 극한값을 구해.



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st $\overline{\mathrm{AH}}$, $\overline{\mathrm{CH}}$를 t에 대한 식으로 나타내.

두 점 A, B의 x좌표는 각각 방정식 $x^2=x+t$의 두 실근이므로
이차방정식 $x^2-x-t=0$의 근을 구하면

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-t)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{1+4t}}{2}$$

즉, 점 A의 x좌표는 $\dfrac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$, 점 B의 x좌표는 $\dfrac{1-\sqrt{1+4t}}{2}$이다.

$t>0$이므로 $\dfrac{1+\sqrt{1+4t}}{2}>0$, $\dfrac{1-\sqrt{1+4t}}{2}<0$이야.

따라서 점 A의 x좌표가 양수라 했으므로 점 A의 x좌표가 $\dfrac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$가 되는 거야.

이때, $x=\dfrac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$를 $y=x+t$에 대입하면

$$y=\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}+t=\frac{1+2t+\sqrt{1+4t}}{2}\text{이므로}$$

$\mathrm{A}\left(\dfrac{1+\sqrt{1+4t}}{2},\ \dfrac{1+2t+\sqrt{1+4t}}{2}\right)$이다.

한편, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$y=\dfrac{1+2t+\sqrt{1+4t}}{2}$이므로

$\mathrm{C}\left(\dfrac{-1-\sqrt{1+4t}}{2},\ \dfrac{1+2t+\sqrt{1+4t}}{2}\right)$,

곡선 $y=x^2$은 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=x^2$과 x축에 평행한 직선이 만나는 두 점 A, C의 x좌표는 절댓값이 같고 부호는 반대야. 또, y좌표는 같아.

$\mathrm{H}\left(\dfrac{1-\sqrt{1+4t}}{2},\ \dfrac{1+2t+\sqrt{1+4t}}{2}\right)$이다.

점 H의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같고, y좌표는 점 A의 y좌표와 같아.

따라서 $\overline{\mathrm{AH}}$, $\overline{\mathrm{CH}}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}-\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}=\sqrt{1+4t}$$

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}-\frac{-1-\sqrt{1+4t}}{2}=1$$

2nd $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값을 구해.

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$

$\dfrac{0}{0}$ 꼴이고 분자에 무리식이 포함되어 있으므로 분자를 유리화해야 해.

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(1+4t)-1}{t(\sqrt{1+4t}+1)}=\lim_{t\to 0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

쉬운 풀이: 이차방정식의 근과 계수의 관계 이용하기

곡선 $y=x^2$ 위의 두 점 A, B의 좌표를 각각
$\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ $(a>0,\ b<0)$이라 하자.
두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $x^2=x+t$의 두 근이므로
이차방정식 $x^2-x-t=0$의 두 근이 a, b야. 즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=1$, $ab=-t$야.
한편, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=a^2$이고,
점 H의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로 $\mathrm{H}(b,\ a^2)$이야.

$\therefore \overline{\mathrm{AH}}=a-b=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$
$=\sqrt{1+4t}$

함정 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$를 이용하면 $a-b$의 값을 구할 수 있으므로 이차방정식의 해를 직접 구하지 않고 근과 계수의 관계를 이용하여 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있어.

또한, 점 C의 좌표가 $\mathrm{C}(-a,\ a^2)$이므로

점 C의 x좌표는 방정식 $x^2=a^2$의 음수인 해인 $-a$야.

$\overline{\mathrm{CH}}=b-(-a)=a+b=1$
(이하 동일)

A 154 정답 ② *도형의 길이에 대한 극한 [정답률 48%]

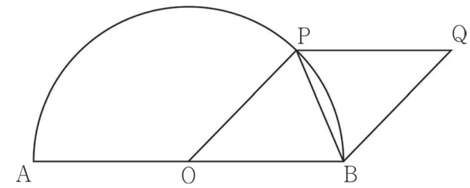
정답 공식: 원의 성질과 피타고라스 정리 등을 이용하여 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후 $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한을 계산한다.

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 선분 AB의 중점 O가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선과 점 B를 지나고 직선 OP와 평행한 직선이 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{BP}}=t$라 할 때,

단서1 사각형 OBQP는 평행사변형이야.

