차례

I-1 다항식의 연산

01 단항식과 다항식

▸ p.10~12

01 답 ○

02 답 ×

주어진 식에 대하여 동류항을 정리했는데도, 덧셈으로 연결되어 있는 항이 2개 이상이므로 단항식이 아니다.

03 답 ○

04 답 ×

근호 안에 문자가 있는 식은 다항식이 아니므로 단항식이 아니다.

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ×

분모에 문자가 있는 식은 다항식이 아니므로 단항식이 아니다.

08 답 ○

09 답 ○

10 답 ○

11 답 ○

12 답 ○

13 답 ×

분모에 문자가 있는 식은 다항식이 아니다.

14 답 ×

근호 안에 문자가 있는 식은 다항식이 아니다.

수력 UP

수나 문자가 들어 있다고 다 다항식은 아닙니다.

x^2+2xy 다항식, $\frac{1}{x}$ 분수식, $\sqrt{y}$ 무리식

$\underbrace{\text{다항식} \quad \text{분수식}}_{\text{유리식}}$

이때, 다항식과 분수식을 합쳐 유리식이라 부릅니다.

15 답 1, 일, 2

16 답 2, 이, 1

17 답 1, 일, $5y$

18 답 2, 이, $-6ac^3$

19 답 $\sqrt{3}z^3$

20 답 5

21 답 2

22 답 y^3+4y+8

23 답 $4x^2-3x+8$

24 답 $-y^2+1$

25 답 $-3x^2+1$

26 답 1

27 답 $-\frac{2}{3}c$

28 답 0

주어진 식에서 a, b, c가 들어 있지 않은 항이 없으므로 상수항은 0이다.

29 답 상수항, 계수

02 다항식의 정리

▸ p.13~14

01 답 $5x^4$, $-3x^2y^3$, $2y^5$, $6xy$, 3

02 답 사, $2y^5+3$

03 답 오, $5x^4+3$

04 답 $3xy$, $-5xy$

05 답 x^3+x^2+4x-2

주어진 식을 동류항끼리 정리하고, 내림차순으로 정리하면

$x-2-x^2+x^3+3x+2x^2$

$=x^3+x^2+4x-2$

06 답 $-2+4x+x^2+x^3$

07 답 $-3y^3+4y^2+y-4$

08 답 $-4+y+4y^2-3y^3$

09 답 $x^2+(y+1)x+y^2-y+2$

10 답 $y^2-y+2+(y+1)x+x^2$

11 답 $y^2+(x-1)y+x^2+x+2$

12 답 $x^2+x+2+(x-1)y+y^2$

13 답 $yx^3+y^2x^2+(y^2+2)x+y-5$

14 답 $y-5+(y^2+2)x+y^2x^2+yx^3$

15 답 $(x+x^2)y^2+(x^3+1)y+2x-5$

16 답 $2x-5+(x^3+1)y+(x+x^2)y^2$

17 답 $-3y^2x^2+(yz^2+y^3z+2z^2)x+yz-4$

18 답 $yz-4+(yz^2+y^3z+2z^2)x-3y^2x^2$

19 답 $xzy^3-3x^2y^2+(xz^2+z)y+2xz^2-4$

주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$xyz^2+xy^3z-3y^2x^2+2xz^2+yz-4$

$=xzy^3-3x^2y^2+(xz^2+z)y+2xz^2-4$

20 답 $2xz^2-4+(xz^2+z)y-3x^2y^2+xzy^3$

주어진 식을 y에 대하여 오름차순으로 정리하면

$xyz^2+xy^3z-3y^2x^2+2xz^2+yz-4$

$=2xz^2-4+(xz^2+z)y-3x^2y^2+xzy^3$

21 답 $(xy+2x)z^2+(xy^3+y)z-3y^2x^2-4$

22 답 $-3y^2x^2-4+(xy^3+y)z+(xy+2x)z^2$

23 답 (1) 차수 (2) 높은, 낮은 (3) 낮은, 높은

03 다항식의 덧셈과 뺄셈

▸ p.15~16

01 답 $2x^2+3x+5$

02 답 $5x^2+2x+3$

03 답 x^2+4x-6

$(-2x^2+2x-9)+(3x^2+2x+3)$

$=(-2x^2+3x^2)+(2x+2x)+(-9+3)$

$=x^2+4x-6$

04 답 $2x^2+x+5$

$(x^2+2)+(x^2+x+3)=(x^2+x^2)+x+(2+3)$

$=2x^2+x+5$

05 답 $x+1$

06 답 $5x^2-x-1$

07 답 -1

$(2x^2+x+3)-(2x^2+x+4)$

$=2x^2+x+3-2x^2-x-4$

$=(2x^2-2x^2)+(x-x)+(3-4)$

$=-1$

08 답 $6x^2-3x-9$

$(8x^2+x-7)-(2x^2+4x+2)$

$=8x^2+x-7-2x^2-4x-2$

$=(8x^2-2x^2)+(x-4x)+(-7-2)$

$=6x^2-3x-9$

09 답 $2x^2+4x+6$

$A+B=(x^2+x+4)+(x^2+3x+2)$

$=\boxed{2}x^2+\boxed{4}x+\boxed{6}$

10 답 $-2x+2$

$A-B=(x^2+x+4)-(x^2+3x+2)=-2x+2$

11 답 $3x^2+7x+8$

12 답 $2x^3-5x^2+3x+4$

13 답 x^2-x+2

14 답 $2x^3-2x^2+10$

$2(2A-B)=4A-2B$

$=4(x^3-2x^2+x+3)-2(x^3-3x^2+2x+1)$

$=4x^3-8x^2+4x+12-2x^3+6x^2-4x-2$

$=2x^3-2x^2+10$

15 답 $2x^3+6x^2+4x+5$

$$\begin{array}{rrrrr} & x^3+ & x^2 & & +3 \\ & & x^2 & +3x & \\ +) & x^3+ & 4x^2+ & x & +2 \\ \hline & 2x^3+ & 6x^2+ & 4x & +5 \end{array}$$

16 답 $2x^3+4x^2-2x+5$

$$\begin{array}{rrrrr} & x^3+ & x^2 & & +3 \\ & & -\ x^2 & -3x & \\ +) & x^3+ & 4x^2+ & x & +2 \\ \hline & 2x^3+ & 4x^2 & -2x & +5 \end{array}$$

17 답 $-x^3-9x^2$

$$\begin{array}{rrrrr} & 2x^3+ & 2x^2 & & +6 \\ & & x^2 & +3x & \\ +) & -3x^3 & -12x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -x^3 & -9x^2 & & \end{array}$$

18 답 x^3+6x^2+7x+2

$A+2B-(A-C)=A+2B-A+C$

$=2B+C$

$=2(x^2+3x)+(x^3+4x^2+x+2)$

$=2x^2+6x+x^3+4x^2+x+2$

$=x^3+\boxed{6}x^2+\boxed{7}x+\boxed{2}$

19 답 (1) 동류항 (2) 부호 (3) 동류항

04 다항식의 덧셈에 대한 성질

▸ p.17

01 답 $-2x^3+x^2-4x+4$

$(A+B)+(-C)=A+(B-C)$ ← 결합법칙

$=x^3-3x+3+(-3x^3+x^2-x+1)$

$=-2x^3+x^2-\boxed{4}x+4$

02 답 x^3+5x^2-2x+8

$A-B+C+3B$

$=A-B+3B+C$ ($\because$ 교환법칙)

$=A+(-B+3B)+C$ ($\because$ 결합법칙)

$=A+2B+C$

$=x^3-3x+3+2(-x^3+2x^2+2)+2x^3+x^2+x+1$

$=x^3-3x+3-2x^3+4x^2+4+2x^3+x^2+x+1$

$=x^3+5x^2-2x+8$

03 답 $-3x^3+4x^2+3x+1$

$A+2(B+C)-2(A+C)$

$=A+2B+2C-2A-2C$

$=A+2B+2C+(-2A)+(-2C)$

$=A+(-2A)+2B+2C+(-2C)$ ($\because$ 교환법칙)

$=(A-2A)+2B+(2C-2C)$ ($\because$ 결합법칙)

$=-A+2B$

$=-(x^3-3x+3)+2(-x^3+2x^2+2)$

$=-x^3+3x-3-2x^3+4x^2+4$

$=-3x^3+4x^2+3x+1$

04 답 $a^2-5ab+3b^2+5$

$C+X=D$에서

$X=D-\boxed{C}$

$=2a^2-3ab+b^2+5-(\boxed{a^2+2ab-2b^2})$

$=2a^2-3ab+b^2+5-\boxed{a^2}-\boxed{2ab}+\boxed{2b^2}$

$=a^2-5ab+\boxed{3b^2}+\boxed{5}$

05 답 $7ab-5b^2-5$

$2C-X=D$에서

$X=2C-D$

$=2(a^2+2ab-2b^2)-(2a^2-3ab+b^2+5)=7ab-5b^2-5$

06 답 (1) B (2) $(B+C)$

05 단항식의 곱셈

▸ p.18

01 답 a^7 **02** 답 x^7 **03** 답 b^6

04 답 x^{12} **05** 답 $\dfrac{y^5}{x^5}$ **06** 답 a^2

07 답 $\dfrac{1}{a^2}$

08 답 a^{15}

$(a^2)^4\times a^7=a^{2\times4}\times a^7=a^8\times a^7=a^{15}$

09 답 b^{22}

$(b^3)^5\times b^7=b^{3\times5}\times b^7=b^{15}\times b^7=b^{22}$

10 답 x^{11}

$(x^3)^2\times x^5=x^{3\times2}\times x^5=x^6\times x^5=x^{11}$

11 답 $\dfrac{1}{x^2}$

$(x^6)^2\div(x^7)^2=x^{12}\div x^{14}=\dfrac{1}{x^{14-12}}=\dfrac{1}{x^2}$

12 답 a^7b^5

$(a^3b^3)^3\div(ab^2)^2=a^9b^9\div a^2b^4=a^{9-2}b^{9-4}=a^7b^5$

13 답 (1) a^{m+n} (2) a^{mn} (3) a^nb^n (4) b^n (5) a^{m-n}, 1, a^{n-m}

06 다항식의 곱셈

▸ p.19~20

01 답 ab^2-2a^2b-2ab

02 답 $a^3b-3a^2b^2+b^2$

03 답 $-2x^3y-x^2y^2+xy^3$

04 답 $-a^4b+3a^2b^2-ab^3+ab^2$

05 답 x^3-1

$(x-1)(x^2+x+1)=x^3+x^2+x-\boxed{x^2}-\boxed{x}-\boxed{1}$

$=\boxed{x^3-1}$

06 답 $a^3-5ab^2-2b^3$

$(a+2b)(a^2-2ab-b^2)=a^3-2a^2b-ab^2+2a^2b-4ab^2-2b^3$

$=a^3-5ab^2-2b^3$

07 답 x^3-5x+2

$(x^2+2x-1)(x-2)=x^3-2x^2+2x^2-4x-x+2$

$=x^3-5x+2$

08 답 $x^3-x^2y-3xy^2-y^3$

$(x^2-2xy-y^2)(x+y)=x^3+x^2y-2x^2y-2xy^2-xy^2-y^3$

$=x^3-x^2y-3xy^2-y^3$

09 답 $2x^2+x-1$ **10** 답 $2x^2+x-1$

11 답 (○) (   ) (   )

12 답 $2x^4+x^3-x^2$ **13** 답 $2x^4+x^3-x^2$

14 답 (○) (   ) (   )

15 답 **4**

$(2x^2+2x+3)(2x^2+x-1)$의 전개식에서 x^4항은 $4x^4$이므로

x^4의 계수는 4이다.

16 답 **3**

$(a^3-a^2+a-1)(2a^2-a)$의 전개식에서 a^3항은

$a^3+2a^3=3a^3$이므로 a^3의 계수는 3이다.

17 답 **1**

$(2x+3y+4)(-x+2y+2)$의 전개식에서 xy항은

$4xy-3xy=xy$이므로 xy의 계수는 1이다.

18 답 **1**

19 답 **11**

20 답 **분배법칙, 동류항**

07 곱셈 공식 (1)

▸ p.21~22

01 답 x^2+4x+4

$(x+2)^2=x^2+2\times x\times\boxed{2}+\boxed{2}^2$

$\quad=x^2+\boxed{4}x+\boxed{4}$

02 답 x^2+6x+9

03 답 $4x^2+4x+1$

04 답 $9x^2+12x+4$

05 답 $x^2+3xy+\frac{9}{4}y^2$

06 답 x^2-6x+9

$(x-3)^2=x^2-2\times x\times\boxed{3}+\boxed{3}^2$

$\quad=x^2-\boxed{6}x+\boxed{9}$

07 답 $x^2-10x+25$

08 답 $4x^2-4x+1$

09 답 $9x^2-24x+16$

10 답 $\frac{1}{4}x^2-xy+y^2$

11 답 x^2-1

$(x+1)(x-1)=x^2-\boxed{1}^2=x^2-\boxed{1}$

12 답 $4-x^2$

13 답 x^2-y^2

14 답 $4a^2-1$

15 답 $9y^2-4x^2$

16 답 x^2+3x+2

$(x+1)(x+2)=x^2+(1+2)x+1\times2=x^2+3x+2$

17 답 x^2+x-6

$(x-2)(x+3)=x^2+(-2+3)x+(-2)\times3$

$\quad=x^2+x-6$

18 답 $x^2-2x-15$

$(x+3)(x-5)=x^2+(3-5)x+3\times(-5)$

$\quad=x^2-2x-15$

19 답 $6x^2+5x+1$

$(2x+1)(3x+1)=2x\times3x+(2\times1+1\times3)x+1\times1$

$\quad=6x^2+5x+1$

20 답 $12x^2+17x+6$

21 답 $8x^2+2x-3$

22 답 $10x^2-23x+12$

23 답 $-18a^2+27a-10$

24 답 $2a^2+\frac{37}{3}ab+2b^2$

25 답 $10a^2-\frac{29}{2}ab+3b^2$

26 답 (1) $a^2+2ab+b^2$ (2) $a^2-2ab+b^2$

(3) a^2-b^2 (4) $x^2+(a+b)x+ab$

(5) $acx^2+(ad+bc)x+bd$

08 곱셈 공식 (2)

▸ p.23~24

01 답 $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

02 답 $x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$

$(x+y-z)^2$

$=\{x+y+(-z)\}^2$

$=x^2+y^2+(-z)^2+2\times x\times y+2\times y\times(-z)+2\times(-z)\times x$

$=x^2+y^2+z^2+2xy-\boxed{2}yz-\boxed{2}zx$

03 답 $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

$(x-y+z)^2=\{x+(-y)+z\}^2$

$\quad=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

04 답 $a^2+b^2+1+2ab-2b-2a$

05 답 $b^2+c^2+4-2bc-4c+4b$

06 답 x^3+3x^2+3x+1

$(x+1)^3=x^3+3\times x^2\times1+3\times x\times1^2+1^3$

$=x^3+3x^2+3x+1$

07 답 $x^3+9x^2+27x+27$

$(x+3)^3=x^3+3\times x^2\times\boxed{3}+3\times x\times\boxed{3}^2+\boxed{3}^3$

$=x^3+\boxed{9}x^2+\boxed{27}x+27$

08 답 $x^3+12x^2+48x+64$

$(x+4)^3=x^3+3\times x^2\times4+3\times x\times4^2+4^3$

$=x^3+12x^2+48x+64$

09 답 $8x^3+12x^2+6x+1$

$(2x+1)^3=(\boxed{2x})^3+3\times(\boxed{2x})^2\times1+3\times\boxed{2x}\times1^2+1^3$

$=\boxed{8}x^3+\boxed{12}x^2+\boxed{6}x+1$

10 답 $27x^3+54x^2+36x+8$

$(3x+2)^3=(3x)^3+3\times(3x)^2\times2+3\times3x\times2^2+2^3$

$=27x^3+54x^2+36x+8$

11 답 $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$(x+y)^3=x^3+3\times x^2\times y+3\times x\times y^2+y^3$

$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

12 답 $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

$(x+2y)^3=x^3+3\times x^2\times2y+3\times x\times(2y)^2+(2y)^3$

$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

13 답 x^3-3x^2+3x-1

$(x-1)^3=x^3+3\times x^2\times(-1)+3\times x\times(-1)^2+(-1)^3$

$=x^3-3x^2+3x-1$

14 답 $x^3-6x^2+12x-8$

$(x-2)^3=x^3+3\times x^2\times(-2)+3\times x\times(-2)^2+(-2)^3$

$=x^3-6x^2+12x-8$

15 답 $27x^3-27x^2+9x-1$

$(3x-1)^3$

$=(3x)^3+3\times(3x)^2\times(-1)+3\times3x\times(-1)^2+(-1)^3$

$=27x^3-27x^2+9x-1$

16 답 $8x^3-36x^2+54x-27$

$(2x-3)^3$

$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times(-3)+3\times2x\times(-3)^2+(-3)^3$

$=8x^3-36x^2+54x-27$

17 답 $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

$(x-3y)^3=x^3+3\times x^2\times(-3y)+3\times x\times(-3y)^2+(-3y)^3$

$=x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

18 답 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+b+c)^2=\{(a+b)+\boxed{c}\}^2$

$=(a+b)^2+\boxed{2}(a+b)c+\boxed{c^2}$

$=(a^2+\boxed{2ab}+b^2)+2ac+2bc+\boxed{c^2}$

$=a^2+b^2+\boxed{c^2}+2ab+2bc+\boxed{2ca}$

19 답 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^3=(a+b)^{\boxed{2}}(a+b)$

$=(a^2+\boxed{2ab}+b^2)(a+b)$

$=a^3+a^2b+\boxed{2a^2b}+2ab^2+b^2a+b^3$

$=a^3+\boxed{3a^2b}+3ab^2+b^3$

20 답 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a-b)^3=(a-b)^{\boxed{2}}(a-b)$

$=(a^2-\boxed{2ab}+b^2)(a-b)$

$=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+\boxed{b^2a}-b^3$

$=a^3-3a^2b+\boxed{3ab^2}-b^3$

21 답 (1) $2ab+2bc+2ca$ (2) $3ab^2+b^3$ (3) $3ab^2-b^3$

09 곱셈 공식 (3)

▸ p.25~26

01 답 x^3+1

$(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x\times1+1^2)$

$=x^3+\boxed{1}^3=x^3+\boxed{1}$

02 답 x^3+y^3

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

03 답 a^3+8b^3

$(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)=a^3+(2b)^3=a^3+8b^3$

04 답 $27a^3+8b^3$

05 답 x^6+z^3

06 답 x^3-8

$(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-2^3=x^3-8$

07 답 $27x^3-1$

$(3x-1)(9x^2+3x+1)=(3x)^3-1^3=27x^3-1$

08 답 x^3-y^3

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$

09 답 $8a^3-27b^3$

10 답 y^6-z^3

11 답 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

12 답 $x^3+y^3-z^3+3xyz$

13 답 $x^3-y^3+8+6xy$

14 답 x^4+x^2+1

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=x^4+x^2\times1^2+1^4=x^4+x^2+1$

15 답 x^4+4x^2+16

$(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

$=x^4+x^2\times2^2+2^4=x^4+4x^2+16$

16 답 $x^3+8x^2+17x+10$

17 답 $x^3+6x^2+5x-12$

$(x-1)(x+3)(x+4)$

$=x^3+(-1+3+4)x^2+(-1\times3+3\times4-1\times4)x+(-1)\times3\times4$

$=x^3+6x^2+5x-12$

18 답 $x^3+3x^2-28x-60$

19 답 $x^3+2x^2-29x+42$

20 답 $x^3-49x+120$

21 답 $x^3-19x^2+114x-216$

22 답 (1) a^3+b^3 (2) a^3-b^3 (3) $a^3+b^3+c^3-3abc$
(4) $a^4+a^2b^2+b^4$ (5) $a+b+c$ (6) $ab+bc+ca$

10 공통부분이 있는 다항식의 전개

▸ p.27

01 답 $x^2+2xy+y^2-x-y-2$

$x+y=t$라 하면

(주어진 식)$=(t+1)(t-2)$

$=t^2-t-2$

$=(x+y)^2-(x+y)-2$

$=x^2+2xy+y^2-x-y-2$

02 답 $a^2+4ab+4b^2-5a-10b+6$

$a+2b=t$라 하면

(주어진 식)$=(t-2)(t-3)$

$=t^2-5t+6$

$=(a+2b)^2-5(a+2b)+6$

$=a^2+4ab+4b^2-5a-10b+6$

03 답 $x^2+2xy^2+y^4-3x-3y^2-4$

$x+y^2=t$라 하면

(주어진 식)$=(t+1)(t-4)$

$=t^2-3t-4$

$=(x+y^2)^2-3(x+y^2)-4$

$=x^2+2xy^2+y^4-3x-3y^2-4$

04 답 $b^4-2a^2b^2+a^4-2b^2+2a^2-15$

$b^2-a^2=t$라 하면

(주어진 식)$=(t+3)(t-5)$

$=t^2-2t-15$

$=(b^2-a^2)^2-2(b^2-a^2)-15$

$=b^4-2a^2b^2+a^4-2b^2+2a^2-15$

05 답 $x^2+2xy+y^2-1$

$x+y=t$라 하면

(주어진 식)$=(t+1)(t-1)$

$=t^2-1=x^2+2xy+y^2-1$

06 답 $a^2+2ab+b^2-3$

$a+b=t$라 하면

(주어진 식)$=(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$

$=t^2-3=a^2+2ab+b^2-3$

07 답 x^4-4x^2+4x-1

$2x-1=t$라 하면

(주어진 식)$=(x^2-t)(x^2+t)$

$=x^4-t^2=x^4-(4x^2-4x+1)$

$=x^4-4x^2+4x-1$

08 답 $-a^2+2ac-c^2+b^2$

$a-c=t$라 하면

(주어진 식)$=(t+b)(-t+b)$

$=-t^2+b^2$

$=-(a^2-2ac+c^2)+b^2$

$=-a^2+2ac-c^2+b^2$

09 답 $x^4+2x^3+2x^2+x+1$

$x^2+x=t$라 하면

(주어진 식)$=(t+2)(t-1)+3$

$=t^2+t-2+3=t^2+t+1$

$=x^4+2x^3+x^2+x^2+x+1$

$=x^4+2x^3+2x^2+x+1$

10 답 $-4x^4+4x^3-9x^2+4x+2$

$-2x^2+x=t$라 하면

(주어진 식)$=(t+1)(-t+5)-3$

$=-t^2+4t+5-3=-t^2+4t+2$

$=-(4x^4-4x^3+x^2)+4(-2x^2+x)+2$

$=-4x^4+4x^3-x^2-8x^2+4x+2$

$=-4x^4+4x^3-9x^2+4x+2$

11 답 a^2+2a+b^2-4b+5

$a+1=X$, $b-2=Y$라 하면

(주어진 식)$=(X-Y)^2+2XY=X^2+Y^2$

$=a^2+2a+1+b^2-4b+4$

$=a^2+2a+b^2-4b+5$

12 답 $x^4+2x^3-13x^2-14x+24$

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)$

에서 $x^2+x=t$라 하면

$(t-2)(t-12)=t^2-14t+24$

$=x^4+2x^3+x^2-14x^2-14x+24$

$=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$

13 답 $x^4+4x^3-19x^2-46x+120$

$(x-2)(x-3)(x+5)(x+4)$

$=(x^2+2x-15)(x^2+2x-8)$

에서 $x^2+2x=t$라 하면

$(t-15)(t-8)=t^2-23t+120$

$=x^4+4x^3+4x^2-23x^2-46x+120$

$=x^4+4x^3-19x^2-46x+120$

14 답 $x^4+16x^3+62x^2-16x-63$

$(x+9)(x+7)(x+1)(x-1)$

$=(x^2+8x-9)(x^2+8x+7)$

에서 $x^2+8x=t$라 하면

$(t-9)(t+7)=t^2-2t-63$

$=x^4+16x^3+64x^2-2x^2-16x-63$

$=x^4+16x^3+62x^2-16x-63$

15 답 t, 전개, 대입, 전개

11 곱셈 공식의 변형 (1)

▸ p.28~30

01 답 $a+b$, $2ab$

02 답 5

03 답 30

04 답 8

05 답 13

06 답 $a-b$, $2ab$

07 답 12

08 답 33

09 답 11

10 답 26

11 답 $4ab$ / $a-b$, $4ab$

12 답 28

13 답 56

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

$=(-6)^2+4\times5=36+20=56$

14 답 $-4ab$ / $a+b$, $4ab$

15 답 33

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=5^2-4\times(-2)=25+8=33$

16 답 13

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=(-3)^2-4\times(-1)=9+4=13$

17 답 $a+b$, $3ab^2$ / $a+b$, $a+b$

18 답 16

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=4^3-3\times4\times4=64-48=16$

19 답 10

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(-2)^3-3\times3\times(-2)=-8+18=10$

20 답 $a-b$, $3ab^2$ / $a-b$, $a-b$

21 답 234

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=6^3+3\times6\times1=216+18=234$

22 답 -72

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=(-3)^3+3\times5\times(-3)=-27-45=-72$

23 답 $a+b$

24 답 2

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서 $a^2+b^2=5$, $a+b=3$이므로

$5=3^2-2ab$

$\therefore ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{3^2-5}{2}=\frac{4}{2}=2$

25 답 37

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서 $a^2+b^2=7$, $a+b=-9$이므로

$7=(-9)^2-2ab \quad \therefore ab=\frac{81-7}{2}=\frac{74}{2}=37$

26 답 $a-b$

27 답 3

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$에서 $a^2+b^2=15$, $a-b=3$이므로

$15=3^2+2ab \quad \therefore ab=\frac{15-3^2}{2}=\frac{6}{2}=3$

28 답 3

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$에서 $a^2+b^2=42$, $a-b=-6$이므로

$42=(-6)^2+2ab \quad \therefore ab=\frac{42-36}{2}=3$

29 답 $a+b$

30 답 -3

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$a^3+b^3=26$, $a+b=2$이므로

$26=2^3-6ab \quad \therefore ab=\frac{2^3-26}{6}=\frac{-18}{6}=-3$

31 답 22

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$a^3+b^3=-16$, $a+b=8$이므로

$-16=8^3-24ab \quad \therefore ab=\frac{8^3-(-16)}{24}=\frac{528}{24}=22$

32 답 $a-b$

33 답 $-\frac{7}{3}$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$에서

$a^3-b^3=90$, $a-b=5$이므로

$90=5^3+3ab\times5$, $90=125+15ab$

$\therefore ab=\frac{90-125}{15}=-\frac{35}{15}=-\frac{7}{3}$

34 답 -5

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$에서

$a^3-b^3=-4$, $a-b=-4$이므로

$-4=(-4)^3-12ab$

$\therefore ab=\frac{(-4)^3+4}{12}=\frac{-60}{12}=-5$

35 답 (1) $2ab$ (2) $2ab$ (3) $4ab$ (4) $a+b$ (5) $3ab(a+b)$ (6) $3ab(a-b)$

12 곱셈 공식의 변형 (2)

▸ p.31~32

01 답 x / 2 / $x+\frac{1}{x}$, 2

02 답 7

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=9-2=7$

03 답 14

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=16-2=14$

04 답 x / 2 / $x-\frac{1}{x}$, 2

05 답 38

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=6^2+2=36+2=38$

06 답 27

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=5^2+2=25+2=27$

07 답 4 / $x-\frac{1}{x}$, 4

08 답 8

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=2^2+4=4+4=8$

09 답 53

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=(-7)^2+4=49+4=53$

10 답 4 / $x+\frac{1}{x}$, 4

11 답 5

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=(-3)^2-4=9-4=5$

12 답 0

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=(-2)^2-4=4-4=0$

13 답 **5**

$x^2-5x+1=0$에서 양변을 $x\neq0$으로 나누면

$x-5+\frac{1}{x}=0$이므로 $x+\frac{1}{x}=5$

14 답 **23**

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$에서 $x+\frac{1}{x}=5$이므로

$x^2+\frac{1}{x^2}=5^2-2=25-2=23$

15 답 **110**

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$에서 $x+\frac{1}{x}=5$이므로

$x^3+\frac{1}{x^3}=5^3-3\times5=125-15=110$

16 답 **1**

$x^2-x-1=0$의 양변을 $x\neq0$으로 나누면

$x-1-\frac{1}{x}=0$이므로 $x-\frac{1}{x}=1$

17 답 **3**

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$에서 $x-\frac{1}{x}=1$이므로

$x^2+\frac{1}{x^2}=1^2+2=1+2=3$

18 답 **4**

$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$에서 $x-\frac{1}{x}=1$이므로

$x^3-\frac{1}{x^3}=1^3+3\times1=1+3=4$

19 답 **(1) 2 (2) 2 (3) 4 (4) 4 (5)** $x+\frac{1}{x}$ **(6)** $x-\frac{1}{x}$

13 곱셈 공식의 변형 (3)

▸ p.33~34

01 답 $a+b+c$, ab, bc, ca / $a+b+c$, $ab+bc+ca$

02 답 **6**

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=2^2-2\times(-1)\\&=4+2=6\end{aligned}$$

03 답 **10**

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=(-4)^2-2\times3\\&=16-6=10\end{aligned}$$

04 답 **18**

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$a+b+c=\sqrt{14}$, $ab+bc+ca=-2$이므로

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(\sqrt{14})^2-2\times(-2)\\&=14+4=18\end{aligned}$$

05 답 $2c^2$, $2ab$, $2bc$ / $2ab$, c^2 / a^2 / $a-b$, b, a

06 답 **7**

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\\&=\frac{1}{2}\{1^2+2^2+(-3)^2\}\\&=\frac{14}{2}=7\end{aligned}$$

07 답 **19**

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\\&=\frac{1}{2}\{5^2+(-3)^2+(-2)^2\}\\&=\frac{38}{2}=19\end{aligned}$$

08 답 $33+2\sqrt{5}$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$에서

$a-b=-2+\sqrt{5}$, $b-c=-4-\sqrt{5}$, $c-a=6$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(-2+\sqrt{5})^2+(-4-\sqrt{5})^2+6^2\}$

$=\frac{1}{2}(4-4\sqrt{5}+5+16+8\sqrt{5}+5+36)$

$=\frac{1}{2}\times(66+4\sqrt{5})=33+2\sqrt{5}$

09 답 $2b^2$, $2bc$, $2ca$ / b^2, b^2 / $a+b$

10 답 $\frac{17}{2}$

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{2^2+3^2+(-2)^2\}=\frac{17}{2}$

11 답 **13**

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(-3)^2+4^2+1^2\}==\frac{26}{2}=13$

12 답 $\frac{45}{2}$

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$에서

$a+b=1-2\sqrt{3}$, $b+c=2+\sqrt{3}$, $c+a=-5$이므로

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}\{(1-2\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2+(-5)^2\}$

$=\frac{1}{2}(1-4\sqrt{3}+12+4+4\sqrt{3}+3+25)$

$=\frac{1}{2}\times 45=\frac{45}{2}$

13 답 $3abc$ / $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

14 답 176

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$a+b+c=5$, $ab+bc+ca=-2$이므로

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=5^2-2\times(-2)=25+4=29$

한편, $abc=7$이므로

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=5\times\{29-(-2)\}+3\times 7$

$=5\times 31+21=155+21=176$

[다른 풀이]

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=5^2-3\times(-2)=31$

한편, $abc=7$이므로

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=5\times 31+3\times 7$

$=155+21=176$

15 답 -32

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$a+b+c=4$, $a^2+b^2+c^2=2$이므로

$2=4^2-2(ab+bc+ca)$, $2(ab+bc+ca)=14$

$\therefore ab+bc+ca=7$

한편, $abc=-4$이므로

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=4\times(2-7)+3\times(-4)=-20-12=-32$

16 답 36

$a+b+c=0$이면

$a^3+b^3+c^3=3abc=3\times 12=36$

17 답 (1) $a+b+c$ (2) $a-b$, $c-a$ (3) $b+c$ (4) $3abc$

14 (다항식)÷(단항식)

▸ p.35

01 답 $3yz+2xyz$

$(15xyz+10x^2yz)\div 5x=\frac{15xyz+10x^2yz}{5x}$

$=\frac{15xyz}{5x}+\frac{10x^2yz}{5x}$

$=3yz+2xyz$

02 답 $3z-4xz$

$(6xyz-8x^2yz)\div 2xy=\frac{6xyz-8x^2yz}{2xy}$

$=\frac{6xyz}{2xy}-\frac{8x^2yz}{2xy}$

$=3z-4xz$

03 답 $7x-9xy$

$(14x^2z-18x^2yz)\div 2xz=\frac{14x^2z}{2xz}-\frac{18x^2yz}{2xz}$

$=7x-9xy$

04 답 $2z-4xyz$

$(-8xyz+16x^2y^2z)\div(-4xy)$

$=\frac{-8xyz}{-4xy}+\frac{16x^2y^2z}{-4xy}=2z-4xyz$

05 답 $4a^2b-3b-2$

$(12a^3b^2c-6abc-9ab^2c)\div 3abc$

$=\frac{12a^3b^2c}{3abc}-\frac{6abc}{3abc}-\frac{9ab^2c}{3abc}$

$=4a^2b-2-3b$

$=4a^2b-3b-2$

06 답 $2xy^2z^7+3y^5z^6$

$(2x^2z^3+3xy^3z^2)\div\frac{x}{y^2z^4}=(2x^2z^3+3xy^3z^2)\times\frac{y^2z^4}{x}$

$=2xy^2z^7+3y^5z^6$

07 답 $14x-6y$

$(7x^2-3xy)\div\frac{1}{2}x=(7x^2-3xy)\times\frac{2}{x}$

$=14x-6y$

08 답 $-30x+10$

$(12x^2-36x^3)\div\frac{6x^2}{5}=(12x^2-36x^3)\times\frac{5}{6x^2}$

$=10-30x$

$=-30x+10$

15 (다항식)÷(다항식)

▸ p.36~37

01 답 몫 : $-2x+1$, 나머지 : 3

$$
\begin{array}{r}
-2x+1 \leftarrow \text{몫} \\
-x+1\,\overline{)\,2x^2-3x+4} \\
\underline{2x^2-2x} \\
-x+4 \\
\underline{-x+1} \\
3 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

02 답 몫 : $-5x+8$, 나머지 : -7

$$
\begin{array}{r}
-5x+8 \leftarrow \text{몫} \\
x+1\,\overline{)\,-5x^2+3x+1} \\
\underline{-5x^2-5x} \\
8x+1 \\
\underline{8x+8} \\
-7 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

03 답 몫 : $3x-2$, 나머지 : 5

$$
\begin{array}{r}
3x-2 \leftarrow \text{몫} \\
2x+3\,\overline{)\,6x^2+5x-1} \\
\underline{6x^2+9x} \\
-4x-1 \\
\underline{-4x-6} \\
5 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

04 답 몫 : x^2-4x+8, 나머지 : -7

$$
\begin{array}{r}
x^2-4x+8 \leftarrow \text{몫} \\
x+1\,\overline{)\,x^3-3x^2+4x+1} \\
\underline{x^3+\ x^2} \\
-4x^2+4x \\
\underline{-4x^2-4x} \\
8x+1 \\
\underline{8x+8} \\
-7 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

05 답 몫 : $2x^2-5x+12$, 나머지 : -21

$$
\begin{array}{r}
2x^2-5x+12 \leftarrow \text{몫} \\
x+2\,\overline{)\,2x^3-\ x^2+\ 2x+3} \\
\underline{2x^3+4x^2} \\
-5x^2+\ 2x \\
\underline{-5x^2-10x} \\
12x+\ 3 \\
\underline{12x+24} \\
-21 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

06 답 몫 : $-2x^2-6x-3$, 나머지 : -2

$$
\begin{array}{r}
-2x^2-6x-3 \leftarrow \text{몫} \\
x-1\,\overline{)\,-2x^3-4x^2+3x+1} \\
\underline{-2x^3+2x^2} \\
-6x^2+3x \\
\underline{-6x^2+6x} \\
-3x+1 \\
\underline{-3x+3} \\
-2 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

07 답 몫 : $x+1$, 나머지 : $x+2$

$$
\begin{array}{r}
x+1 \leftarrow \text{몫} \\
x^2+x+1\,\overline{)\,x^3+2x^2+3x+3} \\
\underline{x^3+\ x^2+\ x} \\
x^2+2x+3 \\
\underline{x^2+\ x+1} \\
x+2 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

08 답 몫 : $x+3$, 나머지 : $-8x+5$

$$
\begin{array}{r}
x+3 \leftarrow \text{몫} \\
x^2+2x-1\,\overline{)\,x^3+5x^2-3x+2} \\
\underline{x^3+2x^2-\ x} \\
3x^2-2x+2 \\
\underline{3x^2+6x-3} \\
-8x+5 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

09 답 몫 : $4x+7$, 나머지 : $16x+13$

$$
\begin{array}{r}
4x+7 \leftarrow \text{몫} \\
x^2-2x-1\,\overline{)\,4x^3-\ x^2-2x+6} \\
\underline{4x^3-8x^2-4x} \\
7x^2+\ 2x+6 \\
\underline{7x^2-14x-7} \\
16x+13 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

10 답 몫 : $2x-1$, 나머지 : $x+5$

$$
\begin{array}{r}
2x-1 \leftarrow \text{몫} \\
2x^2+2x-1\,\overline{)\,4x^3+2x^2-3x+6} \\
\underline{4x^3+4x^2-2x} \\
-2x^2-\ x+6 \\
\underline{-2x^2-2x+1} \\
x+5 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
$$

11 답 x^3+2x^2+x+1

$=(x^2+x+2)(x+1)-2x-1$

$$
\begin{array}{r}
x+1 \leftarrow Q \\
x^2+x+2\,\overline{)\,x^3+2x^2+\ x+1} \\
\underline{x^3+\ x^2+2x} \\
x^2-\ x+1 \\
\underline{x^2+\ x+2} \\
-2x-1 \leftarrow R
\end{array}
$$

$\therefore\ x^3+2x^2+x+1=(x^2+x+2)(x+1)-2x-1$

12 답 $x^3+2x-1=(x^2+2x-1)(x-2)+7x-3$

$$
\begin{array}{r}
x-2 \leftarrow Q \\
x^2+2x-1\,\overline{)\,x^3+2x-1} \\
\underline{x^3+2x^2-\ x} \\
-2x^2+3x-1 \\
\underline{-2x^2-4x+2} \\
7x-3 \leftarrow R
\end{array}
$$

$\therefore\ x^3+2x-1=(x^2+2x-1)(x-2)+7x-3$

13 답 $2x^3+2x^2-x+1=(x^2-x+1)(2x+4)+x-3$

$$\begin{array}{r}
2x+4 \leftarrow Q \\
x^2-x+1\overline{)\,2x^3+2x^2-\ \ x+1} \\
\underline{2x^3-2x^2+2x\quad} \\
4x^2-3x+1 \\
\underline{4x^2-4x+4} \\
x-3 \leftarrow R
\end{array}$$

$\therefore 2x^3+2x^2-x+1=(x^2-x+1)(2x+4)+x-3$

14 답 **(1) $BQ+R$ (2) 나누어떨어진다**

단원 마무리 평가 [01~15]

▸문제편 p.38~42

01 답 ②

$3a^2b-a$에 대한 차수는 2이고, a^2의 계수는 $3b$이다.

02 답 ①

다항식 x^2+6x-4의 상수항은 -4이고,

다항식 $2y^2-3y+5$의 상수항은 5이므로

두 다항식의 상수항의 합은 $(-4)+5=1$이다.

03 답 ⑤

ㄱ. y에 대한 이차식이다. (참)

ㄴ. 항의 개수는 3이다. (참)

ㄷ. x에 대한 일차항의 계수는 $4y$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 답 ③

다항식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

① x^2+x+1

② $2x^3+3x^2-1$

④ $5x^2+(4y+2)x-3y^2-y$

⑤ $-x^2+2xy+3y^2$

05 답 $-5+(2y^2-3y+3)x+(y-4y^2)x^2$

$x^2y+2xy^2-3xy-4x^2y^2+3x-5$를 x에 대한 동류항끼리 먼저 정리하면

$(y-4y^2)x^2+(2y^2-3y+3)x-5$

이 식을 x에 대한 오름차순으로 정리하면

$-5+(2y^2-3y+3)x+(y-4y^2)x^2$이다.

06 답 ⑤

$A=2x^2-3x+1$, $B=x^2+x-4$이므로

$A+B=3x^2-2x-3$

07 답 ②

$A-2B=(3x^2-2xy+y^2)-2(x^2-4y^2)$

$=3x^2-2xy+y^2-2x^2+8y^2$

$=x^2-2xy+9y^2$

08 답 ③

$A+2X=B$에서 $2X=B-A$

$\therefore X=\frac{1}{2}(B-A)$

$=\frac{1}{2}\{(x^2-5x+3)-(4x^3+3x^2-5x+1)\}$

$=\frac{1}{2}(-4x^3-2x^2+2)=-2x^3-x^2+1$

09 답 ③

$2A+B-3C$

$=2(2x^2-3x+1)+(x^2+4x-2)-3(x^2-4)$

$=4x^2-6x+2+x^2+4x-2-3x^2+12$

$=2x^2-2x+12$

10 답 ⑤

① $a^4\div a^2=a^{4-2}=a^2$

② $(-x)^3\times(-x)^5=(-x^3)\times(-x^5)=x^8$

③ $(3a^2b^3c)^2\times(-2ab^2)^3=9a^4b^6c^2\times(-8a^3b^6)$

$=-72a^7b^{12}c^2$

④ $(-a^2bc^3)^3\div(-ab^2c^3)^5$

$=(-a^6b^3c^9)\times\left(-\frac{1}{a^5b^{10}c^{15}}\right)=\frac{a}{b^7c^6}$

⑤ $\left(\frac{b}{a^3}\right)^3\div\left(\frac{b}{a^2}\right)^2=\frac{b^3}{a^9}\div\frac{b^2}{a^4}=\frac{b^3}{a^9}\times\frac{a^4}{b^2}=\frac{b}{a^5}$

11 답 ④

$\frac{1}{8}x^4y^3\div\left(\frac{1}{4}x^3y\right)^2\times(-2xy^2)^3$

$=\frac{1}{8}x^4y^3\div\frac{x^6y^2}{16}\times(-8x^3y^6)$

$=\frac{1}{8}x^4y^3\times\frac{16}{x^6y^2}\times(-8x^3y^6)$

$=-16xy^7$

12 답 ③

$(x^3-2x^2+x-5)(3x^2+2x+3)$에서 x^4항을 구하면

$x^3\times2x=2x^4$, $(-2x^2)\times3x^2=-6x^4$

이므로 $2x^4-6x^4=-4x^4$

따라서 x^4의 계수는 -4

13 답 ①

$(x-a)(x^2+bx-1)=x^3-(a-b)x^2-(1+ab)x+a$

x의 계수가 5이므로 $-(1+ab)=5$, $-1-ab=5$

$ab=-6$ ⋯ ㉠

상수항이 2이므로 $a=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $2b=-6$ $\therefore b=-3$

$\therefore a+b=2-3=-1$

14 답 ①

$$\begin{aligned} A(A+B)-B(A+4) &= (A^2+AB)-BA-4B \\ &= A^2-4B \\ &= (2x+1)^2-4(x^2+x-3) \\ &= 4x^2+4x+1-4x^2-4x+12 \\ &= 13 \end{aligned}$$

15 답 ④

ㄱ. $(x-2)^2=x^2-4x+4$ (거짓)

ㄴ. $(2a+3b)(2a-3b)=4a^2-9b^2$ (참)

ㄷ. $(a-2b+c)^2$

$=a^2+(-2b)^2+c^2+2a(-2b)+2(-2b)c+2ca$

$=a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

16 답 ④

④ $(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$

17 답 ③

$2025=t$라 하면

(주어진 식)$=\dfrac{t^3}{(t-1)(t+1)+1}=\dfrac{t^3}{t^2-1+1}=\dfrac{t^3}{t^2}=t$

$=2025$

18 답 ④

$$\begin{aligned} (3x-2y)^3 &= (3x)^3-3(3x)^2\times 2y+3\times 3x\times(2y)^2-(2y)^3 \\ &= 27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3 \end{aligned}$$

따라서 xy^2의 계수는 36이다.

19 답 ②

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$을 이용하여

$$\begin{aligned} (3x+2)(9x^2-6x+4) &= (3x)^3+2^3 \\ &= 27x^3+8=ax^3+b \end{aligned}$$

이므로 $a=27$, $b=8$

$\therefore a+b=35$

20 답 ②

$$\begin{aligned} (x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1) &= (x^3+1)(x^6-x^3+1) \\ &= (x^3)^3+1=x^9+1 \end{aligned}$$

21 답 ②

$x-y=t$라 하면

$$\begin{aligned} (x-y+1)(x-y-2) &= (t+1)(t-2)=t^2-t-2 \\ &= (x-y)^2-(x-y)-2 \\ &= x^2-2xy+y^2-x+y-2 \\ &= x^2-2xy-x+y^2+y-2 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$(x-y+1)(x-y-2)$

$=x^2-xy-2x-xy+y^2+2y+x-y-2$

$=x^2-2xy-x+y^2+y-2$

22 답 ②

$x^2+2=A$라 하면

$$\begin{aligned} (x^2-2x+2)(x^2+2x+2) &= (A-2x)(A+2x) \\ &= A^2-4x^2 \\ &= x^4+4x^2+4-4x^2 \\ &= x^4+4 \end{aligned}$$

이므로 동류항이 아닌 서로 다른 항의 개수는 2이다.

23 답 ①

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ &= 6^2-2\times 8=36-16=20 \end{aligned}$$

24 답 ②

$x+y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}=1$

$xy=\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1-2}{4}=-\dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \therefore x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= 1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

25 답 ②

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$x+y=5$, $x^3+y^3=35$이므로

$35=5^3-15xy$, $15xy=90$ $\therefore xy=6$

$$\begin{aligned} \therefore x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= 5^2-2\times 6=13 \end{aligned}$$

26 답 ①

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$x+y=6$, $xy=-2$이므로

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 6^3-3\times(-2)\times 6 \\ &= 216+36=252 \end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}=\dfrac{252}{-2}=-126$

27 답 ③

$(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$에서

$x^3-y^3=18$, $x-y=3$이므로

$3^3=18-3xy\times3$, $-9xy=9$

$\therefore\ xy=-1$

28 답 ③

$x+\dfrac{1}{x}=5$이므로

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$

29 답 ①

$x^2-3x-1=0$의 양변을 $x(x\neq0)$로 나누면

$x-3-\dfrac{1}{x}=0$

$\therefore\ x-\dfrac{1}{x}=3$

이 식의 양변을 세제곱하면

$x^3-\dfrac{1}{x^3}-3\times x\times\dfrac{1}{x}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=27$, $x^3-\dfrac{1}{x^3}-9=27$

$\therefore\ x^3-\dfrac{1}{x^3}=36$

30 답 ②

$x+y+z=1$의 양변을 제곱하면

$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=1$

$x^2+y^2+z^2=3$이므로 위의 식에 대입하면

$3+2(xy+yz+zx)=1$

$\therefore\ xy+yz+zx=-1$

31 답 ②

$a-b=2+\sqrt{3}$, $b-c=2-\sqrt{3}$이므로

두 식을 더하면 $a-c=4$, $c-a=-4$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+(-4)^2\}$

$=\dfrac{1}{2}(4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3}+3+16)$

$=\dfrac{1}{2}(7+7+16)$

$=15$

32 답 $\boldsymbol{3xy-10+4y^2}$

$(3x^2y^2-10xy+4xy^3)\div xy=\dfrac{3x^2y^2-10xy+4xy^3}{xy}$

$=\dfrac{3x^2y^2}{xy}-\dfrac{10xy}{xy}+\dfrac{4xy^3}{xy}$

$=3xy-10+4y^2$

33 답 ②

$$\begin{array}{rl}
 & \,3x^2-3x-2 \\
2x-1 & \overline{)\,6x^3-9x^2-x+5} \\
 & \,\underline{6x^3-3x^2\phantom{-x+5}} \\
 & \,-6x^2-x \\
 & \,\underline{-6x^2+3x} \\
 & \,-4x+5 \\
 & \,\underline{-4x+2} \\
 & \,3
\end{array}$$

$\therefore$ 몫 : $3x^2-3x-2$, 나머지 : 3

$\therefore\ Q(2)+R=3\times2^2-3\times2-2+3$

$=12-6-2+3=7$

34 답 ③

$$\begin{array}{rl}
 & \,2x+3 \\
x^2+2 & \overline{)\,2x^3+3x^2-x} \\
 & \,\underline{2x^3+4x} \\
 & \,3x^2-5x \\
 & \,\underline{3x^2+6} \\
 & \,-5x-6
\end{array}$$

$\therefore$ 몫 : $2x+3$, 나머지 : $-5x-6$

35 답 ④

주어진 조건을 식으로 나타낸 후 간단히 하면

$P(x)=(x^2-3x+1)(x-2)+2x-1$

$=x^3-2x^2-3x^2+6x+x-2+2x-1$

$=x^3-5x^2+9x-3$

36 답 ③

$x^3-2x^2+x-3=P(x)(x+1)-7$이므로

$x^3-2x^2+x-3=(x+1)P(x)-7$

즉, x^3-2x^2+x-3을 $x+1$로 나누면 몫이 $P(x)$이고,

나머지가 -7이라 할 수 있다.

$$\begin{array}{rl}
 & \,x^2-3x+4 \\
x+1 & \overline{)\,x^3-2x^2+x-3} \\
 & \,\underline{x^3+x^2\phantom{+x-3}} \\
 & \,-3x^2+x \\
 & \,\underline{-3x^2-3x} \\
 & \,4x-3 \\
 & \,\underline{4x+4} \\
 & \,-7
\end{array}$$

따라서 $P(x)=x^2-3x+4$이다.

37 답 ③

다항식 x^3-3x^2-2x-8이 다항식 $P(x)$로 나누어떨어질 때의 몫이 x^2+x+2이므로

$x^3-3x^2-2x-8=P(x)(x^2+x+2)$

$=(x^2+x+2)P(x)$

이므로 x^3-3x^2-2x-8을 x^2+x+2로 나누면 몫이 $P(x)$라 할 수 있다.

$$
\begin{array}{r}
x-4 \\
x^2+x+2 \overline{) \, x^3-3x^2-2x-8} \\
\underline{x^3+\ \ x^2+2x } \\
-4x^2-4x-8 \\
\underline{-4x^2-4x-8} \\
0
\end{array}
$$

따라서 $P(x)=x-4$이다.

Ⅰ-2 나머지정리

16 항등식

▸ p.43~44

01 답 ○ **02** 답 ○ **03** 답 ○

04 답 ○ **05** 답 ○

06 답 ×

등식 $-x^2+3x+4=-6$에 $x=-1$을 대입하면

(좌변)$=-(-1)^2+3\times(-1)+4=0$

(우변)$=-6$

이므로 거짓인 등식이다. (등호가 성립하지 않는다.)

07 답 ○

등식 $-x^2+3x+4=-6$에 $x=-2$를 대입하면

(좌변)$=-(-2)^2+3\times(-2)+4=-6$

(우변)$=-6$

이므로 참인 등식이다.

08 답 × **09** 답 ○

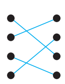
10 답 ×

x의 값에 따라 참이 되기도 하고, 거짓이 되기도 하므로

항등식이 아니고 방정식이다.

11 답 × **12** 답 × **13** 답 ○

14 답 ○ **15** 답 ○ **16** 답 ×

17 답 × **18** 답 

19 답 $a=-1, b=2$

$(a+1)x+(b-2)=0 \qquad \therefore a=-1, b=2$

20 답 $a=3, b=-1$

$(a-4)x+(-3a+4)=-x+5b$

$(a-3)x+(-3a+4-5b)=0$

에서 $a-3=0$이고, $-3a+4-5b=0$ ⋯ ㉠이다.

$a=3$이고, 이 값을 ㉠에 대입하면

$-3\times3+4-5b=0, -5-5b=0$

$5b=-5 \qquad \therefore b=-1$

[다른 풀이]

$(a-4)x+(-3a+4)=-x+5b$

x의 계수를 비교하면

$a-4=-1 \qquad \therefore a=3$

상수항을 비교하면

$-3\times3+4=5b, -5=5b$

$\therefore b=-1$

21 답 $a=-1, b=2, c=0$

$(a-1)x+2(x+b)=4+cy$

$(a+1)x-cy+(2b-4)=0$

에서 $a+1=0$, $-c=0$, $2b-4=0$이므로

$a=-1$, $b=2$, $c=0$

22 답 $a=3, b=3, c=4$

$(4a-3-9)x+(12-3c)y+(-4+3b-5)=0$에서

$4a-3-9=0$, $12-3c=0$, $-4+3b-5=0$이므로

$a=3$, $c=4$, $b=3$

23 답 $a=4, k=4$

24 답 $a=1, k=-1$

$3ax+3k(x-1)+k-2=0$

$(3a+3k)x+(-2k-2)=0$

에서 $3a+3k=0$ ⋯ ㉠, $-2k=2$이므로

$k=-1$이고 이를 ㉠에 대입하면

$3a-3=0 \qquad \therefore a=1$

25 답 항등식

17 미정계수법

▸ p.45~46

01 답 $a=2, b=3$ **02** 답 $a=4, b=1$

03 답 $a=3, b=-2$

04 답 $a=3$, $b=-9$

$3x^2-ax-3=3(x-1)^2+a(x+1)+b$

$=(3x^2-6x+3)+(ax+a)+b$

$=3x^2+(-6+a)x+(3+a+b)$

에서 $-a=-6+a$, $2a=6$ $\therefore a=3$ ⋯ ㉠

$-3=3+a+b$, $-3=6+b$(∵ ㉠)

$\therefore b=-9$

05 답 $a=4$, $b=-2$

06 답 $a=-1$, $b=6$

$x^2-3x+8=(x-1)^2+a(x-1)+b$의 양변에

$x=1$을 대입하면

$1-3+8=b$ $\therefore b=6$

$x=0$을 대입하면 $8=1-a+b$

$b=6$이므로 $a=-7+6=-1$

07 답 $a=2$, $b=4$

08 답 $a=13$, $b=18$

09 답 1024

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=1024$

10 답 0

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_9+a_{10}$

11 답 1023

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $1=a_0$

09에서 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=1024$이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=1023$

12 답 0

13 답 1024

14 답 -1

15 답 1

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(0^2+0+1)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=1$

16 답 243

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$\{(-2)^2-2+1\}^5=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_9+a_{10}$

$\therefore a_0-a_1+a_2+\cdots-a_9+a_{10}=3^5=243$

17 답 0

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $1=a_0$

15에서 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=1$이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=0$

18 답 5^5

19 답 -3^5

20 답 (1) 계수비교법 (2) 수치대입법

18 다항식의 나눗셈과 항등식

▸ p.47

01 답 $a=2$, $b=-1$

02 답 $a=-70$, $b=7$

$3x^3-bx^2+ax+20$

$=(x-6)(3x^2+11x-4)-4$

$=3x^3+11x^2-4x-18x^2-66x+24-4$

$=3x^3-7x^2-70x+20$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$b=7$, $a=-70$

03 답 $a=-2$, $b=10$

$-8x^3+ax^2+2bx+11=(4x+1)(-2x^2+5)+6$

$=-8x^3-2x^2+20x+11$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=-2$, $2b=20$ $\therefore b=10$

04 답 $a=3$, $b=2$

05 답 $a=36$, $b=-79$

$2x^3-ax^2+30x-b$를 $2(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의

몫을 $Q(x)$라 하면

$2x^3-ax^2+30x-b=2(x+1)(x-2)Q(x)+11$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $-2-a-30-b=11$

$a+b=-43$ ⋯ ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면 $16-4a+60-b=11$

$4a+b=65$ ⋯ ㉡

㉠－㉡을 하면

$-3a=-108$ $\therefore a=36$

이를 ㉠에 대입하면

$36+b=-43$ $\therefore b=-79$

06 답 $a=-1$, $b=8$

07 답 항등식, 상수

19 나머지정리 ▸ p.48

01 답 **1**

나머지정리에 의하여

다항식 $f(x)=x^3-2x^2+x+1$을 $x-1$로 나눈 나머지는

$f(1)=1^3-2\times1^2+1+1=1$

02 답 **3**

03 답 $\frac{9}{8}$

04 답 $\frac{29}{27}$

다항식 $f(x)=x^3-2x^2+x+1$을 $3x-2$로 나눈 나머지는

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}+1$$
$$=\frac{8}{27}-\frac{8}{9}+\frac{5}{3}=\frac{8-24+45}{27}=\frac{29}{27}$$

05 답 -4

06 답 $-\frac{74}{27}$

07 답 $-\frac{74}{27}$

다항식 $f(x)=2x^3-x-3$을 일차식 $3x+1$로 나눈 나머지는

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)-3$$
$$=-\frac{2}{27}+\frac{1}{3}-3=\frac{-2+9-81}{27}=-\frac{74}{27}$$

08 답 $-\frac{99}{32}$

09 답 (1) $R=f(\alpha)$ (2) $R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$

20 나머지정리의 활용 ▸ p.49~50

01 답 $a=2$

$f(x)=2x^3-ax^2+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)=(x-1)Q(x)+1$ ⋯ ㉠

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(1)$이므로

㉠에 의하여 $f(1)=1$

$2-a+1=1$, $3-a=1$ $\therefore a=2$

02 답 $a=\frac{15}{4}$

03 답 $a=2$

04 답 $a=-52$

05 답 $a=-\frac{25}{2}$

06 답 $a=-29$

$f(x)=3x^3+x^2+ax-2$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)=(x+3)Q(x)+13$ ⋯ ㉠

따라서 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(-3)$이므로 ㉠에 의하여 $f(-3)=13$

$-81+9-3a-2=13$

$-87-3a=0$ $\therefore a=-29$

07 답 **2**

08 답 -1

09 답 **13**

다항식 $f(x)$를 $x^2-4x-12$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2-4x-12)Q(x)+2x+1$$
$$=(x-6)(x+2)Q(x)+2x+1$$

$\therefore f(6)=2\times6+1=13$

10 답 **13**

다항식 $f(x)$를 x^2+5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2+5x+6)Q(x)-3x+4$$
$$=(x+2)(x+3)Q(x)-3x+4$$

$\therefore f(-3)=-3\times(-3)+4=13$

11 답 $ax+b$ / $a+b$ / -3, -3 / 1, 1 / $x+1$

12 답 $ax+b$ / -1, -1 / 13, 13 / 2, 3 / $2x+3$

13 답 (1) 상수 (2) 일차식

21 인수정리 ▸ p.51~52

01 답 ○

$f(1)=1^3-1=0$이므로

다항식 $f(x)$는 $x-1$로 나누어떨어진다.

[다른 풀이]

$f(x)=x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$로

인수분해되므로 다항식 $f(x)$는 일차식 $A=x-1$로

나누어떨어진다.

02 답 ×

$$f(3)=3^3+2\times3^2-9\times3-27$$
$$=27+18-27-27=-9\neq0$$

이므로 다항식 $f(x)$는 $x-3$으로 나누어떨어지지 않는다.

03 답 ×

04 답 ○

05 답 $a=2$

06 답 $a=-6$

07 답 $a=-\frac{5}{2}$

08 답 $a=\frac{61}{9}$

09 답 $a=-2$, $b=-1$

10 답 $a=4$, $b=5$

11 답 $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{19}{3}$

12 답 $a=\frac{4}{3},\ b=-\frac{13}{3}$ **13** 답 $a=-2,\ b=-1$

14 답 $a=-\frac{16}{3},\ b=-\frac{13}{3}$

$A=x^2-5x-6=(x+1)(x-6)$이고,

$f(-1)=-1+a-b+2=a-b+1=0 \cdots$ ㉠

$f(6)=216+36a+6b+2=36a+6b+218=0 \cdots$ ㉡

㉠$\times 6+$㉡을 하면

$42a=-224 \qquad \therefore a=-\frac{224}{42}=-\frac{16}{3}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $-\frac{16}{3}-b+1=0 \qquad \therefore b=-\frac{13}{3}$

15 답 x^2+3x+2

16 답 $2x^2+4x-16$

$f(x)$가 $x-2,\ x+4$로 각각 나누어떨어지므로

이차항의 계수가 2인 이차식 $f(x)$는 $x-2,\ x+4$를 인수로 갖는다.

$\therefore f(x)=2(x-2)(x+4)=2(x^2+2x-8)=2x^2+4x-16$

17 답 $-x^2+2x+15$ **18** 답 $4x^2-64$

19 답 $-3x^3+3x^2+12x-12$

$f(x)$가 $x-1,\ x-2,\ x+2$로 각각 나누어떨어지므로 삼차항의 계수가 -3인 삼차식 $f(x)$는 $x-1,\ x-2,\ x+2$를 인수로 갖는다.

$\therefore f(x)=-3(x-1)(x-2)(x+2)$

$=-3(x-1)(x^2-4)=-3(x^3-4x-x^2+4)$

$=-3x^3+3x^2+12x-12$

20 답 (1) $x-a$ (2) 0

22 조립제법

▸ p.53~54

01 답 몫 : $3x^2-5x+2$, 나머지 : 0

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 3 & -2 & -3 & 2 \\ & & \boxed{-3} & \boxed{5} & \boxed{-2} \\ \hline & \boxed{3} & \boxed{-5} & \boxed{2} & \boxed{0} \end{array}$$

02 답 몫 : $x^2+6x+13$, 나머지 : 31

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ & & 2 & 12 & 26 \\ \hline & 1 & \boxed{6} & 13 & \boxed{31} \end{array}$$

03 답 몫 : x^2+2x-6, 나머지 : 19

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ & & \boxed{-3} & \boxed{-6} & \boxed{18} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-6} & \boxed{19} \end{array}$$

04 답 몫 : $2x^2+3x+2$, 나머지 : -11

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 2 & -7 & -13 & -21 \\ & & \boxed{10} & \boxed{15} & \boxed{10} \\ \hline & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{-11} \end{array}$$

05 답 몫 : x^2+4x, 나머지 : -2

$(x^3+3x^2-4x-2)\div(x-1)$을 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & -4 & -2 \\ & & 1 & 4 & 0 \\ \hline & 1 & 4 & 0 & -2 \end{array}$$

따라서 몫은 x^2+4x이고, 나머지는 -2이다.

06 답 몫 : x^2, 나머지 : 4

$(x^3-4x^2+4)\div(x-4)$를 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ & & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

따라서 몫은 x^2이고, 나머지는 4이다.

07 답 몫 : $2x^2+6x+5$, 나머지 : 0

08 답 몫 : $4x^2-3x+\frac{3}{2}$, 나머지 : $-\frac{25}{4}$

09 답 몫 : $5x^2-12x-8$, 나머지 : -6

10 답 몫 : $6x^2-6x-13$, 나머지 : $-\frac{1}{3}$

11 답 몫 : $\frac{1}{2}(x^2+4x+2)$ 또는 $\frac{1}{2}x^2+2x+1$, 나머지 : -6

$(x^3+3x^2-2x-8)\div(2x-2)$를 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & -2 & -8 \\ & & 1 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 4 & 2 & -6 \end{array}$$

이때, 몫은 $\frac{1}{2}$을 곱해주고, 나머지는 그대로이다.

따라서 몫은 $\frac{1}{2}(x^2+4x+2)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$이고,

나머지는 -6이다.

12 답 몫 : $\frac{1}{3}(2x^2+x+7)$, 나머지 : 28

13 답 **몫 : $\frac{1}{4}(3x^2-2x+8)$, 나머지 : -39**

14 답 **몫 : $\frac{1}{2}(4x^2+8x-1)$, 나머지 : $\frac{23}{2}$**

15 답 **몫 : $\frac{1}{3}\left(5x^2-\frac{1}{3}x-\frac{34}{9}\right)$ 또는 $\frac{5}{3}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{34}{27}$**

나머지 : $\frac{14}{27}$

$(5x^3+3x^2-4x-2)\div(3x+2)$를 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{2}{3} & 5 & 3 & -4 & -2 \\ & & -\frac{10}{3} & \frac{2}{9} & \frac{68}{27} \\ \hline & 5 & -\frac{1}{3} & -\frac{34}{9} & \frac{14}{27} \end{array}$$

이때, 몫은 $\frac{1}{3}$을 곱해주고, 나머지는 그대로이다.