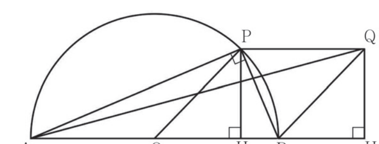
$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{3-\overline{\mathrm{AQ}}}{t^2}$의 값은? (단, $0<t<\sqrt{2}$) (4점)

단서2 $\overline{\mathrm{AQ}}$를 t에 관한 식으로 나타내어야 해.



① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

1st $\overline{\mathrm{AQ}}$를 t에 대한 식으로 나타내자.



내신 유형별 서술형 문제

A 169 정답 12 *함수의 극한을 이용한 다항함수의 결정 · [정답률 60%]

정답 공식: $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha\neq0$이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

단서1 $f(x)=2x^2+ax+b$

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x+3}f(x)}-\frac{1}{2f(x)}\right\}=-\frac{1}{32}$$

단서2 $\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x+3}f(x)}-\frac{1}{2f(x)}\right\}$은 수렴해.

일 때, $f(3)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

단서3 a, b의 값을 구하면 $f(3)$을 구할 수 있어.

단서+발상

단서1 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로 함수 $f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 둘 수 있다. 적용

단서2 극한값이 존재하므로 식을 정리하여 함수의 극한에 대한 성질을 적용할 수 있다. 발상

단서3 $f(x)$가 결정되면 $f(3)$을 계산할 수 있다. 극한의 성질을 적용하여 a, b의 값을 결정하여 $f(3)$의 값을 구할 수 있다. 적용

[문제 풀이 순서]

1st 함수 $f(x)=2x^2+ax+b$라 하고 식을 정리하자.

$f(x)=2x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면

→ $f(x)$가 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $f(x)$의 이차항의 계수는 2야.

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{2x^2+ax+b}\times\frac{2-\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{2x^2+ax+b}\times\frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{2\sqrt{x+3}\times(2+\sqrt{x+3})}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{2x^2+ax+b}\times\frac{-(x-1)}{2\sqrt{x+3}\times(2+\sqrt{x+3})}\right\}=-\frac{1}{32}$$

즉, $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(2x^2+ax+b)\times2\sqrt{x+3}\times(2+\sqrt{x+3})}=\frac{1}{32}$

2nd 함수의 극한에 대한 성질을 적용하여 $f(x)$를 구하자.

$x\to1$일 때 (분자)$\to0$이고,

극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

→ $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha\neq0$이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to1}(2x^2+ax+b)=0$에서

$2+a+b=0$ $\therefore b=-a-2$

$$\lim_{x\to1}\left\{\frac{x-1}{(2x^2+ax+b)\times2\sqrt{x+3}\times(2+\sqrt{x+3})}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x-1}{(2x^2+ax-a-2)\times2\sqrt{x+3}\times(2+\sqrt{x+3})}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x-1}{(x-1)(2x+a+2)\times2\sqrt{x+3}\times(2+\sqrt{x+3})}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{(2x+a+2)\times2\sqrt{x+3}\times(2+\sqrt{x+3})}\right\}$$

$$=\frac{1}{(4+a)\times4\times4}=\frac{1}{32}$$

이므로 $a=-2$, $b=0$

3rd $f(3)$의 값을 구하자.

$f(x)=2x^2-2x$이므로 $f(3)=2\times3^2-2\times3=12$

[채점 기준표]

1st	$f(x)=2x^2+ax+b$라 하고 식을 정리한다.	4점
2nd	함수의 극한의 성질을 이용하여 $f(x)$를 구한다.	5점
3rd	$f(3)$의 값을 구한다.	1점

다른 풀이: $\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x+3}f(x)}-\frac{1}{2f(x)}\right\}=-\frac{1}{32}$에서 $f(1)=0$임을 곧바로 알기

만일 $f(1)\neq0$이면

$$\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x+3}f(x)}-\frac{1}{2f(x)}\right\}=\frac{1}{\sqrt{1+3}f(1)}-\frac{1}{2f(1)}=0$$

이므로 이는 조건에 모순이다. 따라서 $f(1)=0$이므로

$f(x)=2(x-1)(x-a)$(a는 상수)라 할 수 있어.