따라서 몫은 $\frac{1}{3}\left(5x^2-\frac{1}{3}x-\frac{34}{9}\right)=\frac{5}{3}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{34}{27}$이고,

나머지는 $\frac{14}{27}$이다.

16 답 **몫, 나머지, 조립제법**

단원 마무리 평가 [16~22]

▸문제편 p.55~59

01 답 ④

ㄱ. 방정식

ㄴ. (좌변)$=(x+1)^2-4x=x^2+2x+1-4x$

$=x^2-2x+1=(x-1)^2=$(우변)

$\therefore$ 항등식

ㄷ. 방정식

ㄹ. 곱셈 공식이므로 항상 등식이 성립한다. $\therefore$ 항등식

따라서 항등식은 ㄴ, ㄹ이다.

02 답 ②

$(a+b)x+a-2b+3=0$에서

$a+b=0$ ⋯ ㉠, $a-2b+3=0$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $3b-3=0$ $\therefore b=1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $a=-1$ $\therefore ab=(-1)\times1=-1$

03 답 ④

$x^2+ax-b=(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$에서

x항의 계수를 비교하면 $a=-5$

상수항을 비교하면 $-b=6$ $\therefore b=-6$

$\therefore a-b=-5-(-6)=-5+6=1$

04 답 ①

$x^2+(a-2)x+8=bx^2-5x-2c$가 항상 성립하므로

이 등식은 x에 대한 항등식이다.

$b=1$, $a=-3$, $c=-4$ $\therefore a+b+c=-3+1-4=-6$

05 답 **1**

$(k+2)x-(k+1)y+k-7=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x-y+1)k+2x-y-7=0$이다.

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x-y+1=0$ ⋯ ㉠, $2x-y-7=0$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $-x+8=0$ $\therefore x=8$

이 값을 ㉠에 대입하면 $8-y+1=0$ $\therefore y=9$

$\therefore y-x=9-8=1$

06 답 ①

주어진 식 $a(x-2y)+b(2x+y)=-3x-4y$를

x, y에 대하여 정리하면 $(a+2b)x+(-2a+b)y=-3x-4y$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+2b=-3$ ⋯ ㉠, $-2a+b=-4$ ⋯ ㉡

㉠$\times2+$㉡을 하면 $5b=-10$ $\therefore b=-2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $a-4=-3$ $\therefore a=1$

$\therefore a-b=1-(-2)=3$

07 답 ④

등식 $a(x-4)+b(x-3)=x+9$의 양변에

$x=4$를 대입하면 $b=13$

$x=3$을 대입하면 $-a=12$ $\therefore a=-12$

$\therefore a+b=-12+13=1$

08 답 ⑤

$(x+1)(x+2)Q(x)=x^3+ax+b$의 양변에

$x=-1$을 대입하면 $0=-1-a+b$ ⋯ ㉠

$x=-2$를 대입하면 $0=-8-2a+b$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $0=7+a$ $\therefore a=-7$

이 값을 ㉠에 대입하면 $0=-1-(-7)+b$ $\therefore b=-6$

$\therefore a-2b=-7-2\times(-6)=-7+12=5$

09 답 **10**

$(3x+2)(x^2-3x+4)$의 전개식에서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합을 구하려면 주어진 식에 $x=1$을 대입하면 된다.

$\therefore (3+2)(1^2-3+4)=5\times2=10$

[다른 풀이]

$(3x+2)(x^2-3x+4)$를 전개하면

$3x^3-9x^2+12x+2x^2-6x+8=3x^3-7x^2+6x+8$

이므로 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은

$3-7+6+8=10$

10 답 ②

등식 $(x^2-2x+5)^3=a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0$의 양변에

$x=1$을 대입하면

$(1-2+5)^3=a_6+a_5+\cdots+a_1+a_0$ ⋯ ㉠

$x=-1$을 대입하면

$(1+2+5)^3=a_6-a_5+\cdots-a_1+a_0$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$64+512=2(a_6+a_4+a_2+a_0)$

$2(a_6+a_4+a_2+a_0)=576$

$\therefore\ a_0+a_2+a_4+a_6=288$

11 답 ⑤

$(2x^3+7x^2+ax+2)=(x+b)(2x^2+x+1)-1$이므로

$$\begin{array}{r|cccc}
-b & 2 & 7 & a & 2 \\
 & & -2b & -7b+2b^2 & -b(a-7b+2b^2) \\ \hline
 & 2 & 7-2b & a-7b+2b^2 & \multicolumn{1}{|c}{-1}
\end{array}$$

$7-2b=1 \qquad \therefore\ b=3$

$a-7b+2b^2=a-21+18=1$, $a-3=1 \qquad \therefore\ a=4$

$\therefore\ a+b=4+3=7$

[다른 풀이]

$$\begin{array}{r}
x+3 \\
2x^2+x+1\overline{\big)\,2x^3+7x^2+ax+2} \\
\underline{2x^3+\ x^2+\ x} \\
6x^2+(a-1)x+2 \\
\underline{6x^2+\quad 3x\quad +3} \\
(a-4)x-1
\end{array}$$

이므로 몫끼리 비교하면 $x+b=x+3$

$\therefore\ b=3$

나머지가 -1이려면 $a=4$

$\therefore\ a+b=7$

12 답 ④

$(6x^3+ax^2+x+6)=(2x+3)(3x^2+bx-1)+9$이므로

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|cccc}
-\frac{3}{2} & 6 & a & 1 & 6 \\
 & & -9 & -\frac{3}{2}(a-9) & \frac{9}{4}a-\frac{87}{4} \\ \hline
 & 6 & a-9 & -\frac{3}{2}a+\frac{29}{2} & \multicolumn{1}{|c}{9}
\end{array}$$

$\dfrac{a-9}{2}=b$ ⋯ ㉠

$-\dfrac{3}{4}a+\dfrac{29}{4}=-1$에서 $-\dfrac{3}{4}a=-\dfrac{33}{4}$

$\therefore\ a=11$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\dfrac{11-9}{2}=b \qquad \therefore\ b=1$

$\therefore\ a-b=11-1=10$

[다른 풀이]

$(6x^3+ax^2+x+6)=(2x+3)(3x^2+bx-1)+9$이므로

x^2항을 비교하면 $a=2b+9$ ⋯ ㉡

x항을 비교하면 $1=-2+3b \qquad \therefore\ b=1$

이 값을 ㉡에 대입하면 $a=11$

$\therefore\ a-b=11-1=10$

13 답 ⑤

$f(x)=(x^3+ax+b)$

$\quad=(x^2-3x+2)Q(x)+4x-1$

$\quad=(x-1)(x-2)Q(x)+4x-1$

이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=1+a+b=3$ ⋯ ㉠

$f(2)=8+2a+b=7$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $-7-a=-4 \qquad \therefore\ a=-3$

이 값을 ㉠에 대입하면

$1-3+b=3 \qquad \therefore\ b=5$

$\therefore\ a+b=-3+5=2$

[다른 풀이]

$$\begin{array}{r}
x+3 \\
x^2-3x+2\overline{\big)\,x^3\qquad\quad +ax+b} \\
\underline{x^3-3x^2\qquad +2x} \\
3x^2+(a-2)x+b \\
\underline{3x^2\qquad -9x+6} \\
(a+7)x+(b-6)
\end{array}$$

$(a+7)x+(b-6)=4x-1$이므로

$a+7=4 \qquad \therefore\ a=-3$

$b-6=-1 \qquad \therefore\ b=5$

$\therefore\ a+b=-3+5=2$

14 답 ⑤

$5x^3+ax^2+bx+2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$5x^3+ax^2+bx+2=(x-1)(x+2)Q(x)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$5+a+b+2=0$ ⋯ ㉠

양변에 $x=-2$를 대입하면

$-40+4a-2b+2=0$ ⋯ ㉡

㉠×2+㉡을 하면 $6a-24=0 \qquad \therefore\ a=4$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-11$

$\therefore\ 4a+b=4\times4-11=16-11=5$

15 답 ③

$f(x)=x^3-2x^2+x+3$이라 하면

$f(x)=x^3-2x^2+x+3$을 일차식 $x-2$로 나누었을 때

나머지는 나머지정리에 의하여

$f(2)=2^3-2\times2^2+2+3=5$

16 답 ③

$f(x)=4x^3-3x+1$이라 하면 다항식 $4x^3-3x+1$을

일차식 $2x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=2$

17 답 ⑤

다항식 $2x^3-3x^2+x-5$를 $x+2$로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ & & -4 & 14 & -30 \\ \hline & 2 & -7 & 15 & \boxed{-35} \end{array}$$

몫이 $2x^2-7x+15$, 나머지가 -35이므로

$2x^3-3x^2+x-5=(x+2)(2x^2-7x+15)-35$

즉, $Q(x)=2x^2-7x+15$, $R=-35$이다.

$\therefore Q(-2)+R=2\times(-2)^2-7\times(-2)+15+(-35)$

$=2$

18 답 ②

다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이고,

다항식 $g(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -1이므로

나머지정리에 의하여 $f(2)=3$, $g(-3)=-1$

$\therefore f(2)-g(-3)=3-(-1)=4$

19 답 ②

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누면 몫이 $x+2$이고

나머지가 3이므로 $f(x)=(x+1)(x+2)+3$이다.

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $f(1)$이므로

나머지정리에 의하여 $f(1)=2\times3+3=9$

20 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2-3x+2$로 놓으면 나머지정리에 의하여

$f(-1)=f(3)$

$-1+a+3+2=27+9a-9+2$, $4+a=9a+20$

$8a=-16 \qquad \therefore a=-2$

21 답 ③

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2-3$으로 놓으면 나머지정리에 의하여

$f(1)=4$, $f(-1)=-4$이므로

$1+a+b-3=4$, $a+b=6$

$1-a+b-3=-4$, $a-b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$

$\therefore a+2b=4+2\times2=4+4=8$

22 답 ③

나머지정리에 의하여 $f(1)=-1$, $f(-2)=-7$이다. ⋯ ㉠

이때, 다항식 $f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$

㉠의 식을 이용하여 양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$f(1)=a+b=-1$ ⋯ ㉡

$f(-2)=-2a+b=-7$ ⋯ ㉢

㉡$-$㉢을 하면

$3a=6 \qquad \therefore a=2$

이 값을 ㉡에 대입하면 $b=-3 \qquad \therefore R(x)=2x-3$

23 답 ②

다항식 $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지가

$6x$이므로

$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+6x$

$=(x-1)(x-2)Q(x)+6x$

이때, 다항식 $P(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

나머지정리에 의하여 $P(2)=12$

24 답 ②

다항식 $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+2x+1$

$=(x-1)(x+1)Q(x)+2x+1$

이때, 나머지정리에 의하여

$f(1)=3$, $f(-1)=-1$ ⋯ ㉠

$(x+2)f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$,

나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$(x+2)f(x)=(x^2-1)Q'(x)+ax+b$

$=(x-1)(x+1)Q'(x)+ax+b$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3f(1)=a+b=9$($\because$ ㉠) ⋯ ㉡

$x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-a+b=-1$($\because$ ㉠) ⋯ ㉢

㉡$-$㉢을 하면

$2a=10 \qquad \therefore a=5$

이 값을 ㉡에 대입하면 $b=4$

따라서 구하는 나머지는 $5x+4$이다.

25 답 ①

$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$f(x)=(x-3)Q(x)+2$ ⋯ ㉠

한편, $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로

나머지정리에 의하여 $Q(2)=-3$이고,

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 $f(2)$이다.

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=-Q(2)+2=-(-3)+2=5$

26 답 ②

$2^{2025}=(2^4)^{506}\times 2=2\times 16^{506}$임을 이용하여

2^{2025}을 15로 나누었을 때의 나머지를 구하자.

$f(x)=2x^{506}$으로 놓으면 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하면 된다.

한편, 나머지정리에 의하여 $f(1)=2$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$2x^{506}=(x-1)Q(x)+2$

이 식의 양변에 $x=16$을 대입하면

$2\times 16^{506}=(16-1)Q(16)+2$

$\therefore 2^{2025}=15Q(16)+2$

따라서 2^{2025}을 15로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

27 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2-4$로 놓으면

$f(x)$는 $x-2$로 나누어떨어지므로 $f(2)=0$

$8+4a-4=0,\ 4+4a=0 \qquad \therefore a=-1$

28 답 ②

$f(x)=x^4+ax^3+bx+4$로 놓으면 $f(-2)=0,\ f(1)=0$

$16-8a-2b+4=0,\ 4a+b=10 \cdots$ ㉠

$1+a+b+4=0,\ a+b=-5 \cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $3a=15 \qquad \therefore a=5$

이 값을 ㉡에 대입하면 $b=-10$

$\therefore a-b=5-(-10)=15$

29 답 ⑤

이차항의 계수가 -1인 이차식 $P(x)$에 대하여

$P(2)=P(-2)=0$이므로 인수정리에 의하여

$P(x)=-(x-2)(x+2)=-x^2+4$

30 답 ③

$f(-1)=f(1)=f(2)=0$이고, 인수정리에 의하여

삼차항의 계수가 1인 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$이다.

$\therefore f(-2)=(-1)\times(-3)\times(-4)=-12$

31 답 ①

$P(x)-4=2(x+1)(x-3)$에서

$P(x)=2(x+1)(x-3)+4$이므로 나머지정리에 의하여

$P(1)=2\times 2\times(-2)+4=-4$

32 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2+bx+6$이라 놓으면

$f(x)$가 $(x+2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여 $f(-2)=0,\ f(3)=0$이다.

$f(-2)=(-2)^3+a(-2)^2+b(-2)+6$

$\quad=4a-2b-2=0 \cdots$ ㉠

$f(3)=3^3+a\times 3^2+b\times 3+6$

$\quad=9a+3b+33=0 \cdots$ ㉡

㉠$\times 3+$㉡$\times 2$를 하면 $a=-2,\ b=-5$

$\therefore a-2b=-2-2\times(-5)=8$

33 답 ②

$g(x)=f(x)-x$로 놓으면 $g(1)=g(2)=g(3)=0$이므로

인수정리에 의하여 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이다.

$\therefore f(x)=g(x)+x=(x-1)(x-2)(x-3)+x$

$\therefore f(4)=(4-1)(4-2)(4-3)+4$

$\quad=3\times 2\times 1+4=6+4=10$

34 답 ①

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 3 & \boxed{-8} & -7 \\ & & \boxed{-4} & 2 & 12 \\ \hline & 2 & -1 & -6 & \boxed{5} \end{array}$$

$\therefore$ ($\square$ 안의 수의 합)$=(-8)+(-4)+5=-7$

35 답 ⑤

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-2$로 나눈 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & a & -1 & b \\ & & 2 & 2a+4 & 4a+6 \\ \hline & 1 & a+2 & 2a+3 & 4a+b+6 \end{array}$$

이때,

$k=2,\ c=2,\ a+2=5$

$2a+4=d \cdots$ ㉠, $4a+b+6=20 \cdots$ ㉡이므로

$a=3$

이 값을 ㉠에 대입하면 $d=10$

이 값을 ㉡에 대입하면 $b=2$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

36 답 ②

$$\begin{array}{r|rrrr} \boxed{\frac{1}{2}} & 2 & -1 & 6 & -4 \\ & & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{3} \\ \hline & 2 & 0 & \boxed{6} & \boxed{-1} \end{array}$$

$\therefore a+b+c=\frac{1}{2}+6+(-1)=\frac{11}{2}$

37 답 ①

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrr}
2 & 3 & -5 & 0 \\
 & & 6 & 2 \\ \hline
2 & 3 & 1 & \boxed{2} \\
 & & 6 & \\ \hline
 & 3 & \boxed{7} &
\end{array}$$

$3x^2-5x=(x-2)\{(x-2)\times3+7\}+2$

$\qquad=3(x-2)^2+7(x-2)+2$

이므로 $a=3$, $b=7$, $c=2$

$\therefore a+2b+c=19$

수력 UP

다항식 $f(x)=1(x+1)^3+2(x+1)^2+3(x+1)+4$의 꼴로 나타내는 것을 $x+1$에 대하여 내림차순으로 정리한다고 한다. 이때, 1, 2, 3, 4의 값은 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+1$로 반복하여 나누어 구할 수 있다.

$$\begin{array}{r|cccc}
-1 & & f(x) & & \\ \hline
-1 & ○ & ○ & ○ & \boxed{4} \\
 & & ○ & ○ & \\ \hline
-1 & ○ & ○ & \boxed{3} & \\
 & & ○ & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{2} & &
\end{array}$$

38 답 ②

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 2a & b & -4 \\
 & & -1 & -2a+1 & -b+2a-1 \\ \hline
-1 & 1 & 2a-1 & b-2a+1 & \boxed{-b+2a-5} \\
 & & -1 & -2a+2 & \\ \hline
 & 1 & 2a-2 & \boxed{b-4a+3} &
\end{array}$$

다항식 x^3+2ax^2+bx-4가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$-b+2a-5=0$ ⋯ ㉠, $b-4a+3=0$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $-2a-2=0$ $\qquad\therefore a=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-7$

$\therefore a-b=-1-(-7)=-1+7=6$

Ⅰ-3 인수분해

23 인수분해 공식 (1)

▸ p.60~61

01 답 $x(a+b)$

02 답 $x(1-y)$

03 답 $a(1-bc)$

04 답 $x^3(y-1)$

05 답 $axy(x+y)$

06 답 $y(a+b-c)$

07 답 $(x-1)(a+1)$

08 답 $(c-d)(a+b)$

$ac-bd-ad+bc=a(c-d)+b(c-d)$

$\qquad=(c-d)(a+b)$

09 답 $(a+1)^2$

10 답 $(x-5)^2$

11 답 $(x+6)^2$

12 답 $(2x+1)^2$

13 답 $(3x-1)^2$

14 답 $(a+5b)^2$

15 답 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

16 답 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

17 답 $(x+2)(x-2)$

18 답 $(x+4y)(x-4y)$

19 답 $(a+3b)(a-3b)$

20 답 $(8x+3y)(8x-3y)$

21 답 $-(5x+1)(5x-1)$

22 답 $3(2x+1)$

$(x+2)^2-(x-1)^2=(x+2+x-1)(x+2-x+1)$

$\qquad=3(2x+1)$

23 답 $(x+1)(x+2)$

24 답 $(x-1)(x-7)$

25 답 $(x-3)(x-7)$

26 답 $(2x-3)(x+1)$

27 답 $(x-4y)(x+2y)$

28 답 $(13a+5b)(a-b)$

29 답 $(x+2)(2x+3)$

30 답 $(x-4)(3x+1)$

31 답 $(2a+1)(3a-2)$

32 답 (1) $m(a\pm b)$ (2) $m(a+b+c)$ (3) $(a+b)^2$
(4) $(a-b)^2$ (5) $(a+b)(a-b)$
(6) $(x+a)(x+b)$ (7) $(ax+b)(cx+d)$

24 인수분해 공식(2)

▸ p.62~63

01 답 $(x+3)^3$

$x^3+9x^2+27x+27=x^3+3\times x^2\times 3+3\times x\times 3^2+3^3$
$=(x+3)^3$

02 답 $(x+2)^3$

03 답 $(a+3b)^3$

04 답 $(3m+n)^3$

05 답 $(x-1)^3$

$x^3-3x^2+3x-1=x^3-3\times x^2\times 1+3\times x\times 1^2-1^3$
$=(x-1)^3$

06 답 $(x-2)^3$

07 답 $(a-3)^3$

08 답 $(2k-3)^3$

09 답 $(a+1)(a^2-a+1)$

$a^3+1=a^3+1^3=(a+1)(a^2-a\times 1+1^2)$
$=(a+1)(a^2-a+1)$

10 답 $(a+2)(a^2-2a+4)$

$a^3+8=a^3+2^3=(a+2)(a^2-2a+4)$

11 답 $(y+3)(y^2-3y+9)$

$y^3+27=y^3+3^3=(y+3)(y^2-3y+9)$

12 답 $(2x+1)(4x^2-2x+1)$

$8x^3+1=(2x)^3+1^3=(2x+1)(4x^2-2x+1)$

13 답 $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

$x^3+27y^3=x^3+(3y)^3=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

14 답 $(3m+2n)(9m^2-6mn+4n^2)$

$27m^3+8n^3=(3m)^3+(2n)^3$
$=(3m+2n)(9m^2-6mn+4n^2)$

15 답 $(x-3)(x^2+3x+9)$

$x^3-27=x^3-3^3$
$=(x-3)(x^2+3\times x+3^2)$
$=(x-3)(x^2+3x+9)$

16 답 $(x-2)(x^2+2x+4)$

$x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

17 답 $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)(4x^2+2x+1)$

18 답 $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$

$27x^3-y^3=(3x)^3-y^3=(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$

19 답 $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

$x^3-27y^3=x^3-(3y)^3=(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

20 답 $8(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

$64a^3-8b^3=8(8a^3-b^3)=8\{(2a)^3-b^3\}$
$=8(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

21 답 (1) $(a+b)^3$ (2) $(a-b)^3$
(3) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

25 인수분해 공식(3)

▸ p.64~65

01 답 $(a-b+1)^2$

$a^2+b^2+1-2ab-2b+2a$
$=a^2+(-b)^2+1^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times 1+2\times 1\times a$
$=\{a+(-b)+1\}^2$
$=(a-b+1)^2$

[다른 풀이]

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2+b^2+1-2ab-2b+2a$
$=a^2-(2b-2)a+b^2-2b+1$
$=a^2-2(b-1)a+(b-1)^2$
$=\{a-(b-1)\}^2=(a-b+1)^2$

02 답 $(a+b+2c)^2$

03 답 $(-a+b+c)^2$

04 답 $(a+b-c)^2$

05 답 $(x+2y+z)^2$

06 답 $(x+2y+3z)^2$

07 답 $(-p+2q+2r)^2$

08 답 $(3p+q-2r)^2$

09 답 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

10 답 $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

$a^3-b^3+c^3+3abc$
$=a^3+(-b)^3+c^3-3\times a\times(-b)\times c$
$=\{a+(-b)+c\}\times\{a^2+(-b)^2+c^2-a\times(-b)$
$-(-b)\times c-ca\}$
$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

11 답 $(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy-yz+zx)$

$x^3-y^3-z^3-3xyz$

$=x^3+(-y)^3+(-z)^3-3\times x\times(-y)\times(-z)$

$=\{x+(-y)+(-z)\}\times\{x^2+(-y)^2+(-z)^2-x\times(-y)$

$-(-y)\times(-z)-(-z)\times x\}$

$=(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy-yz+zx)$

12 답 $(2a+b+c)(4a^2+b^2+c^2-2ab-bc-2ca)$

13 답 $(2l-m+n)(4l^2+m^2+n^2+2lm+mn-2nl)$

14 답 $(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

$x^4+9x^2+81=x^4+x^2\times 3^2+3^4$

$=(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

15 답 $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

$a^4+4a^2+16=a^4+a^2\times 2^2+2^4$

$=(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

16 답 $(25x^2+5x+1)(25x^2-5x+1)$

$625x^4+25x^2+1=(5x)^4+(5x)^2\times 1^2+1^4$

$=(25x^2+5x+1)(25x^2-5x+1)$

17 답 $(4m^2+6m+9)(4m^2-6m+9)$

$16m^4+36m^2+81=(2m)^4+(2m)^2\times 3^2+3^4$

$=(4m^2+6m+9)(4m^2-6m+9)$

18 답 $(9p^2+15pq+25q^2)(9p^2-15pq+25q^2)$

$81p^4+225p^2q^2+625q^4$

$=(3p)^4+(3p)^2\times(5q)^2+(5q)^4$

$=(9p^2+15pq+25q^2)(9p^2-15pq+25q^2)$

19 답 (1) $(a+b+c)^2$

(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(3) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

26 치환을 이용한 인수분해

▸ p.66~67

01 답 $(x+2)(x-2)(x^2+1)$

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-3x^2-4=X^2-3X-4$

$=(X-4)(X+1)$

$=(x^2-4)(x^2+1)$

$=(x+2)(x-2)(x^2+1)$

02 답 $(x+1)(x-1)(x^2+2)$

$x^2=X$로 놓으면

$x^4+x^2-2=X^2+X-2$

$=(X-1)(X+2)$

$=(x^2-1)(x^2+2)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+2)$

03 답 $(x+1)(x-1)(x^2+1)$

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-1=X^2-1$

$=(X-1)(X+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+1)$

04 답 $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

05 답 $(x+3)(x+1)(x^2+4x+2)$

$(x+2)^2=X$로 놓으면

$(x+2)^4-3(x+2)^2+2$

$=X^2-3X+2$

$=(X-1)(X-2)$

$=\{(x+2)^2-1^2\}\{(x+2)^2-2\}$

$=\{(x+2)+1\}\{(x+2)-1\}(x^2+4x+4-2)$

$=(x+3)(x+1)(x^2+4x+2)$

06 답 $a(a+2)(a^2+2a-1)$

$(a+1)^2=X$로 놓으면

$(a+1)^4-3(a+1)^2+2=X^2-3X+2$

$=(X-1)(X-2)$

$=\{(a+1)^2-1\}\{(a+1)^2-2\}$

$=(a^2+2a)(a^2+2a-1)$

$=a(a+2)(a^2+2a-1)$

07 답 $(x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y)$

$x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면

$x^4-5x^2y^2+4y^4=X^2-5XY+4Y^2$

$=(X-Y)(X-4Y)$

$=(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y)$

08 답 $(x+2y)(x-2y)(x^2+2y^2)$

09 답 $(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

$x^2-3x=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(x^2-3x)(x^2-3x+5)+6=X(X+5)+6&=X^2+5X+6\\
&=(X+2)(X+3)\\
&=(x^2-3x+2)(x^2-3x+3)\\
&=(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)
\end{aligned}
$$

10 답 $(x-2)(x+1)(x-3)(x+2)$

$x^2-x=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(x^2-x)(x^2-x-8)+12=X(X-8)+12&\\
&=X^2-8X+12\\
&=(X-2)(X-6)\\
&=(x^2-x-2)(x^2-x-6)\\
&=(x-2)(x+1)(x-3)(x+2)
\end{aligned}
$$

11 답 $(a^2+5a-2)(a^2+5a+8)$

$a^2+5a=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(a^2+5a+4)(a^2+5a+2)-24&=(X+4)(X+2)-24\\
&=X^2+6X-16\\
&=(X-2)(X+8)\\
&=(a^2+5a-2)(a^2+5a+8)
\end{aligned}
$$

[다른 풀이]

$a^2+5a+4=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(a^2+5a+4)(a^2+5a+2)-24&=X(X-2)-24\\
&=X^2-2X-24\\
&=(X-6)(X+4)\\
&=(a^2+5a-2)(a^2+5a+8)
\end{aligned}
$$

12 답 $(a^2-2a-1)^2$

$a^2-1=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(a^2-a-1)(a^2-3a-1)+a^2&=(X-a)(X-3a)+a^2\\
&=X^2-4aX+4a^2\\
&=(X-2a)^2=(a^2-2a-1)^2
\end{aligned}
$$

13 답 $(x-1)(x-3)(x^2+2x+3)$

$x^2+3=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(x^2+x+3)(x^2-3x+3)-5x^2&=(X+x)(X-3x)-5x^2\\
&=X^2-2xX-8x^2\\
&=(X-4x)(X+2x)\\
&=(x^2-4x+3)(x^2+2x+3)\\
&=(x-1)(x-3)(x^2+2x+3)
\end{aligned}
$$

14 답 $(x+4)(x-1)(x^2+3x+6)$

$$
\begin{aligned}
&x(x+1)(x+2)(x+3)-24\\
&=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-24\\
&=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-24
\end{aligned}
$$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
X(X+2)-24=X^2+2X-24&=(X-4)(X+6)\\
&=(x^2+3x-4)(x^3+3x+6)\\
&=(x+4)(x-1)(x^2+3x+6)
\end{aligned}
$$

15 답 $(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+24\\
&=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24\\
&=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24
\end{aligned}
$$

$x^2+x-2=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
X(X-10)+24=X^2-10X+24&=(X-4)(X-6)\\
&=(x^2+x-6)(x^2+x-8)\\
&=(x+3)(x-2)(x^2+x-8)
\end{aligned}
$$

16 답 $k=\frac{9}{4}$

$$
\begin{aligned}
&x(x+2)(x+3)(x-1)+k\\
&=(x^2+2x)(x^2+2x-3)+k
\end{aligned}
$$

에서 $x^2+2x=X$로 놓으면 $X(X-3)+k=X^2-3X+k$이고,

이 이차식이 완전제곱 꼴이려면 $k=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

수력 UP

이차식 x^2+ax+b가 완전제곱 꼴이려면

$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$이어야 하므로 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

17 답 $k=1$

$$
\begin{aligned}
&(x-2)(x-1)(x-3)(x-4)+k\\
&=\{(x-2)(x-3)\}\{(x-1)(x-4)\}+k\\
&=(x^2-5x+6)(x^2-5x+4)+k
\end{aligned}
$$

에서 $x^2-5x=X$로 놓으면

$(X+6)(X+4)+k=X^2+10X+24+k$이고,

이 이차식이 완전제곱 꼴이려면

$24+k=\left(\frac{10}{2}\right)^2$, $24+k=25$ $\quad\therefore k=1$

18 답 $k=9$

$$
\begin{aligned}
&(x-2)(x-1)(x+4)(x+5)+k\\
&=\{(x-2)(x+5)\}\{(x-1)(x+4)\}+k\\
&=(x^2+3x-10)(x^2+3x-4)+k
\end{aligned}
$$

에서 $x^2+3x=X$로 놓으면

$(X-10)(X-4)+k=X^2-14X+40+k$이고,

이 이차식이 완전제곱 꼴이려면

$40+k=\left(-\frac{14}{2}\right)^2$, $40+k=49$ $\quad\therefore k=9$

19 답 공통부분, 치환

27 복이차식의 인수분해

▸ p.68

01 답 $(a^2+b^2)^2$

$a^2=X$로 놓으면

$X^2+2b^2X+b^4=(X+b^2)^2=(a^2+b^2)^2$

02 답 $(a^2+1)^2$

03 답 $(x^2+5)^2$

04 답 $(a^2+2)^2$

05 답 $(x^2+3)^2$

06 답 $(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

$$\begin{aligned}x^4+9x^2+25&=x^4+10x^2+25-x^2\\&=(x^2+5)^2-x^2\\&=(x^2+x+5)(x^2-x+5)\end{aligned}$$

07 답 $(a^2+3ab+5b^2)(a^2-3ab+5b^2)$

$$\begin{aligned}a^4+a^2b^2+25b^4&=a^4+10a^2b^2+25b^4-9a^2b^2\\&=(a^2+5b^2)^2-(3ab)^2\\&=(a^2+3ab+5b^2)(a^2-3ab+5b^2)\end{aligned}$$

08 답 $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$

$$\begin{aligned}16x^4+4x^2y^2+y^4&=16x^4+8x^2y^2+y^4-4x^2y^2\\&=(4x^2+y^2)^2-(2xy)^2\\&=(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)\end{aligned}$$

09 답 $(a^2+a-1)(a^2-a-1)$

$$\begin{aligned}a^4-3a^2+1&=a^4-2a^2+1-a^2\\&=(a^2-1)^2-a^2\\&=(a^2+a-1)(a^2-a-1)\end{aligned}$$

10 답 (1) 치환 (2) $x^2=X$, 인수분해 (3) $(x^2+A)^2$

28 두 개 이상의 문자가 포함된 식의 인수분해

▸ p.69

01 답 $(x-3y+1)(x-y+2)$

문자 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}&x^2-4xy+3y^2+3x-7y+2\\&=x^2-(4y-3)x+(3y^2-7y+2)\\&=x^2-(4y-3)x+(3y-1)(y-2)\\&=\{x-(3y-1)\}\{x-(y-2)\}\\&=(x-3y+1)(x-y+2)\end{aligned}$$

02 답 $(x-y-1)(x-y-2)$

문자 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-2xy-3x+3y+2\\&=x^2-(2y+3)x+y^2+3y+2\\&=x^2-(2y+3)x+(y+1)(y+2)\\&=\{x-(y+1)\}\{x-(y+2)\}\\&=(x-y-1)(x-y-2)\end{aligned}$$

03 답 $(x+y-3)(x+y+1)$

문자 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+2xy-2x-2y-3\\&=x^2+(2y-2)x+y^2-2y-3\\&=x^2+(2y-2)x+(y-3)(y+1)\\&=(x+y-3)(x+y+1)\end{aligned}$$

04 답 $-(a-b)(b-c)(c-a)$

전개한 후 문자 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후
인수분해하면

$$\begin{aligned}&ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\\&=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2\\&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2\\&=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=(b-c)(a-b)(a-c)\\&=-(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

05 답 $(a-b)(b-c)(c-a)$

전개한 후 문자 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후
인수분해하면

$$\begin{aligned}&a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\\&=ab^2-ac^2+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c\\&=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)\\&=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)\\&=(c-b)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=(c-b)(a-b)(a-c)\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

06 답 $(a-b)(a+b)(c+a)$

차수가 가장 낮은 문자 c에 대하여
내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}a^3-ab^2-b^2c+a^2c&=(a^2-b^2)c+a(a^2-b^2)\\&=(a^2-b^2)(c+a)\\&=(a-b)(a+b)(c+a)\end{aligned}$$

07 답 $(a-2)(a-b)$

차수가 가장 낮은 문자 b에 대하여
내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^2-2a-ab+2b &= -b(a-2)+a(a-2) \\ &= (a-2)(a-b) \end{aligned}$$

08 답 $(a+b)(a-b+c)$

차수가 가장 낮은 문자 c에 대하여
내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^2+ac-b^2+bc &= c(a+b)+a^2-b^2 \\ &= c(a+b)+(a+b)(a-b) \\ &= (a+b)(c+a-b) \\ &= (a+b)(a-b+c) \end{aligned}$$

09 답 (1) 내림차순 (2) 낮은, 내림차순

29 인수정리를 이용한 고차식의 인수분해

▸ p.70~72

01 답 $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

$P(1)=1-6+11-6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x) &= (x-1)(x^2-5x+6) \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

02 답 $P(x)=(x-2)(x^2+x+3)$

$P(2)=8-4+2-6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2+x+3)$

03 답 $P(x)=(x+2)(x^2-x+1)$

$P(-2)=-8+4+2+2=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x^2-x+1)$

04 답 $P(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$

$P(1)=1-3+4-2=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$

05 답 $P(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$

$P(-1)=-1-4-1+6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)(x-2)(x-3)$

06 답 $P(x)=(x-2)(x+1)(x+3)$

$P(2)=8+8-10-6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2+4x+3)=(x-2)(x+1)(x+3)$

07 답 $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+4)$

$P(1)=1+3-4=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 1 & 4 & 4 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \\ & & -1 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x) &= (x-1)(x^3+x^2+4x+4) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+4) \end{aligned}$$

08 답 $P(x)=(x-1)(x^3+x^2+x-6)$

$P(1)=1-7+6=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^3+x^2+x-6)$

09 답 $P(x)=(2x-1)(x^2+x+1)$

$P\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-1=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)=(2x-1)(x^2+x+1)$

10 답 $P(x)=(x-2)(2x+1)(x-3)$

$P(2)=16-36+14+6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -9 & 7 & 6 \\ & & 4 & -10 & -6 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(2x^2-5x-3)$

$\quad =(x-2)(2x+1)(x-3)$

11 답 $P(x)=(x-1)(2x-1)(x+2)$

$P(1)=2+1-5+2=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ & & 2 & 3 & -2 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(2x^2+3x-2)=(x-1)(2x-1)(x+2)$

12 답 $P(x)=(2x-1)(2x^2+x+1)$

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 4 & 0 & 1 & -1 \\ & & 2 & 1 & 1 \\ \hline & 4 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+2x+2)=(2x-1)(2x^2+x+1)$

13 답 $P(x)=(x-1)^2(2x^2+4x+3)$

$P(1)=2-3-2+3=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 0 & -3 & -2 & 3 \\ & & 2 & 2 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & -1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 2 & 4 & 3 & \\ \hline & 2 & 4 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(2x^3+2x^2-x-3)$

$\quad =(x-1)^2(2x^2+4x+3)$

14 답 $P(x)=(x-1)(2x^3+2x^2+2x-3)$

$P(1)=2-5+3=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ & & 2 & 2 & 2 & -3 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(2x^3+2x^2+2x-3)$

15 답 $a=-1$

다항식 $f(x)=x^3-2x+a$가 $x+1$을 인수로 가지므로

$f(-1)=0$

$-1+2+a=0 \qquad \therefore a=-1$

16 답 $a=4$

17 답 $a=1$

18 답 $a=-21$

19 답 $a=-6$

20 답 $a=0$

21 답 $a=\frac{33}{4}$

다항식 $f(x)=x^3+x^2+ax+4$가 $x+\frac{1}{2}$을 인수로 가지므로

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

$-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}a+4=0,\ -\frac{1}{2}a=-\frac{33}{8} \qquad \therefore a=\frac{33}{4}$

22 답 1) -4 2) $f(x)=(x-2)(x+1)(x-3)$

1) 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+x+6$의 인수가 $x-2$이므로

$f(2)=0$

$8+4a+8=0,\ 4a=-16 \qquad \therefore a=-4$

2) 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=x^3-4x^2+x+6=(x-2)(x^2-2x-3)$

$\quad =(x-2)(x+1)(x-3)$

23 답 1) -8 2) $f(x)=(x-1)(x^2-7x-6)$

1) 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+x+6$의 인수가 $x-1$이므로

$f(1)=0,\ 1+a+7=0 \qquad \therefore a=-8$

2) 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -8 & 1 & 6 \\ & & 1 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & -7 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=x^3-8x^2+x+6$

$\quad =(x-1)(x^2-7x-6)$

24 답 1) 1 2) $f(x)=(x+2)(x^2-x+3)$

1) 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+x+6$의 인수가 $x+2$이므로

$f(-2)=0$

$-8+4a+4=0,\ 4a=4 \qquad \therefore a=1$

2) 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ & & -2 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=x^3+x^2+x+6$

$\quad =(x+2)(x^2-x+3)$

25 답 (1) $f(\alpha)=0$ (2) $x-\alpha$ (3) $x-\alpha$

30 인수분해의 활용

▸ p.73~74

01 답 **800**

$54^2-46^2=(54+46)(54-46)=100\times8=800$

02 답 **3400**

$67^2-33^2=(67+33)(67-33)=100\times34=3400$

03 답 **600**

$51^2+52^2-(48^2+49^2)$

$=(51^2-49^2)+(52^2-48^2)$

$=(51+49)(51-49)+(52+48)(52-48)$

$=100\times2+100\times4=200+400=600$

04 답 **9600**

$99=x$로 놓으면

$99^2-2\times99-3=x^2-2x-3$

$=(x-3)(x+1)$

$=(99-3)(99+1)=96\times100$

$=9600$

05 답 **1000000**

$97=a$로 놓으면

$97^3+3\times97^2\times3+3\times97\times3^2+3^3$

$=a^3+3\times a^2\times3+3\times a\times3^2+3^3$

$=(a+3)^3=(97+3)^3$

$=100^3=1000000$

06 답 **1000000**

$103=a$로 놓으면

$103^3-3\times103^2\times3+3\times103\times3^2-3^3$

$=a^3-3\times a^2\times3+3\times a\times3^2-3^3$

$=(a-3)^3=(103-3)^3$

$=100^3=1000000$

07 답 **501**

$502=x$로 놓으면

$$\frac{502^3-1}{502^2+503}=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$$

$=x-1=502-1=501$

08 답 **1019**

$1020=x$로 놓으면

$$\frac{1020^3-1}{1021\times1020+1}=\frac{x^3-1}{(x+1)x+1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$$

$=x-1=1020-1=1019$

09 **19**

$x^4+xy^3+y^4+yx^3=x(x^3+y^3)+y(y^3+x^3)$

$=(x^3+y^3)(x+y)$

$=\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}(x+y)$

$=\{(-1)^3-3\times(-6)\times(-1)\}\times(-1)$

$=(-1-18)\times(-1)$

$=19$

10 답 **3**

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

이때, $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$$

11 답 **30**

a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$cb^2-ca^2+bc^2-ba^2+ac^2-ab^2$

$=-(c+b)a^2+(c+b)(c-b)a+cb(c+b)$

$=(b+c)\{-a^2+(c-b)a+cb\}$

$=(b+c)(-a+c)(a+b)$

$=(b+c)(c-a)(a+b)$

$=5\times2\times3=30$

12 답 **$a=b$인 이등변삼각형**

a, b, c의 차수가 모두 같으므로

a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(b+c)a^2-(b^2-c^2)a-bc^2-cb^2$

$=(b+c)a^2-(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2-(b-c)a-bc\}$

$=(b+c)(a-b)(a+c)=0$

a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이로 양수이고,

$b+c>0$, $a+c>0$이므로 $a-b=0$

따라서 $a=b$인 이등변삼각형이다.

13 답 **$a=b=c$인 정삼각형**

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

인수분해 공식에 의하여

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

삼각형의 세 변의 길이의 합은 양수이므로

$a+b+c>0$이다.

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉,

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이므로 $a=b=c$이다.

따라서 $a=b=c$인 정삼각형이다.

14 답 **빗변의 길이가 c인 직각삼각형**

a, b, c 중 차수가 가장 낮은 c에 대하여 정리하면

$a^3+ab^2-ac^2+b^3+ba^2-bc^2$

$=-c^2(a+b)+a^3+b^3+ab^2+ba^2$

$=-c^2(a+b)+(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(a+b)$

$=(a+b)(-c^2+a^2-ab+b^2+ab)$

$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

삼각형의 두 변의 길이 a, b의 합은 양수이므로 $a+b>0$이다.

$\therefore a^2+b^2-c^2=0 \Rightarrow a^2+b^2=c^2$

따라서 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

15 답 **(1) 문자 (2) 인수분해 공식**

(3) ① $a=b$, $b=c$ ② $a=b=c$ ③ $a^2+b^2=c^2$

단원 마무리 평가 [23~30]

▸문제편 p.75~79

01 답 ⑤

① $a-d+ac-cd=a-d+c(a-d)=(a-d)(1+c)$

② $9a^2-6a+1=(3a)^2-2\times3a\times1+1^2=(3a-1)^2$

③ $4a^2-12ab+9b^2=(2a)^2-2\times2a\times3b+(3b)^2=(2a-3b)^2$

④ $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$

02 답 ①

$x^3+x^2y-x-y=x(x^2-1)+y(x^2-1)=(x+y)(x^2-1)$

$=(x+y)(x-1)(x+1)$

이므로 인수는 $x+y$, $x-1$, $x+1$ 등이다.

[다른 풀이]

y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(x^2-1)y+x^3-x=(x^2-1)y+x(x^2-1)=(x^2-1)(y+x)$

$=(x+1)(x-1)(x+y)$

이므로 인수는 $x+y$, $x-1$, $x+1$ 등이다.

03 답 ③

$x^2+4y^2-9+4xy=(x+2y)^2-9=(x+2y+3)(x+2y-3)$

$=(x+ay+3)(x+2y+b)$

이므로 $a=2$, $b=-3$

$\therefore a+b=2-3=-1$

04 답 ④

$x^8-y^8=(x^4+y^4)(x^4-y^4)$

$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

따라서 ④ x^3+y^3은 x^8-y^8의 인수가 아니다.

05 답 ④

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=(ax-y+b)(x-cy-d)$

이므로 좌변을 인수분해하기 위해 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

(좌변)$=x^2-(5y-1)x+2(2y^2+y-1)$

$=x^2-(5y-1)x+2(y+1)(2y-1)$

$=\{x-(y+1)\}\{x-2(2y-1)\}$

$=(x-y-1)(x-4y+2)$

$=(ax-y+b)(x-cy-d)$

이므로 $a=1$, $b=-1$, $c=4$, $d=-2$

$\therefore a+b+c+d=2$

06 답 ④

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$이므로

$a=3x$, $b=2y$라 하면

$27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3=(3x-2y)^3$

07 답 ②

$8x^3+ax^2+150x+b=(cx+5)^3$이므로 최고차항 x^3의 계수를 먼저 비교하면 $c=2$이다.

$(2x+5)^3=8x^3+3\times4x^2\times5+3\times2x\times5^2+5^3$

$=8x^3+60x^2+150x+125$

이므로 $a=60$, $b=125$

$\therefore b-a-c=125-60-2=63$

08 답 ④

$8x^3+y^3=(2x)^3+y^3$

$=(2x+y)\{(2x)^2-2x\times y+y^2\}$

$=(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$

09 답 ①

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$이므로

$a=3x-y$, $b=2y$라 하면

$(3x-y)^3+8y^3$

$=(3x-y)^3+(2y)^3$

$=\{(3x-y)+2y\}\{(3x-y)^2-(3x-y)2y+(2y)^2\}$

$=(3x+y)(9x^2-6xy+y^2-6xy+2y^2+4y^2)$

$=(3x+y)(9x^2-12xy+7y^2)$

따라서 인수는 $3x+y$이다.

10 답 ④

$4x^2+y^2+4z^2+4xy-4yz-8zx$

$=(2x)^2+y^2+(-2z)^2+2\times 2x\times y+2\times y\times(-2z)$

$+2\times(-2z)\times 2x$

$=(2x+y-2z)^2$

11 답 ⑤

다항식 $(x-2)^3+(2x+1)^3+(1-3x)^3$에서

$A=x-2$, $B=2x+1$, $C=1-3x$라 하면

$A+B+C=(x-2)+(2x+1)+(1-3x)=0$이므로

$A^3+B^3+C^3=3ABC$

$\therefore (x-2)^3+(2x+1)^3+(1-3x)^3$

$=3(x-2)(2x+1)(1-3x)$

$=-3(x-2)(2x+1)(3x-1)$

따라서 인수는 ⑤ $3x-1$이다.

12 답 ⑤

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$을 이용하여

$81x^4+36x^2+16$을 인수분해하면

$81x^4+36x^2+16=(9x^2+6x+4)(9x^2-6x+4)$이다.

$\therefore$ (두 이차식의 합)

$=9x^2+6x+4+9x^2-6x+4=18x^2+8$

13 답 ②

$(x+2)^2-5(x+2)+6$에서 $x+2=X$라 하면

$X^2-5X+6=(X-2)(X-3)$

$=(x+2-2)(x+2-3)$

$=x(x-1)$

이므로 $(x+2)^2-5(x+2)+6=x(x-1)$

$\therefore$ (두 일차식의 합)$=x+x-1=2x-1$

14 답 ④

$x^2+x=X$로 놓으면

$(x^2+x-12)(x^2+x-20)-180$

$=(X-12)(X-20)-180$

$=X^2-32X+60=(X-2)(X-30)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-30)$

$=(x-1)(x+2)(x-5)(x+6)$

따라서 인수가 아닌 것은 $x+4$이다.

15 답 ③

$(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)-7$을 공통부분이 나타나도록

전개하면

$\{(x+1)(x+2)\}\{(x-1)(x+4)\}-7$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x+\underset{(가)}{\boxed{-4}})-7$

이때, $x^2+3x=X$로 놓으면

$(x^2+3x+2)(x^2+3x+\boxed{-4})-7$

$=(X+2)(X+\boxed{-4})-7=X^2-2X-15$

$=(X+\underset{(나)}{\boxed{3}})(X-5)$

$=(x^2+3x+\boxed{3})(x^2+3x-5)$

이므로 $a=-4$, $b=3$ $\quad\therefore a+b=-4+3=-1$

16 답 ③

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$를 공통부분이 나타나도록

전개하면

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}+k$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+k$

$x^2-5x=X$로 놓으면

$(X+4)(X+6)+k=X^2+10X+24+k$ ⋯ ㉠

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱 꼴로 인수분해되려면

㉠이 X에 대한 일차식의 완전제곱꼴로 인수분해되어야 한다.

따라서 $24+k=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25$이므로 $k=1$

17 답 ⑤

두 다항식을 인수분해하면

$x^4+7x^2+10=(x^2+5)(x^2+2)$이고,

$x^4-4x^2-45=(x^2+5)(x^2-9)$

$=(x^2+5)(x+3)(x-3)$

이므로 공통인 인수는 ⑤ x^2+5이다.

18 답 ③

$x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$

$=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

$=(x^2+x+2)(x^2+ax+b)$

이므로 $a=-1$, $b=2$

$\therefore ab=-2$

19 답 ⑤

$x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$

$=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

따라서 주어진 식의 인수는 ⑤ x^2+2x+2이다.

20 답 ②

$x^4-8x^2y^2+4y^4=(x^4-4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2$

$=(x^2-2y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+2xy-2y^2)(x^2-2xy-2y^2)$

21 답 ②

$$\begin{aligned} x^2-2y+y^2-2xy+2x+1 &= x^2-2(y-1)x+y^2-2y+1 \\ &= x^2-2(y-1)x+(y-1)^2 \\ &= \{x-(y-1)\}^2 \\ &= (x-y+1)^2 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수는 ② $x-y+1$이다.

22 답 ①

다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+4xy+3y^2+ax-7y+2$

$=x^2+(4y+a)x+(3y^2-7y+2)$

$=x^2+(4y+a)x+(3y-1)(y-2)$

주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$(3y-1)+(y-2)=4y+a$, $4y-3=4y+a$

$\therefore a=-3$

23 답 ①

다항식을 차수가 가장 낮은 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} a^4+a^2c^2-b^2c^2-b^4 &= (a^2-b^2)c^2+(a^4-b^4) \\ &= (a^2-b^2)c^2+(a^2+b^2)(a^2-b^2) \\ &= (a^2-b^2)(c^2+a^2+b^2) \\ &= (a+b)(a-b)(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수는 ① $a-b$이다.

24 답 6

다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} 2x^2+xy-3y^2+4x+y+2 &= 2x^2+(y+4)x-(3y^2-y-2) \\ &= 2x^2+(y+4)x-(y-1)(3y+2) \\ &= \{2x+(3y+2)\}\{x-(y-1)\} \\ &= (2x+3y+2)(x-y+1) \\ &= (ax+by+2)(x+cy+1) \end{aligned}$$

이므로 $a=2$, $b=3$, $c=-1$

$\therefore a+b-c=2+3-(-1)=6$

[다른 풀이]

$2x^2+xy-3y^2+4x+y+2=(ax+by+2)(x+cy+1)$이므로

전개하여 각 항의 계수를 비교하자.

(i) x^2항의 계수

좌변에서 2, 우변에서 a이므로 $a=2$

$\therefore 2x^2+xy-3y^2+4x+y+2=(2x+by+2)(x+cy+1)$

(ii) y^2항의 계수

좌변에서 -3, 우변에서 bc이므로 $bc=-3$ ⋯ ㉠

(iii) xy항의 계수

좌변에서 1, 우변에서 $ac+b=2c+b$이므로 $2c+b=1$

$\therefore b=1-2c$ ⋯ ㉡

이를 ㉠에 대입하면

$(1-2c)c=-3$, $-2c^2+c+3=0$

$(-2c+3)(c+1)=0 \quad \therefore c=-1\left(\because c\neq\frac{3}{2}\right)$

이 값을 ㉡에 대입하면 $b=3$

(i)~(iii)에서 $a=2$, $b=3$, $c=-1$이다.

$\therefore a+b-c=6$

25 답 ③

주어진 식을 전개한 뒤, b에 대한 내림차순으로 정리하면

$ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$

$=ab^2-a^2b+ac^2-a^2c+2abc-b^2c-bc^2$

$=(a-c)b^2-(a^2-2ac+c^2)b-a^2c+ac^2$

$=(a-c)b^2-(a-c)^2b-ac(a-c)$

$=(a-c)\{b^2-(a-c)b-ac\}$

$=(a-c)(b-a)(b+c)=-(a-b)(b+c)(a-c)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

26 답 (1) 0 (2) $(x-3)(x+2)^2$

$P(x)=x^3+x^2-8x-12$이므로

1) $P(3)=27+9-24-12=0$

2) 다항식 $P(x)$는 $P(3)=0$이므로 $x-3$을 인수로 가진다.

조립제법을 이용하면

3	1	1	−8	−12
		3	12	12
	1	4	4	0

$\therefore P(x)=(x-3)(x^2+4x+4)=(x-3)(x+2)^2$

27 답 ②, ④

$f(x)=2x^3-11x^2+10x+8$로 놓으면 $f(2)=0$이다.

$x-2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

2	2	−11	10	8
		4	−14	−8
	2	−7	−4	0

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x-2)(2x^2-7x-4) \\ &= (x-2)(x-4)(2x+1) \end{aligned}$$

28 답 ⑤

$f(x)=2x^3+ax^2-2x+3$으로 놓으면

$f\left(\frac{3}{2}\right)=0$이므로

$2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3+a\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\frac{3}{2}+3=0$

$\frac{27}{4}+\frac{9}{4}a=0$

$\therefore a=-3 \Rightarrow f(x)=2x^3-3x^2-2x+3$

한편, $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{3}{2} & 2 & -3 & -2 & 3 \\ & & 3 & 0 & -3 \\ \hline & 2 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)(2x^2-2)=\frac{1}{2}(2x-3)\times2(x^2-1)$

$=(2x-3)(x^2-1)=(2x-3)(x+1)(x-1)$

29 답 ③

$f(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$으로 놓으면

$f(1)=1+1-7-1+6=0$이고,

$f(2)=16+8-28-2+6=0$이므로

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ & & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline 2 & 1 & 2 & -5 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & 8 & 6 & \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^3+2x^2-5x-6)$

$=(x-1)(x-2)(x^2+4x+3)$

$=(x-1)(x-2)(x+1)(x+3)$

30 답 ①

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+9^2-10^2$

$=(1-2)\times(1+2)+(3-4)\times(3+4)$

$+\cdots+(9-10)\times(9+10)$

$=-(1+2)-(3+4)-\cdots-(9+10)$

$=-(1+2+3+\cdots+9+10)=-55$

31 답 ⑤

$95=x$로 놓으면

$95^3+5\times95^2-5^2\times95-5^3=x^3+5x^2-25x-125$

$=x^2(x+5)-25(x+5)$

$=(x+5)(x^2-25)$

$=(x+5)^2(x-5)$

$=(95+5)^2\times(95-5)$

$=900000$

32 답 ④

$201=x$라 하면

$\frac{201^3+1}{(201\times200)+1}=\frac{x^3+1}{x(x-1)+1}$

$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$

$=x+1$

$=201+1=202$

33 답 288

$x^3+x^2y-xy^2-y^3=x^2(x+y)-y^2(x+y)$

$=(x+y)(x^2-y^2)$

$=(x+y)^2(x-y)$

이때, $x-y=8$, $xy=-7$이므로

$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$=64-28=36$

$\therefore (x+y)^2(x-y)=36\times8$

$=288$

34 답 ④

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -2 & 1 & 2 & -31 & -32 & 60 \\ & & -2 & 0 & 62 & -60 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -31 & 30 & \boxed{0} \\ & & 1 & 1 & -30 & \\ \hline & 1 & 1 & -30 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=x^4+2x^3-31x^2-32x+60$

$=(x+2)(x-1)(x^2+x-30)$

$=(x-1)(x+2)(x-5)(x+6)$

$\therefore f(15)=(15-1)(15+2)(15-5)(15+6)$

$=14\times17\times10\times21$

$=49980$

35 답 ④

a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-c^2b$

$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=0$

이므로 $b=c$ 또는 $a=b$ 또는 $a=c$

따라서 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

36 답 ③

$a^4+b^4-c^4+2a^2b^2$

$=(a^4+2a^2b^2+b^4)-c^4$

$=(a^2+b^2)^2-(c^2)^2$

$=(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

이때, $a^2+b^2+c^2\neq0$이므로 $a^2+b^2-c^2=0$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

Ⅱ-1 복소수

01 실수 ▸ p.84

01 답 ○ **02** 답 △ **03** 답 ○

04 답 ○ **05** 답 △ **06** 답 ○

07 답 △ **08** 답 △

09 답 ± 2

$(+2)^2=4$, $(-\boxed{2})^2=4$이므로

4의 제곱근은 $\pm\boxed{2}$이다.

10 답 $\pm\sqrt{2}$

$\sqrt{4}=2$이고, $(\pm\boxed{\sqrt{2}})^2=2$이므로

2의 제곱근은 $\pm\boxed{\sqrt{2}}$이다.

11 답 ± 5 **12** 답 $\pm\sqrt{5}$

13 답 ± 10 **14** 답 $\pm\sqrt{10}$

02 허수단위 i와 복소수의 분류 ▸ p.85~87

01 답 i

02 답 $\sqrt{5}i$

$\sqrt{-5}=\sqrt{5\times(-1)}=\sqrt{5}\times\sqrt{-1}=\sqrt{5}\boxed{i}$

03 답 $3i$

$\sqrt{-9}=\sqrt{9\times(-1)}=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}=\boxed{3i}$

04 답 $2\sqrt{6}i$ **05** 답 $10i$ **06** 답 $-\sqrt{19}i$

07 답 $-6i$

$-\sqrt{-36}=-\sqrt{36}i=-6i$

08 답 실수부분 : 2, 허수부분 : 3

09 답 실수부분 : 5, 허수부분 : -3

10 답 실수부분 : $\sqrt{2}$, 허수부분 : -6

11 답 실수부분 : 9, 허수부분 : 0

12 답 실수부분 : 0, 허수부분 : 5

13 답 ○ **14** 답 ○

15 답 ○ **16** 답 △

17 답 ×

$\frac{1}{2}i=0+\frac{1}{2}i$로 실수부분이 0이므로 $\frac{1}{2}i$는 순허수이다.

18 답 ○

$\frac{2}{3}i^2=\frac{2}{3}\times(-1)=-\frac{2}{3}$이므로 실수이다.

19 답 × **20** 답 △ **21** 답 △

22 답 △ **23** 답 △ **24** 답 △

25 답 ○ **26** 답 ○ **27** 답 ○

28 답 × **29** 답 ○ **30** 답 ×

31 답 ○ **32** 답 ○ **33** 답 ○

34 답 ○ **35** 답 × **36** 답 ×

37 답 $x=1$

복소수 $z=(x^2-1)+(x-1)i$가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 한다.

$x-1=0$ $\quad\therefore x=1$

38 답 $x=-3$ 또는 $x=3$

복소수 $z=(x+3)+(x^2-9)i$가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 한다.

$x^2-9=0$, $x^2=9$ $\quad\therefore x=\pm 3$

$x=3$이면 $z=6$으로 실수이고,

$x=-3$이면 $z=0$으로 실수이다.

따라서 x의 값은 -3 또는 3이다.

39 답 $x=2$

복소수 $z=2(x^2-5)-(4-2x)i$가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 한다.

$4-2x=0$ $\quad\therefore x=2$

따라서 x의 값은 2이다.

40 답 $x=-2$

복소수 $z=(x^2-4)+(x-2)i$가 순허수가 되려면 실수부분이 0이어야 한다.

$x^2-4=0$, $x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm 2$

$x=2$이면 $z=0$으로 실수이고,

$x=-2$이면 $z=-4i$로 순허수이다.

따라서 x의 값은 -2이다.

41 답 $x=-5$

42 답 $x=-7$

복소수 $z=(x^2-49)-4(7-x)i$가 순허수가 되려면 실수부분이 0이어야 한다.

$x^2-49=0$, $x^2=49$ $\quad\therefore x=\pm 7$

$x=7$이면 $z=0$으로 실수이고,

$x=-7$이면 $z=-56i$로 순허수이다.

따라서 x의 값은 -7이다.

43 답 ×

$x^2=-1$이면 $x=\pm i$이다.

44 답 ○ **45** 답 × **46** 답 ×

47 답 × **48** 답 ○ **49** 답 ×

50 답 × **51** 답 ○ **52** 답 ×

53 답 ×

실수는 복소수이므로 복소수 $z=a+bi$에서 허수부분이 0이면 실수이면서 복소수이기도 하다.

수력 UP

학생 A가 경기도 시민이면서 대한민국 국민이기도 한 것처럼 실수는 허수부분이 0인 복소수이므로 실수이면서 복소수이기도 하다.

54 답 ×

55 답 (1) -1, i (2) 실수부분, 허수부분

(3) $b=0$ / $a=0, b\neq0$ / $a\neq0, b\neq0$

03 복소수가 서로 같을 조건

▸ p.88

01 답 $x=-1, y=3$

$x+1$, $y-3$이 실수이므로

$(x+1)+(y-3)i=0$을 만족시키려면

$x+1=\boxed{0}$, $y-3=\boxed{0}$이어야 한다.

$\therefore x=\boxed{-1}$, $y=\boxed{3}$

02 답 $x=-4, y=3$

실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 같아야 하므로 $3=\boxed{y}$, $x=\boxed{-4}$

$\therefore x=\boxed{-4}$, $y=\boxed{3}$

03 답 $x=2, y=-4$

$3x-7i=6+(2y+1)i$에서 $3x=6$, $-7=2y+1$

$\therefore x=2$, $y=-4$

04 답 $x=-4, y=3$

$x+y$, $2y$는 실수이므로 $6+(x+y)i=2y-i$를 만족시키려면

$6=2y$, $x+y=-1$

$\therefore x=-4$, $y=3$

05 답 $x=2, y=3$

$(x+y)+(x-y)i=5-i$에서 $x+y=5$, $x-y=-1$

두 식을 연립하면 $x=2$, $y=3$

06 답 $x=-2, y=-1$

$(2x+1)+(1+y)i=-3$에서 $2x+1=-3$, $1+y=0$

$\therefore x=-2$, $y=-1$

07 답 $x=-1, y=1$

$(1+x)+(2-y)i=i$에서 $1+x=0$, $2-y=1$

$\therefore x=-1$, $y=1$

08 답 $x=2, y=5$

$(x-2)+3i=(y-2)i$에서 $x-2=0$, $3=y-2$

$\therefore x=2$, $y=5$

09 답 $x=5, y=5$

$x+(x-y)i=5$에서 $x=5$, $x-y=0$

$\therefore x=5$, $y=5$

10 답 (1) c, d (2) 0, 0

04 켤레복소수

▸ p.89~90

01 답 $3-2i$ **02** 답 $2+3i$ **03** 답 -7

04 답 $-10i$ **05** 답 $3-8i$ **06** 답 0

07 답 $2-\sqrt{3}$ **08** 답 $-(\sqrt{2}+1)i$

09 답 $a=1, b=-1$ **10** 답 $a=2, b=-3$

11 답 $a=1,\ b=0$

12 답 $a=-6,\ b=-4$

13 답 $a=2+\sqrt{11},\ b=0$

14 답 $a=-7,\ b=-1$

15 답 $a=-8,\ b=-\sqrt{3}$

16 답 $a=-1,\ b=2$

$\overline{-2i-1}=-1+2i=a+bi$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$

17 답 $a=0,\ b=4$

18 답 $a=0,\ b=-2$

19 답 $a=0,\ b=\sqrt{3}$

20 답 $a=\sqrt{5},\ b=-\sqrt{3}$

21 답 $a=-21,\ b=0$

22 답 $a=9,\ b=-1$

$\overline{i+9}=9-i=a+bi$

$\therefore\ a=9,\ b=-1$

23 답 $a-bi,\ \overline{a+bi},\ a-bi$

05 복소수의 덧셈과 뺄셈

▸ p.91~92

01 답 $1+5i$

$(-1+2i)+(2+3i)=(-1+2)+(2+3)i=1+5i$

02 답 $5+i$

$(3+2i)+(2-i)=(3+2)+(2-1)i=5+i$

03 답 $13-2i$

$(8-3i)+(5+i)=(8+5)+(-3+1)i=13-2i$

04 답 -8

$(-i-4)+(-4+i)=(-4-4)+(-1+1)i=-8$

05 답 $-5-3i$

$(7i+7)+(-10i-12)=(7-12)+(7-10)i=-5-3i$

06 답 $2+2i$

$(-3i+8)+(5i-6)=(8-6)+(-3+5)i=2+2i$

07 답 $-7-5i$

$$\begin{aligned}(-5-4i)+(-2-i)&=(-5-2)+(-4-1)i\\&=-7-5i\end{aligned}$$

08 답 $-5-8i$

$$\begin{aligned}(-1-i)+(-4-7i)&=(-1-4)+(-1-7)i\\&=-5-8i\end{aligned}$$

09 답 $-2+i$

$$\begin{aligned}(1+2i)-(3+i)&=1+2i-3-i\\&=(1-3)+(2-1)i\\&=-2+i\end{aligned}$$

10 답 $3-2i$

$(2+4i)-(6i-1)=2+4i-6i+1=3-2i$

11 답 $4+3i$

$(1+5i)-(2i-3)=1+5i-2i+3=4+3i$

12 답 -9

$(-3-4i)-(6-4i)=-3-4i-6+4i=-9$

13 답 $-11-6i$

$(-8-i)-(5i+3)=-8-i-5i-3=-11-6i$

14 답 $2+6i$

$(-3+4i)-(-2i-5)=-3+4i+2i+5=2+6i$

15 답 $-1+2i$

16 답 $-5+3i$

17 답 2

$z_1=1+i,\ z_2=i-2,\ z_3=3-2i$에 대하여

$z_1+z_2+z_3=(1-2+3)+(1+1-2)i=2$

18 답 $13-6i$

$z_1=1+i,\ z_2=i-2,\ z_3=3-2i$에 대하여

$$\begin{aligned}2z_3+z_1-3z_2&=2(3-2i)+(1+i)-3(i-2)\\&=6-4i+1+i-3i+6\\&=(6+1+6)+(-4+1-3)i\\&=13-6i\end{aligned}$$

19 답 $-11-i$

$z_1=1+i,\ z_2=i-2,\ z_3=3-2i$에 대하여

$$\begin{aligned}5z_2-(4z_1-z_3)&=5(i-2)-\{4(1+i)-(3-2i)\}\\&=5i-10-(4+4i-3+2i)\\&=5i-10-1-6i\\&=-11-i\end{aligned}$$

20 답 $-9+12i$

$z_1=1+i$, $z_2=i-2$, $z_3=3-2i$에 대하여

$$\begin{aligned}2(z_1+z_2)-(-2z_1+3z_3)&=2z_1+2z_2+2z_1-3z_3\\&=4z_1+2z_2-3z_3\\&=4(1+i)+2(i-2)-3(3-2i)\\&=4+4i+2i-4-9+6i\\&=(4-4-9)+(4+2+6)i\\&=-9+12i\end{aligned}$$

21 답 $1+3i$ **22** 답 2 **23** 답 $-6i$

24 답 $2+i$ **25** 답 4 **26** 답 $-2i$

27 답 (1) $a+c,\ b+d$ (2) $a-c,\ b-d$

06 복소수의 곱셈과 나눗셈

▸ p.93~98

01 답 $5+i$

$(2+3i)(1-i)$

$=\{2\times\boxed{1}-3\times(\boxed{-1})\}+\{2\times(-1)+3\times1\}i$

$=\boxed{5}+i$

02 답 $16-2i$

$(2+3i)(2-4i)=(4+12)+(-8+6)i=16-2i$

03 답 $1+3i$

$(1+i)(2+i)=(2-1)+(1+2)i=1+3i$

04 답 5

$(2+i)\overline{(2+i)}=(2+i)(2-i)=4+1=5$

05 답 $16+7i$

$(6-5i)(1+2i)=(6+10)+(12-5)i=16+7i$

06 답 41

$(4+5i)\overline{(4+5i)}=(4+5i)(4-5i)=16+25=41$

07 답 2

$(1+i)(1-i)=(1+1)+(-1+1)i=2$

08 답 $-5-i$

$(-2-3i)(1-i)=(-2-3)+(2-3)i=-5-i$

09 답 -10

$(-3-i)(3-i)=(-9-1)+(3-3)i=-10$

10 답 -2

$(-\sqrt{2}i)^2=(-\sqrt{2})^2i^2=2\times(-1)=-2$

11 답 $-5-12i$

$$\begin{aligned}(2-3i)^2&=2^2-2\times2\times3i+(3i)^2\\&=4-12i-9\\&=-5-12i\end{aligned}$$

12 답 17

$(4+i)(4-i)=4^2-i^2=16+1=17$

13 답 34

$(3-5i)(3+5i)=3^2-(5i)^2=9+25=34$

14 답 $-13+84i$

$$\begin{aligned}(6i-7)(-6i+7)&=-(7-6i)(7-6i)\\&=-(49-84i-36)\\&=-13+84i\end{aligned}$$

15 답 $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

$$\frac{1}{2-i}=\frac{2+i}{(2-i)(2+i)}=\frac{\boxed{2}+i}{\boxed{5}}=\boxed{\frac{2}{5}}+\boxed{\frac{1}{5}}i$$

16 답 $-\frac{7}{25}-\frac{26}{25}i$

$$\begin{aligned}\frac{2-5i}{4+3i}&=\frac{(2-5i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}\\&=\frac{\boxed{-7}-26i}{25}\\&=\boxed{-\frac{7}{25}}-\frac{26}{25}i\end{aligned}$$

17 답 i

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

18 답 $-\frac{36}{17}+\frac{9}{17}i$

$$\begin{aligned}\frac{9i}{1-4i}&=\frac{9i(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}\\&=\frac{9i-36}{17}\\&=-\frac{36}{17}+\frac{9}{17}i\end{aligned}$$

19 답 $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$

$$\frac{3i}{2+i}=\frac{3i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6i+3}{5}=\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$$

20 답 $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$

$$\frac{2+i}{3i}=\frac{(2+i)i}{3i^2}=\frac{2i-1}{-3}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$$

21 답 $5-4i$

$$\frac{4+5i}{i}=\frac{(4+5i)i}{i^2}=\frac{4i-5}{-1}=5-4i$$

22 답 $16-13i$

$$\begin{aligned}3i-\{-2i+2(9i-8)\}&=3i-(-2i+\boxed{18}\,i-\boxed{16})\\&=3i-(16i-16)\\&=16-13i\end{aligned}$$

23 답 $-3-4i$

$$\begin{aligned}(4+2i)\times(1-2i)\div 2i&=\frac{(4+2i)(1-2i)}{2i}=\frac{8-6i}{2i}\\&=\frac{(8-6i)\times i}{2i\times i}=-3-4i\end{aligned}$$

24 답 1

$$\begin{aligned}\frac{2}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}&=\frac{2(1+i)+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}\\&=\frac{2+2i+1-2i-1}{2}=\frac{2}{2}=1\end{aligned}$$

25 답 $10+5i$

$$\begin{aligned}(3+2i)(2-i)-\frac{6-8i}{1+2i}&=(8+i)-\frac{(6-8i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\\&=(8+i)-\frac{-10-20i}{5}\\&=(8+i)+(2+4i)=10+5i\end{aligned}$$

26 답 2

$$z_1+z_2=(1-i)+(1+i)=2$$

27 답 $-2i$

$$z_1{}^2=(1-i)^2=1^2-2i+i^2=1-2i-1=-2i$$

28 답 $2i$

$$z_2{}^2=(1+i)^2=1^2+2i+i^2=1+2i-1=2i$$

29 답 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$$\frac{1}{z_1}=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

30 답 $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_2}&=-\frac{1}{1+i}=\frac{-(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1+i}{2}\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\end{aligned}$$

31 답 1

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2}{2}=1$$

32 답 $-2-2i$

$$z_1{}^3=(1-i)^3=1^3-3i+3i^2-i^3=1-3i-3+i=-2-2i$$

33 답 $-2-i$

$$z_1+z_2=-2i+(i-2)=-2-i$$

34 답 -4

$$z_1{}^2=(-2i)^2=-4$$

35 답 $3-4i$

$$z_2{}^2=(i-2)^2=i^2-4i+4=3-4i$$

36 답 $-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}i$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}&=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{-2-i}{-2i(i-2)}=\frac{-2-i}{2+4i}\\&=\frac{-(2+i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{-8+6i}{20}=-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}i\end{aligned}$$

37 답 $-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{-2i}{i-2}=\frac{-2i(i+2)}{(i-2)(i+2)}=\frac{2-4i}{-5}\\&=-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i\end{aligned}$$

38 답 $-\frac{1}{2}-i$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{i-2}{-2i}=\frac{(i-2)\times i}{-2i\times i}=\frac{-1-2i}{2}=-\frac{1}{2}-i$$

39 답 $-2+11i$

$$\begin{aligned}z_2{}^3&=(i-2)^3=i^3-3\times i^2\times 2+3\times i\times 2^2-2^3\\&=-i+6+12i-8=-2+11i\end{aligned}$$

40 답 $a=2$

$A=a(1+i)+2(3-i)=(a+\boxed{6})+(a-\boxed{2})i$이므로

허수부분이 $\boxed{0}$이어야 A가 실수이다.

$a-\boxed{2}=0$ $\quad\therefore a=\boxed{2}$

41 답 $a=-6$

$A=(a+6)+(a-2)i$가 실수부분이 0이고,

허수부분이 0이 아니어야 A가 순허수이다.

$a+6=0$ $\quad\therefore a=-6$

42 답 $a=8$

$A=(4+2i)(a-4i)=(4a+8)+(-16+2a)i$이므로

허수부분이 0이어야 A가 실수이다.

$-16+2a=0 \qquad \therefore a=8$

43 답 $a=-2$

$A=(4a+8)+(-16+2a)i$가 실수부분이 0이고,

허수부분이 0이 아니어야 A가 순허수이다.

$4a+8=0 \qquad \therefore a=-2$

44 답 $a=-\frac{2}{3}$

$A=-(1-2ai)(3-4i)=-(3-8a)+(4+6a)i$이므로

허수부분이 0이면 A가 실수이다.

$4+6a=0 \qquad \therefore a=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

45 답 $a=\frac{3}{8}$

$A=-(3-8a)+(4+6a)i$가 실수부분이 0이고,

허수부분이 0이 아니어야 A가 순허수이다.

$-(3-8a)=0,\ 3-8a=0 \qquad \therefore a=\frac{3}{8}$

46 답 $1-i$

$z=1+i$이므로 $\overline{z}=1-i$이다.

47 답 $2i$

$z-\overline{z}=(1+i)-(1-i)=(1-1)+(i+i)=2i$

48 답 $-2i$

$\overline{z}^2=(1-i)^2=1^2-2i+i^2=1-2i-1=-2i$

49 답 i

$$\frac{z}{\overline{z}}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1+i)^2}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$$

50 답 4

$z+\overline{z}=(2+i)+(2-i)=4$

51 답 5

$z\overline{z}=(2+i)(2-i)=4-i^2=5$

52 답 6

$z^2+\overline{z}^2=(2+i)^2+(2-i)^2=3+4i+3-4i=6$

53 답 10

$z\overline{z}=(1+3i)\times(1-3i)=1+9=10$

54 답 $-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

$$\frac{z}{\overline{z}}=\frac{1+3i}{1-3i}=\frac{(1+3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{1+6i-9}{10}$$
$$=\frac{-8+6i}{10}=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$$

55 답 $-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{1-3i}{1+3i}=\frac{(1-3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{1-6i-9}{10}$$
$$=\frac{-8-6i}{10}=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$$

[다른 풀이]

$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{1}{\frac{z}{\overline{z}}}$이므로 **54**번의 결과 $\frac{z}{\overline{z}}=\frac{-4+3i}{5}$를 이용하자.

$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{1}{\frac{-4+3i}{5}}=\frac{5(-4-3i)}{(-4+3i)(-4-3i)}$$
$$=\frac{-20-15i}{16+9}=\frac{-20-15i}{25}=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$$

56 답 $1-2i$

$z=1+2i$이므로 $\overline{z}=1-2i$이다.

57 답 2

$z+\overline{z}=(1+2i)+(1-2i)=2$

58 답 $4i$

$z-\overline{z}=(1+2i)-(1-2i)=4i$

59 답 5

$z\overline{z}=(1+2i)(1-2i)=5$

60 답 $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

$$\frac{z}{\overline{z}}=\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$=\frac{-3+4i}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

61 답 -6

$$z^2+\overline{z}^2=(1+2i)^2+(1-2i)^2$$
$$=(-3+4i)+(-3-4i)=-6$$

62 답 20

$z\overline{z}=(-2+4i)\times(-2-4i)=4+16=20$

63 답 $-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$

$$\frac{z}{\overline{z}}=\frac{-2+4i}{-2-4i}=\frac{(-2+4i)(-2+4i)}{(-2-4i)(-2+4i)}=\frac{4-16i-16}{20}$$
$$=\frac{-12-16i}{20}=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

64 답 $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

$$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{-2-4i}{-2+4i}=\frac{(-2-4i)(-2-4i)}{(-2+4i)(-2-4i)}=\frac{4+16i-16}{20}$$

$$=\frac{-12+16i}{20}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

[다른 풀이]

$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{1}{\frac{z}{\bar{z}}}$이므로 **63**번의 결과 $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{-3-4i}{5}$를 이용하자.

$$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{1}{\frac{-3-4i}{5}}=\frac{5(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}$$

$$=\frac{-15+20i}{25}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

65 답 10

$\alpha+\beta=(1+2i)+(2-i)=3+i$

$\overline{\alpha+\beta}=3-i \qquad \therefore (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})=(3+i)(3-i)=10$

66 답 25

$\alpha+\beta=(3-i)+(2+i)=5$

$\overline{\alpha+\beta}=5 \qquad \therefore (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})=5\times5=25$

67 답 34

$\alpha+\beta=(2+2i)+(3+i)=5+3i$

$\overline{\alpha+\beta}=5-3i$

$\therefore (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})=(5+3i)(5-3i)$

$=25+9=34$

68 답 $x=-7$, $y=2$

$(x+6y)+(x-2y)i=5-11i$

$x+6y=5 \cdots$ ㉠, $x-2y=-11 \cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $8y=16 \qquad \therefore y=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x+12=5$

$\therefore x=-7$

69 답 $x=2$, $y=1$

$(2+i)^2=4+4i+i^2=3+\boxed{4}i$이고,

$(2-i)^2=4-4i+i^2=3-\boxed{4}i$이다.

$\therefore (2+i)^2x+(2-i)^2y=(3+\boxed{4}i)x+(3-\boxed{4}i)y$

$=(3x+3y)+(\boxed{4}x-\boxed{4}y)i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x+3y=9$, $\boxed{4}x-\boxed{4}y=4$

$\therefore x+y=\boxed{3}$, $x-y=\boxed{1}$

두 식을 연립하여 풀면 $x=\boxed{2}$, $y=\boxed{1}$

70 답 $x=0$, $y=2$

$$\frac{x}{1-i}+\frac{y}{1+i}=\frac{x(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{y(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}i=1-i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{x+y}{2}=1$, $\frac{x-y}{2}=-1 \qquad \therefore x+y=2$, $x-y=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=2$

71 답 (1) $ac-bd$, $ad+bc$

(2) $c-di$ / $c-di$ / c^2+d^2, c^2+d^2 / $c+di$

07 켤레복소수의 성질

▸ p.99

01 답 $7+7i$

$\alpha+\beta=3-2i-5i+4=7-7i$이고,

켤레복소수의 성질 $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$에 의하여

$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=\overline{7-7i}=7+7i$

[다른 풀이]

$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{3-2i}+\overline{-5i+4}$

$=3+2i+5i+4=7+7i$

02 답 98

$(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(7-7i)(7+7i)=49+49=98$

03 답 98

$\alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(7-7i)(7+7i)=98$

04 답 10

$\alpha-\beta=3-2i-(-5i+4)=3-2i+5i-4=-1+3i$

이므로

$\alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

$=(-1+3i)(-1-3i)=10$

05 답 $\frac{108}{533}+\frac{1242i}{533}$

$$\frac{\bar{\beta}}{\alpha}+\frac{\bar{\alpha}}{\beta}=\frac{\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(3-2i)(3+2i)+(4-5i)(4+5i)}{(3-2i)(4-5i)}$$

$$=\frac{9+4+16+25}{12-10+(-15-8)i}=\frac{54}{2-23i}$$

$$=\frac{54(2+23i)}{(2-23i)(2+23i)}=\frac{108+1242i}{533}$$

$$=\frac{108}{533}+\frac{1242i}{533}$$

수력 UP

108, 533, 1242를 각각 소인수분해해 보면
$108=2^2\times3^3$, $533=13\times41$, $1242=2\times3^3\times23$
이므로 실수부분과 허수부분의 유리수는 더 이상 약분되지 않는 기약분수 꼴이다.

06 답 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

$\overline{z+zi}=\overline{z(1+i)}=\overline{z}\,\overline{(1+i)}=\overline{z}(1-i)=i$

이므로 $\overline{z}=\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{i-1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$\therefore z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

07 답 $\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$

$\overline{z-zi}=\overline{z(1-i)}=\overline{z}\,\overline{(1-i)}=\overline{z}(1+i)=4-3i$이므로

$\overline{z}=\frac{4-3i}{1+i}=\frac{(4-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(4-3)+(-4-3)i}{2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$

$\therefore z=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$

08 답 $7+2i$

$\overline{z}=\frac{2+7i}{i}=\frac{(2+7i)i}{i\times i}=\frac{-7+2i}{-1}=7-2i$

이므로 $z=7+2i$

[다른 풀이]

$z=a+bi$라 두면

$\overline{z}i=2+7i$에서 $(a-bi)i=ai+b=2+7i$

$\therefore a=7,\ b=2$

$\therefore z=7+2i$

09 답 $1+3i$

$z=a+bi$라 두면

$(2-3i)z+(5-4i)\overline{z}=4-16i$

$(2-3i)(a+bi)+(5-4i)(a-bi)$

$=(2a+3b)+(2b-3a)i+(5a-4b)+(-5b-4a)i$

$=(7a-b)+(-7a-3b)i=4-16i$

이므로 $7a-b=4$ ⋯ ㉠, $-7a-3b=-16$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$-4b=-12 \qquad \therefore b=3$

이 값을 ㉠에 대입하면

$7a-3=4,\ 7a=7 \qquad \therefore a=1$

$\therefore z=1+3i$

10 답 (1) $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ (2) $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ (3) $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ (4) $\overline{z_2}$ / $\overline{z_1}$

08 i의 거듭제곱

▸ p.100~101

01 답 -1

02 답 $-i$

03 답 i

$i^9=i^{8+1}=(i^4)^2\times i=\boxed{i}$

04 답 $-i$

$(-i)^5=-i^5=-\boxed{i^4}\times i=\boxed{-i}$

05 답 1

$i^{100}=(i^4)^{25}=1$

06 답 2

$i^{100}+i^{200}=(\boxed{i^4})^{25}+(\boxed{i^4})^{50}=1+\boxed{1}=\boxed{2}$

07 답 $-1-i$

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}=\frac{i+1}{i^2}=-1-i$

08 답 0

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$

09 답 0

$\frac{1}{i}+i^2+\frac{1}{i^3}+i^4=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$

10 답 i

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

11 답 -1

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=i^2=-1$

12 답 i

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5=i^5=i$

13 답 -1

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}=i^{10}=(i^4)^2\times i^2=-1$

14 답 1

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000}=i^{1000}=(i^4)^{250}=1$

15 답 -1

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2030}=i^{2030}=(i^4)^{507}\times i^2=-1$

16 답 $-i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

17 답 -1

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=(-i)^2=-1$

18 답 i

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3=(-i)^3=-i^3=-(-i)=i$

19 답 -1

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}=(-i)^{10}=i^{10}=(i^4)^2\times i^2=-1$

20 답 -1

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1002}=(-i)^{1002}=(i^4)^{250}\times i^2=-1$

21 답 $1, i$ / $-1, -i$

09 음수의 제곱근

▸ p.102~103

01 답 $\sqrt{2}i$ **02** 답 $\sqrt{3}i$ **03** 답 $3i$

04 답 $2\sqrt{3}i$

$\sqrt{-12}=\boxed{\sqrt{12}}i=\boxed{2\sqrt{3}}i$

05 답 $\frac{3}{2}i$

06 답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}i$

$\sqrt{-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}i=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}i=\frac{2\sqrt{3}}{3}i$

07 답 $\pm i$ **08** 답 $\pm\sqrt{3}i$

09 답 $\pm 2\sqrt{2}i$

$\pm\sqrt{8}i=\pm\boxed{2\sqrt{2}}i$

10 답 $\pm 3i$

$\pm\sqrt{9}i=\pm 3i$

11 답 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}i=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

12 답 $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}i$

$\pm\sqrt{\frac{2}{3}}i=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}i$

13 답 $x=\pm\sqrt{2}$ **14** 답 $x=\pm\sqrt{2}i$

15 답 $x=\pm\sqrt{3}i$ **16** 답 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

17 답 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

18 답 $x=\pm 3\sqrt{3}i$

$x^2=-27,\ x=\pm\sqrt{27}i \quad \therefore x=\pm 3\sqrt{3}i$

19 답 $3\sqrt{2}i$

$\sqrt{-2}+\sqrt{-8}=\boxed{\sqrt{2}}i+2\sqrt{2}i=(\boxed{\sqrt{2}}+2\sqrt{2})i=\boxed{3\sqrt{2}}i$

20 답 $6i$

$\sqrt{-16}+\sqrt{-4}=4i+2i=6i$

21 답 $-3i$

$\sqrt{-4}-\sqrt{-25}=2i-5i=-3i$

22 답 $-5\sqrt{2}i$

$3\sqrt{-2}-4\sqrt{-8}=3\sqrt{2}i-8\sqrt{2}i=-5\sqrt{2}i$

23 답 $-2\sqrt{5}-\sqrt{3}i$

$\sqrt{-12}-\sqrt{20}-\sqrt{-27}=2\sqrt{3}i-2\sqrt{5}-3\sqrt{3}i$

$=-2\sqrt{5}-\sqrt{3}i$

24 답 (1) $\sqrt{a}$ (2) $\pm\sqrt{a}i$

10 음수의 제곱근의 성질

▸ p.104~105

01 답 $\sqrt{6}i$

$\sqrt{-2}\sqrt{3}=\boxed{\sqrt{2}}i\times\sqrt{3}=\boxed{\sqrt{6}}i$

02 답 $4i$

$\sqrt{-2}\sqrt{8}=\sqrt{2}i\times 2\sqrt{2}=4i$

03 답 $9i$

$\sqrt{27}\sqrt{-3}=3\sqrt{3}\times\sqrt{3}i=9i$

04 답 $-\sqrt{6}$

$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$

05 답 -4

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\times 2\sqrt{2}i=-4$

06 답 $-\sqrt{2}i$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}=-\sqrt{\frac{6}{-3}}=-\boxed{\sqrt{-2}}=-\boxed{\sqrt{2}}i$$

07 답 $\sqrt{3}i$

$$\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}i$$

08 답 $\frac{\sqrt{21}}{7}i$

$$\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}i$$

09 답 $\frac{i}{2}$

$$\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}i}{2\sqrt{2}}=\frac{i}{2}$$

10 답 $-2i$

$$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\frac{16}{-4}}=-\sqrt{-4}=-\sqrt{4}i=-2i$$

[다른 풀이]

$$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}=\frac{4}{2i}=\frac{2}{i}=\frac{2i}{i^2}=-2i$$

11 답 2

$$\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}=\frac{2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i}=2$$

12 답 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

$$\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}i}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

13 답 $3\sqrt{2}i$

$$\sqrt{-2}+\sqrt{-32}-\sqrt{-8}=\sqrt{2}i+4\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i$$
$$=(1+4-2)\sqrt{2}i=3\sqrt{2}i$$

14 답 $-2i$

$$\frac{2-2\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}=\frac{2-2i}{1+i}=\frac{2(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{2\times(-2i)}{2}=-2i$$

15 답 $-15-\frac{3}{5}i$

$$\sqrt{-9}\sqrt{-25}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{-25}}=3i\times5i+\frac{3}{5i}=-15-\frac{3}{5}i$$

16 답 $-2+2i$

$$\sqrt{8}\sqrt{-2}+\sqrt{-8}\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$$
$$=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i\times\sqrt{2}i+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}+\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}$$
$$=4i-4-2i+2=-2+2i$$

17 답 $-\frac{2}{3}$

$$\frac{1-\sqrt{-2}}{1+\sqrt{-2}}+\frac{1+\sqrt{-2}}{1-\sqrt{-2}}$$
$$=\frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}+\frac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}=\frac{(1-\sqrt{2}i)^2+(1+\sqrt{2}i)^2}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{1-2\sqrt{2}i-2+1+2\sqrt{2}i-2}{3}$$
$$=-\frac{2}{3}$$

18 답 $-a+b$

0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$를 만족시키므로

$a<0$, $b<0$이다.

$\therefore \sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}=|a|-|b|=-a+b$

19 답 ab

0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$를 만족시키므로

$a<0$, $b<0$이다.

$\therefore |a||b|=-a\times(-b)=ab$

20 답 $-a-b$

0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$를 만족시키므로

$a<0$, $b<0$이다.

$\therefore \sqrt{(a+b)^2}=|a+b|=-a-b$

21 답 $1-i$

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이다.

주어진 식을 정리하면

$(1+i)(a+bi)+i(a-bi)=1+i$

$a-b+(b+a)i+ai+b=1+i$

$a+(2a+b)i=1+i$이므로 좌변과 우변의 실수부분과 허수부분을 각각 비교하면

$a=1$, $2a+b=1$

$\therefore a=\boxed{1}$, $b=-\boxed{1}$

따라서 $z=a+bi=\boxed{1-i}$이다.

22 답 $1+2i$

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이다.

주어진 식을 정리하면

$(1+i)(a+bi)-3(a-bi)=-4+9i$

$a-b+(b+a)i-3a+3bi=-4+9i$

$(-2a-b)+(a+4b)i=-4+9i$

$-2a-b=-4$, $a+4b=9$

$\therefore a=1$, $b=2$

따라서 $z=a+bi=1+2i$이다.

23 답 $-16-7i$

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이다.

주어진 식을 정리하면

$(1-i)(a-bi)+i(a+bi)=-2+7i$

$a-b-(b+a)i+ai-b=-2+7i$

$(a-2b)-bi=-2+7i$

$a-2b=-2$, $-b=7$ $\quad\therefore a=-16$, $b=-7$

따라서 $z=a+bi=-16-7i$이다.

24 답 (1) $-\sqrt{ab}$ (2) $-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

단원 마무리 평가 [01~10]

▸문제편 p.106~110

01 답 ③

① 복소수는 크기 비교를 할 수 없다.

② 복소수는 실수일 수도 있고, 실수가 아닌 복소수일 수도 있다.

④ -1의 제곱근은 $\pm i$이다.

⑤ $3i+4$의 실수부분은 4이고, 허수부분은 3이다.

02 답 ⑤

① $-\sqrt{2}i$, ③ $4i$는 순허수이다.

② -2, ④ 0은 실수이다.

03 답 ④

ㄱ. $-1+2i$는 허수이다.

ㄴ. $(\sqrt{-3})^2=(\sqrt{3}i)^2=-3$이므로 실수이다.

ㄷ. $\sqrt{-4}=\sqrt{4}i=2i$이므로 허수이다.

ㄹ. $3i^2=3\times(-1)=-3$이므로 실수이다.

따라서 허수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04 답 ②

$x(x-4)+(1-x)i$가 실수이려면 허수부분이 0이어야 한다.

$\therefore x=1$

05 답 ④

복소수 $(x+1)(x-2)+(x+1)(x+3)i$가 순허수가 되려면

(실수부분)$=0$, (허수부분)$\neq 0$이어야 하므로

$(x+1)(x-2)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

$(x+3)(x+1)\neq 0$에서 $x\neq -1$ 그리고 $x\neq -3$

$\therefore x=2$

06 답 ④

$(x-3)+(4-y)i=0$이려면 (실수부분)$=0$,

(허수부분)$=0$이어야 한다.

$\therefore x=3$, $y=4$

07 답 ②

$(x+2)+(x-y)i=5-i$에서 복소수가 서로 같을 조건에

의하여 실수부분은 실수부분끼리 같고, 허수부분은

허수부분끼리 같아야 한다.

$x+2=5$ $\quad\therefore x=3$

이 값을 $x-y=-1$에 대입하면 $3-y=-1$ $\quad\therefore y=4$

$\therefore x+y=7$

08 답 ①

$(2x+y)+(4x-3y)i=4-7i$에서 복소수가 서로 같을

조건에 의하여 실수부분은 실수부분끼리 같고, 허수부분은

허수부분끼리 같아야 한다.

$2x+y=4$ ⋯ ㉠, $4x-3y=-7$ ⋯ ㉡

㉠$\times 3+$㉡을 하면 $10x=5$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $1+y=4$ $\quad\therefore y=3$

$\therefore x+y=\dfrac{7}{2}$

09 답 ②

② $-\sqrt{3}i+2$의 켤레복소수는 허수부분의 부호가 바뀌어야

하므로 $\sqrt{3}i+2$이다.

10 답 ②

$\overline{\sqrt{2}i+\sqrt{3}}=-\sqrt{2}i+\sqrt{3}=a+bi$이므로

$a=\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{2}$ $\quad\therefore ab=-\sqrt{6}$

11 답 ①

$z=7+3i$이면 $\bar{z}=7-3i$이므로

$\bar{z}=(x-y)+(x+y)i=7-3i$

x, y가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=7$ ⋯ ㉠, $x+y=-3$ ⋯ ㉡

㉠$+$㉡을 하면 $2x=4$ $\quad\therefore x=2$

이 값을 ㉡에 대입하면 $2+y=-3$ $\quad\therefore y=-5$

$\therefore xy=-10$

12 답 ④

④ $(3+i)(3-i)=3^2-i^2=9-(-1)=10$

13 답 ⑤

$x(1-i)+2(-2+i)=(x-4)+(-x+2)i$가 순허수이려면

(실수부분)$=0$, (허수부분)$\neq 0$이어야 하므로

$x-4=0$, $-x+2\neq 0$ $\quad\therefore x=4$

14 답 ③

$(1-2i)x+(2+i)y=4-3i$에서

$(x+2y)+(-2x+y)i=4-3i$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=4 \cdots$ ㉠, $-2x+y=-3 \cdots$ ㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면 $5y=5$　　$\therefore y=1$

이를 ㉠에 대입하면 $x=2$　　$\therefore xy=2$

15 답 ④

$(4-3i)^2=7-24i$이므로 실수부분은 7이다.

16 답 ②

$(3-i)(4+3i)+\dfrac{2-4i}{1+3i}$

$=(3-i)(4+3i)+\dfrac{(2-4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$

$=15+5i+\dfrac{-10-10i}{10}$

$=15+5i-1-i$

$=14+4i=a+bi$

이므로 $a=14$, $b=4$

$\therefore a+b=18$

17 답 ①

$(1+i)(x+yi)=x+(x+y)i+yi^2$

$=(x-y)+(x+y)i$

$=-3+7i$

이므로 $x-y=-3 \cdots$ ㉠, $x+y=7 \cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2x=4$　　$\therefore x=2$

이 값을 ㉡에 대입하면 $2+y=7$　　$\therefore y=5$

$\therefore xy=10$

18 답 ⑤

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$라 하면

$\overline{z_1}=a-bi$, $\overline{z_2}=c-di$이다.

① $\overline{z_1}\times\overline{z_2}=(a-bi)(c-di)$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{z_1z_2}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\therefore \overline{z_1}\times\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}$

② $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}$

$=(a+c)-(b+d)i$

$\overline{z_1}+\overline{z_2}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i$

$\therefore \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

③ $\overline{(\overline{z_1})}=\overline{a-bi}=a+bi=z_1$

④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\dfrac{a+bi}{c+di}\right)}=\overline{\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}}$

$=\overline{\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}}$

$=\dfrac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

$\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\dfrac{a-bi}{c-di}=\dfrac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}$

$=\dfrac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

$\therefore \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

⑤ $\overline{z_1z_2}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$ad+bc\neq0$이면 허수이고, $ad+bc=0$이면 실수이므로

$\overline{z_1z_2}$는 항상 허수인 것은 아니다.

19 답 ③

$\overline{z}=-z$에서 $z+\overline{z}=0$이므로 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$a+bi+a-bi=0$　　$\therefore a=0$

따라서 복소수 $z=bi$로 순허수 또는 0이어야 한다.

$z=(2-\sqrt{2})i$이면 $\overline{z}=-(2-\sqrt{2})i$이므로

$z+\overline{z}=0$이다.

20 답 ①

$z\overline{z}^2+z^2\overline{z}=z\overline{z}(\overline{z}+z)$

$=(2+3i)\times(2-3i)\times\{(2-3i)+(2+3i)\}$

$=(2^2+3^2)\times4=13\times4=52$

21 답 ②

$\alpha=\dfrac{2+i}{1-i}=\dfrac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2+3i-1}{1-(-1)}=\dfrac{1+3i}{2}$

$\therefore \overline{\alpha}=\dfrac{1-3i}{2}$

$\beta=\dfrac{3-i}{1+i}=\dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3-4i-1}{1-(-1)}=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i$

$\therefore \overline{\beta}=1+2i$

$\therefore \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=\dfrac{1+3i}{2}\times(1+2i)+\dfrac{1-3i}{2}\times(1-2i)$

$=\dfrac{(1+5i-6)+(1-5i-6)}{2}$

$=\dfrac{-10}{2}=-5$

[다른 풀이]

$\overline{\alpha}\beta=\overline{\alpha\overline{\beta}}$이고

$\alpha\overline{\beta}=\dfrac{1+3i}{2}\times(1+2i)=\dfrac{-5+5i}{2}$이므로

$\overline{\alpha}\beta=\overline{\alpha\overline{\beta}}=\overline{\left(\dfrac{-5+5i}{2}\right)}=\dfrac{-5-5i}{2}$이다.

$\therefore \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=-5$

22 답 ①

$z=\frac{2(1+i)+i}{(1+i)+1}=\frac{2+3i}{2+i}=\frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{7+4i}{5}$이고,

$\bar{z}=\overline{\left(\frac{7+4i}{5}\right)}=\frac{7-4i}{5}$이므로

$z\bar{z}=\frac{7+4i}{5}\times\frac{7-4i}{5}=\frac{65}{25}=\frac{13}{5}$

[다른 풀이]

$z=\frac{2(1+i)+i}{(1+i)+1}=\frac{2+3i}{2+i}$

$\bar{z}=\overline{\left(\frac{2+3i}{2+i}\right)}=\frac{\overline{2+3i}}{\overline{2+i}}=\frac{2-3i}{2-i}$

이므로

$z\bar{z}=\frac{2+3i}{2+i}\times\frac{2-3i}{2-i}=\frac{(2+3i)(2-3i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-9i^2}{4-i^2}=\frac{13}{5}$

23 답 ①

$x=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=-3$

$4x^2-4x+4=0\qquad\therefore x^2-x=-1$

이를 주어진 식 $3x^2-3x-2$에 대입하면

$3x^2-3x-2=3(x^2-x)-2$

$=3\times(-1)-2=-5$

[다른 풀이]

$x=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이므로

$3x^2-3x-2=3\times\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2-3\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}-2$

$=3\times\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-2$

$=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$=-5$

24 답 ③

$i^2=i^6=i^{10}=i^{14}=-1,\ i^3=i^7=i^{11}=i^{15}=-i,$

$i^4=i^8=i^{12}=1$이므로

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{15}$

$=(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+\cdots+(1+i-1-i)$

$=0$

25 답 ①

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=\frac{2i}{2}=i$이고,

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{1-(-1)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2034}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2034}=i^{2034}+(-i)^{2034}$

$=2i^{2034}=2\times(i^4)^{508}\times i^2$

$=2i^2=-2$

26 답 ③

$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$ (n은 자연수)이므로

$\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}+\frac{1}{i^9}+\cdots+\frac{1}{i^{13}}$

$=\frac{i^3+i^2+i+1}{i^9}+\frac{i^3+i^2+i+1}{i^{13}}$

$=\frac{-i-1+i+1}{i}+\frac{-i-1+i+1}{i}=0$

[다른 풀이]

$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$ (n은 자연수)이므로

$\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}+\frac{1}{i^9}+\cdots+\frac{1}{i^{13}}$

$=\frac{1}{-1}+\frac{1}{-i}+\frac{1}{1}+\frac{1}{i}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-i}+\frac{1}{1}+\frac{1}{i}$

$=\left(-1-\frac{1}{i}+1+\frac{1}{i}\right)+\left(-1-\frac{1}{i}+1+\frac{1}{i}\right)=0$

27 답 ①

등식 $i+2i^2+3i^3+\cdots+102i^{102}+103i^{103}=x+yi$에서

$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$ (n은 자연수)이므로

좌변을 정리하면

$i+2i^2+3i^3+4i^4+5i^5+6i^6+7i^7+8i^8$

$+\cdots+97i^{97}+98i^{98}+99i^{99}+100i^{100}$

$+101i^{101}+102i^{102}+103i^{103}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$

$+(97i-98-99i+100)+101i-102-103i$

$=\underbrace{(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)}_{25\text{개}}-2i-102$

$=25(2-2i)-2i-102$

$=-52-52i=x+yi$

이므로 $x=-52,\ y=-52$

$\therefore x+y=-104$

28 답 ③

$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$를 제곱하면 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이고,

$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$를 제곱하면 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$이다.

$\therefore \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$

$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{2n}+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{2n}\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$

$=i^{2n}+(-i)^{2n}\times(-i)$

$=(-1)^n+(-1)^n\times(-i)$

$=1+1\times(-i)$ ($\because$ n은 짝수)

$=1-i$

29 답 ⑤

$-\sqrt{81}=-9$이므로 -9의 제곱근은 $\pm 3i$

30 답 ③

$$\frac{2-\sqrt{-4}}{2+\sqrt{-4}}+\frac{3+\sqrt{-9}}{3-\sqrt{-9}}=\frac{2-\sqrt{4}i}{2+\sqrt{4}i}+\frac{3+\sqrt{9}i}{3-\sqrt{9}i}$$
$$=\frac{2-2i}{2+2i}+\frac{3+3i}{3-3i}$$
$$=\frac{2(1-i)}{2(1+i)}+\frac{3(1+i)}{3(1-i)}$$
$$=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1-i)^2+(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{-2i+2i}{2}=0$$

31 답 ⑤

$$(\sqrt{3}+\sqrt{-3})^2=\{\sqrt{3}(1+i)\}^2$$
$$=3\times 2i=6i$$

32 답 ②

$$\sqrt{-3}\sqrt{-27}+\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{-8}}=\sqrt{3}i\sqrt{27}i+\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}i}$$
$$=\sqrt{3}i\times 3\sqrt{3}i+\frac{4\sqrt{2}i}{2\sqrt{2}\times(-1)}$$
$$=-9-2i$$

33 답 ③

$\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-4}}=-\sqrt{\dfrac{x-2}{x-4}}$가 성립하려면

$x-2\geq 0$, $x-4<0$ $\quad\therefore 2\leq x<4$

따라서 $2\leq x<4$를 만족시키는 정수 x의 값은 2, 3으로 모두 2개다.

34 답 ④

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 a, b의 부호는 $a<0$, $b<0$

따라서 $a+b<0$, $a<0$이므로

$$\sqrt{(a+b)^2}-|a|=|a+b|-|a|$$
$$=-(a+b)-(-a)$$
$$=-a-b+a$$
$$=-b$$

35 답 ③

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이려면 $a>0$, $b<0$이므로 $a-b>0$

$$\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{b^2}+|a+1|=|a-b|-|b|+|a+1|$$
$$=a-b+b+a+1$$
$$=2a+1$$

36 답 ①

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이다.

$$(1-i)z+i\bar{z}=(1-i)(a+bi)+i(a-bi)$$
$$=a+b+(b-a)i+ai+b$$
$$=(a+2b)+bi$$
$$=4+2i$$

이므로 $a+2b=4$, $b=2$ $\quad\therefore a=0$

$\therefore z=0+2i=2i$

Ⅱ-2 이차방정식

11 일차방정식의 풀이

▸ p.111

01 답 $x=0$

$3x=0$ $\quad\therefore x=0$

02 답 $x=\frac{9}{4}$

$4x-1=8$, $4x=9$ $\quad\therefore x=\dfrac{9}{4}$

03 답 $x=-1$

$5x+2=3x$, $5x-3x=-2$, $2x=-2$ $\quad\therefore x=-1$

04 답 $x=-4$

$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{x}{4}$, $4(x+1)=3x$, $4x+4=3x$

$\therefore x=-4$

05 답 해는 무수히 많다.

$x+2=3x-2x+2$, $x+2=x+2$

$0\times x=0$ $\quad\therefore$ 해는 무수히 많다.

06 답 $a\neq 0$일 때, $x=0$이고, $a=0$일 때, 해는 무수히 많다.

$ax=0$

(i) $a\neq 0$일 때, $x=0$

(ii) $a=0$일 때, $0\times x=0$ $\quad\therefore$ 해는 무수히 많다.

07 답 $a\neq 1$일 때, $x=\frac{3a+3}{a-1}$이고, $a=1$일 때, 해는 없다.

$a(x-3)=x+3$, $ax-3a=x+3$, $(a-1)x=3a+3$

(i) $a\neq 1$일 때, $x=\boxed{\dfrac{3a+3}{a-1}}$

(ii) $a=1$일 때, $0\times x=6$

$\therefore$ $\boxed{\text{해는 없다.}}$

08 답 $a\neq1$일 때, $x=\frac{-a-6}{a-1}$이고, $a=1$일 때, 해는 없다.

$a(x+1)=x-6$, $(a-1)x=-a-6$

(i) $a\neq1$일 때, $x=\frac{-a-6}{a-1}$

(ii) $a=1$일 때, $0\times x=-7$

$\therefore$ 해는 없다.

09 답 $a\neq-9$일 때, $x=\frac{6a}{a+9}$이고,

$a=-9$일 때, 해는 없다.

$3x(3+a)-a(2x+2)=4a$, $(9+a)x=6a$

(i) $a\neq-9$일 때, $x=\frac{6a}{a+9}$

(ii) $a=-9$일 때, $0\times x=-54$

$\therefore$ 해는 없다.

10 답 (1) 방정식

(2) ① $\frac{b}{a}$ ② $b=0$, 무수히 많다. ③ $b\neq0$, 없다.

12 절댓값 기호를 포함한 일차방정식의 풀이

▸ p.112

01 답 $x=1$ 또는 $x=-3$

$|x+1|=2$에서

(i) $x\geq-1$이면 $x+1=\boxed{2}$, $x=2-1=\boxed{1}$

(ii) $x<-1$이면 $x+1=-\boxed{2}$, $x=-2-1=-\boxed{3}$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는

$x=\boxed{1}$ 또는 $x=-\boxed{3}$이다.

02 답 $x=4$ 또는 $x=-1$

$|2x-3|=5$에서 $2x-3=\pm5$

(i) $2x-3\geq0$이면 $x\geq\frac{3}{2}$일 때이고,

$2x=5+3=8$ $\quad\therefore x=4$

(ii) $2x-3<0$이면 $x<\frac{3}{2}$일 때이고,

$2x=-5+3=-2$ $\quad\therefore x=-1$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는 $x=4$ 또는 $x=-1$이다.

03 답 $x=\frac{3}{7}$

$|3x+1|=-4x+4$에서

(i) $3x+1\geq0$이면 $x\geq-\frac{1}{3}$일 때이고,

$3x+1=-4x+4$, $7x=3$ $\quad\therefore x=\frac{3}{7}$

(ii) $3x+1<0$이면 $x<-\frac{1}{3}$일 때이고,

$3x+1=4x-4$ $\quad\therefore x=5$

그러나 이 값은 범위를 충족시키지 않으므로 해가 될 수 없다.

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는 $x=\frac{3}{7}$이다.

04 답 $x=8$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

$5|x-2|-3x=6$에서 $5|x-2|=3x+6$

(i) $x-2\geq0$이면 $x\geq2$일 때이고,

$5x-10=3x+6$, $2x=16$ $\quad\therefore x=8$

(ii) $x-2<0$이면 $x<2$일 때이고,

$5x-10=-3x-6$, $8x=4$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는 $x=8$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이다.

05 답 $x=3$

$4|3-x|-2x+6=0$에서 $4|3-x|=2x-6$

(i) $3-x\geq0$이면 $x\leq3$일 때이고,

$12-4x=2x-6$, $6x=18$ $\quad\therefore x=3$

(ii) $3-x<0$이면 $x>3$일 때이고,

$-12+4x=2x-6$, $2x=6$ $\quad\therefore x=3$

그러나 이 값은 범위를 충족시키지 않으므로 해가 될 수 없다.

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는 $x=3$이다.

06 답 $x=-2$ 또는 $x=1$

$|x|+|x+1|=3$에서

(i) $x<-1$이면 $-x-x-1=3$, $-2x=4$

$\therefore x=-\boxed{2}$

(ii) $-1\leq x<0$이면 $-x+x+1=3$, $1\neq\boxed{3}$

(iii) $x\geq0$이면 $x+x+1=3$, $2x=2$

$\therefore x=\boxed{1}$

(i)~(iii)에 의하여 방정식의 해는

$x=-\boxed{2}$ 또는 $x=\boxed{1}$이다.

07 답 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

$|3x|+|x+2|=4$에서

(i) $x<-2$이면 $-3x-x-2=4$, $-4x=6$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$

그러나 이 값은 범위를 충족시키지 않으므로 해가 될 수 없다.

(ii) $-2\le x<0$이면 $-3x+x+2=4$, $-2x=2$

$\therefore x=-1$

(iii) $x\ge 0$이면 $3x+x+2=4$, $4x=2$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

(i)~(iii)에 의하여 방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이다.

08 답 $x=2$

$|x-2|=|6-3x|$ ⋯ ㉠, $x-2=\pm(6-3x)$

(i) $x-2=6-3x$이면 $4x=8$ $\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 (좌변)$=0$, (우변)$=0$이므로 등호가 성립한다.

(ii) $x-2=-6+3x$이면 $2x=4$ $\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

(좌변)$=0$, (우변)$=0$이므로 등호가 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는 $x=2$이다.

09 답 $x=0$ 또는 $x=6$

$|2x-3|=|x+3|$ ⋯ ㉠, $2x-3=\pm(x+3)$

(i) $2x-3=-x-3$이면 $3x=0$ $\therefore x=0$

$x=0$을 ㉠에 대입하면

(좌변)$=|-3|=3$, (우변)$=3$이므로 등호가 성립한다.

(ii) $2x-3=x+3$이면 $x=6$

$x=6$을 ㉠에 대입하면 (좌변)$=9$, (우변)$=9$이므로 등호가 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는 $x=0$ 또는 $x=6$이다.

10 답 (i) 0, 범위 (ii) 방정식 (iii) 범위

13 이차방정식의 풀이 ▸ p.113~114

01 답 $x=4$ 또는 $x=-5$

$x^2+x-20=0 \Rightarrow (x-4)(x+5)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-5$

02 답 $x=2$ 또는 $x=8$

$x^2-10x+16=0 \Rightarrow (x-2)(x-8)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=8$

03 답 $x=2$ (중근)

$x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0$ $\therefore x=2$ (중근)

04 답 $x=-7$ 또는 $x=6$

$x^2+x-42=0 \Rightarrow (x+7)(x-6)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=6$

05 답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$2x^2-x-1=0 \Rightarrow (2x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

06 답 $x=\pm 2$

상수항을 이항하면 $x^2=4$

$\therefore x=\pm\boxed{2}$

07 답 $x=\pm\frac{2}{3}$

$9x^2-4=0$

$9x^2=4$, $x^2=\frac{4}{9}$ $\therefore x=\pm\frac{2}{3}$

08 답 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x^2+x+1=0$에서 $x^2+x=-1$

양변에 $\boxed{\frac{1}{4}}$을 더하면 $x^2+x+\frac{1}{4}=-1+\frac{1}{4}$

$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=-\frac{3}{4}$

$x+\frac{1}{2}=\boxed{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}i$ $\therefore x=-\frac{1}{2}\boxed{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}i$

09 답 $x=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$

$2x^2-4x+5=0$

$x^2-2x+\frac{5}{2}=0$, $x^2-2x=-\frac{5}{2}$

$(x-1)^2=-\frac{3}{2}$, $x-1=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$

$\therefore x=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$

10 답 $x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

11 답 $x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{6}$

$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times3\times1}}{2\times3}=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{6}$

12 답 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times4}=-1\pm\sqrt{3}i$

13 답 $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$

$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-2\times1}}{2}=\frac{1\pm i}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$

14 답 $x=2$

방정식 $x^2-mx+2m-4=0$의 한 근이 $x=-1$이므로

$(-1)^2-m\times(-1)+2m-4=0$

$3m=\boxed{3}$ $\quad\therefore m=\boxed{1}$

$m=\boxed{1}$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\boxed{2}$

따라서 다른 한 근은 $x=\boxed{2}$이다.

15 답 $x=\frac{5}{2}$

$x=-1$을 대입하면

$2-m+2m+1=0$ $\quad\therefore m=-3$

$m=-3$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$2x^2-3x-5=0$, $(2x-5)(x+1)=0$

$\therefore x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=-1$

따라서 다른 한 근은 $x=\frac{5}{2}$이다.

16 답 $x=1$

$x=2$를 대입하면

$m\times2^2+(1-2m)\times2+m^2+2m-1=0$, $m^2+2m+1=0$

$(m+1)^2=0$ $\quad\therefore m=-1$

$m=-1$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$-x^2+3x-2=0$, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 $x=1$이다.

17 답 (1) $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ (2) $p\pm\sqrt{q}$ (3) $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

14 절댓값 기호를 포함한 이차방정식의 풀이

▸ p.115

01 답 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2+|x|-2=0 \Rightarrow (|x|+\boxed{2})(|x|-\boxed{1})=0$

그런데 $|x|\geq0$이므로 $|x|=\boxed{1}$이다.

따라서 $x=\boxed{-1}$ 또는 $x=\boxed{1}$

[다른 풀이]

$x^2+|x|-2=0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2-x-2=0$, $(x-2)(x+1)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1$

그런데 $x<0$이므로 $x=-1$이다.

(ii) $x\geq0$일 때

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=1$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=-1$ 또는 $x=1$

02 답 $x=0$ 또는 $x=\pm4$

$x^2-4|x|=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-4|x|=0$, $|x|(|x|-4)=0$

$|x|=0$ 또는 $|x|=4$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm4$

03 답 $x=\pm5$

$x^2-2|x|-15=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-2|x|-15=0$, $(|x|-5)(|x|+3)=0$

$|x|=5$ ($\because |x|\geq0$) $\quad\therefore x=\pm5$

04 답 $x=0$ 또는 $x=\pm3$

$x^2-3|x|=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-3|x|=0$, $|x|(|x|-3)=0$

$|x|=0$ 또는 $|x|=3$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm3$

05 답 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

$x^2-4|x|+3=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-4|x|+3=0$, $(|x|-1)(|x|-3)=0$

$|x|=1$ 또는 $|x|=3$

$\therefore x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

06 답 $x=\pm\frac{1}{2}$ 또는 $x=\pm3$

$2x^2-7|x|+3=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$2|x|^2-7|x|+3=0$, $(2|x|-1)(|x|-3)=0$

$|x|=\frac{1}{2}$ 또는 $|x|=3$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2}$ 또는 $x=\pm3$

07 답 (1) $|x|^2$ (2) $|x|$, $-x$

15 이차방정식의 근의 판별

▸ p.116~118

01 답 **서로 다른 두 실근**

$x^2-2x-2=0$에서 $\frac{D}{4}=\left(\frac{2}{2}\right)^2-1\times(-2)=1+2=3>0$

∴ 서로 다른 두 실근

02 답 **서로 다른 두 실근**

$x^2-3x+1=0$에서 $D=3^2-4\times1\times1=9-4=5>0$

∴ 서로 다른 두 실근

03 답 **서로 다른 두 실근**

$2x^2+x-\frac{1}{2}=0$에서 $D=1^2-4\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1+4=5>0$

∴ 서로 다른 두 실근

04 답 **서로 다른 두 실근**

$3x^2+\sqrt{3}x-12=0$에서

$D=(\sqrt{3})^2-4\times3\times(-12)=3+144=147>0$

∴ 서로 다른 두 실근

05 답 **서로 다른 두 실근**

$\frac{1}{2}x^2-4x+6=0$에서 $\frac{D}{4}=\left(\frac{-4}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times6=4-3=1>0$

∴ 서로 다른 두 실근

06 답 **서로 다른 두 실근**

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times2=25-8=17>0$

∴ 서로 다른 두 실근

07 답 **서로 다른 두 실근**

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(-1)=5>0$

∴ 서로 다른 두 실근

08 답 **서로 다른 두 실근**

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times2=2>0$

∴ 서로 다른 두 실근

09 답 **서로 다른 두 실근**

$D=1^2-4\times3\times(-2)=25>0$

∴ 서로 다른 두 실근

10 답 **서로 다른 두 실근**

$D=5^2-4\times3\times(-2)=49>0$

∴ 서로 다른 두 실근

11 답 **중근**

$\frac{D}{4}=3^2-9\times1=0$ ∴ 중근

12 답 **중근**

$\frac{D}{4}=(-3)^2-9\times1=0$ ∴ 중근

13 답 **중근**

$\frac{D}{4}=(-6)^2-4\times9=0$ ∴ 중근

14 답 **중근**

$\frac{D}{4}=(\sqrt{6})^2-2\times3=0$ ∴ 중근

15 답 **서로 다른 두 허근**

$D=0^2-4\times1\times9=-36<0$

∴ 서로 다른 두 허근

16 답 **서로 다른 두 허근**

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3\times4=-3<0$

∴ 서로 다른 두 허근

17 답 **서로 다른 두 허근**

$D=(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$

∴ 서로 다른 두 허근

18 답 **서로 다른 두 허근**

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times5=-1<0$

∴ 서로 다른 두 허근

19 답 $\boldsymbol{k>-\frac{9}{4}}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times1\times(-k)$

$D=9+4k>0$ ∴ $k>\boxed{-\frac{9}{4}}$

20 답 $\boldsymbol{k<4}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times k=4-k>0$ ∴ $k<4$

21 답 $\boldsymbol{k<63}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=8^2-1\times(k+1)=64-k-1=63-k>0$

∴ $k<63$

22 답 $k\le\frac{13}{4}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times(k-1)=-4k+13\ge0$

$\therefore k\le\boxed{\frac{13}{4}}$

23 답 $k<0$ 또는 $0<k\le2$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-k\times8=16-8k\ge0 \quad \therefore k\le2$

이때, $k\ne0$이어야 하므로 $k<0$ 또는 $0<k\le2$

24 답 $k\le\frac{1}{2}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$x^2-2(k-2)x+k^2+2=0$에서

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+2)=k^2-4k+4-k^2-2$

$=-4k+2\ge0$

$\therefore k\le\frac{1}{2}$

25 답 $k<-\frac{9}{4}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times1\times(-k)$

$D=9+4k<0 \quad \therefore k<\boxed{-\frac{9}{4}}$

26 답 $k>\frac{25}{8}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times2k=25-8k<0 \quad \therefore k>\frac{25}{8}$

27 답 $k>\frac{1}{4}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4\times1\times k^2$

$=4k^2-4k+1-4k^2$

$=-4k+1<0$

$\therefore k>\frac{1}{4}$

28 답 $k>\frac{1}{12}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times3\times k=1-12k<0 \quad \therefore k>\frac{1}{12}$

29 답 $k>3$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-k\times3=9-3k<0 \quad \therefore k>3$

30 답 $k<0$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$x^2+2(k+1)x+k^2+1=0$에서

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2+1)=k^2+2k+1-k^2-1=2k<0$

$\therefore k<0$

31 답 $k<8$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$x^2-8kx+16k^2-2k+16=0$에서

$\frac{D}{4}=\left(\frac{8k}{2}\right)^2-16k^2+2k-16$

$=16k^2-16k^2+2k-16=2k-16<0$

$\therefore k<8$

32 답 $k=-\frac{9}{4}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times1\times(-k)=0 \quad \therefore k=\boxed{-\frac{9}{4}}$

33 답 $k=\frac{1}{4}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times k\times1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$

34 답 $k=6$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(2k-3)=12-2k=0 \quad \therefore k=6$

35 답 $k=\frac{1}{4}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4k^2=-4k+1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$

36 답 $k=2$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4(k-1)=(k-2)^2=0 \quad \therefore k=2$

37 답 b^2-4ac (1) 실근 (2) 중근 (3) 허근

16 이차식이 완전제곱식이 되는 조건

▸ p.119

01 답 2

(이차식)$=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-a\times2=\boxed{0} \quad \therefore a=\boxed{2}$

02 답 -2

$\frac{D}{4}=2^2-a\times(-2)=4+2a=0 \qquad \therefore a=-2$

03 답 $-\frac{9}{4}$

$D=3^2-4\times a\times(-1)=9+4a=0 \qquad \therefore a=-\frac{9}{4}$

04 답 4

$\frac{D}{4}=6^2-a\times 9=36-9a=0 \qquad \therefore a=4$

05 답 $-\frac{25}{16}$

$D=5^2-4\times a\times(-4)=25+16a=0 \qquad \therefore a=-\frac{25}{16}$

06 답 ± 4

$\frac{D}{4}=(-4)^2-a\times a=16-a^2=0 \qquad \therefore a=\pm 4$

07 답 4

$\frac{D}{4}=(2a)^2-a\times(3a+4)=a^2-4a=a(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a\neq 0)$

08 답 b^2-4ac

17 이차방정식의 활용

▸ p.120~121

01 답 $x+4$, $x+6$

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 직사각형의 가로의 길이는 ($\boxed{x+4}$) cm,

세로의 길이는 ($\boxed{x+6}$) cm이다.

02 답 $(x+4)(x+6)$ cm^2

03 답 $2x^2$ cm^2

04 답 $x^2-10x-24=0$

$(x+4)(x+6)=2x^2$

$x^2+10x+24=2x^2 \qquad \therefore x^2-10x-24=0$

05 답 12 cm

$x^2-10x-24=0$, $(x-12)(x+2)=0$

$\therefore x=12\ (\because x>0)$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 12 cm이다.

06 답 가로의 길이 : $(x+5)$ cm, 세로의 길이 : $(x-5)$ cm

07 답 $(x+5)(x-5)$ cm^2

08 답 $\frac{4}{5}x^2$ cm^2

09 답 $x^2-125=0$

$(x+5)(x-5)=\frac{4}{5}x^2$, $x^2-25=\frac{4}{5}x^2$

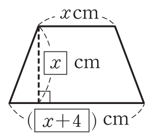
$\frac{1}{5}x^2-25=0 \qquad \therefore x^2-125=0$

10 답 $5\sqrt{5}$ cm

$x^2=125 \qquad \therefore x=5\sqrt{5}\ (\because x>0)$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 $5\sqrt{5}$ cm이다.

11 답 x, $x+4$



사다리꼴의 윗변의 길이를 x cm라 하면

높이는 $\boxed{x}$ cm, 아랫변의 길이는

($\boxed{x+4}$) cm이다.

12 답 $\frac{1}{2}\times(x+x+4)\times x$ cm^2

13 답 $x^2+2x-80=0$

$80=\frac{1}{2}\times(x+x+4)\times x$

$80=(x+2)\times x \qquad \therefore x^2+2x-80=0$

14 답 8 cm

$x^2+2x-80=0 \Rightarrow (x+10)(x-8)=0$

$\therefore x=8\ (\because x>0)$

따라서 사다리꼴의 윗변의 길이는 8 cm이다.

15 답 $2t$, $10-t$

직사각형의 넓이가 100 cm^{2}가 되는 시각을 t초 후라 하면

가로의 길이는 ($10+\boxed{2t}$) cm, 세로의 길이는

($\boxed{10-t}$) cm이다.

16 답 $(10+2t)(10-t)$ cm^2

17 답 $t^2-5t=0$

$(10+2t)(10-t)=100 \Rightarrow 100+10t-2t^2=100$

$\therefore t^2-5t=0$

18 답 5초 후

$t^2-5t=0 \Rightarrow t(t-5)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=5$

따라서 직사각형의 넓이가 100 cm^{2}가 되는 것은 5초 후이다.