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}f(x)}-\frac{1}{2f(x)}=\frac{1}{f(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{f(x)}\times\frac{-(x-1)}{2\sqrt{x+3}\times(2+\sqrt{x+3})}$$

$$=\frac{1}{2(x-a)}\times\frac{-1}{2\sqrt{x+3}\times(2+\sqrt{x+3})}$$

이므로 $\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x+3}f(x)}-\frac{1}{2f(x)}\right\}=-\frac{1}{32}$에서

$$\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{2(x-a)}\times\frac{-1}{2\sqrt{x+3}\times(2+\sqrt{x+3})}\right\}$$

$$=\frac{1}{2(1-a)}\times\frac{-1}{4\times4}=-\frac{1}{32}$$

$1-a=1$

$\therefore a=0$

따라서 $f(x)=2x(x-1)$이므로

$f(3)=12$야.

A 170 정답 150 *함수의 극한을 이용한 다항함수의 결정 · [정답률 55%]

정답 공식: $\lim_{x\to c-}f(x)=a$, $\lim_{x\to c+}f(x)=b$이고 $a=b$이면 $\lim_{x\to c}f(x)$는 수렴한다.

단서1 $f(x)=3x^2+ax+b$

최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}x-3 & (x\geq4)\\-x+2 & (2<x<4)\\1 & (x=2)\\-3x+6 & (x<2)\end{cases}$$

단서2 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x+2)}$와 $\lim_{x\to4}f(2x-3)g(x)$는 수렴해.

에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x+2)}$와 $\lim_{x\to4}f(2x-3)g(x)$의 값이 모두 존재할 때, $f(10)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (10점)

단서3 a, b 값을 구하면 $f(10)$을 구할 수 있어.

단서+발상

단서1 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 함수 $f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 둘 수 있다. 적용

단서2 극한값이 존재하므로 함수의 극한에 대한 성질을 적용할 수 있다. 개념

함수의 극한에 대한 성질을 적용하여 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값을 구할 수 있다. 발상

$\lim_{x\to4-}f(2x-3)g(x)=\lim_{x\to4+}f(2x-3)g(x)$이어야 한다. 개념

단서3 $f(x)$가 결정되면 $f(10)$을 계산할 수 있다. 발상

극한의 성질에 의하여 a, b의 값을 결정하여 $f(10)$의 값을 구할 수 있다. 해결

3rd $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하자.

따라서 $f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$이고,

$f(a-x)=\underline{-p(x+1)(x-1)(x-3)}=-f(x)$에서

$f(a-x)=-p(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$ 에서 $a=2,\ q=-1$을 대입한 거야.

$g(x)=|f(x)f(a-x)|$

$=|f(x)\times\{-f(x)\}|=\{f(x)\}^2$이므로

$$\frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\frac{\{f(8)\}^2}{f(0)\times f(8)}=\frac{f(8)}{f(0)}$$

$$=\frac{p\times 9\times 7\times 5}{p\times 1\times(-1)\times(-3)}$$

$$=105$$

1등급 대비 특강

＊ 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 조건

삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=0,\ f(3)=0$이므로 인수정리에 의해 $f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$ ($p,\ q$는 상수, $p\neq 0$)라 할 수 있다. 그러면 $f(a-x)=p(a-x-1)(a-x-3)(a-x-q)$라 할 수 있고, 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $f(x)f(a-x)$는 $(x-1)^2,\ (x-3)^2,\ (x-q)^2$을 인수로 가져야 한다.

My Top Secret 서울대 선배의 1 등급 대비 전략

다항함수에 대하여 절댓값 기호를 사용한 함수가 절댓값 기호 안을 0으로 만드는 점에서 미분가능하면 절댓값 기호를 사용하기 전의 원래의 함수의 그래프는 그 점에서 x축에 접해.

그리고 함수의 그래프가 $x=a$인 점에서 x축에 접하면 이 함수는 반드시 $(x-a)^2$을 인수로 가져.

이와 같은 내용은 미분가능에 관한 고난도 문제에 자주 사용되는 개념이므로 꼭 기억하도록 해.

C 162 정답 ② ✪2등급 대비 [정답률 29%]

＊복잡하게 정의된 함수가 미분가능하도록 하는 함수값의 최댓값 구하기

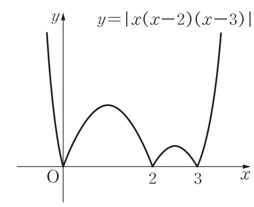
[유형 14+17]

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? (4점)

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $0,\ 2,\ 3$뿐이다.