19 답 (i) 구하는 값 (ii) 방정식 (iii) 방정식

18 이차방정식의 근과 계수의 관계 ▸ p.122~123

01 답 $x=-1$ 또는 $x=4$

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

02 답 3

03 답 -4

04 답 $x=3$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$2x^2-5x-3=0$, $(x-3)(2x+1)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

05 답 $\frac{5}{2}$

06 답 $-\frac{3}{2}$

07 답 -4, 2

08 답 3, $\frac{5}{2}$

09 답 0, 9

10 답 $\frac{1}{5}$, 0

11 답 2

12 답 -3

13 답 10

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times(-3)=10$

14 답 $-\frac{2}{3}$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$

15 답 0

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=-3+2+1=0$

16 답 16

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$

17 답 $-\frac{10}{3}$

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{10}{-3}=-\frac{10}{3}$

18 답 26

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\times(-3)\times2=26$

[다른 풀이]

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=2\times(10+3)=26$

19 답 4

20 답 5

21 답 6

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\times5=16-10=6$

22 답 $\frac{4}{5}$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{4}{5}$

23 답 10

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=5+4+1=10$

24 답 -4

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\times5=16-20=-4$

25 답 $\frac{6}{5}$

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{6}{5}$

26 답 4

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=4^3-3\times5\times4=4$

[다른 풀이]

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=4\times(6-5)=4\times1=4$

27 답 (1) $-\frac{b}{a}$ (2) $\frac{c}{a}$ (3) $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

19 두 근이 특수하게 주어진 이차방정식 ▸ p.124~125

01 답 -16

두 근의 비가 1 : 2이므로 이차방정식의 두 근을 k, $2k(k\neq0)$로 놓으면

근과 계수의 관계에서

(i) $k+2k=\boxed{12}$이므로 $3k=12$ $\therefore k=\boxed{4}$

(ii) $k\times2k=-2m$이므로 $m=-k^2=\boxed{-16}$

02 답 18

(i) $k+2k=9$ $\therefore k=3$

(ii) $k\times2k=m \Rightarrow 3\times6=m$ $\therefore m=18$

03 답 8

(i) $k+2k=6$ $\therefore k=2$

(ii) $k\times2k=m \Rightarrow 2\times4=m$ $\therefore m=8$

04 답 $\frac{8}{9}$

(i) $k+2k=2$ $\therefore k=\frac{2}{3}$

(ii) $k\times2k=m \Rightarrow \frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=m$ $\therefore m=\frac{8}{9}$

05 답 -1

두 근의 비가 $1:4$이므로

이차방정식의 두 근을 k, $4k(k\neq0)$로 놓으면

(i) $k+4k=5(m-1) \Rightarrow 5k=5(m-1)$

$\therefore k=m-1 \cdots$ ㉠

(ii) $k\times4k=-16m \quad \therefore k^2=-4m \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(m-1)^2=-4m$

$m^2-2m+1=-4m$

$m^2+2m+1=0 \Rightarrow (m+1)^2=0 \quad \therefore m=-1$

06 답 27

두 근의 비가 $2:3$이므로

이차방정식의 두 근을 $2k$, $3k(k\neq0)$로 놓으면

(i) $2k+3k=\frac{15}{2} \quad \therefore k=\frac{3}{2} \cdots$ ㉠

(ii) $2k\times3k=\frac{m}{2} \Rightarrow 6k^2=\frac{m}{2} \quad \therefore k^2=\frac{m}{12} \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{m}{12} \Rightarrow \frac{9}{4}=\frac{m}{12}$

$\therefore m=27$

07 답 $m=1$ 또는 $m=4$

두 근의 비가 $1:2$이므로

이차방정식의 두 근을 k, $2k\ (k\neq0)$로 놓으면

(i) $k+2k=m+2 \Rightarrow 3k=m+2 \quad \therefore k=\frac{m+2}{3} \cdots$ ㉠

(ii) $k\times2k=2m \quad \therefore k^2=m \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{m+2}{3}\right)^2=m \Rightarrow m^2-5m+4=0$

$\Rightarrow (m-1)(m-4)=0 \quad \therefore m=1$ 또는 $m=4$

08 답 $m=-5$ 또는 $m=7$

두 근의 차가 2이므로 이차방정식의 두 근을 p, $p+2$로 놓으면

근과 계수의 관계로부터

(i) $p+(p+2)=\boxed{m-1} \quad \therefore m=2p+3 \cdots$ ㉠

(ii) $p\times(p+2)=\boxed{8} \Rightarrow p^2+2p-8=0$

$(p+4)(p-2)=0 \quad \therefore p=\boxed{-4}$ 또는 $p=2$

이것을 각각 ㉠에 대입하면 $m=\boxed{-5}$ 또는 $m=7$

09 답 $m=-3$ 또는 $m=7$

두 근의 차가 1이므로 이차방정식의 두 근을 p, $p+1$로 놓으면

(i) $p+(p+1)=m-2 \quad \therefore m=2p+3 \cdots$ ㉠

(ii) $p\times(p+1)=6 \Rightarrow p^2+p-6=0$

$\Rightarrow (p+3)(p-2)=0$

$\therefore p=-3$ 또는 $p=2$

이것을 각각 ㉠에 대입하면 $m=-3$ 또는 $m=7$

10 답 $m=0$ 또는 $m=2$

두 근의 차가 1이므로 이차방정식의 두 근을 p, $p+1$로 놓으면

(i) $p+(p+1)=2m+1 \quad \therefore p=m \cdots$ ㉠

(ii) $p\times(p+1)=3m \Rightarrow p^2+p=3m$

㉠을 이 식에 대입하면

$m^2+m=3m \Rightarrow m^2-2m=0 \Rightarrow m(m-2)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=2$

11 답 $m=4\sqrt{5}$ 또는 $m=-4\sqrt{5}$

한 근이 다른 근의 3배이므로 이차방정식의 두 근을

k, $3k(k\neq0)$로 놓으면

(i) $k+3k=m \quad \therefore m=4k \cdots$ ㉠

(ii) $k\times3k=15$, $k^2=5 \quad \therefore k=\sqrt{5}$ 또는 $k=-\sqrt{5}$

이것을 각각 ㉠에 대입하면 $m=4\sqrt{5}$ 또는 $m=-4\sqrt{5}$

12 답 $m=-\frac{1}{3}$ 또는 $m=\frac{1}{3}$

한 근이 다른 근의 2배이므로 이차방정식의 두 근을

k, $2k(k\neq0)$로 놓으면

(i) $k+2k=-6m \quad \therefore m=-\frac{1}{2}k \cdots$ ㉠

(ii) $k\times2k=-m^2+1$

㉠을 이 식에 대입하면

$2k^2=-\left(-\frac{1}{2}k\right)^2+1$, $\frac{9}{4}k^2=1$, $k^2=\frac{4}{9}$

$\therefore k=\frac{2}{3}$ 또는 $k=-\frac{2}{3}$

이것을 각각 ㉠에 대입하면 $m=-\frac{1}{3}$ 또는 $m=\frac{1}{3}$

13 답 $m=\frac{5}{4}$ 또는 $m=4$

한 근이 다른 근의 4배이므로 이차방정식의 두 근을

k, $4k(k\neq0)$로 놓으면

(i) $k+4k=5(m-2)$, $5k=5(m-2)$

$\therefore k=m-2 \cdots$ ㉠

(ii) $k\times4k=5m-4$, $4k^2=5m-4 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(m-2)^2=5m-4$, $4(m^2-4m+4)-5m+4=0$

$4m^2-21m+20=0$, $(4m-5)(m-4)=0$

$\therefore m=\frac{5}{4}$ 또는 $m=4$

[다른 풀이]

한 근이 다른 근의 4배이므로 이차방정식의 두 근을

k, $4k(k\neq0)$로 놓으면

(i) $k+4k=5(m-2)$, $5k=5(m-2)$, $k=m-2$

$\therefore m=k+2 \cdots$ ㉢

(ii) $k\times 4k=5m-4$, $4k^2=5m-4$ ⋯ ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$4k^2=5(k+2)-4$, $4k^2-5k-6=0$

$(4k+3)(k-2)=0$

$k=-\frac{3}{4}$ 또는 $k=2$

이것을 각각 ㉢에 대입하면 $m=\frac{5}{4}$ 또는 $m=4$

수력 UP

[다른 풀이]는 ㉢처럼 $m=k+2$로 정리한 뒤 $4k^2=5m-4$에 m 대신 대입하여 k에 대한 이차방정식을 만들고, 이 이차방정식의 해를 구한 뒤 k의 값을 $m=k+2$의 식에 대입하여 m의 값을 구해야 해.
반면에 원래 풀이는 ㉠처럼 $k=m-2$로 정리하여 $4k^2=5m-4$에 k 대신 대입하여 m에 대한 이차방정식을 만들고, 이 이차방정식의 해를 구하면 바로 답을 구할 수 있다는 것을 경험해 보고,
① 문제에서 묻는 문자 확인
② 그 문자에 대한 방정식 만들기
이러한 방향으로 문제를 푸는 것이 시간을 단축시킨다는 것을 알자!

14 답 (1) mk, nk (2) $\alpha+p$, α (3) α, $p\alpha$

20 두 수를 근으로 하는 이차방정식의 작성 ▸ p.126~127

01 답 $x^2-x-2=0$

(두 근의 합)$=2+(-1)=\boxed{1}$

(두 근의 곱)$=2\times(-1)=\boxed{-2}$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-x-\boxed{2}=0$

02 답 $x^2-5x+6=0$

(두 근의 합)$=2+3=5$, (두 근의 곱)$=2\times3=6$

$\therefore x^2-5x+6=0$

03 답 $x^2-2x+\frac{3}{4}=0$

(두 근의 합)$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

(두 근의 곱)$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

$\therefore x^2-2x+\frac{3}{4}=0$

04 답 $x^2-3=0$

(두 근의 합)$=-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$

(두 근의 곱)$=-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=-3$

$\therefore x^2-3=0$

05 답 $x^2-2x-1=0$

(두 근의 합)$=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=\boxed{2}$

(두 근의 곱)$=(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})=\boxed{-1}$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-\boxed{2}x-\boxed{1}=0$

06 답 $x^2-4x+1=0$

(두 근의 합)$=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

(두 근의 곱)$=(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=1$

$\therefore x^2-4x+1=0$

07 답 $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

(두 근의 합)$=2\sqrt{3}$, (두 근의 곱)$=1$

$\therefore x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

08 답 $x^2+4=0$

(두 근의 합)$=0$, (두 근의 곱)$=-2i\times2i=-4i^2=4$

$\therefore x^2+4=0$

09 답 $x^2+49=0$

(두 근의 합)$=0$,

(두 근의 곱)$=-7i\times7i=-49i^2=49$

$\therefore x^2+49=0$

10 답 $x^2-2x+2=0$

(두 근의 합)$=2$,

(두 근의 곱)$=(1+i)\times(1-i)=1^2-i^2=2$

$\therefore x^2-2x+2=0$

11 답 $x^2-6x+10=0$

(두 근의 합)$=6$, (두 근의 곱)$=(3-i)\times(3+i)=10$

$\therefore x^2-6x+10=0$

12 답 $x^2-2x+10=0$

(두 근의 합)$=2$

(두 근의 곱)$=(1+3i)\times(1-3i)=1^2-(3i)^2=10$

$\therefore x^2-2x+10=0$

13 답 $x^2-6x+20=0$

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$이므로

$2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=2\times3=6$, $2\alpha\times2\beta=4\alpha\beta=4\times5=20$

$\therefore x^2-6x+20=0$

14 답 $x^2-5x+9=0$

$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=3+2=5$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=5+3+1=9$

$\therefore x^2-5x+9=0$

15 답 $x^2-4x+15=0$

$(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2(\alpha+\beta)-2$
$=2\times3-2=4$

$(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$
$=4\times5-2\times3+1$
$=15$

$\therefore x^2-4x+15=0$

16 답 $x^2-8x+15=0$

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=3+5=8,\ \alpha\beta(\alpha+\beta)=5\times3=15$

$\therefore x^2-8x+15=0$

17 답 $x^2-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}=0$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{5},\ \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{5}$

$\therefore x^2-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}=0$

18 답 $x^2+x+25=0$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times5=9-10=-1$

$\alpha^2\times\beta^2=(\alpha\beta)^2=5^2=25$

$\therefore x^2+x+25=0$

19 답 $x^2+\frac{1}{5}x+1=0$

18에서 $\alpha^2+\beta^2=-1$이므로

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{-1}{5}=-\frac{1}{5},\ \frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\alpha}{\beta}=1$

$\therefore x^2+\frac{1}{5}x+1=0$

20 답 $x^2+4x-12=0$

진수는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱을 구하면

$\boxed{b}=-2\times\boxed{6}=\boxed{-12}$

연서는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합을 구하면

$\boxed{-a}=(-2+\sqrt{7})+(-2-\sqrt{7})=\boxed{-4}$

$\therefore a=\boxed{4}$

따라서 처음 이차방정식은 $x^2+\boxed{4}x-\boxed{12}=0$

21 답 $x^2+2x-24=0$

$b=-4\times6=-24$

$a=-\{(-1+\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)\}=2$

$\therefore x^2+2x-24=0$

22 답 (1) $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ (2) $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$

21 이차식의 인수분해

▸ p.128

01 답 $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$x^2-2=0$의 근이 $x=\pm\sqrt{2}$이므로

$x^2-2=(x+\boxed{\sqrt{2}})(x-\boxed{\sqrt{2}})$

02 답 $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

$x^2-5=0$의 근이 $x=\pm\sqrt{5}$이므로

$x^2-5=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

03 답 $(x+3i)(x-3i)$

$x^2+9=0$의 근이 $x=\pm3i$이므로

$x^2+9=(x+3i)(x-3i)$

04 답 $\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$x^2-x-1=0$의 근이 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$이므로

$x^2-x-1=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

05 답 $\left(x-\frac{1+\sqrt{11}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{11}i}{2}\right)$

$x^2-x+3=0$의 근이 $x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$이므로

$x^2-x+3=\left(x-\frac{1+\sqrt{11}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{11}i}{2}\right)$

06 답 $(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$

$x^2-2x+4=0$의 근이 $x=1\pm\sqrt{3}i$이므로

$x^3-2x+4=(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$

07 답 $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

$x^2+2x-1=0$의 근이 $x=-1\pm\sqrt{2}$이므로

$x^2+2x-1=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

08 답 $(x+3-\sqrt{6})(x+3+\sqrt{6})$

$x^2+6x+3=0$의 근이 $x=-3\pm\sqrt{6}$이므로

$x^2+6x+3=(x+3-\sqrt{6})(x+3+\sqrt{6})$

09 답 $(x-2-\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{2}i)$

$x^2-4x+6=0$의 근이 $x=2\pm\sqrt{2}i$이므로

$x^2-4x+6=(x-2-\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{2}i)$

10 답 $2\left(x-\frac{1+\sqrt{5}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}i}{2}\right)$

$2x^2-2x+3=0$의 근이 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}i}{2}$이므로

$2x^2-2x+3=2\left(x-\frac{1+\sqrt{5}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}i}{2}\right)$

11 답 $x-\alpha,\ x-\beta$

22 이차방정식의 켤레근

▸ p.129~130

01 답 $2-\sqrt{3}$

a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로

다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

02 답 -4

근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4 \qquad \therefore a=-4$

03 답 1

근과 계수의 관계에 의하여

$b=(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=4-3=1 \qquad \therefore b=1$

04 답 $x^2-4x+1=0$

05 답 $1-\sqrt{2}$

a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로

다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

06 답 2

근과 계수의 관계에 의하여

$-(-a)=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2 \qquad \therefore a=2$

07 답 -1

근과 계수의 관계에 의하여

$b=(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})=1-2=-1$

08 답 $x^2-2x-1=0$

09 답 $3+\sqrt{3}$

a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3-\sqrt{3}$이므로

다른 한 근은 $3+\sqrt{3}$이다.

10 답 -6

근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})=6 \qquad \therefore a=-6$

11 답 -6

근과 계수의 관계에 의하여

$-b=(3+\sqrt{3})\times(3-\sqrt{3})=9-3=6 \qquad \therefore b=-6$

12 답 $1-2i$

a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+2i$이므로

다른 한 근은 $1-2i$이다.

13 답 -2

근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(1+2i)+(1-2i)=2 \qquad \therefore a=-2$

14 답 5

근과 계수의 관계에 의하여

$b=(1+2i)\times(1-2i)=1+4=5$

15 답 $2-\sqrt{3}i$

a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}i$이므로

다른 한 근은 $2-\sqrt{3}i$이다.

16 답 4

근과 계수의 관계에 의하여

$-(-a)=(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=4 \qquad \therefore a=4$

17 답 7

근과 계수의 관계에 의하여

$b=(2+\sqrt{3}i)\times(2-\sqrt{3}i)=4+3=7$

18 답 $4-\sqrt{2}i$

a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $4+\sqrt{2}i$이므로

다른 한 근은 $4-\sqrt{2}i$이다.

19 답 8

근과 계수의 관계에 의하여

$-(-a)=(4+\sqrt{2}i)+(4-\sqrt{2}i)=8$

$\therefore a=8$

20 답 -18

근과 계수의 관계에 의하여

$-b=(4+\sqrt{2}i)\times(4-\sqrt{2}i)=16+2=18$

$\therefore b=-18$

21 답 (1) $p-q\sqrt{m}$ (2) $p-qi$

단원 마무리 평가 [11~22]

▸ 문제편 p.131~133

01 답 ③

방정식 $ax-3(x+1)=1$의 해가 없으려면

$0\times x=b(b\neq 0)$ 꼴이어야 한다.

주어진 방정식을 정리하면

$(a-3)x=4 \qquad \therefore a=3$

02 답 ④
방정식의 해가 무수히 많으려면

$0\times x=0$ 꼴이어야 한다.

주어진 방정식을 정리하면

$(a^2-2)x=(x+1)a-2$에서 $(a^2-a-2)x=a-2$이므로

$(a+1)(a-2)x=a-2$

$a+1=0$이면 $0\times x=-3$으로 해가 없다.

$\therefore a=2$

03 답 ①
$|2x+1|=k(k\geq 0)$의 한 근이 3이므로 $x=3$을 대입하면

$|2\times 3+1|=k \qquad \therefore k=7$

한편, 주어진 방정식 $|2x+1|=7$에서

$2x+1=\pm 7 \qquad \therefore x=3$ 또는 $x=-4$

이때, 다른 한 근은 $a=-4$이다.

$\therefore a+k=-4+7=3$

04 답 ④
$|x-4|+|x-2|=6$에 대하여

(i) $x<2$일 때

$-(x-4)-(x-2)=6 \qquad \therefore x=0 \cdots$ ㉠

(ii) $2\leq x<4$일 때

$-(x-4)+(x-2)=6 \Rightarrow 2=6$ (모순) $\qquad \therefore$ 해는 없다.

(iii) $x\geq 4$일 때

$(x-4)+(x-2)=6 \qquad \therefore x=6 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 방정식 $|x-4|+|x-2|=6$의 근은 0, 6이다.

따라서 이 방정식의 두 근의 합은 $0+6=6$이다.

05 답 ⑤
$3x^2-7x+2=0$, $(3x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

06 답 ④
이차방정식 $(2x-1)(x+1)=2$를 전개하면

$2x^2+x-3=0$, $(2x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 $\alpha=-\frac{3}{2}$, $\beta=1$ ($\because \alpha<\beta$)이므로

$\beta-2\alpha=1-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=4$

07 답 ②
$x^2-6x+4=0$에서

$(x^2-6x+9)-5=0$, $(x-3)^2=5$

이때, $(x+a)^2=b$이므로 $a=-3$, $b=5$

$\therefore a+b=2$

08 답 ①
$x^2-4x+9=0$에서 근의 짝수 공식을 이용하면

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times 9}}{1}$

$=2\pm\sqrt{5}i=a\pm\sqrt{b}i$

이므로 $a=2$, $b=5$

$\therefore a-b=-3$

09 답 ②
$x^2+|3x-2|=2$에 대하여

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때, $x^2-(3x-2)=2$

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $x=0$

(ii) $x\geq\frac{2}{3}$일 때, $x^2+(3x-2)=2$

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq\frac{2}{3}$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=0$ 또는 $x=1$이므로

모든 근의 합은 1이다.

10 답 ⑤
$x^2-|x|-20=0$에 대하여

(i) $x<0$일 때, $x^2+x-20=0$

$(x+5)(x-4)=0 \qquad \therefore x=-5$ 또는 $x=4$

그런데 $x<0$이므로 $x=-5$

(ii) $x\geq 0$일 때, $x^2-x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=5$

그런데 $x\geq 0$이므로 $x=5$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=-5$ 또는 $x=5$이다.

[다른 풀이]

$x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2-|x|-20=0$, $(|x|+4)(|x|-5)=0$

그런데 $|x|+4>0$이므로 $|x|=5$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=5$

11 답 ④
지면에 떨어질 때 물체의 높이가 0 m이므로

$-5t^2+15t+20=0$, $t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

그런데 $t>0$이므로 $t=4$

따라서 지면에 떨어질 때까지 걸린 시간은 4초이다.

12 답 ③

이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-3)>0$

$k^2+2k+1-k^2+3>0$

$2k+4>0 \qquad \therefore k>-2$

13 답 ③

이차방정식 $x^2-8x+14+k=0$ ⋯ ㉠이 중근을 가지므로

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-(14+k)=0$

$16-14-k=0 \qquad \therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면 $x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0 \qquad \therefore x=4$

따라서 중근 $\alpha=4$이므로 $k+\alpha=6$

14 답 ③

이차방정식 $4x^2+2(2k+a)x+k^2-k+b=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(2k+a)^2-4(k^2-k+b)=0$

$4k^2+4ak+a^2-4k^2+4k-4b=0$

$\therefore 4ak+4k+a^2-4b=0$ ⋯ ㉠

㉠을 k에 대하여 정리하면 $(4a+4)k+a^2-4b=0$이고,

이 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로

$4a+4=0,\ a^2-4b=0 \qquad \therefore a=-1,\ b=\frac{1}{4}$

$\therefore a+4b=-1+4\times\frac{1}{4}=-1+1=0$

15 답 ⑤

이차방정식 $3x^2-5x+k=0$이 허근을 가지려면 이 방정식의 판별식 D에 대하여 $D=(-5)^2-4\times3\times k<0$이어야 한다.

$25-12k<0 \qquad \therefore k>\frac{25}{12}=2.\times\times\times$

따라서 정수 k의 최솟값은 3이다.

16 답 ①

이차방정식 $2x^2-3x+4=0$에 대하여

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{3}{2},\ \alpha\beta=2$

$\therefore \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\times2=\frac{9}{4}-6=-\frac{15}{4}$

17 답 ①

두 근의 비가 1 : 3이므로

이차방정식 $x^2-4ax+12=0$의 두 근을 $\alpha,\ 3\alpha$로 놓으면

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+3\alpha=4a,\ \alpha\times3\alpha=12$

$4\alpha=4a \qquad \therefore \alpha=a$ ⋯ ㉠

$3\alpha^2=12,\ \alpha^2=4 \qquad \therefore \alpha=\pm2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $a=\pm2$ (복부호동순)

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $2\times(-2)=-4$이다.

18 답 ③

이차방정식 $x^2-2kx+k-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+4$로 놓으면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=2k$ ⋯ ㉠

$\alpha(\alpha+4)=k-2$ ⋯ ㉡

㉠에서 $\alpha=k-2$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k+2)=k-2,\ k^2-4=k-2$

$k^2-k-2=0,\ (k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-1+2=1$

19 답 ④

이차방정식 $x^2-4x+13=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times13}=2\pm3i$

$\therefore x^2-4x+13=\{x-(2+3i)\}\{x-(2-3i)\}$

$=(x-2-3i)(x-2+3i)$

따라서 주어진 이차식의 인수인 것은 ④이다.

20 답 ②

두 수 $2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식에 대하여

두 근의 합은 $(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$이고,

두 근의 곱은 $(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})=1$이다.

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-4x+1=0$이다.

21 답 ④

방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=5$

한편, $\alpha+1,\ \beta+1$을 두 근으로 하는 이차방정식에 대하여

두 근의 합과 곱을 각각 구하면

$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=2+2=4$,

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=5+2+1=8$이다.

따라서 $\alpha+1,\ \beta+1$을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-4x+8=0$이므로

$x^2+ax+b=0$과 비교하면 $a=-4,\ b=8$이다.

$\therefore a+b=4$

22 답 ②

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 한 근이 $3+\sqrt{2}i$이면 다른 한 근은 $3-\sqrt{2}i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+\sqrt{2}i)+(3-\sqrt{2}i)=-b \qquad \therefore b=-6$

$(3+\sqrt{2}i)\times(3-\sqrt{2}i)=a \qquad \therefore a=11$

$\therefore a+b=11-6=5$

23 답 ④

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3-2\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3+2\sqrt{2}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$이므로 $a=-6$

$(3-2\sqrt{2})\times(3+2\sqrt{2})=1$이므로 $b=1$

한편, $ab=-6$, $a+b=-5$이므로

이차방정식 $x^2+abx-(a+b)=0$에 대입하면

$x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

Ⅱ-3 이차방정식과 이차함수

23 일차함수의 그래프

▸ p.134~137

01 답 ○ **02** 답 ○ **03** 답 ○

04 답 ×

분모에 문자가 있으면 다항식이 아니므로 $y=\frac{1}{4x}$은 다항함수가 아니다.

수력 UP

수나 문자가 들어 있는 함수라고 다 다항함수가 아닙니다.

$y=x^2+2x$ 다항함수, $y=\frac{1}{x}$ 분수함수 → 유리함수

$y=\sqrt{x}$ 무리함수

이때, 다항식과 분수식을 합쳐 유리식이라고 부릅니다.

05 답 ○ **06** 답 × **07** 답 ×

08 답 ○

동류항끼리 계산하여 간단히 하면

$y=\sqrt{x}+2x-(\sqrt{x}-x)=\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}+x=3x$

이므로 다항함수이다.

09 답 ○

10 답 >, >

직선이 오른쪽 위를 향하므로 $a>0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 양수이므로 $b>0$이다.

11 답 <, <

직선이 오른쪽 아래를 향하므로 $a<0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 음수이므로 $b<0$이다.

12 답 >, <

직선이 오른쪽 위를 향하므로 $a>0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 음수이므로 $b<0$이다.

13 답 <, >

직선이 오른쪽 아래를 향하므로 $a<0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 양수이므로 $b>0$이다.

14 답 <, >

직선이 오른쪽 위를 향하므로 $-a>0 \Rightarrow a<0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 양수이므로 $b>0$이다.

15 답 >, <

직선이 오른쪽 아래를 향하므로 $-a<0 \Rightarrow a>0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 음수이므로 $b<0$이다.

16 답 <, <

직선이 오른쪽 위를 향하므로 $-a>0 \Rightarrow a<0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 음수이므로 $b<0$이다.

17 답 >, >

직선이 오른쪽 아래를 향하므로 $-a<0 \Rightarrow a>0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 양수이므로 $b>0$이다.

18 답 >, <

직선이 오른쪽 위를 향하므로 $a>0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 양수이므로 $-b>0 \Rightarrow b<0$이다.

19 답 <, >

직선이 오른쪽 아래를 향하므로 $a<0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 음수이므로 $-b<0 \Rightarrow b>0$이다.

20 답 >, >

직선이 오른쪽 위를 향하므로 $a>0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 음수이므로 $-b<0 \Rightarrow b>0$이다.

21 답 <, <

직선이 오른쪽 아래를 향하므로 $a<0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 양수이므로 $-b>0 \Rightarrow b<0$이다.

22 답 $<$, $<$

직선이 오른쪽 위를 향하므로 $-a>0 \Rightarrow a<0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 양수이므로 $-b>0 \Rightarrow b<0$이다.

23 답 $>$, $>$

직선이 오른쪽 아래를 향하므로 $-a<0 \Rightarrow a>0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 음수이므로 $-b<0 \Rightarrow b>0$이다.

24 답 $<$, $>$

직선이 오른쪽 위를 향하므로 $-a>0 \Rightarrow a<0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 음수이므로 $-b<0 \Rightarrow b>0$이다.

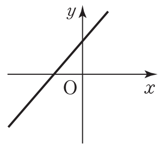
25 답 $>$, $<$

직선이 오른쪽 아래를 향하므로 $-a<0 \Rightarrow a>0$이고, y축과 직선이 만나는 점이 양수이므로 $-b>0 \Rightarrow b<0$이다.

26 답 **제 1, 2, 3 사분면**

$a>0$, $b>0$일 때,

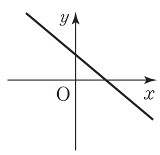
일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 3 사분면을 지난다.



27 답 **제 1, 2, 4 사분면**

$a<0$, $b>0$일 때,

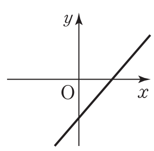
일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



28 답 **제 1, 3, 4 사분면**

$a>0$, $b<0$일 때,

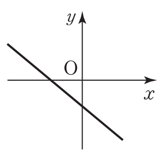
일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



29 답 **제 2, 3, 4 사분면**

$a<0$, $b<0$일 때,

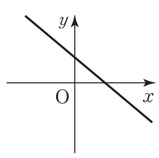
일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.



30 답 **제 1, 2, 4 사분면**

$a>0$, $b>0$일 때,

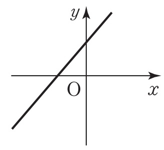
일차함수 $y=-ax+b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



31 답 **제 1, 2, 3 사분면**

$a<0$, $b>0$일 때,

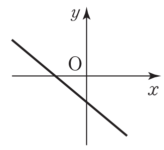
일차함수 $y=-ax+b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 3 사분면을 지난다.



32 답 **제 2, 3, 4 사분면**

$a>0$, $b<0$일 때,

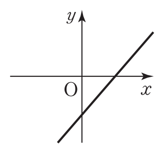
일차함수 $y=-ax+b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.



33 답 **제 1, 3, 4 사분면**

$a<0$, $b<0$일 때,

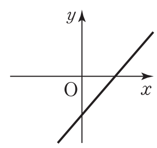
일차함수 $y=-ax+b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



34 답 **제 1, 3, 4 사분면**

$a>0$, $b>0$일 때,

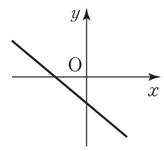
일차함수 $y=ax-b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3, 4 사분면을 지난다



35 답 **제 2, 3, 4 사분면**

$a<0$, $b>0$일 때,

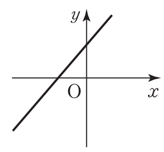
일차함수 $y=ax-b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.



36 답 **제 1, 2, 3 사분면**

$a>0$, $b<0$일 때,

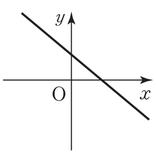
일차함수 $y=ax-b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 3 사분면을 지난다.



37 답 **제 1, 2, 4 사분면**

$a<0$, $b<0$일 때,

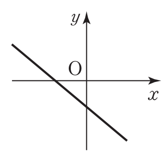
일차함수 $y=ax-b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



38 답 **제 2, 3, 4 사분면**

$a>0$, $b>0$일 때,

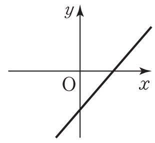
일차함수 $y=-ax-b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.



39 답 **제 1, 3, 4 사분면**

$a<0$, $b>0$일 때,

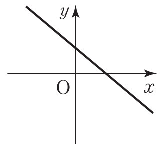
일차함수 $y=-ax-b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



40 답 **제 1, 2, 4 사분면**

$a>0$, $b<0$일 때,

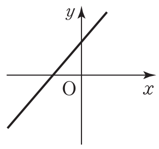
일차함수 $y=-ax-b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



41 답 **제 1, 2, 3 사분면**

$a<0$, $b<0$일 때,

일차함수 $y=-ax-b$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 3 사분면을 지난다.

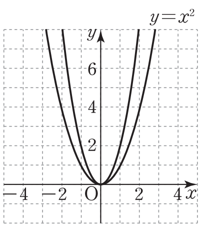


42 답 **(1) a, b (2) $>$, $<$, $=$**

24 이차함수의 그래프

▸ p.138~140

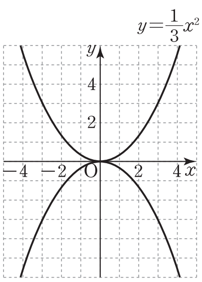
01 답



, 2

이차함수 $y=2x^2$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 y좌표를 $\boxed{2}$배로 하는 점을 그린 것이다.

02 답



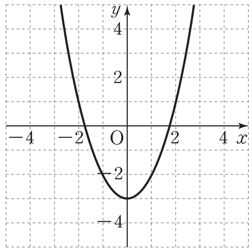
, x

이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프는 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프와 $\boxed{x}$축에 대하여 서로 대칭이다.

03 답 **$x=0$**

04 답 **$(0, -3)$**

05 답



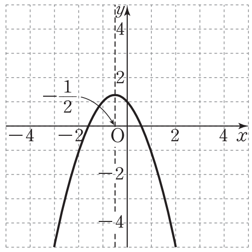
06 답 **$x=-\frac{1}{2}$**

$y=-x^2-x+1=-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+1+\frac{1}{4}$

$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

07 답 **$(0, 1)$**

08 답



09 답 **$(-3, 2)$**

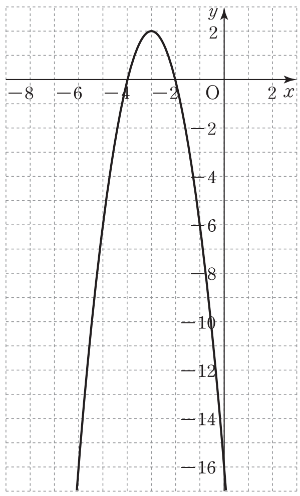
$y=-2x^2-12x-16$

$=-2(x^2+6x+9)+2$

$=-2(x+3)^2+2$

10 답 **$(0, -16)$**

11 답



12 답 **$a>\frac{3}{2}$**

$y=x^2-2x+1-2a+3=(x-1)^2-2a+3$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1, -2a+3)$이고,

이 꼭짓점이 제4사분면 위에 있으므로

$-2a+3<0$, $-2a<-3$ $\quad\therefore a>\frac{3}{2}$

13 답 $a>-\frac{4}{3}$

$y=x^2-4x+4+3a+4=(x-2)^2+3a+4$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 3a+4)$이고,

이 꼭짓점이 제1사분면 위에 있으므로

$3a+4>0,\ 3a>-4 \qquad \therefore a>-\frac{4}{3}$

14 답 $y=2(x+1)^2-1$

$y=2x^2+4x+1=2(x^2+2x+1)-1=2(x+1)^2-1$

15 답 $(-1,\ -1)$

16 답 $x=-1$

17 답 $y=3(x-1)^2-3$

$y=3x^2-6x=3(x^2-2x+1)-3=3(x-1)^2-3$

18 답 $(1,\ -3)$

19 답 $x=1$

20 답 -4

$y=x^2+mx-2m$을 m에 대하여 정리하면

$(x-2)m+x^2-y=0$

이 식이 m에 대한 항등식이 되려면

$x-2=0,\ x^2-y=0 \qquad \therefore x=2,\ y=\boxed{4}$

따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 4)$이고, 이 점이 이차함수의

그래프의 꼭짓점이므로 $y=(x-2)^2+\boxed{4}=x^2-4x+\boxed{8}$

즉, $x^2+mx-2m=x^2-4x+\boxed{8}$이므로

$m=\boxed{-4}$

21 답 2

$y=x^2+2mx+4m+5$를 m에 대하여 정리하면

$(2x+4)m+x^2-y+5=0$

이 식이 m에 대한 항등식이 되려면

$2x+4=0,\ x^2-y+5=0$

$\therefore x=-2,\ y=x^2+5=(-2)^2+5=9$

따라서 점 P의 좌표는 $(-2,\ 9)$이고, 이 점이 이차함수의

그래프의 꼭짓점이므로 $y=(x+2)^2+9=x^2+4x+13$

즉, $x^2+2mx+4m+5=x^2+4x+13$이므로

$m=2$

22 답 $-\frac{4}{3}$

$y=-x^2-6mx+24m-15$를 m에 대하여 정리하면

$6m(x-4)+(x^2+y+15)=0$

이 식이 m에 대한 항등식이 되려면

$x-4=0,\ x^2+y+15=0$

$\therefore x=4,\ y=-x^2-15=-4^2-15=-31$

따라서 점 P의 좌표는 $(4,-31)$이고, 이 점이 이차함수의

그래프의 꼭짓점이므로 이차함수의 식은 다음과 같다.

$y=-(x-4)^2-31=-x^2+8x-47$

즉, $-x^2-6mx+24m-15=-x^2+8x-47$이므로

$-6m=8 \qquad \therefore m=-\frac{4}{3}$

23 답 (1) $m,\ n,\ m,\ n,\ m$

(2) $\frac{b}{2a},\ -\frac{b}{2a},\ -\frac{b}{2a},\ -\frac{b}{2a}$

25 이차함수의 그래프와 a, b, c의 부호 ▸ p.141~142

01 답 $a>0,\ b>0,\ c>0$

그래프의 모양이 아래로 볼록하므로 $a>0$

대칭축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $b>0$

$(y$절편$)>0$이므로 $c>0$

02 답 $a>0,\ b<0,\ c<0$

그래프의 모양이 아래로 볼록하므로 $a>0$

대칭축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $b<0$

$(y$절편$)<0$이므로 $c<0$

03 답 $a<0,\ b>0,\ c<0$

그래프의 모양이 위로 볼록하므로 $a<0$

대칭축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $b>0$

$(y$절편$)<0$이므로 $c<0$

04 답 $a<0,\ b<0,\ c>0$

그래프의 모양이 위로 볼록하므로 $a<0$

대칭축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $b<0$

$(y$절편$)>0$이므로 $c>0$

05 답 $a>0,\ b>0,\ c>0$

그래프의 모양이 아래로 볼록하므로 $a>0$

대칭축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $b>0$

$(y$절편$)>0$이므로 $c>0$

06 답 $a<0,\ b<0,\ c=0$

그래프의 모양이 위로 볼록하므로 $a<0$

대칭축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $b<0$

$(y$절편$)=0$이므로 $c=0$

07 답 $a<0,\ b<0,\ c<0$

그래프의 모양이 위로 볼록하므로 $a<0$

대칭축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $b<0$

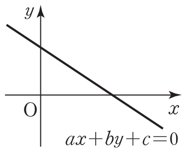
$(y$절편$)<0$이므로 $c<0$

08 답 $a>0,\ b<0,\ c=0$

그래프의 모양이 아래로 볼록하므로 $a>0$

대칭축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $b<0$

$(y$절편$)=0$이므로 $c=0$

09 답


주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서

그래프의 모양이 아래로 볼록하므로 $a>0$

대칭축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $b>0$

(y절편)<0이므로 $c<0$

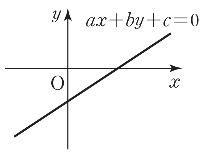
일차함수의 $ax+by+c=0$에서

$by=-ax-c$, $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

(기울기)$=-\frac{a}{b}<0$

(y절편)$=-\frac{c}{b}>0$ ($\because$ $a>0$, $b>0$, $c<0$)

이므로 일차함수의 그래프의 개형을 그리면 위의 그림과 같다.

10 답


주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서

그래프의 모양이 위로 볼록하므로 $a<0$

대칭축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $b>0$

(y절편)>0이므로 $c>0$

일차함수의 $ax+by+c=0$에서

$by=-ax-c$, $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

(기울기)$=-\frac{a}{b}>0$

(y절편)$=-\frac{c}{b}<0$ ($\because$ $a<0$, $b>0$, $c>0$)

이므로 일차함수의 그래프의 개형을 그리면 위의 그림과 같다.

11 답 **(1) $a>0$, $a<0$ (2) 같은, $>$, 다른, $<$**
(3) $c>0$, $c<0$

26 이차함수의 식 구하기 ▸ p.143~144

01 답 $y=3(x-3)^2-1$

꼭짓점의 좌표가 $(3, -1)$이므로

$y=a(x-\boxed{3})^2-\boxed{1}$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2=a-\boxed{1}$ $\therefore a=\boxed{3}$ $\therefore y=\boxed{3}(x-\boxed{3})^2-\boxed{1}$

02 답 $y=-x^2+2$

꼭짓점의 좌표가 $(0, 2)$이므로 $y=ax^2+2$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 점 $(-3, -7)$을 지나므로

$-7=9a+2$, $9a=-9$ $\therefore a=-1$

$\therefore y=-x^2+2$

03 답 $y=2(x-4)^2+3$

꼭짓점의 좌표가 $(4, 3)$이므로

$y=a(x-4)^2+3$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 점 $(7, 21)$을 지나므로

$21=9a+3$, $9a=18$ $\therefore a=2$

$\therefore y=2(x-4)^2+3$

04 답 $y=2x^2-4x-6$

x축과의 두 교점의 좌표가 $(-1, 0)$, $(3, 0)$이므로

$y=a(x+\boxed{1})(x-\boxed{3})$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 점 $(2, -6)$을 지나므로

$-6=a\times3\times(-1)$ $\therefore a=\boxed{2}$

$\therefore y=2(x+\boxed{1})(x-\boxed{3})=2(x^2-\boxed{2}x-\boxed{3})$

$=\boxed{2x^2-4x-6}$

05 답 $y=-2x^2-18x-40$

x축과의 두 교점의 좌표가 $(-5, 0)$, $(-4, 0)$이므로

$y=a(x+5)(x+4)$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 점 $(3, -112)$를 지나므로

$-112=a\times8\times7$, $56a=-112$ $\therefore a=-2$

$\therefore y=-2(x+5)(x+4)=-2(x^2+9x+20)$

$=-2x^2-18x-40$

06 답 $y=2x^2+2x-112$

x축과의 두 교점의 좌표가 $(-8, 0)$, $(7, 0)$이므로

$y=a(x+8)(x-7)$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 점 $(9, 68)$을 지나므로

$68=a\times17\times2$, $34a=68$ $\therefore a=2$

$\therefore y=2(x+8)(x-7)=2(x^2+x-56)$

$=2x^2+2x-112$

07 답 $y=3x^2-2x$

$y=ax^2+bx+c$가 점 $(0, 0)$을 지나므로 $c=\boxed{0}$

$y=ax^2+bx$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 두 점 $(-1, 5)$, $(1, 1)$을 지나므로

$5=a-b$, $\boxed{1}=a+b$

두 식을 연립하면 $a=3$, $b=\boxed{-2}$ $\therefore y=\boxed{3x^2-2x}$

08 답 $y=x^2-x+4$

$y=ax^2+bx+c$가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$y=ax^2+bx+4$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 두 점 $(1,\ 4)$, $(2,\ 6)$을 지나므로

$4=a+b+4$ ⋯ ㉡, $6=4a+2b+4$ ⋯ ㉢

㉡에서 $a=-b$이고, 이를 ㉢에 대입하면

$6=-4b+2b+4$, $2b=-2$ $\quad\therefore b=-1,\ a=1$

$\therefore y=x^2-x+4$

09 답 $y=-2x^2+6x-3$

$y=ax^2+bx+c$가 점 $(0, -3)$을 지나므로 $c=-3$

$y=ax^2+bx-3$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 두 점 $(-1,\ -11)$, $(1,\ 1)$을 지나므로

$-11=a-b-3$ ⋯ ㉡, $1=a+b-3$ ⋯ ㉢

㉡+㉢을 하면 $-10=2a-6$, $2a=-4$ $\quad\therefore a=-2$

이 값을 ㉢에 대입하면

$1=-2+b-3$, $1=b-5$ $\quad\therefore b=6$

$\therefore y=-2x^2+6x-3$

10 답 $y=(x+3)^2-2$

축의 방정식이 $x=-3$이므로

$y=a(x+3)^2+q$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 14)$를 지나므로

$2=4a+q$ ⋯ ㉡, $\boxed{14}=16a+q$ ⋯ ㉢

㉡−㉢을 하면 $-12=-12a$ $\quad\therefore a=\boxed{1}$

이 값을 ㉡에 대입하면

$2=\boxed{4}+q$ $\quad\therefore q=\boxed{-2}$

$\therefore y=\boxed{(x+3)^2-2}$

11 답 $y=-(x+1)^2+1$

축의 방정식이 $x=-1$이므로 $y=a(x+1)^2+q$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ -3)$을 지나므로

$0=a+q$ ⋯ ㉡, $-3=4a+q$ ⋯ ㉢

㉡에서 $a=-q$이고, 이를 ㉢에 대입하면

$-3=-4q+q$, $-3=-3q$ $\quad\therefore q=1,\ a=-1$

$\therefore y=-(x+1)^2+1$

12 답 $y=(x-5)^2-23$

축의 방정식이 $x=5$이므로 $y=a(x-5)^2+q$ ⋯ ㉠

으로 놓으면 ㉠이 두 점 $(0,\ 2)$, $(1,\ -7)$을 지나므로

$2=25a+q$ ⋯ ㉡, $-7=16a+q$ ⋯ ㉢

㉡−㉢을 하면 $9=9a$ $\quad\therefore a=1$

이 값을 ㉡에 대입하면 $2=25+q$ $\quad\therefore q=-23$

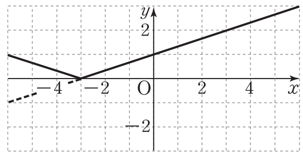
$\therefore y=(x-5)^2-23$

13 답 (1) $p,\ q$ (2) $\alpha,\ \beta$ (3) ax^2+bx+c (4) $p,\ q$

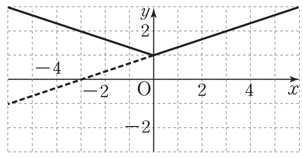
27 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

▸ p.145~147

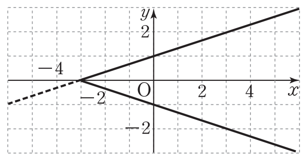
01 답



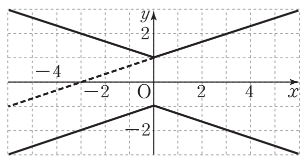
02 답



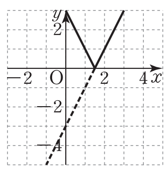
03 답



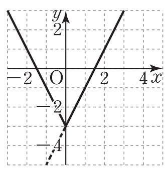
04 답



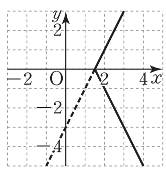
05 답



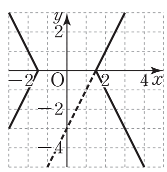
06 답

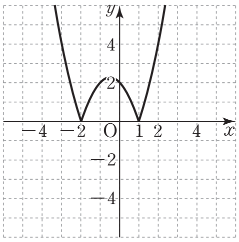


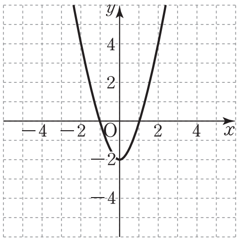
07 답

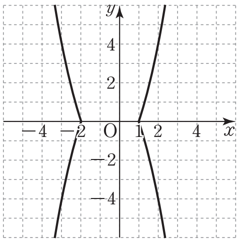


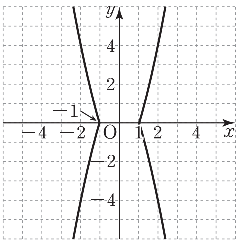
08 답

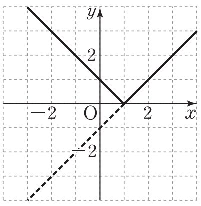


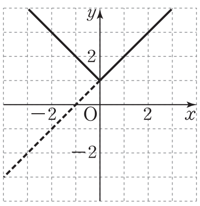
09 답 

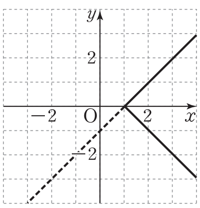
10 답 

11 답 

12 답 

13 답 

14 답 

15 답 

16 답 **(1) $y\geq0$, $y<0$ (2) $x<0$ (3) $y<0$ (4) 원점**

28 이차함수의 그래프와 이차방정식의 해 ▸ p.148

Ⅱ

01 답 **$x=0$ 또는 $x=3$**

$2x^2-6x=0 \Rightarrow 2x(x-3)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=3$

02 답 **$x=-2$ 또는 $x=5$**

$x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x+2)(x-5)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=5$

03 답 **$x=2\pm\sqrt{6}$**

$-x^2+4x+2=0 \Rightarrow x^2-4x-2=0$

$\therefore x=2\pm\sqrt{4+2}=2\pm\sqrt{6}$

[다른 풀이]

$-x^2+4x+2=0$

$\therefore x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+2}}{-1}=2\mp\sqrt{6}=2\pm\sqrt{6}$

04 답 **$x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$**

$x^2-5x+2=0$

$\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-8}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

05 답 **$x=\dfrac{1}{2}$**

$-4x^2+4x-1=0$

$4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2=0 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{2}$

06 답 **$x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$**

$-3x^2+4x+1=0 \Rightarrow 3x^2-4x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+3}}{3}=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

[다른 풀이]

$-3x^2+4x+1=0$

$\therefore x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+3}}{-3}=\dfrac{2\mp\sqrt{7}}{3}=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

07 답 **10**

$x^2-6x-16=0$, $(x+2)(x-8)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=8$

$\therefore \overline{AB}=|8-(-2)|=10$

08 답 **$\dfrac{11}{2}$**

$-2x^2-3x+14=0 \Rightarrow 2x^2+3x-14=0$

$(x-2)(2x+7)=0 \qquad \therefore$ $x=2$ 또는 $x=-\dfrac{7}{2}$

$\therefore \overline{AB}=\left|2-\left(-\dfrac{7}{2}\right)\right|=\dfrac{11}{2}$

09 답 $\frac{\sqrt{21}}{5}$

$-5x^2+x+1=0$ $\quad\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{1+20}}{-10}=\frac{1\mp\sqrt{21}}{10}$

$\therefore \overline{AB}=\left|\frac{1+\sqrt{21}}{10}-\frac{1-\sqrt{21}}{10}\right|=\frac{2\sqrt{21}}{10}=\frac{\sqrt{21}}{5}$

10 답 $\frac{1}{4}$

$4x^2-7x+3=0$, $(x-1)(4x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

$\therefore \overline{AB}=\left|1-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}$

11 답 x, 실근

29 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 ▸ p.149~150

01 답 $k<1$

이차함수 $y=x^2-2x+k$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k=1-k>0$ $\quad\therefore k<1$

02 답 $k=1$

이차함수 $y=x^2-2x+k$의 그래프와 x축이 접하려면

이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 중근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k=0$ $\quad\therefore k=1$

03 답 $k>1$

이차함수 $y=x^2-2x+k$의 그래프와 x축이 만나지 않으려면

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 실근이 존재하지 않아야 하므로

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k<0$ $\quad\therefore k>1$

04 답 $k>-4$

이차함수 $y=-x^2+4x+k$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-4x-k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2-4x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2+k=4+k>0$ $\quad\therefore k>-4$

05 답 $k=-4$

이차함수 $y=-x^2+4x+k$의 그래프와 x축이 접하려면

이차방정식 $x^2-4x-k=0$이 중근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2-4x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4+k=0$ $\quad\therefore k=-4$

06 답 $k<-4$

이차함수 $y=-x^2+4x+k$의 그래프와 x축이 만나지 않으려면

이차방정식 $x^2-4x-k=0$의 실근이 존재하지 않아야 하므로

이차방정식 $x^2-4x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4+k<0$ $\quad\therefore k<-4$

07 답 $k<-3$

이차방정식 $x^2+kx+\frac{1}{4}k^2+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\times1\times\left(\frac{1}{4}k^2+k+3\right)=-4k-12>0$

$\therefore k<-3$

08 답 $k=-3$

이차방정식 $x^2+kx+\frac{1}{4}k^2+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\times1\times\left(\frac{1}{4}k^2+k+3\right)=-4k-12=0$

$\therefore k=-3$

09 답 $k>-3$

이차방정식 $x^2+kx+\frac{1}{4}k^2+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\times1\times\left(\frac{1}{4}k^2+k+3\right)=-4k-12<0$

$\therefore k>-3$

10 답 0개

이차방정식 $x^2+x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-12=-11<0$

따라서 교점의 개수는 0이다.

11 답 1개

이차방정식 $4x^2-4x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-4=0$

따라서 교점의 개수는 1이다.

12 답 2개

이차방정식 $x^2+x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2+4\times2=9>0$

따라서 교점의 개수는 2이다.

13 답 **1개**

이차방정식 $x^2+6x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-9=0$

따라서 교점의 개수는 1이다.

14 답 **0개**

이차방정식 $-2x^2+x-1=0$, 즉 $2x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times2=-7<0$

따라서 교점의 개수는 0이다.

15 답 **2개**

이차방정식 $5x^2-7x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=49-40=9>0$

따라서 교점의 개수는 2이다.

16 답 **2**

이차방정식 $x^2-kx-4=0$의 두 근을 p, q라 하면

근과 계수의 관계에 의하여 $p+q=k$, $pq=-4$ ⋯ ㉠

두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로 $|p-q|=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $(p-q)^2=20$

$\therefore (p+q)^2-4pq=20$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $k^2+16=20$, $k^2=4$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$)

17 답 **5**

이차방정식 $x^2-4x-k=0$의 두 근을 p, q라 하면

근과 계수의 관계에 의하여 $p+q=4$, $pq=-k$ ⋯ ㉠

$d=6$이므로 $|p-q|=6$

양변을 제곱하면 $(p-q)^2=36$

$\therefore (p+q)^2-4pq=36$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $4^2-4\times(-k)=36$

$16+4k=36$ $\quad\therefore k=5$

18 답 **$D=0$, $D<0$ / 한 점, 없다. / 2, 1, 0**

30 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

▸ p.151~154

01 답 **$x=1$ 또는 $x=4$**

$-x^2+4x+1=-x+5$에서

$x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-\boxed{1})(x-\boxed{4})=0$

$\therefore x=\boxed{1}$ 또는 $x=\boxed{4}$

02 답 **$x=2$**

$x^2-x+5=3x+1$에서

$x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$

03 답 **$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$**

$x^2+2x+2=-x+1$에서 $x^2+3x+1=0$

$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

04 답 **$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-1$**

$2x^2-x+3=-2x+4$에서 $2x^2+x-1=0$

$(2x-1)(x+1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-1$

05 답 **서로 다른 두 점에서 만난다.**

$x^2+6x-5=-2x-4$에서 $x^2+8x-1=0$ ⋯ ㉠

이때, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-(-1)=17>0$

따라서 이차함수의 그래프와 직선은

$\boxed{\text{서로 다른 두 점에서 만난다.}}$

06 답 **한 점에서 만난다.**

$3x^2-7x-4=-x-7$에서 $3x^2-6x+3=0$

$x^2-2x+1=0$ ⋯ ㉠

이때, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1=0$

따라서 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.

07 답 **만나지 않는다.**

$-2x^2+x-4=-5x+1$에서

$2x^2-6x+5=0$ ⋯ ㉠

이때, ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-2\times5=-1<0$

따라서 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

08 답 **만나지 않는다.**

$-5x^2+11x-6=7x+11$에서

$-5x^2+4x-17=0$ ⋯ ㉠

이때, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-5)\times(-17)=-81<0$

따라서 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

09 답 **서로 다른 두 점에서 만난다.**

$8x^2-10x+9=-x+15$에서 $8x^2-9x-6=0$ ⋯ ㉠

이때, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-9)^2-4\times8\times(-6)=81+192=273>0$

따라서 이차함수의 그래프와 직선은

서로 다른 두 점에서 만난다.

10 답 $\boldsymbol{k<2}$

이차방정식 $x^2-4x+2+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(2+k)=2-k>0$ $\therefore k<\boxed{2}$

11 답 $\boldsymbol{k=2}$

이차방정식 $x^2-4x+2+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2-k=0$ $\therefore k=2$

12 답 $\boldsymbol{k>2}$

이차방정식 $x^2-4x+2+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2-k<0$ $\therefore k>2$

13 답 $\boldsymbol{k>-1}$

이차방정식 $2x^2-4x+1-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(1-k)=2+2k>0$ $\therefore k>-1$

14 답 $\boldsymbol{k=-1}$

이차방정식 $2x^2-4x+1-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2+2k=0$ $\therefore k=-1$

15 답 $\boldsymbol{k<-1}$

이차방정식 $2x^2-4x+1-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2+2k<0$ $\therefore k<-1$

16 답 $\boldsymbol{k<1}$

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k=1-k>0$ $\therefore k<1$

17 답 $\boldsymbol{k=1}$

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k=0$ $\therefore k=1$

18 답 $\boldsymbol{k>1}$

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k<0$ $\therefore k>1$

19 답 $\boldsymbol{k<-1}$

이차방정식 $x^2-2x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k+2)=-1-k>0$

$\therefore k<-1$

20 답 $\boldsymbol{k=-1}$

이차방정식 $x^2-2x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=-1-k=0$ $\therefore k=-1$

21 답 $\boldsymbol{k>-1}$

이차방정식 $x^2-2x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=-1-k<0$ $\therefore k>-1$

22 답 $\boldsymbol{m\geq\frac{3}{4}}$

이차함수 $y=x^2+3x+1$의 그래프와

직선 $y=2x+m$이 적어도 한 점에서 만나려면

이차방정식 $x^2+3x+1=2x+m$, 즉

$x^2+x+1-m=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D\geq0$이어야 하므로 $1-4(1-m)\geq0$

$4m-\boxed{3}\geq0$ $\therefore m\geq\boxed{\frac{3}{4}}$

23 답 $\boldsymbol{m\leq3}$

이차함수 $y=x^2-2x+m$의 그래프와

직선 $y=2x-1$이 적어도 한 점에서 만나려면

이차방정식 $x^2-2x+m=2x-1$, 즉

$x^2-4x+m+1=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D\geq0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(m+1)=3-m\geq0$

$\therefore m\leq3$

24 답 $\boldsymbol{m\geq\frac{1}{2}}$

이차함수 $y=-2x^2+3x-1$의 그래프와 직선 $y=5x-m$이

적어도 한 점에서 만나려면

이차방정식 $-2x^2+3x-1=5x-m$, 즉

$2x^2+2x+1-m=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D\geq0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1^2-2\times(1-m)=2m-1\geq0$

$\therefore m\geq\frac{1}{2}$

25 답 $y=x+1$

구하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$(a, b는 상수)라 하면
이 직선이 점 P(2, 3)을 지나므로
$3=2a+b \qquad \therefore b=-2a+3 \cdots$ ㉠
이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프와
직선 $y=ax-2a+3$이 서로 접하므로
이차방정식 $x^2-3x+5=ax-2a+3$, 즉
$x^2-(a+3)x+2a+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(a+3)\}^2-4(2a+2)=0$
$a^2+6a+9-8a-8=0$
$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1$
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-2\times1+3=1$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x+1$

26 답 $y=x$

구하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$(a, b는 상수)라 하면
이 직선이 점 P(1, 1)을 지나므로
$1=a+b \qquad \therefore b=1-a \cdots$ ㉠
이차함수 $y=2x^2-3x+2$의 그래프와
직선 $y=ax+1-a$가 서로 접하므로
이차방정식 $2x^2-3x+2=ax+1-a$, 즉
$2x^2-(3+a)x+1+a=0$의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(3+a)\}^2-4\times2\times(1+a)=0$
$a^2+6a+9-8-8a=0$, $a^2-2a+1=0$
$(a-1)^2=0$
$\therefore a=1$
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=1-1=0$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x$

27 답 $y=-5x-1$

구하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
이 직선이 점 P(-3, 14)를 지나므로
$14=-3a+b \qquad \therefore b=3a+14 \cdots$ ㉠
이차함수 $y=x^2+x+8$의 그래프와
직선 $y=ax+3a+14$가 서로 접하므로
이차방정식 $x^2+x+8=ax+3a+14$, 즉
$x^2+(1-a)x-3a-6=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(1-a)^2-4\times1\times(-3a-6)=0$
$a^2-2a+1+12a+24=0$
$a^2+10a+25=0$, $(a+5)^2=0$
$\therefore a=-5$
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-15+14=-1$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-5x-1$

28 답 $y=2x+3$

이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프와 직선 $y=2x+b$가 서로
접하므로 이차방정식 $-x^2+2=2x+b$, 즉
$x^2+2x+b-2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-(b-2)=0$
$\therefore b=3$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x+3$

29 답 $y=-2x-7$

이차함수 $y=x^2+2x-3$의 그래프와
직선 $y=-2x+b$가 서로 접하므로
이차방정식 $x^2+2x-3=-2x+b$, 즉
$x^2+4x-3-b=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-(-3-b)=7+b=0$
$\therefore b=-7$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-2x-7$

30 답 $D=0$, $D<0$ / 한 점, 없다. / 2, 1, 0

31 이차함수의 그래프와 직선의 교점

▸ p.155~156

01 답 $m=1$, $n=-17$

이차방정식 $-x^2+2x+3=mx+n$, 즉
$x^2+(m-2)x+n-3=0$의 두 근이 -4, 5이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$(-4)+5=-m+2$, $1=-m+2 \qquad \therefore m=1$
$(-4)\times5=n-3$, $-20=n-3 \qquad \therefore n=-17$

02 답 $m=-1$, $n=13$

이차방정식 $2x^2-3x+1=mx+n$, 즉
$2x^2-(m+3)x+1-n=0$의 두 근이 -2, 3이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$(-2)+3=\frac{m+3}{2}$, $1=\frac{m+3}{2}$, $m+3=2 \qquad \therefore m=-1$
$-6=\frac{1-n}{2}$, $1-n=-12 \qquad \therefore n=13$

03 답 $m=-6$, $n=12$

이차방정식 $3x^2+3=mx+n$, 즉
$3x^2-mx+3-n=0$의 두 근이 -3, 1이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$(-3)+1=\frac{m}{3}$, $-2=\frac{m}{3} \qquad \therefore m=-6$
$(-3)\times1=\frac{3-n}{3}$, $-3=\frac{3-n}{3}$, $3-n=-9 \qquad \therefore n=12$

04 답 $m=1, n=-3$

이차방정식 $x^2+mx+n=3x-1$, 즉

$x^2+(m-3)x+n+1=0$의 계수는 모두 유리수이고,

한 근이 $1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=-(m-3)$, $2=-m+3$

$\therefore m=1$

$(1-\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})=n+1$, $1-3=n+1$

$\therefore n=-3$

05 답 $m=4, n=0$

이차방정식 $x^2+mx+n=2x+1$, 즉

$x^2+(m-2)x+n-1=0$의 계수는 모두 유리수이고,

한 근이 $\sqrt{2}-1$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{2}-1$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sqrt{2}-1)+(-\sqrt{2}-1)=-(m-2)$

$-2=-m+2 \qquad \therefore m=4$

$(\sqrt{2}-1)\times(-\sqrt{2}-1)=n-1$, $-1=n-1 \qquad \therefore n=0$

06 답 $m=-7, n=-1$

이차방정식 $x^2+mx+n=-x-2$, 즉

$x^2+(m+1)x+n+2=0$의 계수는 모두 유리수이고,

한 근이 $-2\sqrt{2}+3$이므로 다른 한 근은 $2\sqrt{2}+3$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2\sqrt{2}+3)+(2\sqrt{2}+3)=-(m+1)$

$6=-m-1 \qquad \therefore m=-7$

$(-2\sqrt{2}+3)\times(2\sqrt{2}+3)=n+2$, $1=n+2 \qquad \therefore n=-1$

07 답 1

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는

방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근이 된다.

이때, 두 근의 합은 $-1+\boxed{2}=\boxed{1}$이므로

$-\dfrac{b}{a}=1$

방정식 $f(x)=4$에서 $ax^2+bx+c-4=0$이므로

두 근의 합은 $-\dfrac{b}{a}=\boxed{1}$

08 답 1

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 합은 1이므로 $-\dfrac{b}{a}=1$

방정식 $f(x)=10$에서 $ax^2+bx+c-10=0$이므로

두 근의 합은 $-\dfrac{b}{a}=1$

09 답 -2

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 곱은 -2이므로 $\dfrac{c}{a}=-2$

방정식 $f(x)=2x$에서 $ax^2+(b-2)x+c=0$이므로

두 근의 곱은 $\dfrac{c}{a}=-2$

10 답 -2

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 곱은 -2이므로 $\dfrac{c}{a}=-2$

방정식 $f(x)=-3x$에서

$ax^2+(b+3)x+c=0$이므로

두 근의 곱은 $\dfrac{c}{a}=-2$

11 답 $\sqrt{58}$

이차함수 $y=-x^2+4x+2$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의

교점의 좌표를 $(p, -p+1)$, $(q, -q+1)$이라 하면

이차방정식 $-x^2+4x+2=-x+1$, 즉

$x^2-5x-1=0$의 두 근이 p, q이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=\boxed{5}$, $pq=-1$

따라서 구하는 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(p-q)^2+\{(-p+1)-(-q+1)\}^2}$

$=\sqrt{2(p-q)^2}$

$=\sqrt{2\{(p+q)^2-4pq\}}$

$=\sqrt{2(\boxed{25}+4)}=\boxed{\sqrt{58}}$

12 답 $5\sqrt{2}$

이차함수 $y=x^2-6x+1$의 그래프와 직선 $y=x-5$의 교점의

좌표를 $(p, p-5)$, $(q, q-5)$라 하면

이차방정식 $x^2-6x+1=x-5$, 즉

$x^2-7x+6=0$의 두 근이 p, q이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $p+q=7$, $pq=6$

따라서 구하는 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(p-q)^2+\{(p-5)-(q-5)\}^2}$

$=\sqrt{2(p-q)^2}=\sqrt{2\{(p+q)^2-4pq\}}$

$=\sqrt{2(7^2-4\times6)}=\sqrt{2\times25}$

$=5\sqrt{2}$

13 답 (1) ① p, q ② 근과 계수

(2) $\sqrt{(p-q)^2+(mp-mq)^2}=|p-q|\sqrt{1+m^2}$

32 이차함수의 최대·최소

▸ p.157

01 답 $x=3$일 때 최솟값 2

02 답 $x=-3$일 때 최댓값 0

03 답 $x=0$일 때 최댓값 1

04 답 $x=2$일 때 최솟값 -4

$y=2x^2-8x+4=2(x^2-4x+4-4)+4$

$=2(x^2-4x+4)-4$

$=2(x-2)^2-4$

이므로 $x=2$일 때 최솟값 -4

05 답 $x=1$일 때 최댓값 2

$y=-x^2+2x+1=-(x^2-2x+1-1)+1$

$=-(x^2-2x+1)+2$

$=-(x-1)^2+2$

이므로 $x=1$일 때 최댓값 2

06 답 $a=1$, $b=6$

$f(x)=-x^2+2ax+5=(x^2-2ax+a^2-a^2)+5$

$=-(x^2-2ax+a^2)+a^2+5$

$=-(x-a)^2+a^2+5$

이므로 $x=a$에서 최댓값 a^2+5을 갖는다.

$x=1$에서 최댓값 b를 가지므로 $a=1$, $a^2+5=b$

$\therefore a=1,\ b=6$

07 답 $a=-1$, $b=-2$, $c=3$

$x=-1$에서 최댓값 4를 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 4)$

$\therefore\ f(x)=a(x+1)^2+4$ ⋯ ㉠

㉠이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $0=4a+4$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-(x+1)^2+4=-x^2-2x+3=ax^2+bx+c$

이므로 $a=-1$, $b=-2$, $c=3$

08 답 $a=-2$, $b=0$

$f(x)=2x^2-4ax+b=2(x^2-2ax+a^2-a^2)+b$

$=2(x^2-2ax+a^2)-2a^2+b$

$=2(x-a)^2-2a^2+b$

이므로 $x=a$에서 최솟값 $-2a^2+b$를 가진다.

즉, $x=-2$에서 최솟값 -8을 가지므로

$a=-2$, $b-2a^2=-8$

$\therefore a=-2,\ b=0$

09 답 (i) q (ii) q

33 제한된 범위에서 이차함수의 최대·최소

▸ p.158~159

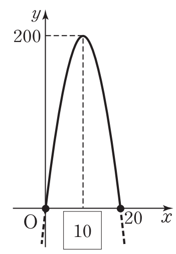
01 답 최댓값 : 200, 최솟값 : 0

$y=x(40-2x)=-2x^2+40x$

$=-2(x^2-20x+100)+200$

$=-2(x-\boxed{10})^2+200$

이므로 주어진 x의 값의 범위에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=\boxed{10}$일 때 최댓값은 200,

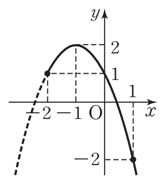
$x=0$ 또는 $x=\boxed{20}$일 때 최솟값은 0이다.

02 답 최댓값 : 2, 최솟값 : -2

주어진 x의 값의 범위에서

함수 $y=-(x+1)^2+2$의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-1$일 때 최댓값은 2,

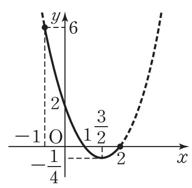
$x=1$일 때 최솟값은 -2이다.

03 답 최댓값 : 6, 최솟값 : $-\frac{1}{4}$

$y=x^2-3x+2=\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{1}{4}$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

이므로 주어진 x의 값의 범위에서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-1$일 때 최댓값은 6,

$x=\frac{3}{2}$일 때, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.

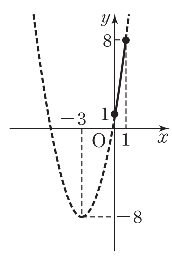
04 답 최댓값 : 8, 최솟값 : 1

$y=x^2+6x+1=(x^2+6x+9)-8$

$=(x+3)^2-8$

이므로 주어진 x의 값의 범위에서

이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=1$일 때 최댓값은 8,

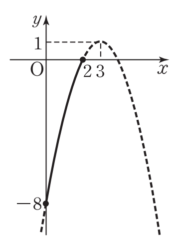
$x=0$일 때 최솟값은 1이다.

05 답 최댓값 : 0, 최솟값 : -8

$y=-x^2+6x-8=-(x^2-6x+9)+1$

$=-(x-3)^2+1$

이므로 주어진 x의 값의 범위에서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=2$일 때 최댓값은 0, $x=0$일 때 최솟값은 -8이다.

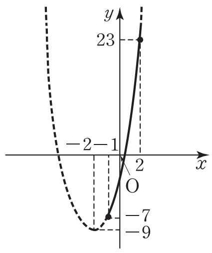
06 답 최댓값 : 23, 최솟값 : −7

$y=2x^2+8x-1$

$\quad=2(x^2+4x+4)-9$

$\quad=2(x+2)^2-9$

이므로 주어진 x의 값의 범위에서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=2$일 때 최댓값은 23, $x=-1$일 때 최솟값은 −7이다.

07 답 11

$f(x)=x^2+2x+k$

$\qquad=(x^2+2x+1)+k-1$

$\qquad=(x+1)^2+k-1$

$f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $k-1$을 가지므로

$k-1=2 \qquad \therefore k=3$

$\therefore f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

따라서 $-2\le x\le 2$에서 $x=2$일 때 $f(x)$는 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은 $f(2)=11$

08 답 −6

$f(x)=-x^2+x+k$

$\qquad=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+k+\frac{1}{4}$

$\qquad=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{1}{4}$

$f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $k+\frac{1}{4}$을 가지므로

$k+\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \qquad \therefore k=0$

$\therefore f(x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

따라서 $-2\le x\le 2$에서 $x=-2$일 때 $f(x)$는 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$f(-2)=-(-2)^2-2=-6$

09 답 −4

$f(x)=2x^2-4x+k$ ⋯ ㉠

$\qquad=2(x^2-2x+1)+k-2$

$\qquad=2(x-1)^2+k-2$

$f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $k-2$를 가지고, $x=-2$일 때 최댓값 14를 가진다.

$f(-2)=2\times(-2)^2-4\times(-2)+k$ ($\because$ ㉠)

$\qquad=8+8+k$

$\qquad=16+k=14$

이므로 $k=-2$

따라서 구하는 최솟값은

$f(1)=2-4+k$($\because$ ㉠)$=-2-2=-4$

10 답 $k=3$

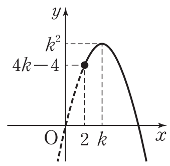
$y=-x^2+2kx$

$\quad=-(x^2-2kx+k^2)+k^2$

$\quad=-(x-k)^2+k^2$

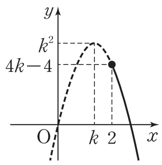
(i) $k\ge 2$일 때,

꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 값의 범위에 속하므로 오른쪽 그림에서 최댓값은 $k^2=9$



$\therefore k=3$ ($\because k\ge 2$)

(ii) $k<2$일 때,



꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 값의 범위에 속하지 않으므로 위 그림에서 최댓값은 $4k-4=9$, $4k=13$

$\therefore k=\frac{13}{4}$

그런데 $k=\frac{13}{4}$은 $k<2$의 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=3$

11 답 $k=4$

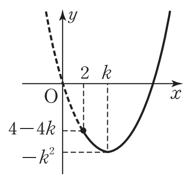
$y=x^2-2kx$

$\quad=(x^2-2kx+k^2)-k^2$

$\quad=(x-k)^2-k^2$

(i) $k\ge 2$일 때,

꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 값의 범위에 속하므로 오른쪽 그림에서 최솟값은

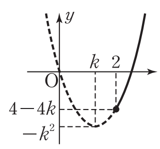


$-k^2=-16$

$k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k\ge 2$)

(ii) $k<2$일 때,



꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 값의 범위에 속하지 않으므로 위 그림에서 최솟값은 $4-4k=-16$, $4k=20$

$\therefore k=5$

그런데 $k=5$는 $k<2$의 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=4$

12 답 $f(\alpha)$, $f(p)$ / $f(p)$, $f(\alpha)$

34 여러 가지 이차식의 최대·최소 ▸ p.160~161

01 답 3

$x^2+2x=t$로 놓으면

$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로 $t\geq-1$

주어진 함수는

$y=-(x^2+2x-1)^2-4(x^2+2x)+3$

$=-(t-1)^2-4t+3$

$=-(t^2-2t+1)-4t+3$

$=-t^2-2t+2$

$=-(t+1)^2+3$ $(t\geq-1)$

따라서 $t=-1$일 때 최댓값은 3이다.

02 답 -5

$x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이므로 $t\geq2$

주어진 함수는

$y=-(x^2-2x+3)^2+2(x^2-2x)+1$

$=-t^2+2(t-3)+1$

$=-t^2+2t-5$

$=-(t-1)^2-4$ $(t\geq2)$

따라서 $t=2$일 때 최댓값은 -5이다.

03 답 -6

$x^2+4x=t$로 놓으면

$t=x^2+4x=(x+2)^2-4$이므로 $t\geq-4$

주어진 함수는

$y=(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-5$

$=t^2-2t-5$

$=(t-1)^2-6$

따라서 $t=1$일 때 최솟값은 -6이다.

04 답 -15

$x^2-6x+3=t$로 놓으면

$t=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$이므로 $t\geq-6$

주어진 함수는

$y=(x^2-6x+3)^2+4(x^2-6x)+1$

$=t^2+4(t-3)+1$

$=t^2+4t-11$

$=(t+2)^2-15$ $(t\geq-6)$

따라서 $t=-2$일 때 최솟값은 -15이다.

05 답 -6

$2x^2-12x+y^2+4y+16$

$=2(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)+16-18-4$

$=2(x-3)^2+(y+2)^2-6$

이때, x, y는 실수이므로

$(x-3)^2\geq0$, $(y+2)^2\geq0$

$\therefore$ $2x^2-12x+y^2+4y+16\geq-6$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -6이다.

06 답 9

$2x^2+4x+y^2+6y+20$

$=2(x^2+2x+1)+(y^2+6y+9)+20-2-9$

$=2(x+1)^2+(y+3)^2+9$

이때, x, y는 실수이므로

$(x+1)^2\geq0$, $(y+3)^2\geq0$

$\therefore$ $2x^2+4x+y^2+6y+20\geq9$

따라서 주어진 식의 최솟값은 9이다.

07 답 $-\frac{33}{4}$

$x^2-5x+2y^2+8y+6$

$=\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)+2(y^2+4y+4)+6-\frac{25}{4}-8$

$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2(y+2)^2-\frac{33}{4}$

이때, x, y는 실수이므로

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\geq0$, $(y+2)^2\geq0$

$\therefore$ $x^2-5x+2y^2+8y+6\geq-\frac{33}{4}$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $-\frac{33}{4}$이다.

08 답 -15

$x^2+y^2-10x+10=(x^2-10x+25)+y^2+10-25$

$=(x-5)^2+y^2-15$

이때, x, y는 실수이므로

$(x-5)^2\geq0$, $y^2\geq0$

$\therefore$ $x^2+y^2-10x+10\geq-15$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -15이다.

09 답 4

$2x^2+y^2-4x+2y+7$

$=2(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)+7-2-1$

$=2(x-1)^2+(y+1)^2+4$

이때, x, y는 실수이므로

$(x-1)^2\geq0$, $(y+1)^2\geq0$

$\therefore$ $2x^2+y^2-4x+2y+7\geq4$

따라서 주어진 식의 최솟값은 4이다.

10 답 2

$x+y=2$에서 $y=2-x$

$y=2-x$를 x^2+y^2에 대입하면

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=x^2+(2-x)^2\\&=2x^2-4x+4\\&=2(x^2-2x+1)+4-2\\&=2(x-1)^2+2\end{aligned}$$

따라서 $x=1$일 때 최솟값은 2이다.

11 답 $\frac{1}{5}$

$2x+y=1$에서 $y=1-2x$

$y=1-2x$를 x^2+y^2에 대입하면

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=x^2+(1-2x)^2=5x^2-4x+1\\&=5\left(x^2-\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}\right)+1-\frac{4}{5}\\&=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\end{aligned}$$

따라서 $x=\frac{2}{5}$일 때 최솟값은 $\frac{1}{5}$이다.

12 답 5

$2x-y=5$에서 $y=2x-5$

$y=2x-5$를 x^2+y^2에 대입하면

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=x^2+(2x-5)^2=5x^2-20x+25\\&=5(x^2-4x+4)+25-20\\&=5(x-2)^2+5\end{aligned}$$

따라서 $x=2$일 때 최솟값은 5이다.

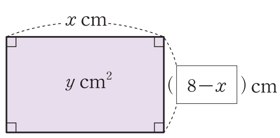
13 답 (1) 범위, 표준형 (2) m, n, k

35 이차함수의 최대·최소의 활용

▸ p.162~163

01 답 가로의 길이 : 4 cm, 세로의 길이 : 4 cm

그림과 같이 직사각형의 넓이를 $y\text{ cm}^2$, 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 ($\boxed{8-x}$) cm이다.



x와 $8-x$는 길이이므로 $x>0$, $\boxed{8-x}>0$

$\therefore\ 0<x<\boxed{8}$

한편,

$y=x(\boxed{8-x})=-x^2+8x=-(x^2-8x+16)+16$

$\quad=-(x-4)^2+16\ (0<x<\boxed{8})$

즉, $x=\boxed{4}$일 때 y의 최댓값은 16이다.

따라서 구하는 가로의 길이는 $\boxed{4}$ cm, 세로의 길이는 4 cm이다.

02 답 9 m²

직사각형의 넓이를 $y\text{ m}^2$, 가로의 길이를 x m라 하면 세로의 길이는 $(6-x)$ m이다.

$x>0$, $6-x>0$이므로 $0<x<6$

$$\begin{aligned}\therefore\ y&=x(6-x)=-x^2+6x\\&=-(x^2-6x+9)+9\\&=-(x-3)^2+9\ (0<x<6)\end{aligned}$$

즉, $x=3$일 때 최댓값은 9이다.

따라서 구하는 넓이의 최댓값은 9 m^2이다.

03 답 54 m²

피구장의 넓이를 $y\text{ m}^2$, 가로의 길이를 x m라 하면

$x+x+x+2\times$(세로의 길이)$=36$

$2\times$(세로의 길이)$=36-3x$

이므로 세로의 길이는 $\frac{1}{2}(\boxed{36-3x})$ m이다.

x와 $\frac{1}{2}(36-3x)$는 길이이므로

$x>0$, $\frac{1}{2}(\boxed{36-3x})>0$ $\quad\therefore\ 0<x<\boxed{12}$

한편,

$$\begin{aligned}y&=x\times\frac{1}{2}(\boxed{36-3x})=\frac{1}{2}(-3x^2+36x)\\&=-\frac{1}{2}\times\{-3(x^2-12x)\}\\&=-\frac{3}{2}(x^2-12x+36)+\boxed{54}\\&=-\frac{3}{2}(x-6)^2+\boxed{54}\ (0<x<\boxed{12})\end{aligned}$$

즉, $x=6$일 때 y의 최댓값은 $\boxed{54}$이다.

따라서 구하는 넓이의 최댓값은 $\boxed{54}\text{ m}^2$이다.

04 답 20 m

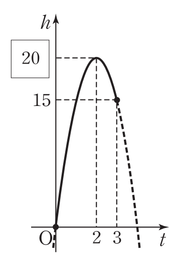
폭죽을 쏘고 나서 t초 후의 높이를 h m라 하면

$h=-5t^2+20t=-5(t-2)^2+\boxed{20}$

t는 시간, h는 높이이므로 $0\le t\le\boxed{3}$, $h\ge0$

이 범위에서 함수 $h=-20t^2+80t$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=2$일 때 h의 최댓값은 $\boxed{20}$이다.

따라서 폭죽은 최대 $\boxed{20}$ m까지 올라간다.



05 답 걸리는 시간 : 1초, 이때의 높이 : 5 m

공의 t초 후의 높이를 h m라 하면

$h=-5t^2+10t$

$\quad=-5(t^2-2t+1)+5$

$\quad=-5(t-1)^2+5$

이므로 $t=1$일 때 h의 최댓값은 5이다.

따라서 걸리는 시간은 1초이고 이때의 높이는 5 m이다.

06 답 $a=4,\ b=9$

$h=-2t^2+16t+18$

$\quad=-2(t^2-8t+16)+50$

$\quad=-2(t-4)^2+50$

이므로 $t=\boxed{4}$일 때 h의 최댓값은 50이다.

따라서 공은 $\boxed{4}$초 후에 최고 높이 50 m에 도달한다.

$\therefore a=\boxed{4}$

공이 지면에 도착하는 경우는 높이 h가 $\boxed{0}$ m일 때이므로

$-2t^2+16t+18=0,\ -2(t^2-8t-9)=0$

$-2(t-9)(t+1)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=\boxed{9}$

그런데 $t>0$이므로 $t=\boxed{9}$

따라서 공은 $\boxed{9}$초 후에 지면에 도착한다.

$\therefore b=\boxed{9}$

07 답 (i) 미지수 (ii) 미지수 (iii) 최댓값, 최솟값

단원 마무리 평가 [23~35]

▸문제편 p.164~168

01 답 ①

일차함수 $y=4x-8$의 그래프의 기울기 $a=4$,

y절편 $c=-8$이다.

한편, x절편 b는 일차함수의 그래프와 x축과의 교점이므로

$0=4b-8 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b+c=4+2-8=-2$

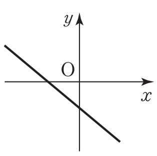
02 답 ⑤

$a<0,\ b<0$일 때,

일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 지나는 사분면은

(기울기)=(음수), (y절편)=(음수)이므로

제 2, 3, 4사분면이다.



03 답 ②

일차함수 $y=ax+b$ ⋯ ㉠라 놓고

점 $(0,\ 3)$을 지나므로

㉠에 $x=0,\ y=3$을 대입하면 $b=3$

$\therefore y=ax+3$ ⋯ ㉡

점 $(2,\ 0)$을 지나므로 ㉡에 $x=2,\ y=0$을 대입하면

$0=a\times2+3,\ 2a=-3$

$\therefore a=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore ab=\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times3=-\dfrac{9}{2}$

04 답 ①

x축에 대하여 대칭인 그래프는 y의 부호만 달라지는 것이므로

$y=-\dfrac{1}{2}x^2$에 대하여 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=-\dfrac{1}{2}x^2 \qquad \therefore y=\dfrac{1}{2}x^2$

05 답 ③

포물선의 폭은 이차항의 계수의 절대값으로 결정된다.

즉, 계수의 절대값이 클수록 포물선의 폭이 좁고, 작을수록 폭이 넓으므로 이차항의 계수의 절댓값이 가장 작은 것을 찾으면 된다.

① $y=-\dfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow \left|-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

② $y=-x^2+\dfrac{1}{4} \Rightarrow |-1|=1$

③ $y=\dfrac{1}{4}x^2-x+1 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$

④ $y=2x^2-x \Rightarrow |2|=2$

⑤ $y=-\dfrac{1}{3}x^2+2x \Rightarrow \left|-\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}<1<2$이므로 ③ $y=\dfrac{1}{4}x^2-x+1$의 폭이 가장 넓다.

06 답 ④

$y=-2x^2+6x$ ⋯ ㉠

$\quad=-2(x^2-3x)$

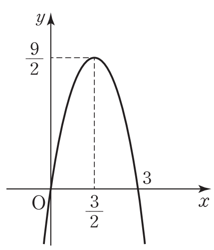
$\quad=-2\left\{x^2-3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}$

$\quad=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$

이므로 위로 볼록한 그래프이고,

꼭지점은 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$,

축의 방정식은 $x=\dfrac{3}{2}$이다.



y축과의 교점, 즉 y절편은 ㉠에 $x=0$을 대입하면

$y=0$이므로 $(0,\ 0)$이다. (즉, 이 그래프는 원점을 지난다.)

한편, ㉠의 그래프는 $y=-2x^2$의 그래프를

x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{9}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

수력 UP

x절편은 그래프와 x축의 교점이므로
㉠에 $y=0$을 대입하면
$-2x^2+6x=0$, $-2x(x-3)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=3$
따라서 x절편은 0 또는 3이므로 이 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 $(0, 0)$, $(3, 0)$이다.

07 답 ①

이차함수를 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴의 표준형으로 바꿔보자.

$y=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$이고,

이 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 $y=-(x+2-p)^2+9+q$ ⋯ ㉠이다.

한편, $y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$이고, ㉠과 같아야 한다.

$2-p=-1 \quad\therefore p=3$

$9+q=1 \quad\therefore q=-8$

$\therefore p+q=3+(-8)=-5$

08 답 ④

주어진 이차함수의 그래프는 위로 볼록이므로 $a<0$

대칭축이 y축보다 왼쪽에 있으므로

$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$에서

대칭축 $x=-\frac{b}{2a}<0$이므로 $b<0$

또한, y절편이 음수이므로 $c<0$

$\therefore a<0$, $ab>0$, $abc<0$

09 답 ①

$y=x^2+ax+b$의 그래프에서 대칭축은 $x=-\frac{a}{2}$이고

y절편은 b이다.

주어진 그래프의 대칭축이 y축보다 왼쪽에 있으므로

$-\frac{a}{2}<0$이고, y절편이 양수이므로 $b>0$이다.

$\therefore a>0$, $b>0$ ⋯ ㉠

이때,

$$y=bx^2-2x+a+\frac{1}{b}$$
$$=b\left(x^2-\frac{2}{b}x+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b^2}\right)+a+\frac{1}{b}$$
$$=b\left(x-\frac{1}{b}\right)^2+a$$

에서 최고차항의 계수 b가 양수 ($\because$ ㉠)이므로

이 함수의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점의 좌표는

$\left(\frac{1}{b}, a\right)$이다.

따라서 ㉠에 의하여 $\frac{1}{b}>0$, $a>0$이므로

이 함수의 그래프는 ① 제 1, 2사분면을 지난다.

10 답 ⑤

이차함수의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 4)$이므로

$y=a(x+2)^2+4$

이 그래프가 $(1, 13)$을 지나므로

$13=9a+4$, $9a=9 \quad\therefore a=1$

$$y=(x+2)^2+4$$
$$=(x^2+4x+4)+4$$
$$=x^2+4x+8$$
$$=ax^2+bx+c$$

이므로 $a=1$, $b=4$, $c=8$

$\therefore c-a-b=8-1-4=3$

11 답 ⑤

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 두 점 $(1, 0)$, $(4, 0)$을 지나므로 $y=ax^2+bx+c=a(x-1)(x-4)$이다.

한편, 이차함수 $y=a(x-1)(x-4)$의 그래프가 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4=a(0-1)\times(0-4)$, $4a=-4 \quad\therefore a=-1$

그러므로 구하는 함수의 식은

$$y=-(x-1)(x-4)$$
$$=-x^2+5x-4$$
$$=ax^2+bx+c$$

이므로 $a=-1$, $b=5$, $c=-4$

$\therefore abc=(-1)\times5\times(-4)=20$

12 답 ③

구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$이라 하자.

이 그래프가 $(0, -2)$를 지나므로 $c=-2$이고,

$(2, 0)$, $(-2, 4)$를 지나므로

$0=4a+2b-2$, $4a+2b=2$

$4=4a-2b-2$, $4a-2b=6$

두 식을 연립하면 $a=1$, $b=-1$

그러므로 구하는 이차함수의 식은

$$y=x^2-x-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$이다.

$\therefore p+q=\frac{1}{2}-\frac{9}{4}=\frac{2}{4}-\frac{9}{4}=-\frac{7}{4}$

13 답 ③

함수 $y=|x^2-2|$의 그래프의 x절편은

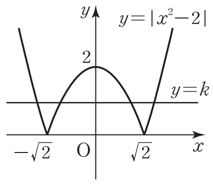
$x^2-2=0$, $x^2=2$에서 $x=\pm\sqrt{2}$이고

y절편은 $y=|0-2|=2$이다.

오른쪽 그림에서 교점이 4개일 때의

k의 값의 범위는 $0<k<2$이다.

따라서 정수 k의 값은 1이다.



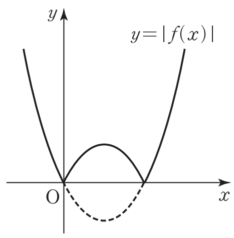
수력 UP

방정식 $|x^2-2|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-2|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

14 답 ②

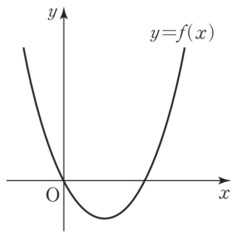
주어진 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축 위로 올린 것이다.

이때, 역으로 $y=f(x)$의 그래프를 찾으려면 $y<0$인 부분을 x축 위로 올린 실선을 다시 점선으로 돌리면 된다는 것이다.

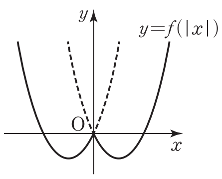


즉, 주어진 $y=|f(x)|$의 그래프로부터

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같음을 알 수 있다.



따라서 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프 중 $x<0$인 부분을 지우고, 남은 부분을 y축에 대하여 대칭이 되게 하면 되므로 오른쪽 그림과 같다.



15 답 ②

이차함수 $y=-x^2+6x-8$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표 α, β는 방정식 $-x^2+6x-8=0$의 두 근이므로

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=2^3+4^3=4^3+2^3=72$

16 답 ①

이차함수 $y=ax^2+2x+b$의 그래프가 x축 위의 두 점 $(-3,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 지나므로

$y=a(x+3)(x-1)=a(x^2+2x-3)$

$\quad =ax^2+2ax-3a=ax^2+2x+b$

즉, $2a=2$, $-3a=b$ $\quad\therefore a=1,\ b=-3$

$\therefore a+b=-2$

17 답 ①

이차함수 $y=x^2+6x+7$의 그래프와 x축과의 교점은 방정식 $x^2+6x+7=0$ … ㉠의 해와 같다.

이때, 방정식의 두 실근을 α, $\beta(\alpha>\beta)$로 놓으면 교점의 x좌표는 각각 α, β이다.

$\therefore \overline{AB}=\alpha-\beta$

이때, ㉠에서 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=7$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-6)^2-4\times7=36-28=8$

$\therefore \alpha-\beta=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$ ($\because \alpha-\beta>0$)

18 답 ②

이차함수 $y=x^2-kx+5$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-kx+5=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$D=k^2-4\times5=k^2-20=0$

$k^2=20$ $\quad\therefore k=2\sqrt{5}$ ($\because k>0$)

19 답 ④

이차함수 $y=x^2-(k+2)x+4+\dfrac{k^2}{4}$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-(k+2)x+4+\dfrac{k^2}{4}=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

$D=\{-(k+2)\}^2-16-k^2<0$

$k^2+4k+4-16-k^2<0$

$4k-12<0$ $\quad\therefore k<3$

따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

20 답 ④

이차함수 $y=x^2-6x+k+3$의 그래프가 x축과 적어도 한 점에서 만나기 위해서는 이차방정식 $x^2-6x+k+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D\geq0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-(k+3)\geq0$, $6-k\geq0$

$\therefore k\leq6$

따라서 정수 k의 최댓값은 6이다.

21 답 ③

이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+2x+3=ax+b$, 즉 $x^2+(2-a)x+3-b=0$의 두 근 -2, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2)+1=-(2-a)$, $-1=-2+a$ $\quad\therefore a=1$

$(-2)\times1=3-b$, $-2=3-b$ $\quad\therefore b=5$

$\therefore a+b=6$

22 답 ②

이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는

이차방정식 $2x^2-3x+1=x+k$, $2x^2-4x-k+1=0$의

판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(1-k)>0$, $2+2k>0$ $\quad \therefore k>-1$

23 답 ①

직선 $y=-x+k$와 이차함수 $y=x^2-5x-3$의 그래프가 서로 만나지 않으려면 이차방정식 $-x+k=x^2-5x-3$,

$x^2-4x-3-k=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-3-k)<0$, $7+k<0$

$\therefore k<-7$

따라서 정수 k의 최댓값은 -8이다.

24 답 ③

이차함수 $y=-2(x-p)^2+q$는 $x=p$에서 최댓값 q를 가지므로

주어진 조건에서 $x=-2$에서 최댓값 5를 가지므로

$p=-2$, $q=5$이다.

$\therefore p+q=3$

25 답 ④

최고차항의 계수가 1인 이차함수가 $x=-2$에서 최솟값 4를 가지므로

$y=(x+2)^2+4$

$\quad =x^2+4x+8$

$\quad =x^2+2ax+b$

즉, $2a=4$, $8=b$ $\quad \therefore a=2$, $b=8$

$\therefore b-a=6$

26 답 ③

$y=\frac{1}{3}x^2-4x+3+k$

$\quad =\frac{1}{3}(x^2-12x+36-36)+3+k$

$\quad =\frac{1}{3}(x-6)^2-9+k$

이므로 최솟값은 $k-9$이다.

또한,

$y=-4x^2+8x-7-2k$

$\quad =-4(x^2-2x+1-1)-7-2k$

$\quad =-4(x-1)^2-3-2k$

이므로 최댓값은 $-3-2k$이다.

최솟값과 최댓값이 같으므로 $k-9=-3-2k$, $3k=6$

$\therefore k=2$

27 답 ①

$y=x^2-2mx-8m-19$

$\quad =(x^2-2mx+m^2-m^2)-8m-19$

$\quad =(x-m)^2-m^2-8m-19$

이므로 최솟값은 $-m^2-8m-19$가 된다.

이차함수 $y=x^2-2mx-8m-19$의 최솟값을 M이라 하면

$M=-m^2-8m-19$

$\quad =-(m^2+8m+16-16)-19$

$\quad =-(m+4)^2-3$

이므로 M의 최댓값은 -3이다.

28 답 ①

최고차항의 계수가 양수인 이차함수

$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$의 꼭짓점의 x좌표 2가 주어진 범위 $0\le x\le 5$에 포함되므로

(i) 최솟값

$x=2$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

(ii) 최댓값

$x=0$일 때, $y=3$이고, $x=5$일 때, $y=8$이므로

최댓값 8을 가진다.

(i), (ii)에 의하여 최댓값과 최솟값의 합은 7이다.

[다른 풀이]

최고차항의 계수가 양수인 이차함수

$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$의 꼭짓점의 x좌표 2가 주어진 범위 $0\le x\le 5$에 포함되므로

$x=2$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

주어진 범위 $0\le x\le 5$에 대하여

대칭축 $x=2$를 기준으로 양 끝 값 중 $x=5$가 더 멀기 때문에

$x=5$일 때, 최댓값 8을 갖는다.

수력 UP

$0\le x\le 5$에서

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값, 최솟값을 구할 때,

(1) $x=p$가 주어진 범위에 포함되면

① **$a>0$이면** $x=p$일 때 최솟값을,
$a<0$이면 $x=p$일 때 최댓값을 갖는다.

② **$a>0$이면**
범위의 양 끝 값 0과 5 중 $x=p$로부터 더 먼 값이 최댓값을,
$a<0$이면
범위의 양 끝 값 0과 5 중 $x=p$로부터 더 먼 값이 최솟값을 갖는다.

(2) $x=p$가 주어진 범위에 포함되지 않으면
주어진 범위의 양 끝 값을 대입하고, y의 값을 비교하여 최댓값, 최솟값을 구한다.

29 답 ③

$f(x)=-x^2+2x+k-3=-(x-1)^2+k-2$이고,

주어진 범위 $-1\le x\le 2$에 꼭짓점의 x좌표 1이 포함되므로

$x=1$일 때, 최댓값 $k-2$를 갖는다.

즉, $k-2=2$이므로 $k=4$

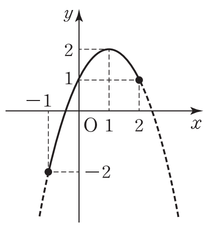
$\therefore\ f(x)=-x^2+2x+1$

또한, 최솟값은 $f(-1)$, $f(2)$ 중 작은 값이다.

$f(-1)=-(-1)^2+2\times(-1)+1$

$\qquad=-2$

$f(2)=-4+4+1=1$



이므로 최솟값은 -2이다.

따라서 $k=4$, $a=-2$이므로

$k+a=4+(-2)=2$이다.

30 답 ②

$x^2+4x=t\,(t\ge -4)$로 놓으면

주어진 함수는

$y=t^2-2t-3+k=(t-1)^2+k-4$이므로

$t=1$일 때 최솟값은 $k-4$이다.

한편, 주어진 이차함수의 최솟값이 6이라 하므로

$k-4=6\qquad\therefore\ k=10$

수력 UP

$x^2+4x=t$라 치환하면 t의 값의 범위를 반드시 찾아야 한다.

$t=x^2+4x+4-4=(x+2)^2-4\ge -4$

이므로 $t\ge -4$이다.

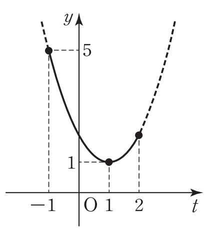
31 답 ②

$x^2-2x+2=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2+1$이므로 $t\ge 1$이다.

이때, $-1\le x\le 2$에서 $1\le t\le 5$이므로

주어진 함수



$f(x)$

$=(x^2-2x+2)^2-4(x^2-2x+2)+2$

를 t에 관한 이차함수 식으로 나타내면

$y=t^2-4t+2=(t-2)^2-2\,(1\le t\le 5)$이다.

한편, 꼭짓점의 t좌표 2가 $1\le t\le 5$에 포함되므로

$t=2$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

또한, 최댓값은

$t=1$일 때 $(1-2)^2-2=-1$,

$t=5$일 때 $(5-2)^2-2=9-2=7$

중 큰 값이므로 $t=5$일 때 7이다.

따라서 주어진 함수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하므로

$M=7$, $m=-2$이므로

$M+m=7+(-2)=5$

32 답 ③

실수 x, y에 대하여

$2x^2-4x+y^2+6y+16$

$=2(x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)+16-2-9$

$=2(x-1)^2+(y+3)^2+5$이고,

$(x-1)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$이므로

$2x^2-4x+y^2+6y+16\ge 5$이다.

그러므로 주어진 식은 $x=1$, $y=-3$일 때, 최솟값 5를 가지므로

$a=1$, $b=-3$, $c=5$이다.

$\therefore\ a+b+c=3$

33 답 ②

실수 x, y에 대하여 $x-y=2$일 때, x^2+6y ⋯ ㉠의 최솟값을 a,

그때의 x의 값을 b라 하자.

$x-y=2$에서 $y=x-2$

이를 ㉠에 대입하면

$x^2+6y=x^2+6(x-2)$

$\qquad=x^2+6x-12$

$\qquad=(x+3)^2-21$

따라서 $x=-3$일 때, 최솟값 -21을 가지므로

$a=-21$, $b=-3$

$\therefore\ a+b=-24$

34 답 ③

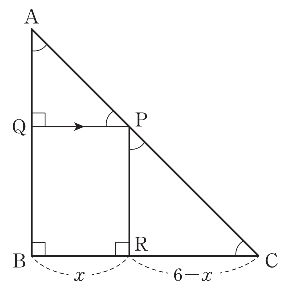
$\overline{BR}=x$라 하면 $\overline{CR}=6-x$이고,

직각이등변삼각형의 직각이

아닌 두 각의 크기는 45°이므로

△PRC도 직각이등변삼각형이다.

$\therefore\ \overline{PR}=\overline{CR}=6-x$



한편, 사각형 QBRP의 넓이를

y라 하면 가로의 길이가 x,

세로의 길이가 $6-x$이므로

$y=x(6-x)=-x^2+6x$

$\ =-(x^2-6x+9-9)=-(x-3)^2+9$

따라서 $\overline{BR}=x=3\,\text{cm}$일 때,

사각형 QBRP의 넓이는 $9\,\text{cm}^2$로 최대가 된다.

35 답 ②

직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하자.

길이가 40인 끈을 이용하여 직사각형을 만들었으므로

$2(x+y)=40$, $x+y=20$

⇨ $y=-x+20$ ⋯ ㉠

이때, $x>0$, $y=-x+20>0$이므로 $0<x<20$이다.

직사각형의 대각선의 길이를 l이라 하면
피타고라스 정리에 의하여

$l^2=x^2+y^2=x^2+(-x+20)^2$ ($\because$ ㉠)

$=x^2+x^2-40x+400$

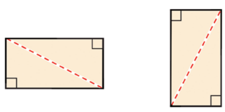
$=2(x^2-20x+100-100)+400$

$=2(x-10)^2+200$ $(0<x<20)$

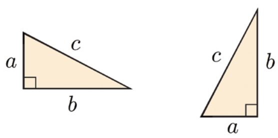
따라서 직사각형의 대각선의 길이의 최솟값은
$\sqrt{200}=10\sqrt{2}$

수력 UP

피타고라스 정리를 이용하면 직각삼각형의 두 변의 길이를 알 때, 다른 한 변의 길이를 알 수 있다.
따라서 직사각형을 대각선으로 자르면 직각삼각형이 만들어지므로 피타고라스 정리를 이용하여 직사각형의 대각선의 길이도 알 수 있다.



• **피타고라스 정리:** 세 변의 길이가 a, b, c인 직각삼각형에서
빗변의 길이가 c이면 $a^2+b^2=c^2$이다.



Ⅱ-4 여러 가지 방정식

36 인수분해를 이용한 삼·사차방정식의 풀이

▸ p.169

01 답 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

$\therefore x=\boxed{-1}$ 또는 $x=\boxed{\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

02 답 $x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면 $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$x+3=0$ 또는 $x^2-3x+9=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

03 답 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$x-2=0$ 또는 $x^2+2x+4=0$

$\therefore x=\boxed{2}$ 또는 $x=\boxed{-1\pm\sqrt{3}i}$

04 답 $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{4}$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$(2x)^3-3^3=0$에서

$(2x-3)(4x^2+6x+9)=0$

$2x-3=0$ 또는 $4x^2+6x+9=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{4}$

05 답 $x=0$ (중근) 또는 $x=1$

$x^3-x^2=0$에서 $x^2(x-1)=0$

$x^2=0$ 또는 $x-1=0$

$\therefore x=0$ (중근) 또는 $x=1$

06 답 $x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$

$x^4-16=0$에서 $(x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$

07 답 $x=\pm\frac{1}{2}i$ 또는 $x=\pm\frac{1}{2}$

$16x^4-1=0$에서 $(4x^2+1)(4x^2-1)=0$

$(4x^2+1)(2x-1)(2x+1)=0$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2}i$ 또는 $x=\pm\frac{1}{2}$

08 답 $x=0$ (중근) 또는 $x=\pm1$

$x^4-x^2=0$에서 $x^2(x^2-1)=0$

$x^2(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ (중근) 또는 $x=\pm1$

09 답 $x=0$ (중근) 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

$x^4+x^3-2x^2=0$에서 $x^2(x^2+x-2)=0$

$x^2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ (중근) 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

10 답 $A=0$, $B=0$ / $C=0$ / $A=0$, $B=0$ / $C=0$, $D=0$

37 인수정리와 조립제법을 이용한 삼·사차방정식의 풀이 ▸ p.170~171

01 답 $x=-1$ 또는 $x=2\pm i$

$f(x)=x^3-3x^2+x+5$로 놓으면

$f(-1)=-1-3-1+5=0$이므로 $x+1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하면

-1	1	-3	1	5
		-1	4	-5
	1	-4	5	0

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2-4x+5)$

따라서 $f(x)=0$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=2\pm i$

02 답 $x=1$ 또는 $x=\pm i$

$f(x)=x^3-x^2+x-1$로 놓으면

$f(1)=1-1+1-1=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하면

1	1	-1	1	-1
		1	0	1
	1	0	1	0

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+1)$

따라서 $f(x)=0$의 해는 $x=1$ 또는 $x=\pm i$

03 답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

$f(x)=x^3+2x^2-5x+2$로 놓으면

$f(1)=1+2-5+2=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하면

1	1	2	-5	2
		1	3	-2
	1	3	-2	0

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+3x-2)$

따라서 $f(x)=0$의 해는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

04 답 $x=\pm1$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$f(x)=x^4-3x^3+3x-1$로 놓으면

$f(1)=1-3+3-1=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하면

1	1	-3	0	3	-1
		1	-2	-2	1
	1	-2	-2	1	0

$f(x)=(x-1)(x^3-2x^2-2x+1)$

$g(x)=x^3-2x^2-2x+1$로 놓으면

$g(-1)=-1-2+2+1=0$이므로 $x+1$은 $g(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하면

-1	1	-2	-2	1
		-1	3	-1
	1	-3	1	0

$g(x)=(x+1)(x^2-3x+1)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-3x+1)$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 해는

$x=\pm1$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

05 답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

$f(x)=x^4-5x-6$으로 놓으면

$f(-1)=1+5-6=0$이므로 $x+1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하면

-1	1	0	0	-5	-6
		-1	1	-1	6
	1	-1	1	-6	0

$f(x)=(x+1)(x^3-x^2+x-6)$

$g(x)=x^3-x^2+x-6$으로 놓으면

$g(2)=8-4+2-6=0$이므로 $x-2$는 $g(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하면

2	1	-1	1	-6
		2	2	6
	1	1	3	0

$g(x)=(x-2)(x^2+x+3)$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x+3)$

따라서 $f(x)=0$의 해는

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

06 답 $x=1$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}i$

$x+1=t$라 하면

$t^3-2^3=0$, $(t-2)(t^2+2t+4)=0$에서

$(x+1-2)\{(x+1)^2+2(x+1)+4\}=0$

$(x-1)(x^2+4x+7)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}i$

07 답 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{9\pm\sqrt{3}i}{2}$

$x-4=t$라 하면

$t^3+1=0$, $(t+1)(t^2-t+1)=0$에서

$(x-4+1)\{(x-4)^2-(x-4)+1\}=0$

$(x-3)(x^2-9x+21)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{9\pm\sqrt{3}i}{2}$

08 답 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

$x-2=t$라 하면

$t^3-(t+2)t=0$, $t(t^2-t-2)=0$

$t(t+1)(t-2)=0$에서

$(x-2)(x-2+1)(x-2-2)=0$, $(x-2)(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

[다른 풀이]

$x-2=t$라 하면

$t^3-xt=0 \Rightarrow t(t^2-x)=0$에서

$(x-2)\{(x-2)^2-x\}=0$

$(x-2)(x^2-5x+4)=0$

$(x-2)(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

09 답 $x=-2$(중근) 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}$

$x^2+4x-1=t$로 놓으면 주어진 식은

$t(t+4)-5=0$, $t^2+4t-5=0$

$(t+5)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-5$ 또는 $t=1$

(i) $t=-5$일 때,

$x^2+4x-1=-5$에서 $x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0 \qquad \therefore x=-2$(중근)

(ii) $t=1$일 때,

$x^2+4x-1=1$에서 $x^2+4x-2=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 $x=-2$(중근) 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}$

10 답 $x=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

$x^2+5x+4=t$로 놓으면 주어진 식은

$(t+2)t-3=0$, $t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

(i) $t=-3$일 때,

$x^2+5x+4=-3$에서 $x^2+5x+7=0$

$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $t=1$일 때,

$x^2+5x+4=1$에서 $x^2+5x+3=0$

$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

11 답 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

$x^3+x^2+ax-3=0$의 한 근이 1이므로

$1+1+a-3=0 \qquad \therefore a=\boxed{1}$

$x^3+x^2+x-3=0$에서

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x-1)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\boxed{-1\pm\sqrt{2}i}$

따라서 나머지 두 근은 $x=\boxed{-1\pm\sqrt{2}i}$이다.

12 답 $x=1\pm\sqrt{2}$

$x^3+ax^2-3x-1=0$의 한 근이 -1이므로

$-1+a+3-1=0 \qquad \therefore a=-1$

$x^3-x^2-3x-1=0$에서

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ & & -1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$(x+1)(x^2-2x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

따라서 나머지 두 근은 $x=1\pm\sqrt{2}$이다.

13 답 인수정리, 조립제법, $x-\alpha$

38 여러 가지 사차방정식

▸ p.172~173

01 답 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

$x^2=t$로 놓으면

$x^4=(x^2)^2=t^2$이므로 주어진 방정식은

$\boxed{t^2}-3\boxed{t}+2=0$, $(t-1)(t-\boxed{2})=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=\boxed{2}$

(i) $t=1$일 때, $x^2=1$에서 $x=\pm1$

(ii) $t=\boxed{2}$일 때, $x^2=\boxed{2}$에서 $x=\pm\boxed{\sqrt{2}}$

따라서 구하는 해는 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\boxed{\sqrt{2}}$

02 답 $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{10}$

$x^2=t$로 놓으면

$t^2-12t+20=0$, $(t-2)(t-10)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=10$

(i) $t=2$일 때, $x^2=2$에서 $x=\pm\sqrt{2}$

(ii) $t=10$일 때, $x^2=10$에서 $x=\pm\sqrt{10}$

따라서 구하는 해는 $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{10}$

03 답 $x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

$x^2=t$로 놓으면 $t^2+t-12=0$, $(t+4)(t-3)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=3$

(i) $t=-4$일 때, $x^2=-4$에서 $x=\pm 2i$

(ii) $t=3$일 때, $x^2=3$에서 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 구하는 해는 $x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

04 답 $x=\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

$x^2=t$로 놓으면 $t^2-3t-10=0$, $(t-5)(t+2)=0$

$\therefore t=5$ 또는 $t=-2$

(i) $t=5$일 때, $x^2=5$에서 $x=\pm\sqrt{5}$

(ii) $t=-2$일 때, $x^2=-2$에서 $x=\pm\sqrt{2}i$

따라서 구하는 해는 $x=\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

05 답 $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 3$

$x^2=t$로 놓으면 $t^2-13t+36=0$, $(t-4)(t-9)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=9$

(i) $t=4$일 때, $x^2=4$에서 $x=\pm 2$

(ii) $t=9$일 때, $x^2=9$에서 $x=\pm 3$

따라서 구하는 해는 $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 3$

06 답 $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

$x^2=t$로 놓으면 $t^2-5t+6=0$, $(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$

(i) $t=2$일 때, $x^2=2$에서 $x=\pm\sqrt{2}$

(ii) $t=3$일 때, $x^2=3$에서 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 구하는 해는 $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

07 답 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$

$x^4-x^2+16=0$, $x^4+8x^2+16-9x^2=0$

$(x^2+4)^2-(3x)^2=0$

$(x^2+\boxed{3x}+4)(x^2-\boxed{3x}+4)=0$

$x^2+\boxed{3x}+4=0$ 또는 $x^2-\boxed{3x}+4=0$

$\therefore x=\dfrac{-\boxed{3}\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\boxed{3}\pm\sqrt{7}i}{2}$

08 답 $x=1\pm 2i$ 또는 $x=-1\pm 2i$

$x^4+6x^2+25=0$, $x^4+10x^2+25-4x^2=0$

$(x^2+5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2-2x+5)(x^2+2x+5)=0$

$x^2-2x+5=0$ 또는 $x^2+2x+5=0$

$\therefore x=1\pm 2i$ 또는 $x=-1\pm 2i$

09 답 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=-3\pm 2\sqrt{2}$

$x\neq 0$이므로 주어진 방정식의 양변을 $x^2(x\neq 0)$으로 나누면

$x^2+5x-4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\boxed{6}=0$

이때, $x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2+5t-\boxed{6}=0$, $(t-1)(t+\boxed{6})=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-\boxed{6}$

(i) $t=1$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $t=-\boxed{6}$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=-\boxed{6}$에서 $x^2+\boxed{6}x+1=0$

$\therefore x=-\boxed{3}\pm 2\sqrt{2}$

따라서 주어진 사차방정식의 해는

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=-\boxed{3}\pm 2\sqrt{2}$이다.

10 답 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=1$(중근)

$x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$의 양변을 $x^2(x\neq 0)$으로 나누면

$x^2-3x+4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$, $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$

이때, $x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

(i) $t=1$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $t=2$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=2$에서 $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$(중근)

따라서 주어진 사차방정식의 해는

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=1$(중근)

11 답 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=-4\pm\sqrt{15}$

$x^4+11x^3+26x^2+11x+1=0$의 양변을 $x^2(x\neq 0)$으로 나누면

$x^2+11x+26+\dfrac{11}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+11\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+11\left(x+\frac{1}{x}\right)+24=0$

이때, $x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2+11t+24=0$, $(t+3)(t+8)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=-8$

(i) $t=-3$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x^2+3x+1=0$ $\quad \therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $t=-8$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-8$에서 $x^2+8x+1=0$ $\quad \therefore x=-4\pm\sqrt{15}$

따라서 주어진 사차방정식의 해는

$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=-4\pm\sqrt{15}$

12 답 $x=2\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0$의 양변을 $x^2(x\neq0)$으로 나누면

$x^2-3x-2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

이때, $x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2-3t-4=0$, $(t-4)(t+1)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=-1$

(i) $t=4$일 때,

$x+\frac{1}{x}=4$에서 $x^2-4x+1=0$ $\quad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

(ii) $t=-1$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-1$에서 $x^2+x+1=0$ $\quad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 사차방정식의 해는

$x=2\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

13 답 (i) x^2 (ii) $x+\frac{1}{x}$ (iii) $x+\frac{1}{x}$

39 삼차방정식의 근과 계수의 관계 ▸ p.174~175

01 답 3 **02** 답 2 **03** 답 -1

04 답 -3

$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$=(\alpha\beta-\alpha-\beta+1)(\gamma-1)$

$=\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma-\beta\gamma+\gamma-\alpha\beta+\alpha+\beta-1$

$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=5-3-4-1=-3$

05 답 $\frac{3}{5}$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{5}$

06 답 10

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-4)^2-2\times3=16-6=10$

07 답 2 **08** 답 4 **09** 답 8

10 답 $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

11 답 -4

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=2^2-2\times4=-4$

12 답 0

$\alpha+\beta+\gamma=2$이므로

$\alpha+\beta=2-\gamma$, $\beta+\gamma=2-\alpha$, $\gamma+\alpha=2-\beta$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta)$

$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=8-4\times2+2\times4-8=0$

13 답 -2 **14** 답 $-\frac{1}{2}$ **15** 답 1

16 답 $-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$

17 답 5

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\alpha+\gamma\alpha)$

$=(-2)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=4+1=5$

18 답 0

$\alpha+\beta+\gamma=-2$이므로

$\alpha+\beta=-2-\gamma$, $\beta+\gamma=-2-\alpha$, $\gamma+\alpha=-2-\beta$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=-(2+\alpha)(2+\beta)(2+\gamma)$

$=-\{2^3+2^2\times(\alpha+\beta+\gamma)+2\times(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma\}$

$=-(8-8-1+1)=0$

19 답 (1) $-\frac{b}{a}$ (2) $\frac{c}{a}$ (3) $-\frac{d}{a}$

40 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

▸ p.176

01 답 $x^3-5x^2+2x+8=0$

$x^3-(-1+2+4)x^2+(-2+8-4)x-(-1)\times2\times4=0$

$\therefore x^3-5x^2+2x+8=0$

02 답 $x^3+x^2-2x=0$

$x^3-(0+1-2)x^2+(0-2+0)x-0\times1\times(-2)=0$

$\therefore x^3+x^2-2x=0$

03 답 $x^3-11x^2+38x-40=0$

$x^3-(2+5+4)x^2+(10+20+8)x-2\times5\times4=0$

$\therefore x^3-11x^2+38x-40=0$

04 답 $x^3+9x^2+23x+15=0$

$x^3-(-1-3-5)x^2+(3+15+5)x-(-1)\times(-3)\times(-5)=0$

$\therefore x^3+9x^2+23x+15=0$

05 답 $x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}=0$

$$x^3-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)x-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

$\therefore x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}=0$

06 답 $x^3-3x^2-2x+1=0$

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=1$이므로

$-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하는 삼차방정식은

$x^3-(-\alpha-\beta-\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-(-\alpha\beta\gamma)=0$

$x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma=0$

$\therefore x^3-3x^2-2x+1=0$

07 답 $x^3+2x^2-3x-1=0$

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=1$이므로

$\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식은

$$x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-2$

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-3$, $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$

$\therefore x^3+2x^2-3x-1=0$

08 답 $x^3+4x^2+x-6=0$

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=1$이므로

$\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$를 세 근으로 하는 삼차방정식의 근은 -3, -2, 1이다.

세 근의 합은 $-3-2+1=-4$

두 근끼리의 곱의 합은 $6-2-3=1$

세 근끼리의 곱은 6이므로 $x^3+4x^2+x-6=0$

09 답 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$

41 삼차방정식의 켤레근

▸ p.177~178

01 답 $a=-3$, $b=1$

삼차방정식 $x^3-x^2+ax-b=0$(a, b는 유리수)의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 두면 근과 계수의 관계 … ㉠에 의하여 세 근의 합은 1이므로

$1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+\alpha=1$ $\quad\therefore \alpha=-1$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\times(-1)+(-1)\times(1+\sqrt{2})$
$=(1-2)-1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-3$

이므로 $a=\boxed{-3}$

㉠에 의하여 세 근의 곱이 b이고,

$(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})\times(-1)=1$이므로

$b=\boxed{1}$

02 답 $a=-13$, $b=3$

삼차방정식 $x^3-x^2+ax-b=0$(a, b는 유리수)의 한 근이 $2-\sqrt{5}$이므로 $2+\sqrt{5}$도 근이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 두면 근과 계수의 관계 … ㉠에 의하여 세 근의 합은 1이므로

$2-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}+\alpha=1$ $\quad\therefore \alpha=-3$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$(2-\sqrt{5})\times(2+\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})\times(-3)+(-3)\times(2-\sqrt{5})$
$=(4-5)-6-3\sqrt{5}-6+3\sqrt{5}=-13$

이므로 $a=-13$

㉠에 의하여 세 근의 곱이 b이고,

$(2-\sqrt{5})\times(2+\sqrt{5})\times(-3)=3$이므로

$b=3$

03 답 $a=-24$, $b=-30$

삼차방정식 $x^3-x^2+ax-b=0$(a, b는 유리수)의 한 근이 $3-\sqrt{3}$이므로 $3+\sqrt{3}$도 근이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 두면 근과 계수의 관계 … ㉠에 의하여 세 근의 합은 1이므로

$3-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}+\alpha=1$ $\quad\therefore \alpha=-5$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$(3-\sqrt{3})\times(3+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})\times(-5)+(-5)\times(3-\sqrt{3})$

$=(9-3)-15-5\sqrt{3}-15+5\sqrt{3}=-24$

이므로 $a=-24$

㉠에 의하여 세 근의 곱이 b이고,

$(3-\sqrt{3})\times(3+\sqrt{3})\times(-5)=-30$이므로

$b=-30$

04 답 $a=-2$, $b=-2$

삼차방정식 $x^3-x^2+ax-b=0$(a, b는 유리수)의 한 근이 $-\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2}$도 근이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 두면 근과 계수의 관계 … ㉠에 의하여 세 근의 합은 1이므로

$-\sqrt{2}+\sqrt{2}+\alpha=1 \qquad \therefore \alpha=1$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$-\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times1+1\times(-\sqrt{2})=-2+\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$=-2$

이므로 $a=-2$

㉠에 의하여 세 근의 곱이 b이고,

$-\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times1=-2$이므로 $b=-2$

05 답 $a=-2$, $b=0$

최고차항의 계수가 1이고, 계수가 모두 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계 … ㉠에 의하여 세 근의 합은

$(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})+\alpha=2$이므로 $\alpha=0$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$(1-\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\times0+0\times(1-\sqrt{3})=1-3$

$=-2$

이므로 $a=\boxed{-2}$

㉠에 의하여 세 근의 곱은 $-b$이고,

$(1-\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})\times0=0$

이므로 $-b=0 \qquad \therefore b=\boxed{0}$

06 답 $a=-5$, $b=10$

최고차항의 계수가 1이고, 계수가 모두 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $-\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $\sqrt{5}$이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계 … ㉠에 의하여 세 근의 합은 2이므로

$-\sqrt{5}+\sqrt{5}+\alpha=2$

$\therefore \alpha=2$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$-\sqrt{5}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times2+2\times(-\sqrt{5})$

$=-5+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}=-5$

이므로 $a=-5$

㉠에 의하여 세 근의 곱이 $-b$이고,

$-\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times2=-10$

이므로 $-b=-10 \qquad \therefore b=10$

07 답 $a=-1$, $b=-10$

최고차항의 계수가 1이고, 계수가 모두 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $2-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{2}$이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계 … ㉠에 의하여 세 근의 곱은 -6이므로

$(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})\times\alpha=-6$

$2\alpha=-6 \qquad \therefore \alpha=-3$

㉠에 의하여 세 근의 합은 $-a$이고,

$(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})+(-3)=1$이므로 $-a=1$

$\therefore a=-1$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 b이고,

$(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})\times(-3)+(-3)\times(2-\sqrt{2})$

$=(4-2)-6-3\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}$

$=-10$

이므로 $b=-10$

08 답 $a=-7$, $b=13$

최고차항의 계수가 1이고, 계수가 모두 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $3-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3+\sqrt{2}$이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계 … ㉠에 의하여 세 근의 곱은 7이므로

$(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})\times\alpha=7$, $7\alpha=7$

$\therefore \alpha=1$

㉠에 의하여 세 근의 합은 $-a$이고,

$(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})+1=7$이므로 $a=-7$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 b이고,

$(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})\times1+1\times(3-\sqrt{2})$

$=(9-2)+3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}$

$=13$

이므로 $b=13$

09 답 $a=12$, $b=24$

최고차항의 계수가 1이고, 계수가 모두 실수인 삼차방정식의 한 근이 $-2\sqrt{3}i$이므로 다른 한 근은 $2\sqrt{3}i$이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계 ⋯ ㉠에 의하여 세 근의 합은 -2이므로

$-2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i+\alpha=-2 \qquad \therefore \alpha=-2$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$-2\sqrt{3}i\times2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i\times(-2)+(-2)\times(-2\sqrt{3}i)$

$=12-4\sqrt{3}i+4\sqrt{3}i$

$=12$

이므로 $a=\boxed{12}$

㉠에 의하여 세 근의 곱이 $-b$이고,

$-2\sqrt{3}i\times2\sqrt{3}i\times(-2)=-24$

이므로 $-b=-24 \qquad \therefore b=\boxed{24}$

10 답 $a=6,\ b=0$

최고차항의 계수가 1이고, 계수가 모두 실수인 삼차방정식의 한 근이 $-1+\sqrt{5}i$이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{5}i$이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계 ⋯ ㉠에 의하여 세 근의 합은 -2이고,

$(-1+\sqrt{5}i)+(-1-\sqrt{5}i)+\alpha=-2$이므로

$\alpha=0$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$(-1+\sqrt{5}i)\times(-1-\sqrt{5}i)+(-1-\sqrt{5}i)\times0+0\times(-1+\sqrt{5}i)$

$=1+5=6$

이므로 $a=6$

㉠에 의하여 세 근의 곱은 $-b$이고,

$(-1+\sqrt{5}i)\times(-1-\sqrt{5}i)\times0=0$

이므로 $-b=0 \qquad \therefore b=0$

11 답 $a=3-4\sqrt{2},\ b=22+22\sqrt{2}$

최고차항의 계수가 1이고, 계수가 모두 실수인 삼차방정식의 한 근이 $\sqrt{2}-3i$이므로 다른 한 근은 $\sqrt{2}+3i$이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계 ⋯ ㉠에 의하여 세 근의 합은 -2이고,

$(\sqrt{2}-3i)+(\sqrt{2}+3i)+\alpha=-2$이므로

$\alpha=-2-2\sqrt{2}$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$(\sqrt{2}-3i)\times(\sqrt{2}+3i)+(\sqrt{2}+3i)\times(-2-2\sqrt{2})$
$\qquad +(-2-2\sqrt{2})\times(\sqrt{2}-3i)$

$=(2+9)-(2+2\sqrt{2})\times(\sqrt{2}+3i+\sqrt{2}-3i)$

$=11-(2+2\sqrt{2})\times2\sqrt{2}$

$=11-4\sqrt{2}-8$

$=3-4\sqrt{2}$

이므로 $a=3-4\sqrt{2}$

㉠에 의하여 세 근의 곱은 $-b$이고,

$(\sqrt{2}-3i)\times(\sqrt{2}+3i)\times(-2-2\sqrt{2})=-11(2+2\sqrt{2})$

이므로 $-b=-11(2+2\sqrt{2})$

$\therefore b=11(2+2\sqrt{2})=22+22\sqrt{2}$

12 답 $a=-9,\ b=-60$

최고차항의 계수가 1이고, 계수가 모두 실수인 삼차방정식의 한 근이 $\sqrt{6}i-3$이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{6}i-3$이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계 ⋯ ㉠에 의하여 세 근의 합은 -2이고,

$(\sqrt{6}i-3)+(-\sqrt{6}i-3)+\alpha=-2$이므로

$\alpha=4$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$(\sqrt{6}i-3)\times(-\sqrt{6}i-3)+(-\sqrt{6}i-3)\times4+4\times(\sqrt{6}i-3)$

$=(9+6)+(-4\sqrt{6}i-12)+(4\sqrt{6}i-12)$

$=15-24=-9$

이므로 $a=-9$

㉠에 의하여 세 근의 곱은 $-b$이고,

$(\sqrt{6}i-3)\times(-\sqrt{6}i-3)\times4=60$

이므로 $-b=60 \qquad \therefore b=-60$

13 답 $a=9,\ b=-5$

계수가 모두 실수이고, 한 근이 $2+i$이므로

다른 한 근은 $2-i$이다.

나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+i)+(2-i)+\alpha=5$이므로 $\alpha=1$

따라서 세 근이 $2+i,\ 2-i,\ 1$이므로

$(2+i)\times(2-i)+(2+i)\times1+(2-i)\times1=a$

$\therefore a=\boxed{9}$

$(2+i)\times(2-i)\times1=-b$

$\therefore b=\boxed{-5}$

14 답 $a=10,\ b=-8$

계수가 실수이고, 한 근이 $1+i$이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.

나머지 한 근을 α라 하면

근과 계수의 관계 ⋯ ㉠에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=6 \qquad \therefore \alpha=4$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$(1+i)\times(1-i)+(1+i)\times4+(1-i)\times4$

$=(1+1)+(4+4i)+(4-4i)=10$

이므로 $a=10$

㉠에 의하여 세 근의 곱은 $-b$이고,

$(1+i)\times(1-i)\times4=8$이므로

$b=-8$

15 답 $a=1, b=-1$

계수가 실수이고, 한 근이 $-i$이므로 다른 한 근은 i이다.