(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

단서 $f(x)$는 사차함수이므로 방정식 $f(x)=0$의 실근은 중근을 포함하여 4개를 가질 수 있는데 실근이 $0,\ 2,\ 3$뿐이므로 방정식 $f(x)=0$은 $x=0,\ x=2,\ x=3$ 중에 하나만을 중근으로 가져야 해.



① $\dfrac{7}{6}$　② $\dfrac{4}{3}$　③ $\dfrac{3}{2}$　④ $\dfrac{5}{3}$　⑤ $\dfrac{11}{6}$

왜 2등급? 이 문제는 임의의 사차함수와 절댓값이 포함된 함수 중 크지 않은 값을 새로운 함수로 정의하여 이 함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 임의의 사차함수를 구하는 문제이다.

두 함수 중 크지 않은 값이 $g(x)$이므로 $g(x)$는 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=|x(x-2)(x-3)|$의 교점에서 미분가능하지 않을 수 있음을 알고 이 점에서 함수 $g(x)$가 미분가능하도록 함수 $f(x)$를 결정하는 과정이 복잡하다.

단서+발상

단서 방정식 $f(x)=0$은 $0,\ 2,\ 3$을 실근으로 가지므로 다항식 $f(x)$는 $x(x-2)(x-3)$으로 나누어떨어진다. 개념

이때, $f(x)$는 사차함수이므로 $f(x)$를 $x(x-2)(x-3)$으로 나눈 몫은 일차식이고 최고차항의 계수는 음수이므로 양수 k에 대하여 몫인 일차식을 $-k(x-\alpha)$라 할 때, $f(\alpha)=0$이고 $f(x)=0$의 실근은 $0,\ 2,\ 3$ 뿐이므로 α는 $0,\ 2,\ 3$ 중 하나이다. 발상

이제, α의 값에 따라 경우를 나누어 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 조건을 구해야 한다. 이때, $|x(x-2)(x-3)|\geq 0$이므로 $f(x)<0$인 x에 대하여 $g(x)=f(x)$이므로 이 x에서 함수 $g(x)$는 미분가능하다. 즉, $f(x)\geq 0$인 x에서 함수 $g(x)$가 미분가능하도록 k의 값의 범위를 구하면 된다. 적용

주의 어떤 함수가 구간에 따라 서로 다른 미분가능한 함수로 정의되어 있을 때 그 함수는 구간이 나누어지는 점에서 미분가능하지 않을 수 있다. 즉, 어떤 함수의 미분가능성은 구간이 나누어지는 점에서만 확인해 주면 된다.

핵심 정답 공식: 사차함수가 실근을 3개 가진다는 것은 한 실근이 중근이라는 의미이다. 이때, 사차방정식 $f(x)=0$의 실근이 $0,\ 2,\ 3$뿐이므로 $x=0$이 중근일 때, $x=2$가 중근일 때, $x=3$이 중근일 때의 경우로 나누어 함수 $f(x)$를 생각한다.

[문제 풀이 순서]

1st 조건 (가)를 만족시키는 사차함수를 모두 구하자.

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=0$의 실근이 $0,\ 2,\ 3$뿐이므로 양수 k에 대하여 가능한 $f(x)$는 다음과 같이 세 가지이다.

$f(x)=-kx^2(x-2)(x-3)$ → 방정식 $f(x)=0$이 $x=0$을 중근으로 가질 때야.

$f(x)=-kx(x-2)^2(x-3)$ → 방정식 $f(x)=0$이 $x=2$를 중근으로 가질 때야.

$f(x)=-kx(x-2)(x-3)^2$ → 방정식 $f(x)=0$이 $x=3$을 중근으로 가질 때야.

실수 사차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 실근이 3개이므로 세 근 중 하나는 중근이니까 사차함수 $f(x)$의 식을 세 가지로 가정해봐야 해!

2nd 각 사차함수 $f(x)$가 조건 (나)를 만족시킬 때의 $f(1)$의 값을 구하자.

$$h(x)=|x(x-2)(x-3)| = \begin{cases} x(x-2)(x-3) & (0\le x\le 2 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ -x(x-2)(x-3) & (x<0 \text{ 또는 } 2<x<3) \end{cases}$$

이라 하면 → [곱의 미분법] $y=fgh$이면 $y'=f'gh+fg'h+fgh'$

$$h'(x)=\begin{cases} (x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2) & (0<x<2 \text{ 또는 } x>3) \\ -(x-2)(x-3)-x(x-3)-x(x-2) & (x<0 \text{ 또는 } 2<x<3) \end{cases}$$

이고 각 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(1)$의 값을 구하자.