나머지 한 근을 α라 하면

근과 계수의 관계 … ㉠에 의하여

$(-i)+i+\alpha=1 \quad \therefore \alpha=1$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 a이고,

$(-i)\times i+(-i)\times 1+i\times 1=1-i+i=1$이므로

$a=1$

㉠에 의하여 세 근의 곱은 $-b$이고,

$(-i)\times i\times 1=1$이므로 $b=-1$

16 답 $a=-4, b=9$

세 근을 각각 $1-2i$, $1+2i$, α라 하면

근과 계수의 관계 … ㉠에 의하여

$(1-2i)\times(1+2i)\times\alpha=10 \quad \therefore \alpha=2$

㉠에 의하여 세 근의 합은 $-a$이고,

$(1-2i)+(1+2i)+2=4$이므로 $a=-4$

㉠에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은 b이고,

$(1-2i)\times(1+2i)+2\times(1-2i)+2\times(1+2i)$

$=(1+4)+(2-4i)+(2+4i)=9$

이므로 $b=9$

17 답 $a-bi$

42 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

▸ p.179

01 답 1

02 답 x^2+x+1, x^2+x+1, 0

03 답 0, -1, 1

04 답 0, $-\omega-1$, -1, $-\omega-1$, 1, 1, $\frac{1}{\omega}$

05 답 1

06 답 0

07 답 -1

08 답 1

09 답 -1

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\frac{1}{\omega}=\omega+\overline{\omega}=-1$

10 답 0

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$\therefore \omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=\omega^3(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega+1)$

$=0 \ (\because \omega^2+\omega+1=0)$

11 답 ① 1, $\omega^2+\omega+1$ ② -1, 1, $\overline{\omega}$, $\frac{1}{\omega}$

43 방정식 $x^3=-1$의 허근의 성질

▸ p.180

01 답 -1

02 답 x^2-x+1, x^2-x+1, 0

03 답 0, 1, 1

04 답 0, $\omega-1$, 1, $1-\omega$, 1, 1, $-\frac{1}{\omega}$

05 답 -1

06 답 0

07 답 1

08 답 1

09 답 1

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0$, $\omega^3=-1$

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\frac{1}{\omega}=\omega+\overline{\omega}=1$

10 답 0

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0$, $\omega^3=-1$

$\therefore \omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=\omega^3(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega+1)$

$=-(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega+1)$

$=0$

11 답 ① -1, $\omega^2-\omega+1$ ② 1, 1, $-\overline{\omega}$, $-\frac{1}{\omega}$

44 연립일차방정식

▸ p.181

01 답 $x=1, y=-1$

㉠+㉡을 하면 $4x=4 \quad \therefore x=1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $y=-1$

02 답 $x=1, y=0$

㉠+㉡을 하면 $5x=5$ $\therefore x=1$

이 값을 ㉡에 대입하면 $y=0$

03 답 $x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{3}{2}$

㉠+㉡×2를 하면 $10x=-5$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

이 값을 ㉡에 대입하면 $y=-\frac{3}{2}$

04 답 $x=2, y=1$

㉠을 ㉡에 대입하면 $3y-1=3-y$

$4y=4$ $\therefore y=1$

이 값을 ㉡에 대입하면 $x=2$

05 답 $x=1, y=2$

㉠을 ㉡에 대입하면 $y=4(y-1)-2$

$3y=6$ $\therefore y=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x=1$

06 답 $x=3, y=4$

㉡을 ㉠에 대입하면 $2x-(x+1)=2$

$x-1=2$ $\therefore x=3$

이 값을 ㉡에 대입하면 $y=4$

07 답 $x=-2, y=-1$

$x-3y=1$에서 $x=3y+1$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(3y+1)-4y=0$

$2y=-2$ $\therefore y=-1$

이 값을 ㉢에 대입하면 $x=-2$

08 답 ① 가감법 ② 대입법

45 연립이차방정식

▸ p.182~184

01 답 $\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

㉠에서 $y=5-2x$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(5-2x)^2=25$

$5x^2-20x=0$, $5x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\boxed{4}$

이 값을 ㉢에 대입하면

(i) $x=0$일 때, $y=5$, (ii) $x=\boxed{4}$일 때, $y=\boxed{-3}$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{4} \\ y=\boxed{-3} \end{cases}$

02 답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

㉠에서 $x=2+y$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(2+y)^2+y^2=10$

$4+4y+2y^2=10$, $y^2+2y-3=0$

$(y+3)(y-1)=0$ $\therefore y=-3$ 또는 $y=1$

이 값을 ㉢에 대입하면

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

03 답 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

㉠에서 $x=4-y$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(4-y)^2+y(4-y)+y^2=13$

$16-8y+y^2+4y-y^2+y^2=13$, $y^2-4y+3=0$

$(y-1)(y-3)=0$ $\therefore y=1$ 또는 $y=3$

이 값을 ㉢에 대입하면

$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

04 답 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

㉠에서 $y=3-2x$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+x(3-2x)+(3-2x)^2=3$

$x^2+3x-2x^2+9-12x+4x^2=3$

$3x^2-9x+6=0$, $3(x^2-3x+2)=0$

$3(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$

이 값을 ㉢에 대입하면

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

05 답 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-3y)=0$ $\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면 $y^2+y^2=10$

$y^2=5$ $\therefore y=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x=\pm\sqrt{5}$, $y=\mp\sqrt{5}$ (복부호동순)

(ii) $x=\boxed{3y}$를 ㉡에 대입하면 $\boxed{9y^2}+y^2=10$

$y^2=\boxed{1}$ $\therefore y=\pm\boxed{1}$

$\therefore x=\pm3$, $y=\pm\boxed{1}$(복부호동순)

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{3} \\ y=\boxed{1} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{-3} \\ y=\boxed{-1} \end{cases}$

06 답 $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{3}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt{3}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

㉠에서 $x(x-y)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=y$

(i) $x=0$을 ㉡에 대입하면

$-y^2=3,\ y^2=-3 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x=0,\ y=\pm\sqrt{3}i$

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2-y^2=3,\ y^2=3 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{3}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt{3}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

07 답 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$

㉠에서 $(x-2y)(x+y)=0$

$\therefore x=2y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$8y^2+y^2=9,\ 9y^2=9 \qquad \therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm2,\ y=\pm1$ (복부호동순)

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2+y^2=9,\ 3y^2=9 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\mp\sqrt{3}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$

08 답 $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{13} \\ y=\sqrt{13} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{13} \\ y=-\sqrt{13} \end{cases}$

㉠에서 $(x-5y)(x-y)=0 \qquad \therefore x=5y$ 또는 $x=y$

(i) $x=5y$를 ㉡에 대입하면

$25y^2+y^2=26,\ 26y^2=26 \qquad \therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm5,\ y=\pm1$ (복부호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2=26,\ y^2=13 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{13}$

$\therefore x=\pm\sqrt{13},\ y=\pm\sqrt{13}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{13} \\ y=\sqrt{13} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{13} \\ y=-\sqrt{13} \end{cases}$

09 답 $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

x, y의 합은 8이고, 곱이 15이므로

두 수 x, y는 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

t에 대한 이차방정식 $t^2-8t+\boxed{15}=0$의 두 근이 된다.

인수분해하면 $(t-3)(t-5)=0$이므로

$t=3$ 또는 $t=\boxed{5}$

따라서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\boxed{3} \\ y=\boxed{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{5} \\ y=\boxed{3} \end{cases}$

10 답 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

x, y의 합이 2이고, 곱이 -8이므로

두 수 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t-8=0$의

두 근이 된다.

$(t-4)(t+2)=0 \qquad \therefore t=4$ 또는 $t=-2$

따라서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

11 답 $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

x, y의 합이 9이고, 곱이 20이므로

두 수 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-9t+20=0$의

두 근이 된다.

$(t-4)(t-5)=0 \qquad \therefore t=4$ 또는 $t=5$

따라서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

12 답 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=20 & \cdots ㉠ \\ v=8 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-16=20,\ u^2=36 \qquad \therefore u=\pm6$

(i) $u=6$, $v=8$, 즉 $x+y=6$, $xy=8$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-6t+\boxed{8}=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=\boxed{4}$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=\boxed{4} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{4} \\ y=\boxed{2} \end{cases}$

(ii) $u=-6$, $v=8$, 즉 $x+y=-6$, $xy=8$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+6t+\boxed{8}=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t+4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=\boxed{-4}$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=\boxed{-4} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{-4} \\ y=\boxed{-2} \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\boxed{2} \\ y=\boxed{4} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{4} \\ y=\boxed{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{-2} \\ y=\boxed{-4} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\boxed{-4} \\ y=\boxed{-2} \end{cases}$

13 답 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=10 & \cdots ㉠ \\ v=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-6=10$, $u^2=16$ $\quad \therefore u=\pm4$

(i) $u=4$, $v=3$, 즉 $x+y=4$, $xy=3$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(ii) $u=-4$, $v=3$, 즉 $x+y=-4$, $xy=3$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+4t+3=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t+3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=-3$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

14 답 $\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} x=-4 \\ y=-8 \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} x=-8 \\ y=-4 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=80 & \cdots ㉠ \\ v=32 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2-64=80$, $u^2=144$ $\quad \therefore u=\pm12$

(i) $u=12$, $v=32$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-12t+32=0$의 두 근이므로

$\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$

(ii) $u=-12$, $v=32$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+12t+32=0$의 두 근이므로

$\begin{cases} x=-4 \\ y=-8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-8 \\ y=-4 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-8 \\ y=-4 \end{cases}$

15 답 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=-1 & \cdots ㉠ \\ u^2-4v=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=u+1$을 ㉡에 대입하면

$u^2-4(u+1)=1$, $u^2-4u-5=0$, $(u-5)(u+1)=0$

$\therefore u=5$ 또는 $u=-1$

(i) $u=5$, $v=6$, 즉 $x+y=5$, $xy=6$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

(ii) $u=-1$, $v=0$, 즉 $x+y=-1$, $xy=0$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t=0$의 두 근이므로

$t(t+1)=0$ $\quad \therefore t=0$ 또는 $t=-1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

16 답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$x-y=-2$, $y=x+2$ $\cdots$ ㉢이고, 이 식을 ㉠에 대입하면

$x^2+(x+2)^2+2x=0$, $2x^2+6x+4=0$, $2(x^2+3x+2)=0$

$2(x+1)(x+2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-2$

(i) $x=-1$을 ㉢에 대입하면 $y=1$

(ii) $x=-2$를 ㉢에 대입하면 $y=0$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

17 답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2+x-2y=3 & \cdots ㉠ \\ 6x^2+2x-7y=11 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3−㉡을 하여 이차항을 소거하면

$x+y=-2$, $y=-x-2$ ⋯ ㉢이고, 이 식을 ㉠에 대입하면

$2x^2+x-2(-x-2)=3$, $2x^2+3x+1=0$

$(x+1)(2x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

(i) $x=-1$을 ㉢에 대입하면 $y=-1$

(ii) $x=-\frac{1}{2}$을 ㉢에 대입하면 $y=-\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

18 답 $\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{4}{3} \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-xy=4 & \cdots ㉠ \\ y^2-xy=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $x^2-2xy+y^2=9$

$(x-y)^2=9$, $x-y=\pm 3$

$\therefore x-y=3$, $y=x-3$ ⋯ ㉢

또는 $x-y=-3$, $y=x+3$ ⋯ ㉣

(i) ㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2-x(x-3)=4$, $x^2-x^2+3x=4$

$\therefore x=\frac{4}{3}$

이를 ㉢에 대입하면 $y=-\frac{5}{3}$

(ii) ㉣을 ㉠에 대입하면

$x^2-x(x+3)=4$, $x^2-x^2-3x=4$

$\therefore x=-\frac{4}{3}$

이를 ㉣에 대입하면 $y=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{4}{3} \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$

19 답 **(1) 미지수, 대입 (2) 인수분해, 대입**
(3) 대칭식, $t^2-ut+v=0$

46 공통근

▸ p.185

01 답 $a=-1$, $b=-3$

$x=1$이 두 방정식의 공통근이므로 $x=1$을 각 방정식에

대입하면 $1+a=0$ $\quad\therefore a=-1$

$1+b+2=0$ $\quad\therefore b=-3$

02 답 $a=-5$, $b=0$

$x=-2$가 두 방정식의 공통근이므로 $x=-2$를 각 방정식에

대입하면 $(-2)^2+2a+6=0$, $2a+10=0$ $\quad\therefore a=-5$

$(-2)^2-2b-4=0$, $4-2b-4=0$ $\quad\therefore b=0$

03 답 $a=-\frac{2}{3}$, $b=-7$

$x=-3$이 두 방정식의 공통근이므로 $x=-3$을 각 방정식에

대입하면

$(-3)^2-3(a-1)+2b=0$, $-3a+2b=-12$ ⋯ ㉠

$(-3)^2+3(b+1)+9=0$, $3b=-21$ $\quad\therefore b=-7$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-3a-14=-12$, $-3a=2$ $\quad\therefore a=-\frac{2}{3}$

04 답 $a=-6$, $b=-3$

$x=-1$이 두 방정식의 공통근이므로 $x=-1$을 각 방정식에

대입하면

$(-1)^2-(a-2)+3b=0$, $-a+3b=-3$ ⋯ ㉠

$(-1)^2-(2b-4)+(a-5)=0$, $a-2b=0$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $b=-3$

이 값을 ㉡에 대입하면 $a+6=0$ $\quad\therefore a=-6$

05 답 -8

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(i) 공통근이 $x=-3$일 때

$x=-3$을 $x^2+x+a=0$에 대입하면

$(-3)^2-3+a=0$ $\quad\therefore a=-6$

(ii) 공통근이 $x=1$일 때

$x=1$을 $x^2+x+a=0$에 대입하면

$1+1+a=0$ $\quad\therefore a=-2$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은 $-6-2=-8$

06 답 -11

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

(i) 공통근이 $x=-1$일 때

$x=-1$을 $x^2-x+2a=0$에 대입하면

$(-1)^2-(-1)+2a=0$, $2+2a=0$ $\quad\therefore a=-1$

(ii) 공통근이 $x=5$일 때

$x=5$를 $x^2-x+2a=0$에 대입하면

$5^2-5+2a=0$, $20+2a=0$ $\quad\therefore a=-10$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은

$-1-10=-11$

07 답 -4

$x^2-4=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

(i) 공통근이 $x=-2$일 때

$x=-2$를 $x^2-(a+2)x+5=0$에 대입하면

$(-2)^2-(a+2)\times(-2)+5=0$, $4+2a+4+5=0$

$\therefore a=-\frac{13}{2}$

(ii) 공통근이 $x=2$일 때

$x=2$를 $x^2-(a+2)x+5=0$에 대입하면

$2^2-(a+2)\times 2+5=0$, $4-2a-4+5=0$

$\therefore a=\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은

$-\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=-\frac{8}{2}=-4$

08 답 (1) 공통근 (2) 인수분해, 인수분해, 공통근

47 부정방정식

▸ p.186

01 답 $(-8, 4)$, $(-5, 5)$, $(-4, 6)$, $(-3, 9)$, $(-1, -3)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$

$x(y-3)+2(y-3)=-6$

$(x+2)(y-3)=-6$

$x+2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y-3$	1	2	3	6	$\boxed{-6}$	-3	$\boxed{-2}$	-1

이를 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(-8, 4)$, $(-5, 5)$, $(-4, 6)$, $(-3, 9)$,

$(-1, -3)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(\boxed{4}, \boxed{2})$이다.

02 답 $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$

$x(y-3)-3(y-3)=2$

$(x-3)(y-3)=2$

$x-3$	-2	-1	1	2
$y-3$	-1	-2	2	1

이를 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$이다.

03 답 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$

$xy-4x-3y+10=0$에서

$x(y-4)-3(y-4)=2$

$(x-3)(y-4)=2$

$x-3$	-2	-1	1	2
$y-4$	-1	-2	2	1

이를 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$이다.

04 답 $x=-1$, $y=2$

$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

이때, x, y가 실수이므로 $x+1=0$, $y-2=0$

$\therefore x=\boxed{-1}$, $y=\boxed{2}$

05 답 $x=2$, $y=4$

$(x^2-4x+4)+(y^2-8y+16)=0$

$(x-2)^2+(y-4)^2=0$

이때, x, y가 실수이므로 $x-2=0$, $y-4=0$

$\therefore x=2$, $y=4$

06 답 $x=10$, $y=-5$

$(x^2+4xy+4y^2)+(y^2+10y+25)=0$

$(x+2y)^2+(y+5)^2=0$

이때, x, y가 실수이므로 $x+2y=0$, $y+5=0$

$\therefore y=-5$, $x=10$

07 답 (1) (일차식)×(일차식) (2) $A=B=0$

48 연립방정식의 활용

▸ p.187

01 답 $a=25$, $b=15$

길이가 160 cm인 철사를 잘라서 한 변의 길이가 각각 a cm, b cm인 두 개의 정사각형을 만들었으므로

$4a+4b=160$ $\quad\therefore a+b=40$ ⋯ ㉠

이 두 정사각형의 넓이의 합이 850 cm²이므로

$a^2+b^2=\boxed{850}$ ⋯ ㉡

㉠에서 $a=40-b$

이를 ㉡에 대입하면

$(40-b)^2+b^2=\boxed{850}$

$2(b^2-40b+375)=0$, $2(b-25)(b-15)=0$

$\therefore b=25$ 또는 $b=\boxed{15}$

그런데 $a>b$이므로 $a=25$, $b=\boxed{15}$

02 답 $a=7,\ b=5$

길이가 48 cm인 철사를 잘라서 한 변의 길이가 각각 a cm, b cm인 두 개의 정사각형을 만들었으므로

$4a+4b=48,\ a+b=12,\ b=12-a$ ⋯ ㉠

이 두 정사각형의 넓이의 합이 74 cm²이므로 $a^2+b^2=74$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+(12-a)^2=74,\ a^2+a^2-24a+144=74$

$2a^2-24a+70=0,\ 2(a^2-12a+35)=0$

$2(a-5)(a-7)=0$ $\therefore a=5$ 또는 $a=7$

$\therefore \begin{cases} a=5 \\ b=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=7 \\ b=5 \end{cases}$

그런데 $a>b$이므로 $a=7,\ b=5$

03 답 83

처음 두 자리 정수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 각각 $x,\ y$라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=73 & \cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=121 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 정리하면 $x+y=11$이므로 $y=11-x$

$y=11-x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+(11-x)^2=73,\ x^2+x^2-22x+121=73$

$2x^2-22x+48=0,\ 2(x^2-11x+24)=0$

$2(x-3)(x-8)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=8$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}$

그런데 $x>y$이므로 $x=8,\ y=3$

따라서 처음 정수는 83이다.

04 답 84

처음 두 자리 정수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 각각 $x,\ y$라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=80 & \cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=132 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 정리하면 $x+y=12$이므로 $y=12-x$

$y=12-x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+(12-x)^2=80,\ x^2+x^2-24x+144=80$

$2x^2-24x+64=0,\ 2(x^2-12x+32)=0$

$2(x-4)(x-8)=0$ $\therefore x=4$ 또는 $x=8$

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$

그런데 $x>y$이므로 $x=8,\ y=4$

따라서 처음 정수는 84이다.

05 답 (i) **미지수** (ii) **연립방정식** (iii) **해**

단원 마무리 평가 [36~48]

▸문제편 p.188~192

01 답 ⑤

$$\begin{aligned} x^3+x^2-4x-4 &= x^2(x+1)-4(x+1) \\ &= (x+1)(x^2-4) \\ &= (x+1)(x-2)(x+2)=0 \end{aligned}$$

에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$이다.

따라서 가장 큰 근은 $\alpha=2$, 가장 작은 근은 $\beta=-2$이므로

$\alpha-\beta=2-(-2)=4$

02 답 ①

$x^4-2x^3+8x-16=0$을 인수분해하면

$x^3(x-2)+8(x-2)=0,\ (x-2)(x^3+8)=0$

$(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)=0$

사차방정식의 두 허근 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=4$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= 2^2-2\times4=-4 \end{aligned}$$

03 답 ①

삼차방정식 $x^3-3x^2+kx+12=0$의 한 근이 -2이므로

$x=-2$를 대입하면

$(-2)^3-3\times(-2)^2-2k+12=0,\ -8-12-2k+12=0$

$-8-2k=0$

$\therefore k=-4$

한편, $x^3-3x^2-4x+12=0$이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -3 & -4 & 12 \\ & & -2 & 10 & -12 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$x^3-3x^2-4x+12=(x+2)(x^2-5x+6)=0$

따라서 삼차방정식의 -2 이외의 나머지 두 근 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2-5x+6=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=5$

$\therefore k+\alpha+\beta=-4+5=1$

04 답 ②

삼차방정식 $x^3-mx^2+24x-2m+4=0$의 한 근이 2이므로

$x=2$를 대입하면

$2^3-m\times2^2+24\times2-2m+4=0,\ 8-4m+48-2m+4=0$

$6m=60$ $\therefore m=10$

한편, $x^3-10x^2+24x-16=0$이므로 조립제법을 이용하면

2	1	-10	24	-16
		2	-16	16
	1	-8	8	0

$x^3-10x^2+24x-16=(x-2)(x^2-8x+8)=0$

따라서 삼차방정식의 2 이외의 나머지 두 근 α, β는

이차방정식 $x^2-8x+8=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합 $\alpha+\beta=8$이다.

05 답 ④

사차방정식 $x^4-3x^3+3x^2+x-6=0$에 대하여 조립제법을 이용하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	-7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$x^4-3x^3+3x^2+x-6=(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$

한편, 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=2^2-4\times1\times3=-8<0$이므로 허근을 갖는다.

따라서 사차방정식 $x^4-3x^3+3x^2+x-6=0$의 실근은

-1, 2이므로 모든 실근의 합은 $-1+2=1$이다.

06 답 ③

사차방정식 $x^4+5x^3+ax^2-bx-b+17=0$의 두 근이

-2, 1이므로 조립제법을 이용하면

-2	1	5	a	$-b$	$-b+17$
		-2	-6	$-2a+12$	$2b+4a-24$
1	1	3	$a-6$	$-b-2a+12$	0 ⋯ ㉠
		1	4	$a-2$	
	1	4	$a-2$	0 ⋯ ㉡	

㉠에서 $-b+17+2b+4a-24=0$

$b+4a=7$ ⋯ ㉢

㉡에서 $-b-2a+12+a-2=0$

$a+b=10$ ⋯ ㉣

㉢$-$㉣을 하면

$3a=-3$ $\quad\therefore a=-1$

이 값을 ㉣에 대입하면 $b=11$이다.

한편,

$x^4+5x^3-x^2-11x+6=(x+2)(x-1)(x^2+4x-3)=0$

이므로

나머지 두 근은 이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 두 근과 같고,

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 -3이다.

07 답 ②

$x^2+2x=X(X\geq-1)$라 하면 주어진 방정식

$(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24=0$은

$X^2-11X+24=0$, $(X-3)(X-8)=0$

$\therefore X=3$ 또는 $X=8$

(i) $X=3$일 때,

$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(ii) $X=8$일 때,

$x^2+2x-8=0$에서 $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근 중 양수인 것은

$x=1$, $x=2$이므로 구하는 값은 $1+2=3$이다.

08 답 ⑤

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$에서

$\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15=0$

$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$

이때, $x^2+8x=X(X\geq-16)$이라 하면

$(X+7)(X+15)+15=0$

$X^2+22X+120=0$

$(X+10)(X+12)=0$

$\therefore X=-10$ 또는 $X=-12$

(i) $X=-10$일 때,

$x^2+8x=-10$에서 $x^2+8x+10=0$이므로

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 10이다.

(ii) $X=-12$일 때,

$x^2+8x=-12$에서 $x^2+8x+12=0$이므로

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 12이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$10\times12=120$

09 답 ②

방정식 $x^4-7x^2+9=0$에 대하여

$x^4-6x^2+9-x^2=(x^2-3)^2-x^2=0$

$(x^2+x-3)(x^2-x-3)=0$

이고, 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$이다.

따라서 음수인 근은 $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$이므로

$\therefore \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\times\frac{1-\sqrt{13}}{2}=\frac{(-\sqrt{13})^2-1^2}{4}=\frac{12}{4}=3$

10 답 ③

방정식 $x^4+4x^2-a+3=0$의 한 근이 1이므로

주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1+4-a+3=0 \qquad \therefore a=8$

한편, $x^4+4x^2-5=0$에서 $x^2=X$라 하면

$X^2+4X-5=0$, $(X+5)(X-1)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=1$

(i) $X=-5$일 때, $x^2=-5$에서 $x=\pm\sqrt{5}i$이다.

(ii) $X=1$일 때, $x^2=1$에서 $x=\pm1$이다.

따라서 이 방정식의 허근은 $\sqrt{5}i$, $-\sqrt{5}i$이므로

모든 허근의 곱은 $\sqrt{5}i\times(-\sqrt{5}i)=-5i^2=5$

11 답 ②

주어진 식 $x^4+3x^3+x^2+3x+1=0$은 x^2을 기준으로 양쪽 항의 계수가 대칭인 사차방정식이다.

이 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+3x+1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

한편, 이를 만족시키는 x에 대하여 $x+\frac{1}{x}=\alpha$라 하면

$\alpha^2+3\alpha-1=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 α의 값들의 합은 -3이다.

12 답 ②

방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$은 x^2을 기준으로 양쪽 항의 계수가 대칭인 사차방정식이다.

이 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$

이때, $x+\frac{1}{x}=X$라 하면

$X^2+5X-6=0$, $(X+6)(X-1)=0$

$\therefore X=-6$ 또는 $X=1$

(i) $X=-6$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-6$에서 $x^2+6x+1=0 \qquad \therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $X=1$일 때,

$x+\frac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $-3\pm2\sqrt{2}$이다.

13 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2 \cdots$ ㉠, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3 \cdots$ ㉡

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-2)^2-2\times(-3)$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=4+6=10$

14 답 ①

삼차방정식 $x^3-ax^2+2x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=1$이다.

한편, $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=5$에서 좌변을 전개하면

$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$

$=1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$

$=1+a+2+1=a+4$

에서 $a+4=5$이므로 $a=1$이다.

[다른 풀이]

방정식 $x^3-ax^2+2x-1=0$의 세 근이 α, β, γ

$x^3-ax^2+2x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-a-2-1=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)$

$-a-4=-(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$

에서 $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=a+4=5$이므로 $a=1$

15 답 ⑤

삼차방정식 $x^3-12x^2+ax+b=0$의 세 근의 비가

$1:2:3$이므로 세 근을 α, 2α, $3\alpha(\alpha\neq0)$로 놓으면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+2\alpha+3\alpha=12$, $6\alpha=12 \qquad \therefore \alpha=2$

따라서 삼차방정식 $x^3-12x^2+ax+b=0$의 세 근이

2, 4, 6이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a=2\times4+4\times6+6\times2=8+24+12=44$

$-b=2\times4\times6=48 \qquad \therefore b=-48$

$\therefore a-b=44-(-48)=92$

16 답 ③

삼차방정식 $x^3+ax^2-4x+b=0$의 세 근이

$1+i$, $1-i$, -3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(1+i)+(1-i)+(-3)=-1 \qquad \therefore a=1$

$-b=(1+i)(1-i)(-3)=-6 \qquad \therefore b=6$

$\therefore ab=1\times6=6$

17 답 ④

삼차방정식 $x^3-3x^2-x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=-1$이다.

이때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고, x^3의 계수가 1인

삼차방정식은

$$x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$$

$$x^3-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}x^2+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$$

$$x^3-\frac{-1}{-1}x^2+\frac{3}{-1}x-\frac{1}{-1}=0$$

$\therefore x^3-x^2-3x+1=0$

18 답 ③

삼차방정식 $x^3+4x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=1$이다.

한편, $\alpha+\beta+\gamma=0$에 의하여

$\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$이므로 ⋯ ㉠

$\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인

삼차방정식은 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하는

방정식과 같다. ($\because$ ㉠)

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$-\alpha\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)+(-\gamma)\times(-\alpha)$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$

$(-\alpha)\times(-\beta)\times(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-1$

따라서 구하는 방정식은 $x^3+4x+1=0$이다.

19 답 ①

삼차방정식 $x^3-4x^2+2x+a=0$에서

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=4$ ⋯ ㉠, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$ ⋯ ㉡

$\alpha\beta\gamma=-a$ ⋯ ㉢이다.

한편, 삼차방정식 $x^3+bx^2+cx-10=0$의 세 근이

$\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3=-b$

$4+3=-b$($\because$ ㉠)　　$\therefore b=-7$

$(\alpha+1)\times(\beta+1)+(\beta+1)\times(\gamma+1)+(\gamma+1)\times(\alpha+1)$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=c$

이므로 $2+2\times4+3=c$($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore c=13$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1=10$

이므로 $-a+2+4+1=10$($\because$ ㉠, ㉡, ㉢)

$\therefore a=-3$

$\therefore a+b+c=-3-7+13=3$

20 답 ②

삼차방정식 $x^3-ax+b=0$의 계수가 실수이므로 한 근이

$1+\sqrt{2}i$이면 켤레복소수인 $1-\sqrt{2}i$도 다른 근이다.

이때, 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=0$　　$\therefore \alpha=-2$

$\alpha\times(1+\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)\times(1-\sqrt{2}i)+\alpha\times(1-\sqrt{2}i)=-a$

에서 $\alpha=-2$를 대입하면

$-2(1+\sqrt{2}i)+(1+2)-2(1-\sqrt{2}i)$

$=-2-2\sqrt{2}i+3-2+2\sqrt{2}i$

$=-1=-a$

이므로 $a=1$

$\alpha\times(1+\sqrt{2}i)\times(1-\sqrt{2}i)=-b$에서 $\alpha=-2$를 대입하면

$-2\times(1+\sqrt{2}i)\times(1-\sqrt{2}i)=-2\times3=-b$이므로 $b=6$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{6}{1}=6$

21 답 ②

삼차방정식 $x^3+kx^2+13x+2k+11=0$의 계수가

유리수이므로 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 $2+\sqrt{3}$도 다른 한 근이다.

한편, 이 삼차방정식의 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의

관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})+\alpha=-k$ ⋯ ㉠

$(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})\times\alpha=-2k-11$ ⋯ ㉡

㉠에서 $\alpha=-k-4$ ⋯ ㉢

㉡에서 $\alpha=-2k-11$ ⋯ ㉣

㉢=㉣에서 $-k-4=-2k-11$　　$\therefore k=-7$

[다른 풀이]

$x=2-\sqrt{3}$을 주어진 삼차방정식

$x^3+kx^2+13x+2k+11=0$에 대입하면

$(2-\sqrt{3})^3+k(2-\sqrt{3})^2+13(2-\sqrt{3})+2k+11=0$

이 식을 정리하면 $(63+9k)-(28+4k)\sqrt{3}=0$이다.

따라서 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$63+9k=0$　　$\therefore k=-7$

22 답 ⑤

삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$ ⋯ ㉠의 모든 계수가

실수이므로 한 근이 $1+i$이면 켤레복소수인 $1-i$도 근이 된다.

㉠의 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=3$에서 $2+\alpha=3$　　$\therefore \alpha=1$ ⋯ ㉡

$(1+i)\times(1-i)+(1-i)\times\alpha+(1+i)\times\alpha=a$에서

$2+2\alpha=a$　　$\therefore a=4$ ($\because$ ㉡)

$(1+i)\times(1-i)\times\alpha=-b$에서 $b=-2$ ($\because$ ㉡)

따라서 $a+b+\alpha=4-2+1=3$이다.

23 답 ④

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 다른 한 허근은 $\overline{\omega}$이다.

한편, $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 허근은 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

① $\omega+\overline{\omega}=-1$ ($\because$ 두 근의 합)

② $\omega\overline{\omega}=1$ ($\because$ 두 근의 곱)

③ $\omega^2+\omega+1=0$이고 $\omega+\overline{\omega}=-1$에 의하여 $\omega+1=-\overline{\omega}$이다.

따라서 $\omega^2-\overline{\omega}=0$이므로 $\omega^2=\overline{\omega}$이다.

④ $\omega^2+\omega+1=0$이고, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$이므로

$$\begin{aligned}\omega^2+\overline{\omega}^2&=(-\omega-1)+(-\overline{\omega}-1)\\&=-(\omega+\overline{\omega})-2=-(-1)-2=-1\end{aligned}$$

⑤ 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $x=\omega$를 대입하면 $\omega^2+\omega+1=0$

24 답 ②

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이다.

한편, $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$\omega^2+\omega+1=0$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \omega^{101}+\frac{1}{\omega^{101}}&=(\omega^3)^{33}\times\omega^2+\frac{1}{(\omega^3)^{33}\times\omega^2}\\&=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^4+1}{\omega^2}=\frac{\omega^3\times\omega+1}{\omega^2}\\&=\frac{\omega+1}{\omega^2}\ (\because\ \omega^3=1)\\&=\frac{-\omega^2}{\omega^2}\ (\because\ \omega+1=-\omega^2)=-1\end{aligned}$$

25 답 ④

삼차방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$이다.

한편, $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$에서

$\omega^2-\omega+1=0$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \omega^{10}+\omega^8+2&=(\omega^3)^3\times\omega+(\omega^3)^2\times\omega^2+2\\&=-\omega+\omega^2+2\\&=(\omega^2-\omega+1)+1\\&=0+1=1\end{aligned}$$

26 답 ①

두 연립방정식 $\begin{cases}3x-y=a\\x+y=3\ \cdots\ ㉠\end{cases}$, $\begin{cases}2x+y=4\ \cdots\ ㉡\\x-3y=b\end{cases}$의

해가 같으므로 ㉡－㉠을 하면 $x=1$, $y=2$이다.

이 값을 $3x-y=a$에 대입하면

$a=3\times1-2=3-2=1$

$x-3y=b$에 대입하면

$b=1-3\times2=1-6=-5$

$\therefore\ a+b=-4$

27 답 ④

$\begin{cases}x+2y=5\ \cdots\ ㉠\\x^2+y^2=10\ \cdots\ ㉡\end{cases}$에 대하여

㉠에서 $x=5-2y$이고, 이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$(5-2y)^2+y^2=10$, $25-20y+4y^2+y^2=10$

$5(y^2-4y+3)=0$, $5(y-1)(y-3)=0$

$\therefore\ y=1$ 또는 $y=3$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=1$일 때, $x=3$이고, $y=3$일 때, $x=-1$이다.

$\therefore\ \begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$ ⇨ $x-y$의 값은 2 또는 -4이다.

따라서 $x-y$의 최댓값은 2이다.

28 답 ④

$\begin{cases}2x-y=5\ \cdots\ ㉠\\x^2-xy+y^2=7\ \cdots\ ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=2x-5$이고, 이를 ㉡에 대입하면

$x^2-x(2x-5)+(2x-5)^2=7$

$x^2-2x^2+5x+4x^2-20x+25-7=0$

$3x^2-15x+18=0$, $3(x^2-5x+6)=0$

$3(x-2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=3$

이를 ㉠에 대입하면

$x=2$일 때 $y=-1$이고 $x=3$일 때 $y=1$이다.

따라서 자연수인 해는 $\alpha=3$, $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta=4$이다.

29 답 ②

$\begin{cases}x^2-2xy-3y^2=0\ \cdots\ ㉠\\x^2-3xy+4y^2=16\ \cdots\ ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(x-3y)(x+y)=0$　　$\therefore\ x=3y$ 또는 $y=-x$

이를 ㉡에 대입하면

(i) $x=3y$일 때,

$(3y)^2-3\times3y\times y+4y^2=16$, $9y^2-9y^2+4y^2=16$

$4y^2=16$, $y^2=4$　　$\therefore\ y=\pm2$

$y=2$일 때, $x=6$이고,

$y=-2$일 때, $x=-6$이다.

(ii) $y=-x$일 때,

$x^2-3x\times(-x)+4\times(-x)^2=16$

$x^2+3x^2+4x^2=16$, $8x^2=16$, $x^2=2$　　$\therefore\ x=\pm\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$일 때, $y=-\sqrt{2}$이고,

$x=-\sqrt{2}$일 때, $y=\sqrt{2}$이다.

(i), (ii)에서 x, y는 자연수이므로 $x=6$, $y=2$

$\therefore\ x+y=8$

30 답 ⑤

두 이차방정식 $x^2+kx+2=0$, $x^2+2x+k=0$이 오직 한 개의 공통근을 가지므로 연립방정식

$$\begin{cases} x^2+kx+2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+2x+k=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해는 1개다.

㉠$-$㉡을 하면 $(k-2)x+2-k=0$, $(k-2)(x-1)=0$

(i) $k=2$인 경우

㉠$=$㉡이 되므로 무수히 많은 공통근을 갖게 되므로 오직 한 개의 공통근을 갖는다는 조건에 모순이다.

(ii) $k\neq2$이고, $x=1$인 경우

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $1+k+2=0$ $\quad\therefore k=-3$

(i), (ii)에서 $k=-3$이다.

31 답 ②

x에 대한 두 이차방정식 $x^2+2ax+b-5=0$,

$x^2+(a-6)x-2b=0$에 대하여 공통근이 2이므로

$x=2$를 각 방정식에 대입하면

$4+4a+b-5=0$, $4a+b=1 \cdots ㉠$

$4+2a-12-2b=0$, $2a-2b=8$, $a-b=4 \cdots ㉡$

㉠$+$㉡을 하면 $a=1$, $b=-3$

$a=1$, $b=-3$을 각 방정식에 대입하면

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 두 방정식의 근 중 공통근이 아닌 근의 합은

$(-4)+3=-1$이다.

32 답 ②

직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하자.

직사각형의 둘레의 길이가 84 cm이므로 $2(x+y)=84$,

$x+y=42$이고, 대각선의 길이가 30이므로 $x^2+y^2=30^2$이다.

$$\begin{cases} x+y=42 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=30^2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=42-x$이고, 이를 ㉡에 대입하면

$x^2+(42-x)^2=30^2$, $x^2+x^2-84x+42^2=30^2$

$2x^2-84x+42^2-30^2=0$

$2x^2-84x+(42+30)\times(42-30)=0$

$2x^2-84x+72\times12=0$, $2(x^2-42x+36\times12)=0$

$2(x^2-42x+432)=0$, $2(x-18)(x-24)=0$

$\therefore x=18$ 또는 $x=24$

이를 ㉠에 대입하면 $y=24$ 또는 $y=18$

따라서 직사각형의 긴 변의 길이는 24 cm, 짧은 변의 길이는 18 cm이므로 이웃한 두 변의 길이의 차는 6 cm이다.

33 답 ③

연못의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x m, y m이라 하면

$$\begin{cases} x+2y=32 & \cdots ㉠ \\ xy=128 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x=32-2y$이고, 이를 ㉡에 대입하면

$(32-2y)y=128$, $32y-2y^2=128$

$2y^2-32y+128=0$, $2(y^2-16y+64)=0$

$2(y-8)^2=0$ $\quad\therefore y=8$

이를 ㉡에 대입하면 $8x=128$ $\quad\therefore x=16$

따라서 가로의 길이와 세로의 길이 중 긴 변의 길이는 16 m이다.

34 답 ③

650개의 사탕을 학생들에게 똑같이 나누어 줄 때,

처음에 사탕을 받은 학생 수를 x명, 학생 한 명에게 나누어 준 사탕의 개수를 y개라 하면

$xy=650 \cdots ㉠$

나중에 학생 1명이 더 왔으므로 나중에 사탕을 받은 학생 수는 $(x+1)$명, 나중에 학생 한 명에게 나누어 준 사탕의 개수는 $(y-1)$개이므로

$(x+1)(y-1)=650$, $xy-x+y-1=650 \cdots ㉡$

㉡$-$㉠을 하면 $-x+y=1$ $\quad\therefore y=x+1$

이를 ㉠에 대입하면 $x(x+1)=650$, $x^2+x-650=0$

$(x+26)(x-25)=0$ $\quad\therefore x=25\ (\because x>0)$

따라서 처음 학생 수는 25명이다.

35 답 **(4, −1), (2, −3)**

정수 x, y에 대하여 $xy-3y+2x-7=0$에서

$x(y+2)-3(y+2)=1$이므로 $(x-3)(y+2)=1$이다.

이때, 순서쌍 (x, y)를 구하면

(i) $x-3=1$, $y+2=1$인 경우

$x=4$, $y=-1$

(ii) $x-3=-1$, $y+2=-1$인 경우

$x=2$, $y=-3$

(i), (ii)에서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(4, -1)$, $(2, -3)$이다.

36 답 ④

자연수 x, y에 대하여 $x^2-5xy+6y^2+1=0$에서

$x^2-5xy+6y^2=-1$, $(x-2y)(x-3y)=-1$이다.

(i) $x-2y=1$, $x-3y=-1$인 경우

연립방정식을 풀면 $x=5$, $y=2$

(ii) $x-2y=-1$, $x-3y=1$인 경우

연립방정식을 풀면 $x=-5$, $y=-2$

(i), (ii)에서 자연수 x, y에 대하여 $x+y=7$

37 답 ②

$x^2+y^2+2x+4y+5=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)=0$

$(x+1)^2+(y+2)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로 $x+1=0$, $y+2=0$

$\therefore x=-1$, $y=-2$

$\therefore x+y=-3$

수력 UP

- x, y가 실수일 때, $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이어야 한다.
- x, y가 실수이면 $x+1$, $y+2$도 실수이므로 $(x+1)^2+(y+2)^2=0$이면 $x+1=0$, $y+2=0$이어야 한다.

38 답 ①

$x^2+4xy+5y^2-4y+4=0$에서

$(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-4y+4)=0$이므로

$(x+2y)^2+(y-2)^2=0$이다.

이때, x, y는 실수이므로

$x+2y=0$, $y-2=0$ $\quad \therefore x=-4$, $y=2$

$\therefore xy=-8$

Ⅲ-1 연립일차부등식

01 부등식 $ax>b$의 풀이

▸ p.196~197

01 답 ×

〈반례〉 $3>-1$이지만 $\frac{1}{3}>-1$

02 답 ○ **03** 답 ○

04 답 ×

$a<b<0$이면 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$이다.

05 답 ×

〈반례〉 $2>-3$이지만 $2^2<(-3)^2$이다.

06 답 ○

07 답 $-9\le 3x\le 3$ **08** 답 $2\le x+5\le 6$

09 답 $1\le -x+2\le 5$

$-1\le -x\le 3$ $\quad \therefore 1\le -x+2\le 5$

10 답 $1<x+2\le 4$

11 답 $-2\le -2x+2<4$

$-4\le -2x<2$ $\quad \therefore -2\le -2x+2<4$

12 답 $\frac{1}{3}<\frac{x+2}{3}\le\frac{4}{3}$

$1<x+2\le 4$ $\quad \therefore \frac{1}{3}<\frac{x+2}{3}\le\frac{4}{3}$

13 답 $x<\frac{8}{3}$

$x+10>4x+2$, $4x-x<10-2$

$3x<8$ $\quad \therefore x<\frac{8}{3}$

14 답 $x\le\frac{3}{2}$

$-2(x-1)\le -5x-(x-8)$, $-2x+2\le -5x-x+8$

$6x-2x\le 8-2$, $4x\le 6$

$\therefore x\le\frac{3}{2}$

15 답 $x\ge -3$

$\frac{3}{4}x-\frac{2x-7}{4}\ge 1 \Rightarrow 3x-(2x-7)\ge 4$, $3x-2x+7\ge 4$

$\therefore x\ge -3$

16 답 $x<-1$

$\frac{2}{3}x+1<\frac{1-x}{6} \Rightarrow 4x+6<1-x$, $4x+x<1-6$

$\therefore x<-1$

17 답 $x>\frac{1}{a}$ **18** 답 $x<\frac{1}{a}$

19 답 해는 없다.

20 답 $x>-1$

$a>-3$이므로 $a+3>0$이다.

주어진 부등식 $(a+3)x>-a-3$에서

$(a+3)x>-(a+3)$이므로 $x>-1$

21 답 $x<-1$

$a<-3$이므로 $a+3<0$이다.

주어진 부등식 $(a+3)x>-a-3$에서

$(a+3)x>-(a+3)$이므로 $x<-1$

22 답 해는 없다.

$a=-3$을 주어진 부등식 $(a+3)x>-a-3$의 양변에 각각 대입하면 $0\times x>0$이므로 모순이다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 해는 없다.

23 답 (i) $x>\frac{b}{a}$ (ii) $x<\frac{b}{a}$ (iii) 없다, 모든 실수이다

02 부등식의 사칙 연산

▸ p.198~199

01 답 $8<x+y<12$

02 답 $-6<x-y<-2$

$2<x<4,\ -8<-y<-6 \qquad \therefore -6<x-y<-2$

03 답 $12<xy<32$

04 답 $\frac{1}{4}<\frac{x}{y}<\frac{2}{3}$

$\frac{1}{8}<\frac{1}{y}<\frac{1}{6} \qquad \therefore \frac{1}{4}<\frac{x}{y}<\frac{2}{3}$

05 답 $4\le x+y\le 12$

06 답 $-4\le x-y\le 4$

$3\le x\le 5,\ -7\le -y\le -1 \qquad \therefore -4\le x-y\le 4$

07 답 $3\le xy\le 35$

08 답 $\frac{3}{7}\le\frac{x}{y}\le 5$

$\frac{1}{7}\le\frac{1}{y}\le 1 \qquad \therefore \frac{3}{7}\le\frac{x}{y}\le 5$

09 답 $7\le x+y\le 26$

10 답 $-7\le x-y\le 12$

11 답 $12\le xy\le 165$

12 답 $\frac{4}{11}\le\frac{x}{y}\le 5$

13 답 $5<x+y<11$

$1\le x<5,\ 4<y\le 6$에서 $5<x+y<11$

14 답 $-5\le x-y<1$

$1\le x<5,\ -6\le -y<-4$에서 $-5\le x-y<1$

15 답 $4<xy<30$

$1\le x<5,\ 4<y\le 6$에서 $4<xy<30$

16 답 $\frac{1}{6}\le\frac{x}{y}<\frac{5}{4}$

$1\le x<5,\ \frac{1}{6}\le\frac{1}{y}<\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{6}\le\frac{x}{y}<\frac{5}{4}$

17 답 양 끝 값

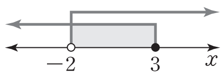
03 연립일차부등식

▸ p.200

01 답 $-2<x\le 3$

$\begin{cases} x+2\le 5 & \cdots ㉠ \\ 2x+4>0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 3$, ㉡에서 $x>-2$



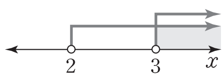
$\therefore -2<x\le 3$

02 답 $x>3$

$\begin{cases} 2x-1>5 & \cdots ㉠ \\ -2x+2<x-4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x>6 \qquad \therefore x>3$

㉡에서 $-2x-x<-4-2,\ -3x<-6 \qquad \therefore x>2$



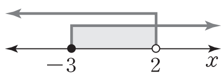
$\therefore x>3$

03 답 $-3\le x<2$

$\begin{cases} 8x-5\le 10x+1 & \cdots ㉠ \\ 2+6x<3x+8 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $8x-10x\le 1+5,\ -2x\le 6 \qquad \therefore x\ge -3$

㉡에서 $6x-3x<8-2,\ 3x<6 \qquad \therefore x<2$



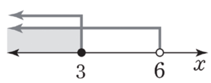
$\therefore -3\le x<2$

04 답 $x\le 3$

$\begin{cases} 4x-10\le -5x+17 & \cdots ㉠ \\ 6-x>3x-18 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $4x+5x\le 17+10,\ 9x\le 27 \qquad \therefore x\le 3$

㉡에서 $-x-3x>-18-6,\ -4x>-24 \qquad \therefore x<6$



$\therefore x\le 3$

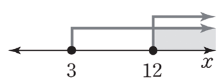
05 답 $x\ge 12$

$\begin{cases} 3x-1\ge 8 & \cdots ㉠ \\ 17-2x\le 5-x & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x-1\ge 8 \qquad \therefore x\ge 3$

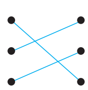
㉡에서 $17-2x\le 5-x,\ -2x+x\le 5-17$

$-x\le -12 \qquad \therefore x\ge 12$



$\therefore x\ge 12$

06 답



04 $A<B<C$ 꼴의 부등식

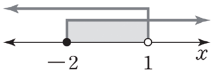
▸ p.201

01 답 $-2\le x<1$

$2x-3<-x\le x+4$에서

$2x-3<-x,\ 3x<3 \qquad \therefore x<1$

$-x\le x+4,\ 2x\ge -4 \qquad \therefore x\ge -2$

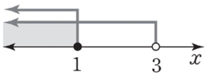


$\therefore -2\le x<1$

02 답 $x\le 1$

$5x-4\le 3x-2<7$에서 $5x-4\le 3x-2,\ 2x\le 2 \qquad \therefore x\le 1$

$3x-2<7,\ 3x<9 \qquad \therefore x<3$



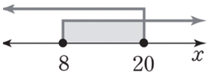
$\therefore x\le 1$

03 답 $8\le x\le 20$

$2x+15\le 55\le 4x+23$에서

$2x+15\le 55,\ 2x\le 40 \qquad \therefore x\le 20$

$55\le 4x+23,\ 4x\ge 32 \qquad \therefore x\ge 8$



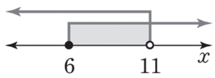
$\therefore 8\le x\le 20$

04 답 $6\le x<11$

$x+6\le 2x<x+11$에서

$x+6\le 2x, -x\le -6 \qquad \therefore x\ge 6$

$2x<x+11 \qquad \therefore x<11$



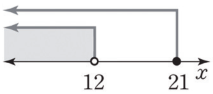
$\therefore 6\le x<11$

05 답 $x<12$

$3x-7<2x+5\le x+26$에서

$3x-7<2x+5 \qquad \therefore x<12$

$2x+5\le x+26 \qquad \therefore x\le 21$



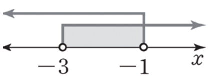
공통부분을 찾으면 $x<12$

06 답 $-3<x<-1$

$6(1-x)<4-8x<28$에서

$6-6x<4-8x,\ 2x<-2 \qquad \therefore x<-1$

$4-8x<28,\ -8x<24 \qquad \therefore x>-3$



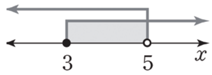
$\therefore -3<x<-1$

07 답 $3\le x<5$

$x-7<3-x\le 2(x-3)$에서

$x-7<3-x,\ 2x<10 \qquad \therefore x<5$

$3-x\le 2x-6,\ 3x\ge 9 \qquad \therefore x\ge 3$



$\therefore 3\le x<5$

08 답 $-8\le x\le -4$

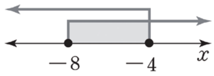
$\frac{2-x}{3}\le\frac{-3x-4}{4}\le 5$에서

$\frac{2-x}{3}\le\frac{-3x-4}{4},\ 4(2-x)\le 3(-3x-4)$

$8-4x\le -9x-12,\ 5x\le -20 \qquad \therefore x\le -4$

$\frac{-3x-4}{4}\le 5,\ -3x-4\le 20,\ -3x\le 24$

$\therefore x\ge -8$



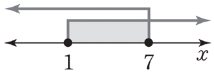
$\therefore -8\le x\le -4$

09 답 $1\le x\le 7$

$\frac{x-1}{3}\le 2\le 2x$에서 $x-1\le 6\le 6x$이므로

$x-1\le 6 \qquad \therefore x\le 7$

$6\le 6x \qquad \therefore x\ge 1$



$\therefore 1\le x\le 7$

10 답 $x\le\frac{1}{2}$

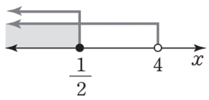
$1.2x-0.3<x+0.5\le -5x+3.5$의 각 변에 10을 곱하여

계수를 정수로 만들면

$12x-3<10x+5\le -50x+35$이다.

$12x-3<10x+5,\ 2x<8 \qquad \therefore x<4$

$10x+5\le -50x+35,\ 60x\le 30 \qquad \therefore x\le\frac{1}{2}$



$\therefore x\le\frac{1}{2}$

11 답 $-\frac{2}{5}\le x\le 3$

$\frac{3x-1}{2}\le x+1\le\frac{7}{5}+2x$에서

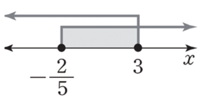
$5(3x-1)\le 10(x+1)\le 14+20x$이므로

$15x-5\le 10x+10\le 14+20x$

$15x-5\le 10x+10,\ 5x\le 15 \qquad \therefore x\le 3$

$10x+10\le 14+20x,\ 10x\ge -4$

$\therefore x\ge -\frac{2}{5}$



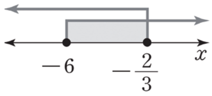
$\therefore -\frac{2}{5}\le x\le 3$

12 답 $-6\le x\le -\frac{2}{3}$

$3x+2.6\le 0.6\le \frac{1}{4}x+2.1$의 각 변에 20을 곱하여 계수를 정수로 만들면 $60x+52\le 12\le 5x+42$이다.

$60x+52\le 12$, $60x\le -40$ $\quad\therefore x\le -\frac{2}{3}$

$12\le 5x+42$, $5x\ge -30$ $\quad\therefore x\ge -6$

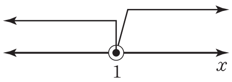


$\therefore -6\le x\le -\frac{2}{3}$

13 답 $A<B$, $B<C$

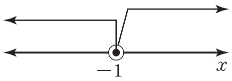
05 특수한 해를 갖는 연립일차부등식 ▸ p.202

01 답



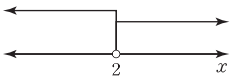
해는 없다.

02 답



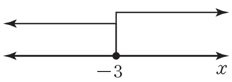
해는 없다.

03 답



해는 없다.

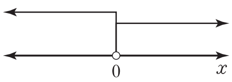
04 답



$x=-3$

공통인 부분이 $x=-3$ 뿐이므로 연립부등식의 해는 $x=-3$이다.

05 답



해는 없다.

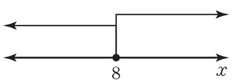
06 답

해는 없다.

07 답

해는 없다.

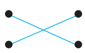
08 답



$x=8$

공통인 부분이 $x=8$ 뿐이므로 연립부등식의 해는 $x=8$이다.

09 답



단원 마무리 평가 [01~05] ▸ 문제편 p.203~205

01 답 ⑤

ㄱ. $a>b$에서 $a-b>0$이므로

$(a-c)-(b-c)=a-b>0$

$\therefore a-c>b-c$ (참)

ㄴ. $a>b$에서 $a-b>0$이고 $c<0$이면 $\frac{1}{c}<0$이므로

$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}=(a-b)\times\frac{1}{c}<0$

$\therefore \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ (참)

ㄷ. $c^2>0$ ($\because c\ne 0$)이므로

$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$의 양변에 c^2을 곱하면 $a>b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ④

$a<-2$이면 $a+2<0$이고,

주어진 식 $ax-3a<-2x+6$에서 $ax+2x<3a+6$

$(a+2)x<3(a+2)$

이므로 $x>3$

03 답 ①

$ax+1<9$에서 $ax<8$이다.

한편, 주어진 부등식의 해가 $x>-\frac{4}{3}$ ⋯ ㉠이므로 $a<0$

$\therefore x>\frac{8}{a}$ ⋯ ㉡

㉠=㉡이어야 하므로 $-\frac{4}{3}=\frac{8}{a}$, $-\frac{1}{3}=\frac{2}{a}$

$\therefore a=-6$

04 답 ③

$3\le x\le 5$, $4\le y\le 11$

$3\times 4\le xy\le 5\times 11$

$12\le xy\le 55$

이므로 $a\le xy\le b$에서 $a=12$, $b=55$

$\therefore a+b=67$

05 답 ③

$3\le 3x+y\le 9$ ⋯ ㉠

$2\le x+y\le 5$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $3-5\le 2x\le 9-2$에서 $-2\le 2x\le 7$

$\therefore -1\le x\le \frac{7}{2}$

따라서 x의 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{7}{2}-1=\frac{5}{2}$

06 답 ①

연립부등식 $\begin{cases} 3x>x-6 \\ x+2\geq 2x-3 \end{cases}$ 에서

$3x>x-6$, $3x-x>-6$

$2x>-6$ $\quad\therefore x>-3$ ⋯ ㉠

$x+2\geq 2x-3$에서 $x-2x\geq -3-2$

$-x\geq -5$ $\quad\therefore x\leq 5$ ⋯ ㉡

따라서 연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분으로

$-3<x\leq 5$이다.

07 답 ⑤

연립방정식 $\begin{cases} x+2>4x-13 \\ 3(x-1)\geq 2x-3 \end{cases}$ 에서

$x+2>4x-13$, $3x<15$ $\quad\therefore x<5$ ⋯ ㉠

$3(x-1)\geq 2x-3$, $3x-3\geq 2x-3$ $\quad\therefore x\geq 0$ ⋯ ㉡

따라서 연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분으로

$0\leq x<5$이므로 구하는 정수 x의 값은 0, 1, 2, 3, 4로 5개다.

08 답 ②

연립부등식 $\begin{cases} 1.6x-2\leq 1.2x+2.8 \\ 2-\dfrac{x-2}{4}<\dfrac{2x-5}{2} \end{cases}$ 에서

$1.6x-2\leq 1.2x+2.8$의 양변에 10을 곱하면

$16x-20\leq 12x+28$, $4x\leq 48$ $\quad\therefore x\leq 12$ ⋯ ㉠

$2-\dfrac{x-2}{4}<\dfrac{2x-5}{2}$의 양변에 분모의 최소공배수 4를 곱하면

$8-x+2<4x-10$, $5x>20$ $\quad\therefore x>4$ ⋯ ㉡

이때, 연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분으로

$4<x\leq 12$이고, 이는 주어진 해 $a<x\leq b$와 일치해야 하므로

$a=4$, $b=12$

$\therefore a+b=16$

09 답 ③

연립부등식 $\begin{cases} 8x-a\leq 3x+1 \\ 2x+b<5x+4 \end{cases}$ 에서

$8x-a\leq 3x+1$, $5x\leq a+1$ $\quad\therefore x\leq \dfrac{a+1}{5}$ ⋯ ㉠

$2x+b<5x+4$, $3x>b-4$ $\quad\therefore x>\dfrac{b-4}{3}$ ⋯ ㉡

이때, 연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분으로

$\dfrac{b-4}{3}<x\leq \dfrac{a+1}{5}$이고, 주어진 해 $-2<x\leq 7$과 일치해야

하므로

$\dfrac{b-4}{3}=-2$, $b-4=-6$ $\quad\therefore b=-2$

$\dfrac{a+1}{5}=7$, $a+1=35$ $\quad\therefore a=34$

$\therefore a+b=34-2=32$

10 답 ③

연립부등식 $\begin{cases} 4x-11>7x-2 \\ 8x+a\geq 3(x-5) \end{cases}$ 에서

$4x-11>7x-2$, $3x<-9$ $\quad\therefore x<-3$ ⋯ ㉠

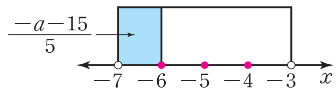
$8x+a\geq 3(x-5)$, $8x+a\geq 3x-15$

$5x\geq -a-15$ $\quad\therefore x\geq \dfrac{-a-15}{5}$ ⋯ ㉡

이때, 연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분으로

$\dfrac{-a-15}{5}\leq x<-3$

이고, 연립부등식을 만족시키는 정수인 해가 3개이려면



$-7<\dfrac{-a-15}{5}\leq -6$, $-35<-a-15\leq -30$

$-20<-a\leq -15$ $\quad\therefore 15\leq a<20$

11 답 ④

연립부등식 $2x-9\leq x-4\leq 3x+2$에서

$2x-9\leq x-4$ $\quad\therefore x\leq 5$ ⋯ ㉠

$x-4\leq 3x+2$, $-2x\leq 6$ $\quad\therefore x\geq -3$ ⋯ ㉡

연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분으로 $-3\leq x\leq 5$

따라서 정수 x의 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5로

합은 9이다.

12 답 ⑤

연립부등식 $0.4x-0.3<0.5x+\dfrac{3}{5}\leq 4+0.3x$에서

$0.4x-0.3<0.5x+\dfrac{3}{5}$의 양변에 10을 곱하면

$4x-3<5x+6$ $\quad\therefore x>-9$ ⋯ ㉠

$0.5x+\dfrac{3}{5}\leq 4+0.3x$의 양변에 10을 곱하면

$5x+6\leq 40+3x$, $2x\leq 34$ $\quad\therefore x\leq 17$ ⋯ ㉡

연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분으로

$-9<x\leq 17$이고, 주어진 해 $a<x\leq b$와 일치해야 하므로

$a=-9$, $b=17$

$\therefore b-a=17-(-9)=26$

13 답 ①

연립부등식 $\begin{cases} 14-2x\leq 5x-7 \\ 8x+a\leq 21-3x \end{cases}$ 에서

$14-2x\leq 5x-7$, $7x\geq 21$ $\quad\therefore x\geq 3$

$8x+a\leq 21-3x$, $11x\leq 21-a$ $\quad\therefore x\leq \dfrac{21-a}{11}$

그런데 주어진 연립부등식의 해가 $x=3$이므로

$\dfrac{21-a}{11}=3$, $21-a=33$ $\quad\therefore a=-12$

14 답 ⑤

연립부등식 $\begin{cases} 5x+13>-3(x+1) \\ \dfrac{2x+4}{3}\le\dfrac{x-2}{2}-x \end{cases}$ 에서

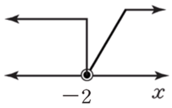
$5x+13>-3(x+1)$, $5x+13>-3x-3$

$8x>-16$ $\quad\therefore x>-2 \cdots$ ㉠

$\dfrac{2x+4}{3}\le\dfrac{x-2}{2}-x$의 양변에 분모의 최소공배수 6을 곱하면

$2(2x+4)\le3(x-2)-6x$

$4x+8\le3x-6-6x$, $7x\le-14$ $\quad\therefore x\le-2 \cdots$ ㉡



$\therefore$ 해는 없다.

15 답 $a\le-\frac{1}{3}$

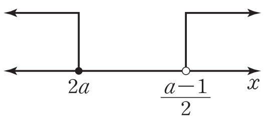
연립부등식 $\begin{cases} 4(x-a)\le2x \\ x+a<3x+1 \end{cases}$ 에서

$4(x-a)\le2x$, $4x-4a\le2x$

$2x\le4a$ $\quad\therefore x\le2a \cdots$ ㉠

$x+a<3x+1$, $2x>a-1$ $\quad\therefore x>\dfrac{a-1}{2} \cdots$ ㉡

연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분으로 이 부분이 존재하지 않아야 하므로 그림과 같아야 한다.



$2a\le\dfrac{a-1}{2}$, $4a\le a-1$

$3a\le-1$ $\quad\therefore a\le-\dfrac{1}{3}$

16 답 ⑤

모든 방의 개수를 x라 하면 전체 학생 수는 $5x+10 \cdots$ ㉠이다.

한편, 한 방에 6명씩 배정하면 방이 1개가 남으므로 $(x-2)$번째 방에 6명이 다 배정돼야 $(x-1)$번째 방에 학생이 들어가고, $(x-1)$번째 방에는 최소 1명에서 최대 6명이 배정될 수 있다. 즉,

연립부등식 $6(x-2)+1\le5x+10\le6(x-2)+6$에서

$6x-11\le5x+10\le6x-6$이므로

$6x-11\le5x+10$ $\quad\therefore x\le21 \cdots$ ㉡

$5x+10\le6x-6$ $\quad\therefore x\ge16 \cdots$ ㉢

연립부등식의 해는 ㉡, ㉢의 공통부분으로 $16\le x\le21$

따라서 전체 학생 수의 최댓값은 $x=21$일 때

$5\times21+10=115$($\because$ ㉠)

17 답 ②

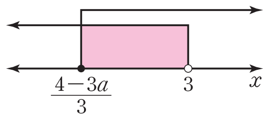
연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{4-3x}{3}\le a \\ 5x+6>7x \end{cases}$ 에서

$\dfrac{4-3x}{3}\le a$, $4-3x\le3a$

$3x\ge4-3a$ $\quad\therefore x\ge\dfrac{4-3a}{3} \cdots$ ㉠

$5x+6>7x$, $2x<6$ $\quad\therefore x<3 \cdots$ ㉡

연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분으로 해가 존재해야 하므로



$\dfrac{4-3a}{3}<3$, $4-3a<9$, $3a>-5$ $\quad\therefore a>-\dfrac{5}{3}$

따라서 가장 작은 정수 a의 값은 -1이다.

18 답 ②

$|x-2|\le4$에서 $-4\le x-2\le4$

$\therefore -2\le x\le6$

따라서 정수 x의 값은 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 9개다.

19 답 ②

부등식 $|x-1|+4\ge2x$에서

절댓값 기호 안의 식 $x-1=0$이 되는 x의 값 $x=1$을 기준으로 구간을 나누면 다음과 같다.

(i) $x<1$일 때,

$-x+1+4\ge2x$, $-3x\ge-5$ $\quad\therefore x\le\dfrac{5}{3}$

그런데 $x<1$일 때이므로 x의 값의 범위는 $x<1$

(ii) $x\ge1$일 때,

$x-1+4\ge2x$, $-x\ge-3$ $\quad\therefore x\le3$

그런데 $x\ge1$일 때이므로 x의 값의 범위는 $1\le x\le3$

(i), (ii)에서 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x\le3$

따라서 x의 최댓값은 3이다.

20 답 ③

연립부등식 $3<|3x-7|<8$에서

(i) $|3x-7|>3$일 때,

$3x-7<-3 \cdots$ ㉠ 또는 $3x-7>3 \cdots$ ㉡

㉠에서 $3x<4$ $\quad\therefore x<\dfrac{4}{3}$

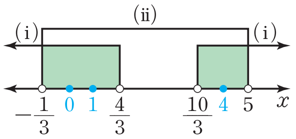
㉡에서 $3x>10$ $\quad\therefore x>\dfrac{10}{3}$

$\therefore x<\dfrac{4}{3}$ 또는 $x>\dfrac{10}{3}$

(ii) $|3x-7|<8$일 때,

$-8<3x-7<8$, $-1<3x<15$

$\therefore -\frac{1}{3}<x<5$



(i), (ii)에서 $-\frac{1}{3}<x<\frac{4}{3}$ 또는 $\frac{10}{3}<x<5$

따라서 만족시키는 정수 x의 값은 0, 1, 4로 3개다.

21 답 ①

부등식 $|2x-5|+2>a$에서 $|2x-5|>a-2$

이때, $|2x-5|\geq 0$이므로 주어진 부등식의 해가 모든 실수가 되기 위해서는 $a-2<0$이어야 한다.

$\therefore a<2$

수력 UP

절댓값 안을 0으로 만드는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 해를 구하는 일반적인 부등식 풀이를 해보면 공통부분이 모든 실수가 나오도록 찾을 수 없다.
이럴 때는 계산이 틀린 게 없는지 확인해 보고, 계산 실수가 없는데도 답이 나오지 않는다면 접근방법을 바꿔야 한다는 것을 생각해야 한다.
그렇기 때문에 (절댓값)≥ 0임을 항상 기억해야 하는 부분이다.

22 답 ②

$b\leq 0$이면 부등식 $|ax-1|\geq b$의 해는 모든 실수가 되므로 $b>0$이다.

이때, 주어진 조건이 $ab>0$이므로 $a>0$이다.

$|ax-1|\geq b$에서 $ax-1\leq -b$ 또는 $ax-1\geq b$

$\therefore x\leq \frac{-b+1}{a}$ 또는 $x\geq \frac{b+1}{a}$

주어진 부등식의 해가 $x\leq -4$ 또는 $x\geq 8$이므로

$\frac{-b+1}{a}=-4$, $\frac{b+1}{a}=8$

$4a-b=-1$ … ㉠, $8a-b=1$ … ㉡

㉠−㉡을 하면 $-4a=-2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$4\times\frac{1}{2}-b=-1$, $2-b=-1$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$

23 답 ①

$2|x+2|+|x-1|\leq 8$에서

절댓값 기호 안의 식 $x+2=0$, $x-1=0$이 되는 x의 값은 각각 $x=-2$, $x=1$이고, 이 값을 기준으로 구간을 나누면 $x<-2$, $-2\leq x<1$, $x\geq 1$이다.

(i) $x<-2$일 때,

$-2(x+2)-(x-1)\leq 8$, $-2x-4-x+1\leq 8$, $-3x\leq 11$

즉 $x\geq -\frac{11}{3}$이므로 $-\frac{11}{3}\leq x<-2$

(ii) $-2\leq x<1$일 때,

$2(x+2)-(x-1)\leq 8$, $2x+4-x+1\leq 8$

즉 $x\leq 3$이므로 $-2\leq x<1$

(iii) $x\geq 1$일 때,

$2(x+2)+(x-1)\leq 8$, $2x+4+x-1\leq 8$, $3x\leq 5$

즉 $x\leq\frac{5}{3}$이므로 $1\leq x\leq\frac{5}{3}$

(i)~(iii)에서 $-\frac{11}{3}\leq x\leq\frac{5}{3}$

따라서 정수 x의 값은 -3, -2, -1, 0, 1이므로 합은 -5

24 답 ②

$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$이므로

주어진 부등식 $|x-1|+\sqrt{(x-2)^2}\leq 7$에서

$|x-1|+|x-2|\leq 7$이고, 절댓값 기호 안의 식의 값이 0인 x의 값은 각각 $x=1$, $x=2$이므로 x의 값의 범위를 $x<1$, $1\leq x<2$, $x\geq 2$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<1$일 때,

$-(x-1)-(x-2)\leq 7$, $-x+1-x+2\leq 7$

$-2x\leq 4$ $\quad\therefore x\geq -2$

그런데 $x<1$일 때이므로 $-2\leq x<1$

(ii) $1\leq x<2$일 때,

$(x-1)-(x-2)\leq 7$에서 $1\leq 7$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $1\leq x<2$일 때이므로 $1\leq x<2$

(iii) $x\geq 2$일 때,

$(x-1)+(x-2)\leq 7$에서 $2x\leq 10$

$\therefore x\leq 5$

그런데 $x\geq 2$일 때이므로 $2\leq x\leq 5$

(i)~(iii)에서 구하는 해는 $-2\leq x\leq 5$이므로

주어진 해 $a\leq x\leq b$와 비교하면

$a=-2$, $b=5$

$\therefore a+b=(-2)+5=3$

Ⅲ-2 이차부등식

06 이차부등식과 이차함수의 그래프 ▸ p.206~207

01 답 ○ **02** 답 ○

03 답 ×

$x(3x-1)>1+3x^2$에서 전개하여 모든 항을 좌변으로 이항하면 $3x^2-x>1+3x^2$, $-x-1>0$

이므로 이차부등식이 아니다.

04 답 ○

05 답 ×

$2x(1+3x)+3x-5\le 4x^2+2(x^2-1)$에서 전개하여 모든 항을 좌변으로 이항하면

$2x+6x^2+3x-5\le 4x^2+2x^2-2$, $5x-3\le 0$

이므로 이차부등식이 아니다.

06 답 ○

모든 항을 좌변으로 이항하면 x^3항이 사라지고,

$2x^2+x-6<0$이므로 이차부등식이다.

07 답 $-2<x<5$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분의 x의 값의 범위이므로

$-2<x<5$이다.

08 답 $x\le -2$ 또는 $x\ge 5$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le -2$ 또는 $x\ge 5$이다.

09 답 $x<-2$ 또는 $x>5$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y>0$인 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<-2$ 또는 $x>5$이다.

10 답 $-2\le x\le 5$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\le 0$인 부분의 x의 값의 범위이므로

$-2\le x\le 5$이다.

11 답 $x<1$ 또는 $x>3$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분의 x의 값의 범위이므로 $x<1$ 또는 $x>3$ 이다.

12 답 $1\le x\le 3$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분의 x의 값의 범위이므로 $1\le x\le 3$이다.

13 답 $1<x<3$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y>0$인 부분의 x의 값의 범위이므로 $1<x<3$이다.

14 답 $x\le 1$ 또는 $x\ge 3$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\le 0$인 부분의 x의 값의 범위이므로 $x\le 1$ 또는 $x\ge 3$이다.

15 답 $-1<x<0$

16 답 $x\le -1$ 또는 $x\ge 0$

17 답 $x<-1$ 또는 $x>0$

18 답 $-1\le x\le 0$

19 답 $-6<x<7$

20 답 $x\le -6$ 또는 $x\ge 7$

21 답 $x<-6$ 또는 $x>7$

22 답 $-6\le x\le 7$

23 답 (1) x, 위쪽 (2) x, 아래쪽

07 이차식 $(x-a)(x-b)$의 부호 조사 ▸ p.208

01 답 $x=4$

$f(1)=0$, $f(2)=-1$, $f(3)=0$, $f(4)=3>0$이므로

$x=4$일 때 $f(x)$가 양의 값을 가진다.

$\therefore x=4$

02 답 해설 참조

x의 값의 범위	$x-1$	$x-3$	$(x-1)(x-3)$
$x<1$	$-$	$-$	$+$
$x=1$	0	$-$	0
$1<x<3$	$+$	$-$	$-$
$x=3$	$+$	0	0
$x>3$	$+$	$+$	$+$

03 답 ① $x=1$ 또는 $x=3$ ② $1<x<3$

③ $x<1$ 또는 $x>3$ ④ $1\le x\le 3$

⑤ $x\le 1$ 또는 $x\ge 3$

04 답 $-2<x<1$

x의 값의 범위	$x+2$	$x-1$	$(x+2)(x-1)$
$x<-2$	$-$	$-$	$+$
$x=-2$	0	$-$	0
$-2<x<1$	$+$	$-$	$-$
$x=1$	$+$	0	0
$x>1$	$+$	$+$	$+$

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)<0$을 만족시키는

x의 값의 범위는 $-2<x<1$이다.

05 답 $x<-4$ 또는 $x>2$

x의 값의 범위	$x+4$	$x-2$	$(x+4)(x-2)$
$x<-4$	$-$	$-$	$+$
$x=-4$	0	$-$	0
$-4<x<2$	$+$	$-$	$-$
$x=2$	$+$	0	0
$x>2$	$+$	$+$	$+$

$x^2+2x-8=(x+4)(x-2)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<-4$ 또는 $x>2$이다.

06 답 (위에서 아래로) $-, -, -, + \,/\, +, 0, -, 0, +$

08 이차부등식의 해 – 판별식 $D>0$

▸ p.209

01 답 $-7\le x\le 2$

부등식의 좌변을 인수분해하면

$(x+\boxed{7})(x-\boxed{2})\le 0$

따라서 부등식의 해는 $\boxed{-7}\le x\le\boxed{2}$

02 답 $x\le 0$ 또는 $x\ge 4$

$x(x-4)\ge 0$ $\quad\therefore$ $x\le 0$ 또는 $x\ge 4$

03 답 $5<x<6$

$(x-5)(x-6)<0$ $\quad\therefore 5<x<6$

04 답 $\frac{1}{2}<x<3$

$(2x-1)(x-3)<0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}<x<3$

05 답 $-3\le x\le 2$

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 2$

06 답 $-\frac{1}{2}<x<4$

$2x^2-7x-4=(2x+1)(x-4)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<4$

07 답 $x\le -7$ 또는 $x\ge 1$

$x^2+6x-7=(x+7)(x-1)\ge 0$

$\therefore$ $x\le -7$ 또는 $x\ge 1$

08 답 (1) $x<p$ 또는 $x>q$ (2) $x\le p$ 또는 $x\ge q$ (3) $p<x<q$ (4) $p\le x\le q$

09 이차부등식의 해 – 판별식 $D=0$

▸ p.210

01 답 모든 실수

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times 4=\boxed{0}$

부등식의 좌변을 완전제곱 꼴로 변형하면

$x^2-4x+4=(x-\boxed{2})^2\ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $(x-\boxed{2})^2\ge 0$이므로

주어진 부등식의 해는 $\boxed{\text{모든 실수}}$이다.

02 답 해는 없다.

$\frac{D}{4}=2^2-4=0$, $x^2+4x+4=(x+2)^2<0$

$\therefore$ 해는 없다.

03 답 $x\ne -1$인 모든 실수

$\frac{D}{4}=1^2-1=0$, $x^2+2x+1=(x+1)^2>0$

$\therefore$ $x\ne -1$인 모든 실수

04 답 모든 실수

$\frac{D}{4}=(-3)^2-9=0$, $9x^2-6x+1=(3x-1)^2\ge 0$

$\therefore$ 모든 실수

05 답 $x\ne 5$인 모든 실수

부등식의 양변에 -1을 곱하면

$x^2-10x+25>0$, $\frac{D}{4}=(-5)^2-25=0$

$x^2-10x+25=(x-5)^2>0$

$\therefore$ $x\ne 5$인 모든 실수

06 답 해는 없다.

부등식의 양변에 $-\frac{1}{2}$을 곱하면

$x^2-2x+1<0$, $\frac{D}{4}=(-1)^2-1=0$

$x^2-2x+1=(x-1)^2<0$ $\quad\therefore$ 해는 없다.

07 답 $x=\frac{3}{2}$

$4x^2-12x+9\le 0$, $\frac{D}{4}=(-6)^2-36=0$

$4x^2-12x+9=(2x-3)^2\le 0$ $\quad\therefore x=\frac{3}{2}$

08 답 (1) $x\ne p$인 모든 실수 (2) 모든 실수 (3) 없다. (4) $x=p$

10 이차부등식의 해 – 판별식 $D<0$

▸ p.211

01 답 **모든 실수**

이차방정식 $x^2+3x+4=0$의 판별식 D를 구하면

$D=3^2-4\times1\times4=-7 < 0$

이때, x^2의 계수는 $1>0$이므로 해는 $\boxed{\text{모든 실수}}$이다.

02 답 **해는 없다.**

$D=1^2-4=-3<0$

이때, x^2의 계수는 $1>0$이므로 해는 없다.

03 답 **해는 없다.**

$D=(-1)^2-4\times3=-11<0$

이때, x^2의 계수는 $1>0$이므로 해는 없다.

04 답 **모든 실수**

$\frac{D}{4}=(-2)^2-10=-6<0$

이때, x^2의 계수는 $1>0$이므로 해는 모든 실수이다.

05 답 **해는 없다.**

$D=1^2-4\times2\times5=-39<0$

이때, x^2의 계수는 $2>0$이므로 해는 없다.

06 답 **해는 없다.**

$\frac{D}{4}=1^2-3\times1=-2<0$

이때, x^2의 계수는 $3>0$이므로 해는 없다.

07 답 **모든 실수**

$2x^2-2x+3\ge0$, $\frac{D}{4}=(-1)^2-2\times3=-5<0$

이때, x^2의 계수는 $2>0$이므로 해는 모든 실수이다.

08 답 **(1) 모든 실수 (2) 모든 실수 (3) 없다. (4) 없다.**

11 해가 주어진 이차부등식의 작성

▸ p.212

01 답 $x^2-6x+8<0$

$(x-2)(x-\boxed{4})<0$에서 $x^2-\boxed{6}x+\boxed{8}<0$

02 답 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0 \Rightarrow x^2-2x-3>0$

03 답 $x^2-x-12\le0$

$(x+3)(x-4)\le0 \Rightarrow x^2-x-12\le0$

04 답 $-x^2+4x+5>0$

$-(x+1)(x-5)>0 \Rightarrow -x^2+4x+5>0$

05 답 $-x^2+12x-32\ge0$

$-(x-4)(x-8)\ge0 \Rightarrow -x^2+12x-32\ge0$

06 답 $-x^2+7x-12<0$

$-(x-3)(x-4)<0 \Rightarrow -x^2+7x-12<0$

07 답 $a=-1$, $b=-2$

$(x+1)(x-2)<0 \Rightarrow x^2-x-2<0$

$\therefore a=-1,\ b=-2$

08 답 $a=4$, $b=3$

$(x+3)(x+1)<0 \Rightarrow x^2+4x+3<0$

$\therefore a=4,\ b=3$

09 답 $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{8}$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)<0 \Rightarrow x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}<0$

$\therefore a=\frac{3}{4},\ b=\frac{1}{8}$

10 답 **(1) $<$, $<$ (2) $>$, $>$ (3) $>$, $>$ (4) $<$, $<$**

12 이차부등식이 항상 성립할 조건

▸ p.213~214

01 답 **양 / 아래로 / $\ge$ / 위쪽**

02 답 $k\ge4$

$\frac{D}{4}=4-k\le0 \qquad \therefore k\ge4$

03 답 **양 / 아래로 / $>$ / 위쪽**

04 답 $k>\frac{1}{8}$

$D=1-8k<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{8}$

05 답 $-6<k<2$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2+kx-(k-3)>0$이 성립하려면 이차방정식

$x^2+kx-(k-3)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=k^2+4(k-3)<0$이어야 한다.

$k^2+4k-12<0$, $(k+6)(k-2)<0$

$\therefore -6<k<2$

06 답 $-2\le k\le 3$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2+2kx+(k+6)\ge 0$이 성립하려면 이차방정식

$x^2+2kx+(k+6)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=k^2-(k+6)\le 0$이어야 한다.

$k^2-k-6\le 0$, $(k+2)(k-3)\le 0$ $\quad\therefore -2\le k\le 3$

07 답 $k>\frac{1}{4}$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+x+k>0$이 성립하려면

이차방정식 $x^2+x+k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=1^2-4k<0$이어야 한다.

$4k>1$ $\quad\therefore k>\frac{1}{4}$

08 답 $-1\le k<1$

(ⅰ) $k+1>0$일 때,

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-2(k+1) < 0$

$(k+1)(k-1)<0$

$\therefore -1<k<\boxed{1}$ ($\because k+1>0$)

(ⅱ) $k=-1$일 때,

$k=-1$을 대입하면 $2>0$이므로 항상 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\boxed{-1}\le k<\boxed{1}$

수력 UP

$k+1<0$일 때, 최고차항의 계수가 음수인 이차함수의 그래프는 감소하는 구간이 존재하므로 모든 실수 x에 대하여 항상 0보다 클 수 없다.

중학교 때 배운 내용을 복습해 보자.

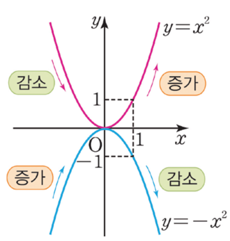
이차함수 $y=x^2$의 그래프의 특징으로

(ⅰ) $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소

(ⅱ) $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가

한다는 내용을 배웠다. 즉,

축의 방정식을 기준으로 이차함수의 그래프는 감소 ⇨ 증가하거나 증가 ⇨ 감소하는 2가지 모양이다.



09 답 $0\le k\le 3$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2-2kx+3k\ge 0$이 성립하려면 이차방정식

$x^2-2kx+3k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-k)^2-3k\le 0$이어야 한다.

$k^2-3k=k(k-3)\le 0$ $\quad\therefore 0\le k\le 3$

10 답 $k<-2$

$-2x^2-4x+k<0$에서 $2x^2+4x-k>0$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $2x^2+4x-k>0$이

성립하려면 이차방정식 $2x^2+4x-k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=2^2-2\times(-k)<0$이어야 한다.

$4+2k<0$, $2k<-4$ $\quad\therefore k<-2$

11 답 $1<k<9$

$k>0$이라 하자. ⋯ ㉠ 주어진 이차부등식이 항상 성립하려면

이차방정식 $kx^2-2(k-3)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-3)\}^2-4k<0$이어야 한다.

$k^2-10k+9=(k-1)(k-9)<0$

$\therefore 1<k<9$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $1<k<9$

수력 UP

$k<0$일 때, 최고차항의 계수가 음수인 이차함수의 그래프는 감소하는 구간이 존재하므로 주어진 이차부등식이 항상 성립할 수 없다.

$k=0$이면 $6x+4>0$은 $x>-\frac{2}{3}$이므로 모든 x에 대하여 항상 성립할 수 없다.

12 답 $k\le -1$

$k<0$이라 하자. ⋯ ㉠ 주어진 이차부등식이 항상 성립하려면

이차방정식 $kx^2+(k-1)x+k=0$의 판별식을 D라 하면

($\because k>0$이면 주어진 이차부등식이 항상 성립할 수 없다.)

$D=(k-1)^2-4k^2\le 0$이어야 한다.

$-3k^2-2k+1\le 0$

$3k^2+2k-1=(k+1)(3k-1)\ge 0$

$\therefore k\le -1$ 또는 $k\ge\frac{1}{3}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $k\le -1$

13 답 $k<-1$

$k<0$이라 하자. ⋯ ㉠ 주어진 이차부등식이 항상 성립하려면

이차방정식 $kx^2+4x-3+k=0$의 판별식을 D라 하면

($\because k>0$이면 주어진 이차부등식이 항상 성립할 수 없다.)

$\frac{D}{4}=2^2-k(-3+k)<0$이어야 한다.

$4+3k-k^2<0$, $k^2-3k-4>0$, $(k+1)(k-4)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<-1$

14 답 (1) $>$, $<$ (2) $>$, $\le$ (3) $<$, $<$ (4) $<$, $\le$

13 이차부등식의 해가 존재하지 않을 조건

▸ p.215~216

01 답 $4 \le k \le 16$

$D=\{-(k-8)\}^2-4k \le 0$

$k^2-20k+64 \le 0$, $(k-4)(k-16) \le 0$

$\therefore 4 \le k \le \boxed{16}$

02 답 $k>\frac{1}{4}$

$D=(-1)^2-4k=1-4k<0$

$4k>1 \quad \therefore k>\frac{1}{4}$

03 답 $-6 \le k \le -2$

$\frac{D}{4}=(k+2)^2+4(k+2)=(k+2)(k+6) \le 0$

$\therefore -6 \le k \le -2$

04 답 $-7 \le k \le -3$

$x^2-2(k+3)x-4(k+3)<0$

$\frac{D}{4}=\{-(k+3)\}^2+4(k+3)=(k+3)(k+7) \le 0$

$\therefore -7 \le k \le -3$

05 답 $-2<k<2$

이차부등식 $x^2-6x+(-k^2+13) \le 0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-6x+(-k^2+13)>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-6x+(-k^2+13)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-(-k^2+13)<0$

$k^2-4<0$

$(k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$

06 답 $-1<k<3$

이차부등식 $x^2-2x+(-k^2+2k+4) \le 0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2x+(-k^2+2k+4)>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2x+(-k^2+2k+4)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(-k^2+2k+4)<0$

$k^2-2k-3<0$

$(k+1)(k-3)<0$

$\therefore -1<k<3$

07 답 $-6 \le k \le 2$

이차부등식 $x^2-(k+4)x+k+7<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-(k+4)x+k+7 \ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(k+4)x+k+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+4)\}^2-4(k+7) \le 0$에서

$k^2+4k-12 \le 0$

$(k+6)(k-2) \le 0 \quad \therefore -6 \le k \le 2$

08 답 $1<k \le 3$

(i) $k=3$일 때, $-2<0$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하지 않는다.

(ii) $k-3<0$일 때, $k<3$ ⋯ ㉠

$\frac{D}{4}=(k-3)^2+2(k-3)=(k-3)(k-1)<0$

$\therefore 1<k<3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $1<k<3$

(i), (ii)에서 $1<k \le 3$

수력 UP

$k-3>0$이면 주어진 최고차항의 계수가 양수인 이차함수의 그래프는 증가하는 구간이 존재하므로 부등식의 해가 존재하지 않는다는 조건에 모순이다.

09 답 $k=-2$

$kx^2+(2-k)x-2>0$

$\therefore k<0$ ⋯ ㉠

$D=(2-k)^2+8k=k^2+4k+4=(k+2)^2 \le 0$

$\therefore k=-2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-2$

수력 UP

$k>0$이면 주어진 최고차항의 계수가 양수인 이차함수의 그래프는 증가하는 구간이 존재하므로 해가 존재하지 않는다는 조건에 모순이다.

$k=0$이면 $2x-2>0$은 $x>1$이므로 해가 존재하지 않는다는 조건에 모순이다.

10 답 $1 \le k \le 4$

이차부등식 $x^2-4x+(-k^2+5k)<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-4x+(-k^2+5k) \ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-4x+(-k^2+5k)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(-k^2+5k) \le 0$

$k^2-5k+4 \le 0$

$(k-1)(k-4) \le 0 \quad \therefore 1 \le k \le 4$

11 답 $-5\le k\le 3$

이차부등식 $x^2-2x+(-k^2-2k+16)<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2x+(-k^2-2k+16)\ge 0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-2x+(-k^2-2k+16)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(-k^2-2k+16)\le 0$

$k^2+2k-15\le 0$, $(k+5)(k-3)\le 0$

$\therefore -5\le k\le 3$

12 답 $k>4$

이차부등식 $x^2+2x+k-3 \le 0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2x+k-3 > 0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(k-3) < 0$ $\quad\therefore k>\boxed{4}$

13 답 $k=-1$

이차부등식 $-x^2+(k-1)x+k>0$에서 양변에 -1을 곱하면 $x^2-(k-1)x-k<0$이고, 이 부등식의 해가 존재하지 않으려면 이차방정식 $x^2-(k-1)x-k=0$의 판별식을 D라 할 때,
$D=(k-1)^2+4k\le 0$이어야 한다.

$k^2+2k+1=(k+1)^2\le 0$ $\quad\therefore k=-1$

14 답 $k=2$

이차부등식 $x^2+2(k-2)x<0$의 해가 존재하지 않으려면 이차방정식 $x^2+2(k-2)x=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(k-2)^2\le 0$이어야 한다.

$\therefore k=2$

15 답 $2<k<8$

이차부등식 $-3x^2+2(k+4)x-6k\ge 0$에서 양변에 -1을 곱하면 $3x^2-2(k+4)x+6k\le 0$이고, 이 이차부등식의 해가 존재하지 않으려면 이차방정식 $3x^2-2(k+4)x+6k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(k+4)^2-18k<0$이어야 한다.

$k^2-10k+16=(k-2)(k-8)<0$

$\therefore 2<k<8$

16 답 (1) $>$, $>$, $<$ (2) $\ge$, $>$, $\le$ (3) $<$, $<$, $<$
(4) $\le$, $<$, $\le$

14 이차함수의 그래프와 이차부등식의 해의 관계

▸ p.217~218

01 답 $x=-1$ 또는 $x=2$

02 답 $x<-1$ 또는 $x>2$

03 답 $-1<x<2$

04 답 $x<4$ 또는 $x>8$

05 답 $x<4$ 또는 $x>8$

06 답 결과가 같다.

07 답 $-5<x<-2$

08 답 $-5<x<-2$

09 답 결과가 같다.

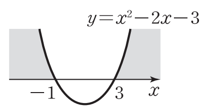
10 답 $x=1$ 또는 $x=3$

11 답 $x<1$ 또는 $x>3$

12 답 $1<x<3$

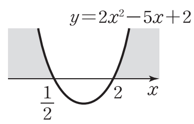
13 답 $x<-1$ 또는 $x>3$

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$
따라서 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 부등식의 해는
$x<-1$ 또는 $x>3$



14 답 $x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$

$2x^2-5x+2=(x-2)(2x-1)$
따라서 이차함수 $y=2x^2-5x+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 부등식의 해는 $x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$



15 답 해는 없다.

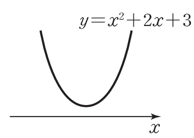
16 답 $x=-4$

17 답 모든 실수

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-3=-2<0$이므로

이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 부등식의 해는 모든 실수이다.



18 답 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$, $x\ne\alpha$, 모든 실수 /
$x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$, 모든 실수, 모든 실수 /
$\alpha<x<\beta$, 해는 없다, 해는 없다 /
$\alpha\le x\le\beta$, $x=\alpha$, 해는 없다

15 두 함수의 그래프를 이용한 이차부등식의 해

▸ p.219~221

01 답 $-3\le x\le 5$

02 답 $-3<x<6$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=-3$ 또는 $x=6$이므로
함수 $f(x)$의 그래프가 $g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분은 $-3<x<6$이다.

03 답 $x\le -3$ 또는 $x\ge 5$

04 답 $x\le -3$ 또는 $x\ge 6$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=-3$ 또는 $x=6$이므로
함수 $f(x)$의 그래프가 $g(x)$의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 부분은 $x\le -3$ 또는 $x\ge 6$이다.

05 답 $x<-3$ 또는 $x>6$

06 답 $-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$

이차함수 $y=x^2+(k+1)x+4$의 그래프가 직선 $y=x-1$보다 항상 위쪽에 있으므로
$x^2+(k+1)x+4>x-1$에서 $x^2+kx+5>0$
이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로
이차방정식 $x^2+kx+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-4\times 5<0$, $k^2-20<0$
$(k-2\sqrt{5})(k+2\sqrt{5})<0$ $\quad\therefore -2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$

07 답 $-8<k<4$

이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프가 직선 $y=kx-8$보다 항상 위쪽에 있으므로 $x^2-2x+1>kx-8$에서 $x^2-(2+k)x+9>0$
이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로
이차방정식 $x^2-(2+k)x+9=0$의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(2+k)\}^2-4\times 9<0$이어야 한다.
$k^2+4k-32<0$, $(k+8)(k-4)<0$ $\quad\therefore -8<k<4$

08 답 $-1\le x\le 3$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로
함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 부분은 $-1\le x\le 3$이다.

09 답 $x<-1$ 또는 $x>3$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로
함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분은 $x<-1$ 또는 $x>3$이다.

10 답 $-1<x<3$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=3$이고,
$f(x)-g(x)>0$, $f(x)>g(x)$이므로
함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분은 $-1<x<3$이다.

11 답 $-3<x<1$ 또는 $2<x<4$

$f(x)>0$, $g(x)>0$인 부분은 $-3<x<1$이고,
$f(x)<0$, $g(x)<0$인 부분은 $2<x<4$이다.
따라서 $f(x)g(x)>0$인 부분은
$-3<x<1$ 또는 $2<x<4$이다.

12 답 $-1<x<3$

13 답 $x<-1$ 또는 $x>3$

14 답 $-4\le x\le 2$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=-4$ 또는 $x=2$이고,
함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프와 만나거나 아래쪽에 있는 $-4\le x\le 2$이다.

15 답 $x<-4$ 또는 $x>2$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=-4$ 또는 $x=2$이고,
함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분은 $x<-4$ 또는 $x>2$이다.

16 답 $x<-4$ 또는 $x>2$

17 답 $x<-8$ 또는 $-2<x<0$ 또는 $x>6$

$f(x)>0$, $g(x)<0$인 부분은 $x<-8$ 또는 $x>6$이고,
$f(x)<0$, $g(x)>0$인 부분은 $-2<x<0$이다.
따라서 $f(x)g(x)<0$인 부분은
$x<-8$ 또는 $-2<x<0$ 또는 $x>6$이다.

18 답 $x<b$ 또는 $x>d$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=b$ 또는 $x=d$이고,
함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분은 $x<b$ 또는 $x>d$이다.

19 답 $b<x<d$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=b$ 또는 $x=d$이고,
함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분은 $b<x<d$이다.

20 답 $b\le x\le e$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=b$ 또는 $x=e$이고,
함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프와 만나거나 아래쪽에 있는 부분은 $b\le x\le e$이다.

21 답 $x \le b$ 또는 $x \ge e$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=b$ 또는 $x=e$이고,

함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 부분은 $x \le b$ 또는 $x \ge e$이다.

22 답 $-1<x<2$

이차함수 $y=x^2-2x-8$의 그래프가

이차함수 $y=-2x^2+x-2$의 그래프보다 아래쪽에 있으므로

$x^2-2x-8 < -2x^2+x-2$에서

$3x^2-3x-6 < 0$, $3(x^2-x-2) < 0$

$3(x+1)(x-2) < 0$ $\quad \therefore -1<x<2$

23 답 $-\frac{1}{2}<x<2$

이차함수 $y=x^2-x-1$의 그래프가

이차함수 $y=-x^2+2x+1$의 그래프보다 아래쪽에 있으므로

$x^2-x-1<-x^2+2x+1$에서 $2x^2-3x-2<0$

$(x-2)(2x+1)<0$ $\quad \therefore -\frac{1}{2}<x<2$

24 답 $-2<x<5$

이차함수 $y=2x^2-2x-3$의 그래프가

이차함수 $y=x^2+x+7$의 그래프보다 아래쪽에 있으므로

$2x^2-2x-3<x^2+x+7$에서 $x^2-3x-10<0$

$(x+2)(x-5)<0$ $\quad \therefore -2<x<5$

25 답 $x<1$ 또는 $x>4$

이차함수 $y=x^2-4$의 그래프가 이차함수 $y=2x^2-5x$의 그래프보다 아래쪽에 있으므로 $x^2-4<2x^2-5x$에서

$-x^2+5x-4<0$, $x^2-5x+4>0$

$(x-1)(x-4)>0$ $\quad \therefore x<1$ 또는 $x>4$

26 답 (1) 위쪽 (2) 위쪽 (3) 아래쪽 (4) 아래쪽

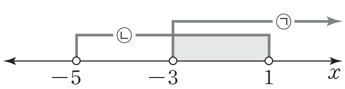
16 연립이차부등식 ▸ p.222

01 답 $-3<x<1$

$2x+5>x+2$에서 $x>-3$ ⋯ ㉠

$x^2+4x-5<0$에서

$(x+5)(x-1)<0$ $\quad \therefore \boxed{-5}<x<\boxed{1}$ ⋯ ㉡



따라서 구하는 해는 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값이므로

$\boxed{-3}<x<\boxed{1}$

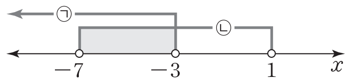
02 답 $-7<x<-3$

$3x+5<x-1$에서 $2x<-6$ $\quad \therefore x<-3$ ⋯ ㉠

$x^2+6x-7<0$에서

$(x+7)(x-1)<0$

$\therefore -7<x<1$ ⋯ ㉡



따라서 구하는 해는 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값이므로

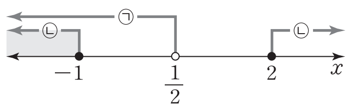
$-7<x<-3$

03 답 $x \le -1$

$3x+4<x+5$에서 $2x<1$ $\quad \therefore x<\frac{1}{2}$ ⋯ ㉠

$x^2-x-2 \ge 0$에서 $(x-2)(x+1) \ge 0$

$\therefore x \le -1$ 또는 $x \ge 2$ ⋯ ㉡



따라서 구하는 해는 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값이므로

$x \le -1$

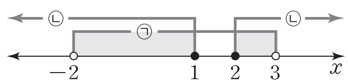
04 답 $-2<x \le 1$ 또는 $2 \le x<3$

$x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$ ⋯ ㉠

$x^2-3x+2 \ge 0$에서 $(x-1)(x-2) \ge 0$

$\therefore x \le 1$ 또는 $x \ge 2$ ⋯ ㉡



따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$-2<x \le 1$ 또는 $2 \le x<3$

05 답 $0 \le x \le 1$ 또는 $2 \le x \le 3$

$-x+4 \le x^2-4x+6$에서 $x^2-3x+2 \ge 0$이므로

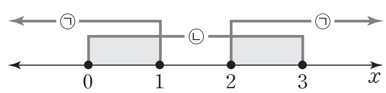
$(x-1)(x-2) \ge 0$

$\therefore x \le 1$ 또는 $x \ge 2$ ⋯ ㉠

$x^2-4x+6 \le -x+6$에서

$x^2-3x \le 0$, $x(x-3) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 3$ ⋯ ㉡



따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$0 \le x \le 1$ 또는 $2 \le x \le 3$

06 답 (1) 공통부분 (2) $f(x)<g(x)$, $g(x)<h(x)$

17 절댓값 기호를 포함한 이차부등식 ▸ p.223~225

01 답 $-2\le x\le 6$

$|x-2|\le 4$에서 $-4\le x-2\le 4$

$-4\le x-2$에서 $x\ge -2$ ⋯ ㉠

$x-2\le 4$에서 $x\le \boxed{6}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2\le x\le \boxed{6}$

02 답 $1<x<2$

$|2x-3|<1$에서 $-1<2x-3<1$

$-1<2x-3$에서 $x>1$ ⋯ ㉠

$2x-3<1$에서 $x<2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $1<x<2$

03 답 $-3\le x\le 2$

$|2x+1|\le 5$에서 $-5\le 2x+1\le 5$

$-5\le 2x+1$에서 $x\ge -3$ ⋯ ㉠

$2x+1\le 5$에서 $x\le 2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $-3\le x\le 2$

04 답 $x\le -1$ 또는 $x\ge 5$

$|2-x|\ge 3$에서 $2-x\ge 3 \Rightarrow x\le -1$ ⋯ ㉠

$2-x\le -3 \Rightarrow x\ge 5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x\le -1$ 또는 $x\ge 5$

05 답 $x<3$ 또는 $x>9$

$\left|2-\frac{x}{3}\right|>1$에서 $2-\frac{x}{3}>1$, $6-x>3$ $\therefore x<3$ ⋯ ㉠

$2-\frac{x}{3}<-1$, $6-x<-3$ $\therefore x>9$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x<3$ 또는 $x>9$

06 답 $x>3$

$|x+3|<2x$에서 $-2x<x+3<2x$

$-2x<x+3$ $\therefore x>-1$ ⋯ ㉠

$x+3<2x$ $\therefore x>\boxed{3}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x>\boxed{3}$

07 답 $x\le \frac{4}{3}$

$|x|\ge 2x-4$에서 $x\ge 2x-4$

$\therefore x\le 4$ ⋯ ㉠

$x\le -(2x-4)$, $x\le -2x+4$, $3x\le 4$ $\therefore x\le \frac{4}{3}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x\le \frac{4}{3}$

08 답 $x\ge \frac{7}{2}$

$|x+2|\le 3x-5$에서 $-3x+5\le x+2\le 3x-5$

$-3x+5\le x+2$, $4x\ge 3$ $\therefore x\ge \frac{3}{4}$ ⋯ ㉠

$x+2\le 3x-5$, $2x\ge 7$ $\therefore x\ge \frac{7}{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x\ge \frac{7}{2}$

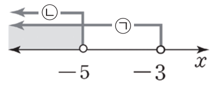
09 답 $x<-5$

$|2-x|>6x+23$에서

$2-x>6x+23$, $7x<-21$ $\therefore x<-3$ ⋯ ㉠

$2-x<-(6x+23)$, $2-x<-6x-23$

$5x<-25$ $\therefore x<-5$ ⋯ ㉡



따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<-5$

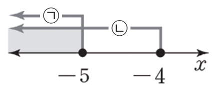
10 답 $x\le -5$

$|x+1|\ge 7x+31$에서

$x+1\ge 7x+31$, $6x\le -30$ $\therefore x\le -5$ ⋯ ㉠

$x+1\le -(7x+31)$, $x+1\le -7x-31$

$8x\le -32$ $\therefore x\le -4$ ⋯ ㉡



따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $x\le -5$

11 답 $x\ge 3$

$|2x-3|\le 4x-9$에서 $-4x+9\le 2x-3\le 4x-9$

$-4x+9\le 2x-3$, $6x\ge 12$ $\therefore x\ge 2$ ⋯ ㉠

$2x-3\le 4x-9$, $2x\ge 6$ $\therefore x\ge 3$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $x\ge 3$

12 답 $-2\le x\le 2$

(i) $x<-1$일 때, $-(x+1)-(x-1)\le 4$, $-2x\le 4$

$\therefore x\ge -2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2\le x<-1$ ⋯ ㉠

(ii) $-1\le x<1$일 때, $(x+1)-(x-1)\le 4$에서 $2\le 4$이므로

주어진 부등식은 이 범위에서 항상 성립한다.

$\therefore \boxed{-1}\le x<\boxed{1}$ ⋯ ㉡

(iii) $x\ge 1$일 때, $(x+1)+(x-1)\le 4$, $2x\le 4$ $\therefore x\le 2$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x\le \boxed{2}$ ⋯ ㉢

따라서 구하는 해는 ㉠, ㉡, ㉢에서 $-2\le x\le \boxed{2}$이다.

13 답 $-\frac{17}{3}<x<-3$

$|x|+2|x+5|<7$에서

(i) $x<-5$일 때,

$-x-2(x+5)<7$, $-3x-10<7$

$3x>-17$ $\quad\therefore x>-\frac{17}{3}$

그런데 $x<-5$이므로 $-\frac{17}{3}<x<-5$ … ㉠

(ii) $-5\le x<0$일 때,

$-x+2(x+5)<7$, $x+10<7$ $\quad\therefore x<-3$

그런데 $-5\le x<0$이므로 $-5\le x<-3$ … ㉡

(iii) $x\ge 0$일 때,

$x+2(x+5)<7$, $3x+10<7$

$3x<-3$ $\quad\therefore x<-1$

그런데 $x\ge 0$이므로 해는 없다. … ㉢

따라서 구하는 해는 ㉠, ㉡, ㉢에서 $-\frac{17}{3}<x<-3$

14 답 $x\le -7$ 또는 $x\ge 5$

$|x-1|+|x+3|\ge 12$에서

(i) $x<-3$일 때,

$-(x-1)-(x+3)\ge 12$, $-x+1-x-3\ge 12$

$-2x\ge 14$ $\quad\therefore x\le -7$

그런데 $x<-3$이므로 $x\le -7$ … ㉠

(ii) $-3\le x<1$일 때,

$-(x-1)+(x+3)\ge 12$, $4\ge 12$(모순)

$\therefore$ 해는 없다. … ㉡

(iii) $x\ge 1$일 때,

$x-1+x+3\ge 12$, $2x\ge 10$ $\quad\therefore x\ge 5$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x\ge 5$ … ㉢

따라서 구하는 해는 ㉠, ㉡, ㉢에서 $x\le -7$ 또는 $x\ge 5$

15 답 $x<0$ 또는 $x>6$

$2|x-4|+|x-1|>9$에서

(i) $x<1$일 때, $-2(x-4)-(x-1)>9$, $-3x>0$

$\therefore x<0$

그런데 $x<1$이므로 $x<0$ … ㉠

(ii) $1\le x<4$일 때, $-2(x-4)+(x-1)>9$, $-x>2$

$\therefore x<-2$

그런데 $1\le x<4$이므로 이 범위에서 해는 없다. … ㉡

(iii) $x\ge 4$일 때, $2(x-4)+(x-1)>9$, $3x>18$

$\therefore x>6$

그런데 $x\ge 4$이므로 $x>6$ … ㉢

따라서 구하는 해는 ㉠, ㉡, ㉢에서 $x<0$ 또는 $x>6$

16 답 $x<-\frac{12}{5}$ 또는 $x>0$

$3|x+2|+2|x-4|>14$에서

(i) $x<-2$일 때,

$-3(x+2)-2(x-4)>14$, $-3x-6-2x+8>14$

$-5x>12$ $\quad\therefore x<-\frac{12}{5}$

그런데 $x<-2$이므로 $x<-\frac{12}{5}$ … ㉠

(ii) $-2\le x<4$일 때,

$3(x+2)-2(x-4)>14$, $3x+6-2x+8>14$

$\therefore x>0$

그런데 $-2\le x<4$이므로 $0<x<4$ … ㉡

(iii) $x\ge 4$일 때,

$3(x+2)+2(x-4)>14$, $3x+6+2x-8>14$

$5x>16$ $\quad\therefore x>\frac{16}{5}$

그런데 $x\ge 4$이므로 $x\ge 4$ … ㉢

따라서 구하는 해는 ㉠, ㉡, ㉢에서

$x<-\frac{12}{5}$ 또는 $x>0$

17 답 $-3<x<3$

$x^2-2|x|<3$에서

(i) $x\ge 0$일 때,

$x^2-2x-3<0$, $(x-3)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<\boxed{3}$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x<\boxed{3}$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+2x-3<0$, $(x+3)(x-1)<0$

$\therefore -3<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $-3<x<\boxed{0}$

(i), (ii)에서 $-3<x<\boxed{3}$

18 답 $x\le -2$ 또는 $x\ge 2$

$x^2+|x|-6\ge 0$에서

(i) $x\ge 0$일 때,

$x^2+x-6\ge 0$, $(x+3)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 2$

그런데 $x\ge 0$이므로 $x\ge 2$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2-x-6\ge 0$, $(x+2)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 3$

그런데 $x<0$이므로 $x\le -2$

(i), (ii)에서 $x\le -2$ 또는 $x\ge 2$

19 답 $x \le -\frac{5}{2}$ 또는 $x \ge \frac{5}{2}$

$2x^2-3|x|-5 \ge 0$에서

(i) $x \ge 0$일 때,

$2x^2-3x-5 \ge 0$, $(x+1)(2x-5) \ge 0$

$\therefore x \le -1$ 또는 $x \ge \frac{5}{2}$

그런데 $x \ge 0$이므로 $x \ge \frac{5}{2}$

(ii) $x<0$일 때,

$2x^2+3x-5 \ge 0$, $(x-1)(2x+5) \ge 0$

$\therefore x \le -\frac{5}{2}$ 또는 $x \ge 1$

그런데 $x<0$이므로 $x \le -\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $x \le -\frac{5}{2}$ 또는 $x \ge \frac{5}{2}$

20 답 $x<-3$ 또는 $x>2$

$x^2-|x-2|-4>0$에서

(i) $x \ge 2$일 때, $x^2-x-2>0$, $(x+1)(x-2)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>2$

그런데 $x \ge 2$이므로 $x>2$

(ii) $x<2$일 때, $x^2+x-6>0$, $(x+3)(x-2)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>2$

그런데 $x<2$이므로 $x<-3$

(i), (ii)에서 $x<-3$ 또는 $x>2$

21 답 $x \le -1-\sqrt{2}$ 또는 $x \ge -1+\sqrt{2}$

$x^2 \ge |2x-1|$에서 $-x^2 \le 2x-1 \le x^2$

(i) $-x^2 \le 2x-1$에서 $x^2+2x-1 \ge 0$

$\therefore x \le -1-\sqrt{2}$ 또는 $x \ge -1+\sqrt{2}$

(ii) $2x-1 \le x^2$에서 $x^2-2x+1 \ge 0$, $(x-1)^2 \ge 0$

$\therefore x$는 모든 실수

(i), (ii)에서 $x \le -1-\sqrt{2}$ 또는 $x \ge -1+\sqrt{2}$

[다른 풀이]

$x^2 \ge |2x-1|$에서

(i) $x \ge \frac{1}{2}$일 때,

$x^2-2x+1 \ge 0$, $(x-1)^2 \ge 0$ $\therefore x$는 모든 실수

그런데 $x \ge \frac{1}{2}$이므로 $x \ge \frac{1}{2}$

(ii) $x<\frac{1}{2}$일 때,

$x^2+2x-1 \ge 0$이고, 방정식 $x^2+2x-1=0$에 대하여 근의 공식에 의하여

$x=-1 \pm \sqrt{1^2+1}=-1 \pm \sqrt{2}$

이므로 $x \le -1-\sqrt{2}$ 또는 $x \ge -1+\sqrt{2}$이다.

그런데 $x<\frac{1}{2}$이고, $-1+\sqrt{2}<\frac{1}{2}$이므로

$x \le -1-\sqrt{2}$ 또는 $-1+\sqrt{2} \le x<\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $x \le -1-\sqrt{2}$ 또는 $x \ge -1+\sqrt{2}$

수력 UP

$-1+\sqrt{2}>\frac{1}{2}$이라고 가정하자.

$\sqrt{2}>\frac{3}{2}$이고, 둘 다 양수이므로 양변을 제곱하면

$2>\frac{9}{4}=2.\times\times\times$ (거짓)

따라서 $-1+\sqrt{2}<\frac{1}{2}$이다.

이처럼 수의 크기를 비교할 때, '~라고 가정'한 뒤 둘다 양수 혹은 둘다 음수이면 양변을 제곱해도 부등호의 방향이 바뀌지 않는다는 부등식의 성질을 이용하여 참인지 거짓인지 찾을 수 있어야 한다.

22 답 $1<x<4$

$|x^2-4|<3x$에서 $-3x<x^2-4<3x$

(i) $-3x<x^2-4$에서 $x^2+3x-4>0$, $(x+4)(x-1)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>1$

(ii) $x^2-4<3x$에서 $x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$

(i), (ii)에서 $1<x<4$

[다른 풀이]

$|x^2-4|<3x$에서

(i) $x^2-4 \ge 0$일 때,

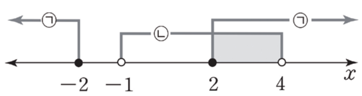
$x^2-4 \ge 0$, $x^2 \ge 4$

$\therefore x \le -2$ 또는 $x \ge 2$ ⋯ ㉠

$x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $2 \le x<4$



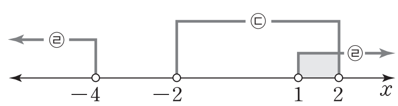
(ii) $x^2-4<0$일 때,

$x^2<4$ $\therefore -2<x<2$ ⋯ ㉢

$-x^2-3x+4<0$, $x^2+3x-4>0$, $(x+4)(x-1)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>1$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $1<x<2$



(i), (ii)에서 $1<x<4$

23 답 $-4<x<-1$

$|x-1|>2$에서

(i) $x-1>2$일 때,

$x-1>2 \qquad \therefore x>3$

$x^2+3x-4<0,\ (x+4)(x-1)<0 \qquad \therefore -4<x<1$

그런데 $x>3$이므로 해는 없다.

(ii) $x-1<-2$일 때,

$x-1<-2 \qquad \therefore x<-1$

$x^2+3x-4<0,\ (x+4)(x-1)<0 \qquad \therefore -4<x<1$

그런데 $x<-1$이므로 $-4<x<-1$

(i), (ii)에서 $-4<x<-1$

24 답 $-4\le x\le -1$

(i) $|2x+5|\le 3$일 때, $-3\le 2x+5\le 3$

$-8\le 2x\le -2 \qquad \therefore -4\le x\le -1$

(ii) $2x^2-x-1>0$일 때, $(2x+1)(x-1)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>1$

(i), (ii)에서 $-4\le x\le -1$

25 답 $x\le -3$ 또는 $x>5$

$x^2+3|x|-18\ge 0$에서

(i) $x\ge 0$일 때,

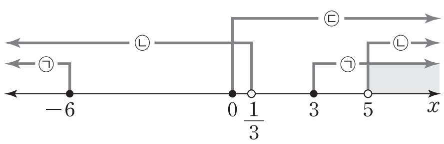
$x^2+3x-18\ge 0,\ (x+6)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le -6$ 또는 $x\ge 3$ ⋯ ㉠

$3x^2-16x+5>0,\ (x-5)(3x-1)>0$

$\therefore x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>5$ ⋯ ㉡

그런데 $x\ge 0$ ⋯ ㉢이므로 $x>5$



(ii) $x<0$일 때,

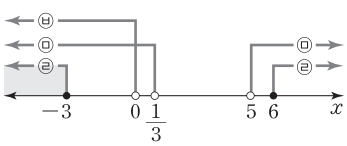
$x^2-3x-18\ge 0,\ (x+3)(x-6)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 6$ ⋯ ㉣

$3x^2-16x+5>0,\ (x-5)(3x-1)>0$

$\therefore x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>5$ ⋯ ㉤

그런데 $x<0$ ⋯ ㉥이므로 $x\le -3$



(i), (ii)에서 $x\le -3$ 또는 $x>5$

26 답 (1) ① $-a<x<a$ ② $x>a$ ③ $-b<x<-a$

(2) 0 ① $x<a,\ x\ge a$ ② $x<a,\ a\le x<b,\ x\ge b$

18 이차방정식의 실근의 부호

▸ p.226

01 답 $k\ge 2$

두 근이 모두 양수이므로 방정식 $x^2-2kx+k+2=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}\ge 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$이어야 한다.

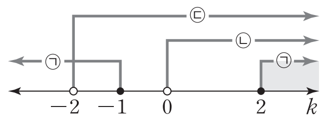
$\frac{D}{4}=k^2-k-2=(k-2)(k+1)\ge 0$

$\therefore k\le -1$ 또는 $k\ge 2$ ⋯ ㉠

$\alpha+\beta=2k>0 \qquad \therefore k>0$ ⋯ ㉡

$\alpha\beta=k+2>0 \qquad \therefore k>-2$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k\ge 2$



02 답 $k<-3$ 또는 $-1<k\le -\frac{3}{4}$

두 근이 모두 양수이므로 방정식 $x^2+2kx+k^2+4k+3=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}\ge 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=k^2-k^2-4k-3=-4k-3\ge 0$

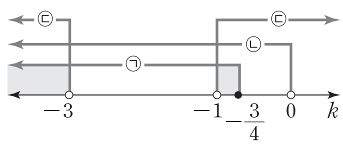
$\therefore k\le -\frac{3}{4}$ ⋯ ㉠

$\alpha+\beta=-2k>0 \qquad \therefore k<0$ ⋯ ㉡

$\alpha\beta=k^2+4k+3=(k+3)(k+1)>0$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>-1$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k<-3$ 또는 $-1<k\le -\frac{3}{4}$



03 답 $k\ge 2$

두 근이 모두 음수이므로 방정식 $x^2+2(k+1)x+k+7=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}\ge 0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$이어야 한다.

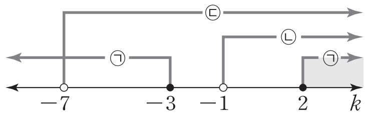
$\frac{D}{4}=(k+1)^2-k-7=k^2+k-6=(k+3)(k-2)\geq 0$

$\therefore k\leq -3$ 또는 $k\geq 2$ ⋯ ㉠

$\alpha+\beta=-2(k+1)<0 \qquad \therefore k>-1$ ⋯ ㉡

$\alpha\beta=k+7>0 \qquad \therefore k>-7$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k\geq 2$



04 답 $k\geq 5$

두 근이 모두 음수이므로 방정식 $x^2+2(k-1)x+k+11=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}\geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$이어야 한다.

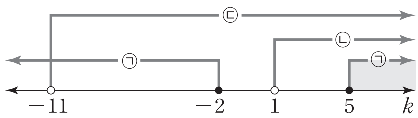
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k-11=k^2-3k-10=(k+2)(k-5)\geq 0$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 5$ ⋯ ㉠

$\alpha+\beta=-2(k-1)<0 \qquad \therefore k>1$ ⋯ ㉡

$\alpha\beta=k+11>0 \qquad \therefore k>-11$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k\geq 5$



05 답 $k>4$

두 근의 부호가 서로 다르므로 방정식 $x^2-2kx-2k+8=0$의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$이어야 한다.

$\alpha\beta=-2k+8<0 \qquad \therefore k>4$

06 답 $k>5$

두 근의 부호가 서로 다르므로 방정식 $x^2-2(k+1)x-k+5=0$의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$이어야 한다.

$\alpha\beta=-k+5<0 \qquad \therefore k>5$

07 답 **(왼쪽에서 오른쪽으로) $D\geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$ / $D\geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$ / $\alpha\beta<0$**

19 이차방정식의 실근의 위치

▸ p.227

01 답 $k\geq\frac{5}{2}$

이차방정식 $x^2-4kx+4k+15=0$의 판별식을 D라 하자.

두 근이 모두 1보다 크므로

$f(x)=x^2-4kx+4k+15$라 하면 $f(1)>0$

$1-4k+4k+15=16>0$ (참) ⋯ ㉠

$\frac{D}{4}=4k^2-4k-15=(2k+3)(2k-5)\geq 0$

$\therefore k\leq -\frac{3}{2}$ 또는 $k\geq\frac{5}{2}$ ⋯ ㉡

$-\frac{(-4k)}{2}>1$, $2k>1 \qquad \therefore k>\frac{1}{2}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k\geq\frac{5}{2}$

02 답 $k\geq 6$

이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하자.

두 근이 모두 1보다 크므로

$f(x)=x^2-kx+k+3$이라 하면 $f(1)>0$

$1-k+k+3=4>0$ (참) ⋯ ㉠

$D=k^2-4k-12=(k+2)(k-6)\geq 0$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 6$ ⋯ ㉡

$-\frac{(-k)}{2}>1$, $\frac{k}{2}>1 \qquad \therefore k>2$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k\geq 6$

03 답 $k\leq 0$ 또는 $1\leq k<\frac{9}{8}$

이차방정식 $x^2-4kx+4k=0$의 판별식을 D라 하자.

두 근이 모두 3보다 작으므로

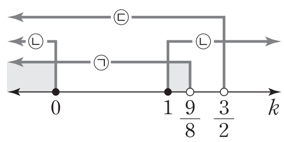
$f(x)=x^2-4kx+4k$라 하면 $f(3)>0$

$9-12k+4k=9-8k>0 \qquad \therefore k<\frac{9}{8}$ ⋯ ㉠

$\frac{D}{4}=4k^2-4k=4k(k-1)\geq 0 \qquad \therefore k\leq 0$ 또는 $k\geq 1$ ⋯ ㉡

$-\frac{(-4k)}{2}<3$, $2k<3 \qquad \therefore k<\frac{3}{2}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k\leq 0$ 또는 $1\leq k<\frac{9}{8}$



수력 UP

$\frac{3}{2}$, $\frac{9}{8}$의 크기를 비교하는 데는

① 분모의 최소공배수로 분수를 통분하는 방법

② 서로 다른 분모, 분자를 대각선 방향으로 각각 곱하는 방법

으로 2가지가 있다.

계산 시간을 단축하려면 숫자가 그렇게 크지 않으므로 눈으로 쓱 보고,

$\frac{3}{2}$ $\frac{9}{8}$ ⇨ $3\times 8=24>2\times 9=18$

이니까 $\frac{3}{2}>\frac{8}{9}$임을 파악한다.

04 답 $k\ge2$

이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$의 판별식을 D라 하자.

두 근이 모두 3보다 작으므로

$f(x)=x^2+2kx+6-k$라 하면 $f(3)>0$

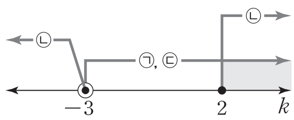
$9+6k+6-k=15+5k>0$ $\quad\therefore k>-3$ ⋯ ㉠

$\dfrac{D}{4}=k^2+k-6=(k+3)(k-2)\ge0$

$\therefore k\le-3$ 또는 $k\ge2$ ⋯ ㉡

$-\dfrac{2k}{2}<3,\ -k<3$ $\quad\therefore k>-3$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k\ge2$



05 답 $k>-\frac{7}{5}$

이차방정식 $x^2-3kx+k-11=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로

$f(x)=x^2-3kx+k-11$이라 하면 $f(2)<0$

$4-6k+k-11<0, -5k-7<0$ $\quad\therefore k>-\dfrac{7}{5}$

06 답 $k<-\frac{1}{2}$ 또는 $k>4$

이차방정식 $x^2-k^2x+7k=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로

$f(x)=x^2-k^2x+7k$라 하면 $f(2)<0$

$4-2k^2+7k<0,\ 2k^2-7k-4>0$

$(2k+1)(k-4)>0$ $\quad\therefore k<-\dfrac{1}{2}$ 또는 $k>4$

07 답 $5<k\le6$

이차방정식 $x^2-4x+k-2=0$의 판별식을 D라 하고,

$f(x)=x^2-4x+k-2$라 하자.

두 근이 0과 3 사이에 있으면

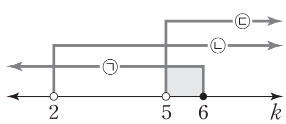
$\dfrac{D}{4}=4-k+2=6-k\ge0$ $\quad\therefore k\le6$ ⋯ ㉠

$f(0)=k-2>0$ $\quad\therefore k>2$ ⋯ ㉡

$f(3)=9-12+k-2=k-5>0$ $\quad\therefore k>5$ ⋯ ㉢

$0<-\dfrac{-4}{2}=2<3$ (참) ⋯ ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서 $5<k\le6$



08 답 $5<k\le6$

이차방정식 $x^2-4x+k-2=0$의 판별식을 D라 하고,

$f(x)=x^2-4x+k-2$라 하자.

두 근이 1과 4 사이에 있으면

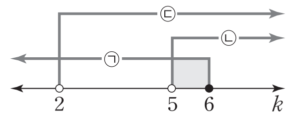
$\dfrac{D}{4}=4-k+2=6-k\ge0$ $\quad\therefore k\le6$ ⋯ ㉠

$f(1)=1-4+k-2=k-5>0$ $\quad\therefore k>5$ ⋯ ㉡

$f(4)=16-16+k-2=k-2>0$ $\quad\therefore k>2$ ⋯ ㉢

$1<-\dfrac{-4}{2}=2<4$ (참) ⋯ ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서 $5<k\le6$



09 답 (왼쪽에서 오른쪽으로)

$$f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}>p\ /\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}<p\ /$$

$$f(p)<0\ /\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\frac{b}{2a}<q$$

20 연립이차부등식의 활용

▸ p.228

01 답 5개

$x>0$이므로 세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $\boxed{2x+1}$

(i) 삼각형의 결정 조건에 의하여

$2x+1<x+(2x-1)$ $\quad\therefore x>\boxed{2}$

(ii) 둔각삼각형이려면 $(2x+1)^2>x^2+(2x-1)^2$

$x^2-8x<0,\ x(x-8)<0$

$\therefore 0<x<8$

(i), (ii)의 공통부분은 $\boxed{2}<x<8$이므로

정수 x의 값은 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$로 5개이다.

02 답 3개

(i) $x>0$이므로 삼각형의 결정 조건에 의하여

$x+(x+2)>x+4$ $\quad\therefore x>2$

(ii) 주어진 삼각형이 둔각삼각형이 되려면

$(x+4)^2>x^2+(x+2)^2$

$x^2-4x-12<0,\ (x-6)(x+2)<0$

$\therefore -2<x<6$

(i), (ii)의 공통부분은 $2<x<6$이므로

정수 x의 값은 3, 4, 5로 3개이다.

03 답 최댓값 : 6 cm, 최솟값 : 5 cm

(i) 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는

$(10-x)$ cm이다.

가로의 길이가 세로의 길이보다 길거나 같으므로

$x\ge10-x$ $\quad\therefore x\ge5$

(ii) 직사각형의 넓이가 24 cm^2 이상이 되려면

$x(10-x)\geq 24$, $10x-x^2\geq 24$

$x^2-10x+24\leq 0$, $(x-4)(x-6)\leq 0$

$\therefore 4\leq x\leq 6$

(i), (ii)의 공통부분은 $5\leq x\leq 6$이므로

가로의 길이의 최댓값은 6 cm, 최솟값은 5 cm이다.

04 답 최댓값 : 14 cm, 최솟값 : 12 cm

(i) 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(24-x)$ cm이다. 이때, 가로의 길이가 세로의 길이보다 길거나 같으므로 $x\geq 24-x$, $x\geq 12$

(ii) $x(24-x)\geq 140$이므로

$x^2-24x+140\leq 0$, $(x-10)(x-14)\leq 0$

$\therefore 10\leq x\leq 14$

(i), (ii)의 공통부분은 $12\leq x\leq 14$이므로

가로의 길이의 최댓값은 14 cm, 최솟값은 12 cm이다.

05 답 (i) 미지수 (ii) 연립부등식 (iii) 해

단원 마무리 평가 [06~20]

▸문제편 p.229~233

01 답 ④

$f(x)<0$에서

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=0$(x축)보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 $-1<x<3$

02 답 ①

이차함수 $y=x^2+kx-3$의 그래프가 $(1, 0)$을 지나므로

$0=1^2+k\times 1-3 \qquad \therefore k=2$

$y=x^2+kx-3=x^2+2x-3$

$=(x-1)(x+3)$

의 그래프에서 $y<0$인 x의 값의 범위는 $-3<x<1$

03 답 ③

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-3, 0)$, $(2, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+3)(x-2)\,(a<0)$라 하자.

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$f(0)=3$, $-6a=3 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+3)(x-2)$

한편, $f(x)>-3$에서

$-\dfrac{1}{2}(x+3)(x-2)>-3$, $(x+3)(x-2)<6$

$x^2+x-6<6$, $x^2+x-12<0$

$(x+4)(x-3)<0 \qquad \therefore -4<x<3$

이때, 주어진 해가 $\alpha<x<\beta$이므로 $\alpha=-4$, $\beta=3$

$\therefore \beta-\alpha=3-(-4)=7$

04 답 ④

$(2x-3)(x+2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq \dfrac{3}{2}$

따라서 주어진 정수 x의 값은 -2, -1, 0, 1로 4개다.

05 답 ④

이차방정식 $x^2-2x-7=0$의 해는 근의 공식을 이용하여 구하면 $x=1\pm 2\sqrt{2}$이므로 이차부등식 $x^2-2x-7\geq 0$의 해는

$x\leq 1-2\sqrt{2}$ 또는 $x\geq 1+2\sqrt{2}$

이때, 주어진 해 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$와 비교하면

$\alpha=1-2\sqrt{2}$, $\beta=1+2\sqrt{2}$이다.

$\therefore \beta-\alpha=(1+2\sqrt{2})-(1-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$

06 답 ③

③ $4x^2-12x+9<0$, $(2x-3)^2<0$

모든 실수의 제곱은 0보다 크거나 같으므로 이를 만족시키는 해는 없다.

07 답 ④

$2(x+4)\geq x^2-7$, $2x+8\geq x^2-7$

$x^2-2x-15\leq 0$, $(x+3)(x-5)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 5$

주어진 보기 중 ④ $|x-1|\leq 4$, $-4\leq x-1\leq 4$

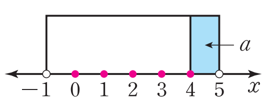
$\therefore -3\leq x\leq 5$

따라서 이차부등식의 해와 같은 것은 ④이다.

08 답 ③

$x^2-(a-1)x-a<0$, $(x+1)(x-a)<0$

이때, a가 자연수이고, $-1<x<a$를 만족시키는 정수 x의 값의 개수가 5이려면 $4<a\leq 5$이어야 한다.



따라서 자연수 a의 값은 5이다.

09 답 ①

이차부등식 $ax^2+bx+8>0$ … ㉠의 해가

$x<-4$ 또는 $x>-1$이므로 $a>0$이고,

$a(x+4)(x+1)>0$이다.

($\because$ $a<0$이라 하면 위로 볼록인 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분이 $x<-4$ 또는 $x>-1$일 수 없다.)

한편, 해가 $x<-4$ 또는 $x>-1$이고 x^2의 계수가 1인

이차부등식은 $(x+4)(x+1)>0$, 즉 $x^2+5x+4>0$이다.