(i) $f(x)=-kx^2(x-2)(x-3)$일 때

$f'(x)=-2kx(x-2)(x-3)-kx^2(x-3)-kx^2(x-2)$이고

$x\le 2$에서 $f(x)\le 0$이므로 $x\le 2$에서 $g(x)=f(x)$이다.

즉, $x<2$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하다.

한편, $2<x<3$에서 $f(x)>0$이고 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하려면 $\lim_{x\to 2-} f'(x) \le \lim_{x\to 2+} h'(x)$가 성립해야 하므로

$\lim_{x\to 2-} f'(x) > \lim_{x\to 2+} h'(x)$이면 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 2) \\ h(x) & (x>2) \end{cases}$가 되므로 $x=2$에서 미분가능하지 않아.

$4k\le 2 \quad \therefore 0<k\le \frac{1}{2}$ $(\because k>0)$

이때, $f(1)=-2k$이므로

$-1\le f(1)=-2k<0$이다.

(ii) $f(x)=-kx(x-2)^2(x-3)$일 때

$f'(x)=-k(x-2)^2(x-3)-2kx(x-2)(x-3)-kx(x-2)^2$

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$x=0$에서 미분가능해야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0-} f'(x) \le \lim_{x\to 0+} h'(x)$가 성립해야 하므로

$12k\le 6 \quad \therefore 0<k\le \frac{1}{2}$ $(\because k>0)$

주의 사차함수 $f(x)$의 최고차항 계수는 음수라 했고 이걸 $-k$로 잡았으니 $k>0$ 이어야겠지?

이때, $f(1)=2k$이므로

$0<f(1)=2k\le 1$이다.

(iii) $f(x)=-kx(x-2)(x-3)^2$일 때

$f'(x)=-k(x-2)(x-3)^2-kx(x-3)^2-2kx(x-2)(x-3)$

이고 $x\le 0$, $x\ge 2$에서 $f(x)\le 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x<0$, $x>2$에서 미분가능하다.

한편, $0<x<2$에서 $f(x)>0$이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$, $x=2$에서 미분가능해야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0-} f'(x) \le \lim_{x\to 0+} h'(x)$, $\lim_{x\to 2-} f'(x) \le \lim_{x\to 2+} h'(x)$가 성립해야 하므로

$18k\le 6$, $-2k\le 2$

$\therefore 0<k\le \frac{1}{3}$

이때, $f(1)=4k$이므로

$0<f(1)=4k\le \frac{4}{3}$

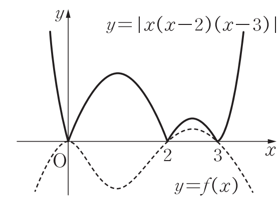
(i)~(iii)에 의하여 $f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$이다.

1등급 대비 특강

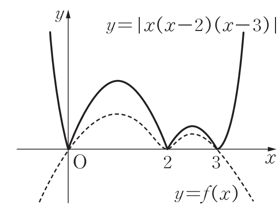
* 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 그림과 같아야 해.

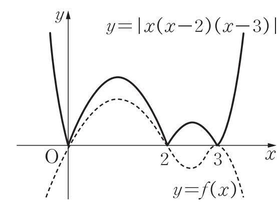
(i) $f(x)=-kx^2(x-2)(x-3)$일 때,



(ii) $f(x)=-kx(x-2)^2(x-3)$일 때,



(iii) $f(x)=-kx(x-2)(x-3)^2$일 때,



My Top Secret 서울대 선배의 1 등급 대비 전략

해설의 풀이와 같이 함수 $g(x)$를 수식으로 표현하여 미분가능성을 판단하기 어려울 수 있어. 이런 경우 함수의 그래프를 그려 미분가능하려면 그래프가 매끄럽게 연결되어야 함을 바탕으로 해결할 수 있지.

이 문제에서는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 함수 $y=g(x)$의 그래프를 유추할 수 있고, 함수 $g(x)$가 미분가능하기 위한 조건을 구할 수 있어.

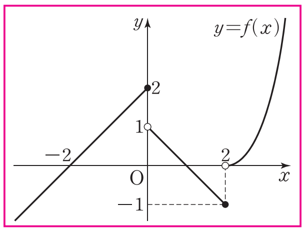
A 내신+수능 대비 단원별 모의고사

문제편 p. 220

모의
A 01 정답 ⑤ *함수의 좌극한과 우극한 [정답률 93%]

정답 공식: x가 특정 값에 가까워질 때 함숫값이 가까워지는 값을 그래프에서 찾아본다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



단서 x가 2보다 큰 쪽에서 2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 어디로 가까워지는지 살펴보고 또, x가 0보다 작은 쪽에서 0에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 어디로 가까워지는지 살펴보자.

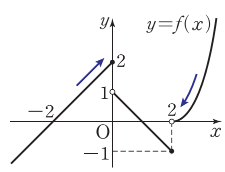
$\lim_{x\to 2+} f(x)+\lim_{x\to 0-} f(x)$의 값은? (3점)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

1st 주어진 $x=2$에서의 우극한값과 $x=0$에서의 좌극한값을 각각 구해 봐.

$\underbrace{\lim_{x\to 2+} f(x)=0}_{x=2\text{에서의 우극한값}}$, $\underbrace{\lim_{x\to 0-} f(x)=2}_{x=0\text{에서의 좌극한값}}$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)+\lim_{x\to 0-} f(x)=2$



모의
A 02 정답 ③ *$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산(분수식) [정답률 95%]

정답 공식: 분모와 분자가 모두 다항식인 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한은 공통인수를 약분하여 극한 값을 구한다.

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$의 값은? (2점) 단서 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 약분하자.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 주어진 식을 약분해.

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$

$x-2$가 분자, 분모의 공통인수이므로 약분하자.

모의
A 03 정답 ② *$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산(무리식) [정답률 92%]

정답 공식: 근호가 포함된 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한은 유리화를 이용하여 식을 정리한다.

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$의 값은? (2점) 단서 $\frac{0}{0}$ 꼴이고 분모에 무리식이 보이니까 유리화를 해야겠지?

① 12 ② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

1st (분모) → 0, (분자) → 0임을 확인하고 분모를 유리화하여 극한값을 계산해.

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$, (분자)$\to 0$이고 분모에 $\sqrt{\ }$가 있으므로 분모를 유리화하자.

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$x^2-4=(x-2)(x+2)$로 인수분해가 되고 $\sqrt{x+2}-2$를 유리화하여 분모, 분자에 $x-2$를 약분하면 0이 되는 인수가 없어지게 돼.

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2})^2-2^2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)=4\times(\sqrt{2+2}+2)=16$

모의
A 04 정답 14 *$\infty-\infty$ 꼴의 극한 [정답률 90%]

정답 공식: $\infty-\infty$ 꼴의 극한에서 근호를 포함한 경우 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+15x+13}-\sqrt{x^2-13x})$의 값을 구하시오. (3점)

단서 근호가 포함된 $\infty-\infty$ 꼴의 극한이지? 유리화하여 극한값을 구해.

1st $\infty-\infty$ 꼴이니까 유리화하여 계산해.

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+15x+13}-\sqrt{x^2-13x})$

분모, 분자에 $\sqrt{x^2+15x+13}+\sqrt{x^2-13x}$를 곱해서 분자를 유리화한 거야.

$=\lim_{x\to\infty}\frac{28x+13}{\sqrt{x^2+15x+13}+\sqrt{x^2-13x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{28+\frac{13}{x}}{\sqrt{1+\frac{15}{x}+\frac{13}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{13}{x}}}$

분모의 최고차항인 x로 분모, 분자를 나누어 계산해야 해.

$=\frac{28}{1+1}=14$

모의
A 05 정답 ③ *인수분해를 이용한 미정계수의 결정 [정답률 82%]

정답 공식: 분수 꼴의 극한의 극한값이 존재하고 $x\to a$일 때, (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}=b$(단, $b\neq 0$)가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? (2점) 단서 $x\to 2$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이어야 해.

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

1st $x\to 2$일 때 (분자)$\to 0$, $b\neq 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 해.

$\lim_{x\to 2}(x^2+ax)=0$에서 $4+2a=0$

$\therefore a=-2$ ⋯ ㉠

2nd 약분이 되는 것은 약분을 하고 나머지 식을 가지고 극한값을 구해.

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}$

$x-2$가 분자, 분모의 공통인수이므로 약분하자.

$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=\frac{2+2}{2}=2=b$

$\therefore a+b=(-2)+2=0$