이 식의 양변에 양수 a를 곱하면

$ax^2+5ax+4a>0$ ($\because$ $a>0$)

이고, 이 부등식은 ㉠과 같으므로

$5a=b$, $4a=8$ $\quad\therefore a=2$, $b=10$

$\therefore b-a=8$

10 답 ①

이차부등식 $x^2+2kx-3k\le0$ … ㉠의 해가 $x=3$이므로

㉠의 식은 최고차항의 계수가 1인 이차부등식

$(x-3)^2\le0$, 즉 $x^2-6x+9\le0$과 같다.

$2k=-6$, $-3k=9$

$\therefore k=-3$

11 답 ②

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록이므로

$a<0$이고, x축이 만나는 점의 x좌표가 -2, 1이므로

최고차항의 계수가 a인 이차함수는

$y=a(x+2)(x-1)=a(x^2+x-2)$

$\quad=ax^2+ax-2a$

$\therefore b=a$, $c=-2a$

한편, 이 값을 주어진 식에 대입하면

$cx^2+bx+a=-2ax^2+ax+a>0$

$2x^2-x-1>0$ ($\because$ $-a>0$), $(2x+1)(x-1)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>1$

12 답 ②

$ax^2+bx+c\le0$ … ㉠의 해가 $-2\le x\le4$이므로

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 아래로 볼록이다.

$\therefore a>0$

한편, 해가 $-2\le x\le4$이고 이차항의 계수가 1인

이차부등식은 $(x+2)(x-4)\le0$, 즉 $x^2-2x-8\le0$이고,

양변에 $a>0$을 곱하면 $ax^2-2ax-8a\le0$

이때, 이 부등식이 ㉠과 같으므로

$b=-2a$, $c=-8a$

이 값을 $ax^2+5bx+3c\le0$에 대입하면

$ax^2-10ax-24a\le0$, $a(x^2-10x-24)\le0$

$(x-12)(x+2)\le0$ ($\because$ $a>0$) $\quad\therefore -2\le x\le12$

따라서 정수 x의 값은

-2, -1, 0, 1, 2, 3, $\cdots$, 11, 12로 15개다.

13 답 ③

$y=x^2-2x+k$로 놓자.

$y>0$의 해가 모든 실수이려면

이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k<0$, $1-k<0$ $\quad\therefore k>1$

14 답 ③

$x^2+1>(k-4)x$, $x^2-(k-4)x+1>0$

이고, 이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

이차방정식 $x^2-(k-4)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D<0$이어야 한다.

$D=\{-(k-4)\}^2-4<0$, $k^2-8k+12<0$

$(k-2)(k-6)<0$ $\quad\therefore 2<k<6$

따라서 정수 k의 최댓값은 5이다.

15 답 ②

모든 실수 x에 대하여 $x^2-(m+1)x+2m-1\ge0$이

성립하려면 이차방정식 $x^2-(m+1)x+2m-1=0$의 판별식을

D라 하면 $D\le0$이어야 한다. 즉,

$D=\{-(m+1)\}^2-4(2m-1)=m^2+2m+1-8m+4$

$\quad=m^2-6m+5=(m-5)(m-1)\le0$

$\therefore 1\le m\le5$

따라서 정수 m의 값은 1, 2, 3, 4, 5로 5개다.

16 답 ③

이차부등식 $kx^2-kx+2>0$에 대하여 해가 모든 실수이므로

(i) $k=0$일 때,

$2>0$이므로 항상 성립한다.

(ii) $k\ne0$일 때,

$k>0$이고 이차방정식 $kx^2-kx+2=0$의 판별식을

D라 하면

$D=(-k)^2-8k=k(k-8)<0$

이어야 하므로 $0<k<8$

(i), (ii)에서 $0\le k<8$

따라서 정수 k의 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 8개다.

수력 UP

$k<0$이면 함수 $y=kx^2-kx+2$의 그래프는 위로 볼록한 이차함수로 감소하는 부분이 있으므로 모든 실수 x에 대하여 $kx^2-kx+2>0$일 수 없다.
따라서 (ii) $k\neq0$일 때, $k>0$이라는 조건만 확인해야 한다.

17 답 ②

이차부등식 $x^2+6x-3k+2\le0$의 해가 없으려면
$x^2+6x-3k+2>0$이 모든 해를 가지면 된다. 즉,
이차방정식 $x^2+6x-3k+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=3^2-(-3k+2)<0,\ 3k<-7 \qquad \therefore k<-\frac{7}{3}$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 -3이다.

18 답 ③

이차부등식 $x^2-(k+2)x+2k+1\le0$이 해를 갖지 않으려면
모든 실수 x에 대하여 $x^2-(k+2)x+2k+1>0$이 성립해야 한다. 즉,
이차방정식 $x^2-(k+2)x+2k+1=0$의 판별식 D라 하면
$D<0$이어야 한다.

$D=(k+2)^2-4(2k+1)$
$\quad=k^2+4k+4-8k-4$
$\quad=k(k-4)<0$
$\therefore 0<k<4$

따라서 구하는 정수 k의 값은 $1,\ 2,\ 3$으로 3개다.

19 답 ①

$ax^2+2x>ax+2,\ ax^2+(2-a)x-2>0$
이고, 이 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+(2-a)x-2\le0$이어야 한다. 즉,
$a<0$이고 이차방정식 $ax^2+(2-a)x-2=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 한다.

$D=(2-a)^2+8a=a^2-4a+4+8a$
$\quad=a^2+4a+4=(a+2)^2\le0$
$\therefore a=-2$

20 답 ③

이차부등식 $(k-1)x^2-2(k-1)x-2>0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여
$(k-1)x^2-2(k-1)x-2\le0$이어야 한다.
또한, 이차함수 $y=(k-1)x^2-2(k-1)x-2$의 그래프가 위로 볼록이어야 하므로 $k-1<0$
$\therefore k<1 \cdots$ ㉠

이차방정식 $(k-1)x^2-2(k-1)x-2=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}\le0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D}{4}=(k-1)^2+2(k-1)=k^2-2k+1+2k-2$
$\quad=k^2-1=(k-1)(k+1)\le0$
$\therefore -1\le k\le1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 k의 값의 범위는 $-1\le k<1$

21 답 ③

이차부등식 $2x^2+ax+b\le0 \cdots$ ㉠의 해가 $x=-2$뿐이므로
$2(x+2)^2\le0$이다. 즉,
$2(x^2+4x+4)\le0,\ 2x^2+8x+8\le0$
으로 ㉠과 같아야 하므로 $a=8,\ b=8$
$\therefore a+b=16$

22 답 ③

$y=(k+1)x^2-2(k+1)+1$이라 하자.
$k+1<0$이면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록한 함수이므로 주어진 이차부등식의 해가 $x=-2$뿐일 수 없다.
$\therefore k+1>0 \Rightarrow k>-1$
이차부등식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+1\le0$이 단 하나의 해를 가지므로 이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k+1)=k^2+2k+1-k-1$
$\quad=k^2+k=k(k+1)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=-1$
그런데 $k>-1$일 때이므로 $k=0$

수력 UP

$k=-1$이면 $(k+1)x^2-2(k+1)x+1\le0$에서 $1\le0$이므로 거짓인 식이다. $\quad\therefore k\neq-1$

23 답 ③

이차부등식 $4x^2-2(k+3)x+1<0$이 해를 가지려면
이차방정식 $4x^2-2(k+3)x+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(k+3)^2-4=(k^2+6k+9)-4$
$\quad=k^2+6k+5>0$
$(k+5)(k+1)>0$
$\therefore k<-5$ 또는 $k>-1$
따라서 k의 값이 아닌 것은 ③이다.

24 답 ①

이차부등식 $x^2-4kx+10k+6\le 0$이 해를 가지려면

이차방정식 $x^2-4kx+10k+6=0$이 실근을 가져야 하므로

이 방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}\ge 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(10k+6)=4k^2-10k-6$

$=2(2k^2-5k-3)\ge 0$

$2(2k+1)(k-3)\ge 0$

$\therefore k\le -\frac{1}{2}$ 또는 $k\ge 3$

따라서 자연수 k의 최솟값은 3이다.

25 답 ④

이차부등식 $ax^2+bx+c\ge mx+n$을 만족시키려면

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과

만나거나 직선 $y=mx+n$보다 위쪽에 있어야 하므로

$x\le -2$ 또는 $x\ge 4$

26 답 ⑤

부등식 $f(x)-g(x)\le 0$을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의

그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 아래쪽에 있어야

하므로 $-1\le x\le 3$이고 주어진 해 $\alpha\le x\le\beta$와 비교하면

$\alpha=-1,\ \beta=3$　　$\therefore \alpha+\beta=-1+3=2$

27 답 ③

이차함수 $y=x^2-2x-9$의 그래프가

이차함수 $y=-2x^2+x-3$의 그래프보다 아래쪽에 있으려면

$x^2-2x-9<-2x^2+x-3$

$3x^2-3x-6<0,\ 3(x^2-x-2)<0,\ 3(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

28 답 ②

이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프가 직선 $y=x-3$보다 위쪽에

있으므로 $x^2-ax+b>x-3$ 즉,

$x^2-(a+1)x+b+3>0$ ⋯ ㉠

이때, ㉠의 해가 $x<2$ 또는 $x>4$이다.

한편, 해가 $x<2$ 또는 $x>4$이고 이차항의 계수가 1인

이차부등식은 $(x-2)(x-4)>0$ 즉,

$x^2-6x+8>0$ ⋯ ㉡

㉠=㉡이므로

$a+1=6$　　$\therefore a=5$

$b+3=8$　　$\therefore b=5$

$\therefore a+b=10$

29 답 ②

이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프가 직선 $y=kx-4$보다 항상

위쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여

부등식 $x^2-3x+5>kx-4$, 즉 $x^2-(k+3)x+9>0$이

성립한다.

이차방정식 $x^2-(k+3)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D<0$이어야 한다.

$D=(k+3)^2-36=k^2+6k-27$

$=(k+9)(k-3)<0$

$\therefore -9<k<3$

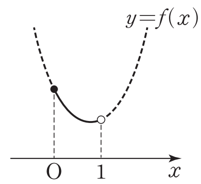
30 답 ③

$f(x)=x^2-2ax+a+2$

$=(x-a)^2-a^2+a+2$

라 하면 $0\le x<1$에서 $f(x)>0$이어야 하므로

$f(0)>0,\ f(1)\ge 0$이어야 한다.



$f(0)=a+2>0$

$\therefore a>-2$ ⋯ ㉠

$f(1)=1-2a+a+2\ge 0,\ 3-a\ge 0$

$\therefore a\le 3$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분은 $-2<a\le 3$이므로

실수 a의 최댓값은 3이다.

수력 UP

주어진 x의 값 중에서 $0\le x<1$에는 $x=0$을 포함하기 때문에

주어진 부등식 $f(x)>0$을 만족시키려면 $f(0)>0$이어야 하고,

($f(0)=0$이면 주어진 부등식을 만족시키지 않으므로 포함하지

말아야 함.)

주어진 x의 값 중에서 $0\le x<1$에는 $x=1$을 포함하지 않기 때문에

주어진 부등식 $f(x)>0$을 만족시키려면 $f(1)\ge 0$이어야 한다.

($f(1)=0$을 포함시켜야 함.)

31 답 ①

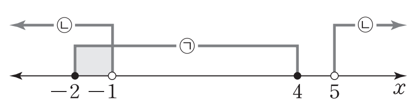
$x^2-2x-8\le 0,\ (x+2)(x-4)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 4$ ⋯ ㉠

$x^2-4x-5>0,\ (x+1)(x-5)>0$

$x<-1$ 또는 $x>5$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분은 $-2\le x<-1$



32 답 ②

$|x-2|<3$, $-3<x-2<3$

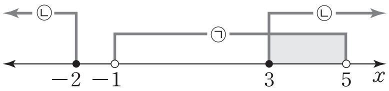
$\therefore\ -1<x<5 \cdots$ ㉠

$x^2-x-6\geq 0$, $(x-3)(x+2)\geq 0$

$\therefore\ x\leq -2$ 또는 $x\geq 3 \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분은 $3\leq x<5$

따라서 정수 x의 값은 3, 4로 2개다.



33 답 ②

연립부등식 $5x-3\leq 2x^2-1<2x+23$에서

(i) $5x-3\leq 2x^2-1$일 때,

$2x^2-5x+2\geq 0$, $(x-2)(2x-1)\geq 0$

$\therefore\ x\leq \frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 2 \cdots$ ㉠

(ii) $2x^2-1<2x+23$일 때,

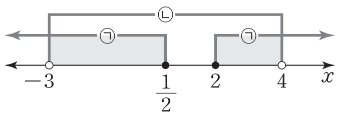
$2x^2-2x-24<0$, $2(x^2-x-12)<0$

$2(x-4)(x+3)<0$ $\qquad\therefore\ -3<x<4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$-3<x\leq \frac{1}{2}$ 또는 $2\leq x<4$

따라서 정수 x의 값은 -2, -1, 0, 2, 3으로 5개다.



34 답 ④

$$\begin{cases} x^2-2x-8\leq 0 & \cdots ㉠ \\ x^2-(a+1)x+a>0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x-4)(x+2)\leq 0$

$\therefore\ -2\leq x\leq 4$

㉡에서 $(x-1)(x-a)>0$

(i) $a<1$일 때, $x<a$ 또는 $x>1$

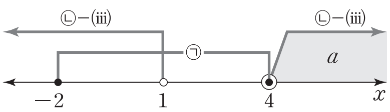
(ii) $a=1$일 때, $x\neq 1$인 모든 실수

(iii) $a>1$일 때, $x<1$ 또는 $x>a$

㉠, ㉡의 공통부분이 $-2\leq x<1$이 되도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 부등식 ㉡의 해의 꼴은

(iii) $x<1$ 또는 $x>a$이어야 한다.

따라서 실수 a의 값의 범위는 $a\geq 4$이므로 실수 a의 최솟값은 4이다.



35 답 ③

이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2+4k-5=0$의 두 근을 α, β라 하자.

두 근 α, β가 서로 다른 부호일 조건은 $\alpha\beta<0$이므로

$\alpha\beta=k^2+4k-5<0$

$(k+5)(k-1)<0$ $\qquad\therefore\ -5<k<1$

따라서 정수 k의 값은 -4, -3, -2, -1, 0으로 5개다.

36 답 ①

이차방정식 $x^2-(k-1)x+k+2=0$의 두 근이 모두 음수일 조건은 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D\geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$이다.

(i) $D=(k-1)^2-4(k+2)\geq 0$

$k^2-6k-7\geq 0$, $(k+1)(k-7)\geq 0$

$\therefore\ k\leq -1$ 또는 $k\geq 7 \cdots$ ㉠

(ii) $\alpha+\beta=k-1<0$에서 $k<1 \cdots$ ㉡

(iii) $\alpha\beta=k+2>0$에서 $k>-2 \cdots$ ㉢

(i)~(iii)의 공통부분은 $-2<k\leq -1$이고 주어진 값의 범위 $a<k\leq b$와 같아야 하므로 $a=-2$, $b=-1$

$\therefore\ a+b=-3$

37 답 ④

이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면

두 실근의 양의 근의 절댓값이 음의 근의 절댓값보다 크므로

$\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta<0$이어야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=k^2-7k+10>0$

$(k-2)(k-5)>0$ $\qquad\therefore\ k<2$ 또는 $k>5 \cdots$ ㉠

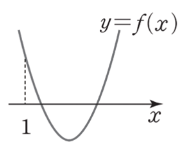
$\alpha\beta=-2k+6<0$ $\qquad\therefore\ k>3 \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분은 $k>5$

38 답 ⑤

$f(x)=x^2-2kx+4$로 놓으면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-4\geq 0$, $(k+2)(k-2)\geq 0$

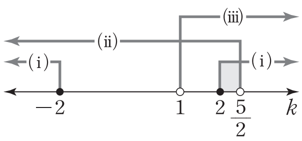
$\therefore\ k\leq -2$ 또는 $k\geq 2$

(ii) $f(1)>0$에서

$1-2k+4>0 \qquad \therefore k<\frac{5}{2}$

(iii) $f(x)=x^2-2kx+4=(x-k)^2+4-k^2$에서

축의 방정식은 $x=k$이므로 $k>1$



(i)~(iii)의 공통부분은 $2\le k<\frac{5}{2}$이고 주어진 값의 범위

$a\le k<b$와 같아야 하므로 $a=2,\ b=\frac{5}{2}$

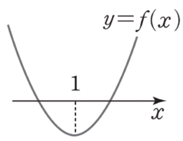
$\therefore ab=2\times\frac{5}{2}=5$

39 답 ④

$f(x)=x^2+2kx+3-k$라 할 때

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에

1이 있으므로



$f(1)=1+2k+3-k<0 \qquad \therefore k<-4$

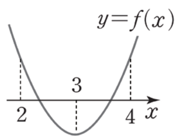
따라서 정수 k의 최댓값은 -5이다.

40 답 ③

$f(x)=x^2-6x+k$로 놓으면 x축과의 교점이 2와 3 사이에,

다른 한 교점은 3과 4 사이에 있으므로 함수 $y=f(x)$의

그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $f(2)=4-12+k>0 \qquad \therefore k>8$

(ii) $f(3)=9-18+k<0 \qquad \therefore k<9$

(iii) $f(4)=16-24+k>0 \qquad \therefore k>8$

(i)~(iii)에서 $8<k<9$

Ⅳ-1 경우의 수

01 사건과 경우의 수 ▸ p.238

01 답 5가지

강아지의 종류는 5가지이므로 강아지 1마리를 분양받는

경우의 수는 5가지이다.

02 답 2가지

03 답 0가지

앵무새는 없으므로 앵무새를 분양받는 경우의 수는 0가지이다.

04 답 3가지

05 답 3가지

4의 약수는 1, 2, 4로 3가지이다.

06 답 10가지

07 답 4가지

15의 약수는 1, 3, 5, 15로 정이십면체 모양의 주사위에

모두 적혀 있으므로 15의 약수의 눈이 나오는 경우의 수는

4가지이다.

08 답 4가지

두 주사위의 눈의 수를 a, b라 하고 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내자.

나오는 눈의 수의 합이 5인 경우의 수는

$(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(4,\ 1)$, $(3,\ 2)$로 4가지이다.

09 답 3가지

두 주사위의 눈의 수를 a, b라 하고 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내자.

나오는 눈의 수의 곱이 4인 경우의 수는

$(1,\ 4)$, $(2,\ 2)$, $(4,\ 1)$로 3가지이다.

10 답 (1) 사건 (2) 경우의 수

02 합의 법칙과 곱의 법칙 ▸ p.239~240

01 답 6가지

치마의 종류는 4가지, 바지의 종류는 2가지이므로

$4+2=6$(가지)

02 답 7가지

$2+3+2=7$(가지)

03 답 9가지

$2+3+4=9$(가지)

04 답 1) 4가지 2) 2가지 3) 0가지 4) 6가지

1) 20까지의 수 중 5의 배수는 5, 10, 15, 20으로 4가지이다.

2) 20까지의 수 중 8의 배수는 8, 16으로 2가지이다.

3) 20까지의 수 중 5의 배수이면서 8의 배수는 없으므로

0가지이다.

4) 구하는 경우의 수는 $4+2=6$(가지)

05 답 1) 5가지 2) 3가지 3) 1가지 4) 7가지

1) 15까지의 수 중 3의 배수는 3, 6, 9, 12, 15로 5가지이다.

2) 15까지의 수 중 4의 배수는 4, 8, 12로 3가지이다.

3) 15까지의 수 중 3의 배수이면서 4의 배수는 12로 1가지이다.

4) 구하는 경우의 수는 $5+3-1=7$(가지)

06 답 5가지

$2+3=5$(가지) 또는 $3+2=5$(가지)

07 답 36가지

1부터 100까지의 자연수가 적힌 100개의 공 중에서 4의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는 25가지, 7의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는 14가지이다.

이때, 4의 배수이면서 7의 배수는 28의 배수이고, 28의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는 28, 56, 84로 3가지이다.

따라서 4의 배수 또는 7의 배수가 적힌 공이 나오는 경우의 수는 $25+14-3=36$(가지)이다.

08 답 3가지

서로 다른 동전 3개를 동시에 던질 때,

앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 앞면이 2개 나오는 경우는

HHT, HTH, THH

로 3가지이다.

09 답 6가지

쉼터를 거쳐서 약수터로 가는 경우는 곱의 법칙에 의하여 $2\times3=6$(가지)이다.

10 답 12가지

자켓 3벌과 바지 4벌을 짝지어 동시에 입어야 하므로

곱의 법칙에 의하여 $3\times4=12$(가지)이다.

11 답 20가지

남학생 4명 중 대표 1명을 뽑는 경우는 4가지이고, 여학생 5명 중 대표 1명을 뽑는 경우는 5가지이다. 따라서 곱의 법칙에 의하여 $4\times5=20$(가지)이다.

12 답 24가지

서로 다른 동전 2개와 주사위 1개를 던지므로 전체 경우의 수는 $2\times2\times6=24$(가지)이다.

13 답 6가지

동전이 앞면, 앞면 또는 뒷면, 뒷면으로 같은 면이 나오는 경우는 2가지이고, 주사위의 눈이 소수인 경우는 2, 3, 5로 3가지이므로

곱의 법칙에 의하여 $2\times3=6$(가지)이다.

14 답 30개

40 이상의 두 자리 자연수 중 짝수는

40, 42, 44, ⋯, 96, 98이다.

이때, 2×20, 2×21, ⋯, 2×48, 2×49로 전체 개수는

$49-20+1=30$(개)이다.

[다른 풀이]

98까지의 짝수의 개수에서 38까지의 짝수의 개수를 빼면

40 이상의 두 자리 자연수 중 짝수의 개수이다.

98까지의 짝수의 개수는 49, 38까지의 짝수의 개수는 19이므로

$49-19=30$

15 답 10개

20 이상 70 미만의 두 자리 자연수 중 5의 배수는

20, 25, 30, ⋯, 60, 65이다.

이때, 5×4, 5×5, ⋯, 5×12, 5×13이므로

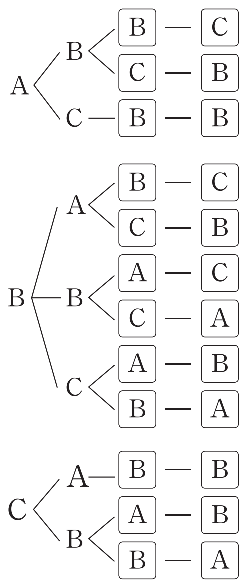
전체 개수는 $13-4+1=10$(개)이다.

16 답 (1) $m+n$ (2) $m\times n$

03 수형도

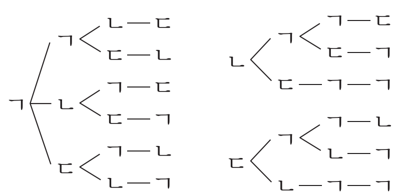
▸ p.241

01 답 12가지



따라서 배열하는 방법의 수는 $\boxed{12}$가지이다.

02 답 12가지



따라서 배열하는 방법의 수는 12가지이다.

03 답 2가지

A, B, C 세 명의 학생의 신발을 각각 a, b, c라 하자.

자기 신발이 아닌 신발을 신는 경우를 구해 보면 다음과 같다.

$$\begin{array}{cccccc} & \text{A} & & \text{B} & & \text{C} \\ \diagup & b & - & c & - & a \\ \diagdown & c & - & \boxed{a} & - & \boxed{b} \end{array}$$

따라서 구하는 경우의 수는 $\boxed{2}$가지이다.

04 답 나뭇가지

04 방정식의 해와 부등식의 해의 개수 ▸ p.242~243

01 답 4

방정식 $x+2y=10$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

(i) $y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(8, 1)$

(ii) $y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(6, 2)$

(iii) $y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(4, 3)$

(iv) $y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 4)$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 4이다.

02 답 2

방정식 $2x+3y=15$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

(i) $y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(6, 1)$

(ii) $y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(3, 3)$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 2이다.

03 답 3

방정식 $x+2y+3z=9$에서 계수가 큰 문자 z의 값을 기준으로 경우를 나누자.

(i) $z=1$일 때,

$x+2y=6$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누자.

Ⅰ. $y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(4, 1)$

Ⅱ. $y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 2)$

이므로 순서쌍 (x, y, z)는 $(4, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$로 2개이다.

(ii) $z=2$일 때,

$x+2y=3$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누자.

$y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$

이므로 순서쌍 (x, y, z)는 $(1, 1, 2)$로 1개이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $2+1=3$(개)이다.

04 답 3

계수가 큰 문자 x의 값을 기준으로 경우를 나누면

(i) $x=0$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(0, 5)$

(ii) $x=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$

(iii) $x=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$

(iv) $x=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(3, -1)$

(v) $x=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(4, -3)$

⋮

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 3이다.

05 답 3

계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

(i) $y=0$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(10, 0)$

(ii) $y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(6, 1)$

(iii) $y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 2)$

(iv) $y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(-2, 3)$

(v) $y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(-6, 4)$

⋮

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 3이다.

06 답 5

계수가 큰 문자 x의 값을 기준으로 경우를 나누면

(i) $x=0$일 때, $y+2z=5$

순서쌍 (y, z)는 $(5, 0)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$로 3개이다.

(ii) $x=1$일 때, $y+2z=2$

순서쌍 (y, z)는 $(2, 0)$, $(0, 1)$로 2개이다.

(iii) $x=2$일 때, $y+2z=-1$

조건을 만족시키는 순서쌍 (y, z)는 없다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $3+2=5$(개)이다.

07 답 12

부등식 $x+2y\le8$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

(i) $y=1$일 때, $x+2\le8$, $x\le6$이므로 자연수 x의 값은

1, 2, 3, 4, 5, 6으로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$로 6개다.

(ii) $y=2$일 때, $x+4\le8$, $x\le4$이므로 자연수 x의 값은

1, 2, 3, 4로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$로 4개다.

(iii) $y=3$일 때, $x+6\le8$, $x\le2$이므로 자연수 x의 값은

1, 2로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 3)$, $(2, 3)$으로 2개다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $6+4+2=12$(개)이다.

08 답 12

부등식 $x+3y\le 10$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

(ⅰ) $y=1$일 때, $x+3\le 10$, $x\le 7$이므로 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$, $(7, 1)$로 7개다.

(ⅱ) $y=2$일 때, $x+6\le 10$, $x\le 4$이므로 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$로 4개다.

(ⅲ) $y=3$일 때, $x+9\le 10$, $x\le 1$이므로 자연수 x의 값은 1로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$으로 1개다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $7+4+1=12$(개)이다.

09 답 15

부등식 $x+4y\le 13$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

(ⅰ) $y=1$일 때, $x+4\le 13$, $x\le 9$이므로 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$, $(7, 1)$, $(8, 1)$, $(9, 1)$로 9개다.

(ⅱ) $y=2$일 때, $x+8\le 13$, $x\le 5$이므로 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 2)$로 5개다.

(ⅲ) $y=3$일 때, $x+12\le 13$, $x\le 1$이므로 자연수 x의 값은 1로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$으로 1개다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $9+5+1=15$(개)이다.

10 답 38

부등식 $x+5y\le 16$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

(ⅰ) $y=0$일 때, $x\le 16$이므로 음이 아닌 정수 x의 값은 0, 1, 2, $\cdots$, 16으로 순서쌍 (x, y)는 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $\cdots$, $(16, 0)$으로 17개다.

(ⅱ) $y=1$일 때, $x+5\le 16$, $x\le 11$이므로 음이 아닌 정수 x의 값은 0, 1, 2, 3, $\cdots$, 10, 11로 순서쌍 (x, y)는 $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $\cdots$, $(10, 1)$, $(11, 1)$로 12개다.

(ⅲ) $y=2$일 때, $x+10\le 16$, $x\le 6$이므로 음이 아닌 정수 x의 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 순서쌍 (x, y)는 $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 2)$, $(6, 2)$로 7개다.

(ⅳ) $y=3$일 때, $x+15\le 16$, $x\le 1$이므로 음이 아닌 정수 x의 값은 0, 1로 순서쌍 (x, y)는 $(0, 3)$, $(1, 3)$으로 2개다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $17+12+7+2=38$(개)이다.

11 답 9

부등식 $3x+y\le 9$에서 계수가 큰 문자 x의 값을 기준으로 경우를 나누면

(ⅰ) $x=1$일 때, $3+y\le 9$, $y\le 6$이므로 자연수 y의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$으로 6개다.

(ⅱ) $x=2$일 때, $6+y\le 9$, $y\le 3$이므로 자연수 y의 값은 1, 2, 3으로 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$으로 3개다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $6+3=9$(개)이다.

12 답 10

부등식 $3x+2y\le 13$에서 계수가 큰 문자 x의 값을 기준으로 경우를 나누면

(ⅰ) $x=1$일 때, $3+2y\le 13$, $2y\le 10$, $y\le 5$이므로 자연수 y의 값은 1, 2, 3, 4, 5로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$로 5개다.

(ⅱ) $x=2$일 때, $6+2y\le 13$, $2y\le 7$, $y\le \frac{7}{2}$이므로 자연수 y의 값은 1, 2, 3으로 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$으로 3개다.

(ⅲ) $x=3$일 때, $9+2y\le 13$, $2y\le 4$, $y\le 2$이므로 자연수 y의 값은 1, 2로 순서쌍 (x, y)는 $(3, 1)$, $(3, 2)$로 2개다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $5+3+2=10$(개)이다.

13 답 11

부등식 $5x+6y\le 20$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

(ⅰ) $y=0$일 때, $5x\le 20$, $x\le 4$이므로 음이 아닌 정수 x의 값은 0, 1, 2, 3, 4로 순서쌍 (x, y)는 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$으로 5개다.

(ⅱ) $y=1$일 때, $5x+6\le 20$, $5x\le 14$, $x\le \frac{14}{5}$이므로 음이 아닌 정수 x의 값은 0, 1, 2로 순서쌍 (x, y)는 $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$로 3개다.

(ⅲ) $y=2$일 때, $5x+12\le 20$, $5x\le 8$, $x\le \frac{8}{5}$이므로 음이 아닌 정수 x의 값은 0, 1로 순서쌍 (x, y)는 $(0, 2)$, $(1, 2)$로 2개다.

(iv) $y=3$일 때, $5x+18\le20$, $5x\le2$, $x\le\frac{2}{5}$이므로

음이 아닌 정수 x의 값은 0으로 순서쌍 (x, y)는 $(0, 3)$으로 1개다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $5+3+2+1=11$(개)이다.

14 답 (1) $ax+by=d$, $ax+by>d$ (2) 큰 (3) 순서쌍

05 약수의 개수와 약수의 총합

▸ p.244

01 답 12

108을 소인수분해하면 $108=2^2\times3^3$

	1	3	3^2	3^3
1	1	3	3^2	3^3
2	2	2×3	2×3^2	2×3^3
2^2	2^2	$2^2\times3$	$2^2\times3^2$	$2^2\times3^3$

따라서 108의 양의 약수는 $2^x\times3^y$의 꼴로 나타낼 수 있다.

이때, x를 택할 수 있는 경우의 수가 3이고, y를 택할 수 있는 경우의 수가 $\boxed{4}$이므로

곱의 법칙에 의하여 108의 양의 약수의 개수는

$3\times\boxed{4}=12$

02 답 9

36을 소인수분해하면 $36=2^2\times3^2$

2^2의 양의 약수는 1, 2, 2^2의 3개

3^2의 양의 약수는 1, 3, 3^2의 3개

즉, 각각의 양의 약수에서 하나씩 택하여 곱하면 이들은 모두 36의 양의 약수가 된다.

따라서 36의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times3=9$(개)이다.

03 답 10

48을 소인수분해하면 $48=2^4\times3$

2^4의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4의 5개

3의 양의 약수는 1, 3의 2개

따라서 48의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $5\times2=10$(개)이다.

04 답 9

100을 소인수분해하면 $100=2^2\times5^2$

2^2의 양의 약수는 1, 2, 2^2의 3개

5^2의 양의 약수는 1, 5, 5^2의 3개

따라서 100의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times3=9$(개)이다.

05 답 7

64를 인수분해하면 $64=2^6$

2^6의 양의 약수는 1, 2, 2^2, $\cdots$, 2^6의 7개다.

06 답 12

72를 인수분해하면 $72=8\times9=2^3\times3^2$

2^3의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3의 4개

3^2의 양의 약수는 1, 3, 3^2으로 3개

따라서 72의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $4\times3=12$(개)이다.

07 답 6

99를 인수분해하면 $99=9\times11=3^2\times11$

3^2의 양의 약수는 1, 3, 3^2으로 3개

11의 양의 약수는 1, 11의 2개

따라서 99의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times2=6$(개)이다.

08 답 42

20을 소인수분해하면 $20=4\times5=2^2\times5$

2^2의 양의 약수는 1, 2, 2^2

5의 양의 약수는 1, 5

20의 양의 약수의 합은 2^2의 약수와 5의 약수의 합의 곱이므로

(약수의 총합)$=(1+2+2^2)(1+5)$

$=7\times6=42$

09 답 90

40을 소인수분해하면 $40=2^3\times5$

2^3의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3

5의 양의 약수는 1, 5

40의 양의 약수의 합은 2^3의 약수와 5의 약수의 합의 곱이므로

(약수의 총합)$=(1+2+2^2+2^3)(1+5)$

$=15\times6=90$

10 답 144

70을 소인수분해하면 $70=2\times5\times7$

2의 양의 약수는 1, 2

5의 양의 약수는 1, 5

7의 양의 약수는 1, 7

70의 양의 약수의 총합은 2의 양의 약수, 5의 양의 약수, 7의 양의 약수의 각각의 합의 곱이므로

(약수의 총합)$=(1+2)(1+5)(1+7)$

$=3\times6\times8=144$

11 답 403

144를 소인수분해하면 $144=12\times12=2^4\times3^2$

2^4의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4$

3^2의 약수는 $1,\ 3,\ 3^2$

144의 양의 약수의 합은 2^4의 약수와 3^2의 약수의 합의 곱이므로

$$(\text{약수의 총합})=(1+2+2^2+2^3+2^4)\times(1+3+3^2)$$
$$=31\times13=403$$

12 답 (1) $(x+1)\times(y+1)\times(z+1)$

(2) $c^0+c^1+c^2+\cdots+c^z$

06 도로망에서의 방법의 수

▸ p.245

01 답 6가지 02 답 8가지 03 답 24가지

04 답 12

A지점에서 출발하여 D지점으로 가는 방법은

A → B → D 또는 A → C → D의 2가지이다.

(i) A → B → D로 가는 방법

곱의 법칙에 의하여 $3\times2=6$(가지)이다.

(ii) A → C → D로 가는 방법

곱의 법칙에 의하여 $2\times3=6$(가지)이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $6+6=12$(가지)이다.

05 답 12

B지점에서 출발하여 C지점으로 가는 방법은

B → A → C 또는 B → D → C의 2가지이다.

(i) B → A → C로 가는 방법

곱의 법칙에 의하여 $3\times2=6$(가지)이다.

(ii) B → D → C로 가는 방법

곱의 법칙에 의하여 $2\times3=6$(가지)이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $6+6=12$(가지)이다.

06 답 4가지

현지가 집에서 서점으로 가는 방법의 수는 2가지, 서점에서 학교로 가는 방법의 수는 2가지이다.

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$2\times2=4$(가지)이다.

07 답 6가지

현지가 집에서 학교로 가는 방법의 수는 3가지, 학교에서 서점으로 가는 방법의 수는 2가지, 서점에서 다시 학교로 가는데 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않으므로 돌아가는 방법의 수는 1가지 뿐이다.

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

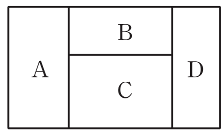
$3\times2\times1=6$(가지)이다.

08 답 (1) 곱의 법칙 (2) 합의 법칙

07 도형에 색칠하는 방법의 수

▸ p.246

01 답 6

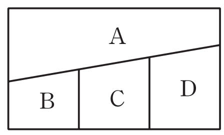


B에 칠할 수 있는 색은 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 1가지,

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 1가지이다.

따라서 칠하는 경우의 수는 $3\times2\times1\times1=6$(가지)이다.

02 답 48

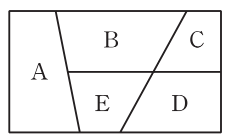


A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지,

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 칠하는 경우의 수는 $4\times3\times2\times2=48$(가지)이다.

03 답 780



B에 칠할 수 있는 색은 5가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지,

(i) C와 E에 같은 색을 칠하는 경우

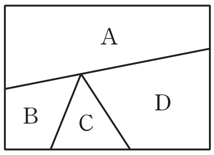
D에 칠할 수 있는 색은 C와 E에 칠한 색을 제외한 4가지이므로 $5\times4\times3\times1\times4=240$(가지)

(ii) C와 E에 다른 색을 칠하는 경우

C에 칠할 수 있는 색은 B와 E에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 C와 E에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 $5\times4\times3\times3\times3=540$(가지)

(i), (ii)에서 $240+540=780$(가지)

04 답 84



(ⅰ) A, C가 같은 색인 경우

A, C에 칠할 수 있는 색은 4가지,

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한

$4-1=\boxed{3}$(가지)

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한

$4-1=\boxed{3}$(가지)

⇨ $4\times\boxed{3}\times\boxed{3}=\boxed{36}$(가지)

(ⅱ) A, C가 다른 색인 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지,

C에 칠할 수 있는 색은 $4-1=\boxed{3}$(가지)

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한

$4-2=\boxed{2}$(가지)

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한

$4-2=\boxed{2}$(가지)

⇨ $4\times\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{2}=48$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는 $\boxed{36}+48=\boxed{84}$(가지)

05 답 (1) 많은 (2) 줄여가며

08 지불 방법과 지불 금액의 수

▸ p.247

01 답 1) 23 2) 23

1) 100원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개의 2가지

10원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때, 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는 $3\times2\times4-1=23$

2) 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원의 3가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은 0원, 50원의 2가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원의 4가지

이때, 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $3\times2\times4-1=23$

02 답 1) 23 2) 19

1) 100원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개의 2가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개의 3가지

10원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때, 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는 $2\times3\times4-1=23$

2) 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원의 2가지 ⋯ ㉠

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원의 3가지 ⋯ ㉡

그런데 ㉠, ㉡에서 100원을 만들 수 있는 경우가 중복되므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸어 생각해야 한다.

즉, 50원짜리 동전 4개, 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수를 구하면 된다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, 150원, 200원의 5가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원으로 4가지

이때, 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $5\times4-1=19$

03 답 1) 111 2) 87

1) 50000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, ⋯, 6개의 7가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때, 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는 $4\times7\times4-1=111$

2) 50000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은 0원, 50000원, 100000원, 150000원의 4가지 ⋯ ㉠

10000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은 0원, 10000원, 20000원, ⋯, 60000원의 7가지 ⋯ ㉡

그런데 ㉠, ㉡에서 50000원을 만들 수 있는 경우가 중복되므로 10000원짜리 지폐 21장으로 바꾸어 생각해야 한다.

즉, 10000원짜리 지폐 21장, 1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액의 수를 구하면 된다.

10000원짜리 지폐 21장으로 지불할 수 있는 금액은 0원, 10000원, 20000원, ⋯, 210000원의 22가지

1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원, 3000원의 4가지

이때, 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는

금액의 수는 $22\times4-1=87$

04 답 1) 111 2) 87

1) 50000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, $\cdots$, 6개의 7가지

이때, 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는 $4\times4\times7-1=111$

2) 5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은 0원, 5000원, 10000원, 15000원의 4가지 $\cdots$ ㉠

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은 0원, 1000원, 2000원, $\cdots$, 6000원의 7가지 $\cdots$ ㉡

그런데 ㉠, ㉡에서 5000원을 만들 수 있는 경우가 중복되므로 1000원짜리 지폐 21장으로 바꾸어 생각해야 한다.

즉, 50000원짜리 지폐 3장, 1000원짜리 지폐 21장으로 지불할 수 있는 금액의 수를 구하면 된다.

50000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50000원, 100000원, 150000원의 4가지

1000원짜리 지폐 21장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원$\cdots$, 21000원의 22가지

이때, 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불하는 금액의 수는 $4\times22-1=87$

05 답 (1) 1 (2) $(x+1)(y+1)(z+1)$ (3) 작은

단원 마무리 평가 [01~08]

▸문제편 p.248~250

01 답 ①

서로 다른 브랜드의 고소한 맛 과자 3개, 짭조롬한 맛 과자 4개, 달달한 맛 과자 5개로 전체 $3+4+5=12$(개)가 있으므로 과자 1개를 선택하는 경우의 수는 12가지이다.

02 답 ②

두 개의 주사위의 눈을 각각 a, b라 하고, 순서쌍 (a, b)로 나타내보자.

(i) 눈의 합이 2가 되는 경우 : $(1, 1)$의 1가지

(ii) 눈의 합이 4가 되는 경우 : $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $1+3=4$(가지)이다.

03 답 ②

(i) 두 주사위의 눈의 수의 합이 8인 경우는

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$ ← 5가지

(ii) 두 주사위의 눈의 수의 합이 9인 경우는

$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$ ← 4가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $5+4=9$(가지)

04 답 ②

12의 약수인 경우는 1, 2, 3, 4, 6, 12의 6가지,

20의 약수인 경우는 1, 2, 4, 5, 10, 20의 6가지,

12와 20의 공약수인 경우는 1, 2, 4의 3가지이므로

구하는 경우의 수는 $6+6-3=9$(가지)

05 답 ⑤

서로 다른 수학책 1권을 택하는 경우는 5가지,

서로 다른 영어책 1권을 택하는 경우는 3가지,

서로 다른 국어책 1권을 택하는 경우는 2가지이므로

구하는 경우의 수는 $5\times3\times2=30$(가지)

06 답 9가지

네 명의 학생을 A, B, C, D라 하고, 각 학생의 모자를 a, b, c, d라 하자. 자기 모자가 아닌 모자를 쓴 경우를 구해보면 다음과 같다.

A B C D

b — a — d — c
b — c — a — d (×)
b — c — d — a
b — d — a — c

c — a — b — d (×)
c — a — d — b
c — d — a — b
c — d — b — a

d — a — b — c
d — c — a — b
d — c — b — a

따라서 구하는 경우의 수는 9가지이다.

07 답 ③

$(a+b)$의 항의 개수는 2개,

$(x+y+z)$의 항의 개수는 3개이므로

전개한 다항식의 항의 개수는 $2\times3=6$(개)이다.

08 답 ②

방정식 $x+2y=6$에서

계수가 큰 문자 y의 값에 자연수 1부터 차례로 대입하여 보자.

$x=6-2y$, $x\geq1$, $y\geq1$이므로

(i) $y=1$일 때,

$x=6-2=4$

따라서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(4, 1)$로 1가지이다.

(ii) $y=2$일 때,

$x=6-4=2$

따라서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(2, 2)$로 1가지이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $1+1=2$(가지)

09 답 ①

계수가 큰 문자 x의 값을 기준으로 경우를 나누면

(i) $x=0$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(0, 9)$

(ii) $x=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 6)$

(iii) $x=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 3)$

(iv) $x=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(3, 0)$

(v) $x=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(4, -3)$

⋮

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 4이다.

10 답 ②

방정식 $5x+6y+9z=30$에서 계수가 큰 문자 z의 값이 자연수일 때를 기준으로 경우를 나누면

(i) $z=1$일 때, $5x+6y+9=30$, $5x+6y=21$이고,

이때, 이 방정식에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

① $y=1$일 때, $5x+6=21$, $5x=15$ $\quad\therefore x=3$

따라서 순서쌍 (x, y, z)는 $(3, 1, 1)$로 1개다.

② $y=2$일 때, $5x+12=21$, $5x=9$ $\quad\therefore x=\frac{9}{5}$

그러나 x의 값이 자연수가 아니므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는 0개다.

③ $y=3$일 때, $5x+18=21$, $5x=3$ $\quad\therefore x=\frac{3}{5}$

그러나 x의 값이 자연수가 아니므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는 0개다.

(ii) $z=2$일 때, $5x+6y+18=30$, $5x+6y=12$이고,

이때, 이 방정식에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

① $y=1$일 때, $5x+6=12$, $5x=6$ $\quad\therefore x=\frac{6}{5}$

그러나 x의 값이 자연수가 아니므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는 0개다.

② $y=2$일 때, $5x+12=12$, $5x=0$ $\quad\therefore x=0$

따라서 순서쌍 (x, y, z)는 $(0, 2, 2)$로 1개다.

(iii) $z=3$일 때, $5x+6y+27=30$, $5x+6y=3$이고,

이를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는 0개다.

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $1+1=2$(개)이다.

11 답 ③

부등식 $4x+7y<29$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

(i) $y=1$일 때,

$4x+7<29$, $4x<22$ $\quad\therefore x<\frac{22}{4}=5.\times\times\times$

이를 만족시키는 x의 값은 1, 2, …, 5이므로

순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$로 5개다.

(ii) $y=2$일 때,

$4x+14<29$, $4x<15$ $\quad\therefore x<\frac{15}{4}=3.\times\times\times$

이를 만족시키는 x의 값은 1, 2, 3이므로

순서쌍 (x, y)는 $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$로 3개다.

(iii) $y=3$일 때,

$4x+21<29$, $4x<8$ $\quad\therefore x<2$

이를 만족시키는 x의 값은 1뿐이므로

순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$으로 1개다.

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $5+3+1=9$(개)이다.

12 답 ②

부등식 $8x+9y\leq31$에서 계수가 큰 문자 y의 값을 기준으로 경우를 나누면

(i) $y=0$일 때,

$8x\leq31$ $\quad\therefore x=\frac{31}{8}=3.\times\times\times$

이를 만족시키는 x의 값은 0, 1, 2, 3이므로

순서쌍 (x, y)는 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$으로 4개다.

(ii) $y=1$일 때,

$8x+9\leq31$, $8x\leq22$ $\quad\therefore x=\frac{22}{8}=2.\times\times\times$

이를 만족시키는 x의 값은 0, 1, 2이므로

순서쌍 (x, y)는 $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$로 3개다.

(iii) $y=2$일 때,

$8x+18\le31,\ 8x\le13 \qquad \therefore x=\frac{13}{8}=1.\times\times\times$

이를 만족시키는 x의 값은 0, 1이므로

순서쌍 (x, y)는 $(0, 2)$, $(1, 2)$로 2개다.

(iii) $y=3$일 때,

$8x+27\le31,\ 8x\le4 \qquad \therefore x=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

이를 만족시키는 x의 값은 0뿐이므로

순서쌍 (x, y)는 $(0, 3)$으로 1개다.

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $3+2+1=6$(개)다.

13 답 ③

60을 소인수분해하면 $60=2^2\times3\times5$

2^2의 양의 약수는 1, 2, 2^2의 3개

3의 양의 약수는 1, 3의 2개

5의 양의 약수는 1, 5의 2개

따라서 구하는 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times2\times2=12$(개)

14 답 ③

72를 소인수분해하면 $72=2^3\times3^2$이다.

2^3의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3

3^2의 양의 약수는 1, 3, 3^2

72의 양의 약수의 합은 2^3의 약수와 3^2의 약수의 합의 곱이므로

$$\begin{aligned}(\text{약수의 총합})&=(1+2+2^2+2^3)\times(1+3+3^2)\\&=15\times13=195\end{aligned}$$

15 답 ④

A지점에서 B지점으로 가는 경우는 2가지,

B지점에서 C지점으로 가는 경우는 3가지,

C지점에서 D지점으로 가는 경우는 3가지이므로

구하는 경우의 수는 $2\times3\times3=18$(가지)

16 답 19

A지점에서 출발하여 D지점으로 가는 경우는

A → B → D 또는 A → C → D의 2가지이다.

(i) A → B → D로 가는 경우

곱의 법칙에 의하여 $3\times3=9$(가지)이다.

(ii) A → C → D로 가는 경우

곱의 법칙에 의하여 $2\times5=10$(가지)이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $9+10=19$(가지)이다.

17 답 180

지우와 민우가 중간 지점을 겹치지 않고 A지점에서 출발하여 D지점으로 가는 경우는

지우가 A → B → D로 이동하고, 민우는 A → C → D로 이동하는 경우와

지우가 A → C → D로 이동하고, 민우는 A → B → D로 이동하는 경우의 2가지이다.

(i) 지우 : A → B → D, 민우 : A → C → D

지우가 가고 이어서 민우가 가야 하므로

곱의 법칙에 의하여 $9\times10=90$(가지)이다.

(ii) 지우 : A → C → D, 민우 : A → B → D

지우가 가고 이어서 민우가 가야 하므로

곱의 법칙에 의하여 $10\times9=90$(가지)이다.

(i)과 (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여

구하는 경우의 수는 $90+90=180$(가지)이다.

18 답 ②

A에 색을 칠하는 경우의 수는 6가지,

B에 색을 칠하는 경우의 수는 A에 칠한 색을 제외한 5가지,

C에 색을 칠하는 경우의 수는 A, B에 칠한 색을 제외한 4가지,

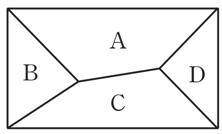
D에 색을 칠하는 경우의 수는 A, C에 칠한 색을 제외한 4가지,

E에 색을 칠하는 경우의 수는 A, D에 칠한 색을 제외한

4가지이므로 구하는 경우의 수는

$6\times5\times4\times4\times4=30\times4^3$ (가지)

19 답 180



A에 칠할 수 있는 색은 5가지

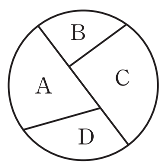
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 구하는 방법의 수는 $5\times4\times3\times3=180$(가지)이다.

20 답 48



A에 칠할 수 있는 색은 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지,

B와 D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times3\times2\times2=48$(가지)

21 답 ①

50원짜리 동전 3개로 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지 방법으로

지불할 수 있고, 10원짜리 동전 6개로 0개, 1개, 2개, 3개, 4개,

5개, 6개의 7가지 방법으로 지불할 수 있다.

그런데 모두 0개를 지불하는 것은 제외해야 하므로

구하는 지불 방법의 수는 $4\times7-1=27$(가지)

Ⅳ-2 순열과 조합

09 순열
▸ p.251

01 답 ${}_5P_2$ **02** 답 ${}_{14}P_4$ **03** 답 ${}_5P_5$

04 답 ${}_7P_3$ **05** 답 ${}_{60}P_{59}$ **06** 답 ${}_8P_1$

07 답 ${}_3P_3$ **08** 답 ${}_4P_2$ **09** 답 ${}_4P_3$

10 답 순열, ${}_nP_r$

10 순열의 수
▸ p.252~253

01 답 120

${}_6P_3=6\times5\times4=120$

02 답 1

${}_8P_0=1$

03 답 120

${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$

04 답 120

${}_5P_5=5\times4\times3\times2\times1=120$

05 답 336

${}_8P_3=8\times7\times6=336$

06 답 24

${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$

07 답 6

$3!=3\times2\times1=6$

08 답 5

$5\times0!=5\times1=5$

09 답 48

$2!\times{}_4P_3=(2\times1)\times(4\times3\times2)=48$

10 답 180

${}_6P_2\times3!=(6\times5)\times(3\times2\times1)=180$

11 답 120

$$\frac{10!}{3!\times7!}=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)\times(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)}$$
$$=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

12 답 42

$$\frac{7!}{5!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1}=42$$

13 답 6

$n(n-1)=30=6\times5 \qquad \therefore n=6$

14 답 10

$n(n-1)=90=10\times9 \qquad \therefore n=10$

15 답 6

$n(n-1)(n-2)=120=6\times5\times4 \qquad \therefore n=6$

16 답 7

$n(n-1)(n-2)=5n(n-1) \Rightarrow n-2=5$

$\therefore n=7$

17 답 8

$n(n-1)(n-2)(n-3)=30n(n-1)$

$(n-2)(n-3)=30=6\times5 \qquad \therefore n=8$

18 답 7

$24n(n-1)(n-2)=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-5)$

$(n-3)(n-4)(n-5)=24=4\times3\times2$

$\therefore n=7$

19 답 30

6명 중 순서를 고려해서 2명을 뽑아 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_2=6\times5=30$(가지)이다.

20 답 120

6명 중 순서를 고려해서 3명을 뽑아 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_3=6\times5\times4=120$(가지)이다.

21 답 840

7개 중 순서를 고려해서 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_7P_4=7\times6\times5\times4=840$(가지)이다.

22 답 24

4개 중 순서를 고려해서 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$(가지)이다.

23 답 (1) $n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$

(2) n, $n!$, $n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

(3) ① $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ ② $n!$ ③ 1 ④ 1

11 특정한 조건이 있는 순열

▸ p.254~256

01 답 1) **5 / 5, 120** 2) **3, 6** 3) **120, 3, 360**

02 답 1) **4 / 4, 24** 2) **4, 24** 3) **24, 24, 576**

03 답 **144**

여자 3명을 하나로 생각하여 남자 3명과 나열하면 4명을 일렬로 세우는 것과 같으므로

이때의 경우의 수는 $4!$가지이고, 여자들끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 $3!$가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $4!\times3!=144$(가지)이다.

04 답 **72**

여자 또는 남자가 맨 앞에 서는 경우는 2가지이다.

여 남 여 남 여 남
남 여 남 여 남 여

이때, 남자 3명 또는 여자 3명을 세우는 경우의 수는 각각

$3!=6$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times6\times6=72$(가지)이다.

05 답 **144**

양 끝에 남자를 세우는 경우의 수가

${}_3P_2=3\times2=6$(가지)이고, 그 각각에 대하여 남은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$(가지)이다.

06 답 **48**

부모님을 포함한 5명의 가족 중 부모님을 하나로 생각하면 가족 4명을 일렬로 세우는 것과 같으므로 경우의 수는 $4!$

이때, 부모님끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

따라서 구하는 경우의 수는 $4!\times2!=48$(가지)이다.

07 답 **144**

orange에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열할 때

모음 o, a, e의 3개를 하나로 생각하면 4개의 문자를 일렬로 세우는 것과 같으므로 경우의 수는 $4!$

이때, 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$

따라서 구하는 경우의 수는 $4!\times3!=144$(가지)이다.

08 답 **576**

1부터 7까지의 자연수를 일렬로 나열할 때, 홀수 4개를 하나로 생각하면 4개의 수를 일렬로 세우는 것과 같으므로

경우의 수는 $4!$

이때, 홀수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!$

따라서 구하는 경우의 수는 $4!\times4!=576$(가지)이다.

09 답 **432**

1학년, 2학년, 3학년을 각각 한 묶음으로 생각하면 이들을 배열하는 경우의 수는 $3!$가지이다.

한편, 각 학년에서 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각

$3!$, $3!$, $2!$이므로 이때의 경우의 수는 $3!\times3!\times2!$

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times3!\times3!\times2!=432$(가지)이다.

10 답 **72**

남자를 한 묶음, 여자를 한 묶음으로 생각하면 이들을 배열하는 경우의 수는 2가지이다.

한편, 남자, 여자 모두 각각 자리를 서로 바꿀 수 있으므로

이때의 경우의 수는 $3!\times3!$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times3!\times3!=72$(가지)이다.

11 답 **96**

모음과 자음을 각각 한 묶음으로 생각하면 이들을 배열하는 경우의 수는 2가지이다.

한편, 모음끼리, 자음끼리 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\times4!$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times2!\times4!=96$(가지)이다.

12 답 **24**

과일과 야채를 각각 한 묶음으로 생각하면 이들을 배열하는 경우의 수는 2가지이다.

한편, 과일끼리, 야채끼리 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!\times2!$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times3!\times2!=24$(가지)이다.

13 답 **72**

홀수와 짝수를 각각 한 묶음으로 생각하면 이들을 배열하는 경우의 수는 2가지이다.

한편, 홀수끼리, 짝수끼리 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!\times3!$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times3!\times3!=72$(가지)이다.

14 답 **1728**

소설책, 잡지, 만화책을 각각 한 묶음으로 생각하면 이들을 배열하는 경우의 수는 $3!$가지이다.

한편, 소설책끼리, 잡지끼리, 만화책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!\times3!\times4!$

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times2!\times3!\times4!=1728$(가지)이다.

15 답 1) 3, 6　2) 4, 4, 24　3) 6, 24, 144

16 답 1) 4, 24　2) 5, 3, 60　3) 24, 60, 1440

17 답 72

A, D, E가 먼저 일렬로 서는 경우의 수는 $3!$

∨Ⓐ∨Ⓓ∨Ⓔ∨

A, D, E를 세운 사이사이와 양 끝의 4자리에 B, C를 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2$

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times{}_4P_2=6\times12=72$

18 답 144

홀수가 3개, 짝수가 3개이다.

홀수를 먼저 일렬로 세우면 $3!$

홀수를 세운 사이사이와 양 끝의 4자리에 짝수를 세우는 경우의 수는 ${}_4P_3$

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times{}_4P_3=6\times24=144$

19 답 3600

자음이 5개, 모음이 2개이다.

자음을 먼저 일렬로 세우면 $5!$

자음을 세운 사이사이와 양 끝의 6자리에 모음을 세우는 경우의 수는 ${}_6P_2$

따라서 구하는 경우의 수는

$5!\times{}_6P_2=120\times30=3600$

20 답 864

초등학생을 한 묶음으로 생각하고, 초등학생 1명과 고등학생 2명이 먼저 일렬로 서면 $3!$

이때, 초등학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$

한편, 초등학생과 고등학생을 세운 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 중학생 4명이 서는 경우의 수는 ${}_4P_4$

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times3!\times{}_4P_4=6\times6\times24=864$

21 답 **(1) 한 묶음, 곱한다.　(2) 사이사이, 끝, 곱한다.**

12 여러 가지 경우의 순열의 수

▸ p.257~259

01 답 12

양 끝에 r과 u가 오는 경우 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 그 경우의 수는 $2!$

나머지 3개의 문자를 나열하는 경우의 수는 $3!$

따라서 구하는 경우의 수는 $2!\times3!=12$(가지)이다.

02 답 24

v와 i 사이에 2개의 문자가 들어 있는 경우는

_ v _ _ i　　v _ _ i _

_ i _ _ v　　i _ _ v _

의 $\boxed{4}$가지 경우가 있다.

각 경우마다 남은 3자리에 남은 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$

따라서 구하는 경우의 수는 $\boxed{4}\times3!=\boxed{24}$(가지)이다.

03 답 48

s와 r을 한 묶음으로 생각하고 문자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$

s와 r이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는 $4!\times2=48$(가지)이다.

04 답 12

위원장으로 반드시 A가 뽑혀야 하므로 A를 고정시키고 나머지 4명 중에서 2명을 뽑아 나열하는 것과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4P_{\boxed{2}}=4\times\boxed{3}=\boxed{12}$(가지)이다.

05 답 12

서기에는 C가 뽑혀야 하므로 C를 고정시키고 나머지 4명 중에서 2명을 뽑아 나열하는 것과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4P_2=4\times3=12$(가지)이다.

06 답 3

위원장은 A, 부위원장에는 E가 뽑혀야 하므로 A, E를 고정시키고 나머지 3명 중에서 1명을 뽑아 나열하는 것과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3P_1=3$(가지)이다.

07 답 84

5개의 문자를 일렬로 나열하는 전체 경우의 수는

$5!=120$(가지)

모음은 O, E, A의 3개이므로 양 끝에 모음이 오도록 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2\times3!=36$(가지)

따라서 적어도 한쪽 끝에 자음이 오도록 하는 경우의 수는

$120-36=84$(가지)이다.

08 답 36

7명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7P_2=42$(가지)

회장과 부회장을 남학생 중에서 모두 뽑는 경우의 수는

${}_3P_2=6$(가지)

따라서 적어도 한 명을 여학생으로 뽑는 경우의 수는

$42-6=36$(가지)이다.

09 답 108

적어도 한 쪽 끝에 자음이 오는 경우는 전체 경우의 수에서 양 쪽 끝에 모두 모음이 오는 경우의 수를 빼면 된다.

전체 경우의 수는 $5!=120$이고,

양 쪽 끝이 a, e인 경우에 대하여 서로 자리를 바꾸는

경우의 수는 2

남은 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$

이므로 양 쪽 끝에 모두 모음이 오는 경우의 수는 $2\times3!=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $120-12=108$(가지)이다.

10 답 72

적어도 어린이 2명 사이에 어른 한 명이 서는 경우는 전체 경우의 수에서 어린이끼리 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

전체 경우의 수는 $5!=120$이고,

어린이를 한 묶음으로 보면 4명이 일렬로 서는 경우의 수는 $4!$

어린이끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

이므로 어린이끼리 이웃하는 경우의 수는 $4!\times2!=48$

따라서 구하는 경우의 수는 $120-48=72$(가지)이다.

11 답 18번째

ㅁ ___ 꼴인 문자열의 개수는 $3!$

ㅂ ___ 꼴인 문자열의 개수는 $\boxed{3!}$

ㅅㅁ __ 꼴인 문자열의 개수는 $2!$

ㅅㅂ __ 꼴인 문자열의 개수는 $\boxed{2!}$

이때, $3!+\boxed{3!}+2!+\boxed{2!}=16$이므로

ㅅㅇ __ 꼴인 문자열 중 ㅅㅇㅁㅂ이 17번째,

ㅅㅇㅂㅁ이 $\boxed{18}$번째이다.

12 답 61번째

ㄱ ____ 꼴인 문자열의 개수는 $4!$

ㄴ ____ 꼴인 문자열의 개수는 $4!$

ㄷㄱ ___ 꼴인 문자열의 개수는 $3!$

ㄷㄴ ___ 꼴인 문자열의 개수는 $3!$

이때, $4!+4!+3!+3!=60$이므로

ㄷㄹ ___ 꼴인 문자열 중 첫 번째인 ㄷㄹㄱㄴㅁ이

61번째이다.

13 답 ㄷㅁㄹㅇㅅㅂ

ㄷㄹ ____ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

ㄷㅁ ____ 꼴인 문자열을 순서대로 나열하면

25번째는 ㄷㅁㄹㅂㅅㅇ,

26번째는 ㄷㅁㄹㅂㅇㅅ,

27번째는 ㄷㅁㄹㅅㅂㅇ,

28번째는 ㄷㅁㄹㅅㅇㅂ,

29번째는 ㄷㅁㄹㅇㅂㅅ,

30번째는 ㄷㅁㄹㅇㅅㅂ이다.

수력 UP

ㄷ _____ 꼴인 문자열의 개수는 $5!=120$이므로 30번째로 나타나는 문자열을 구하려면 도움이 되지 않는다.
따라서 문자 2개를 고정한 ㄷㄹ ____ 꼴의 문자열의 개수를 구하는 것이다.

14 답 ㅎㅋㅍㅊㅌ

ㅊ ____ 꼴인 문자열의 개수는 $4!$

ㅋ ____ 꼴인 문자열의 개수는 $4!$

ㅌ ____ 꼴인 문자열의 개수는 $4!$

ㅍ ____ 꼴인 문자열의 개수는 $4!$

ㅎㅊ ___ 꼴인 문자열의 개수는 $3!$

ㅎㅋㅌ __ 꼴인 문자열의 개수는 $2!$

이때, $4!+4!+4!+4!+3!+2!=104$이므로

105번째 문자열은 ㅎㅋㅍㅊㅌ이다.

15 답 48

먼저 첫 번째 자리에는 0이 올 수 없으므로 0을 제외한

$\boxed{4}$가지가 올 수 있다.

나머지 두 자리에는 첫 번째 자리에 쓰인 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 2개를 뽑아 나열하면 되므로

이 경우의 수는 ${}_4P_2=12$(가지)이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\boxed{4}\times12=\boxed{48}$(가지)이다.

16 답 96

먼저 첫 번째 자리에는 0이 올 수 없으므로 0을 제외한 4가지가 올 수 있다.

나머지 세 자리에는 첫 번째 자리에 쓰인 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 3개를 뽑아 나열하면 되므로

${}_4P_3=4\times3\times2=24$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times24=96$(가지)이다.

17 답 18

홀수가 되려면 일의 자리에는 1, 3 중 어느 하나가 오면 되므로 이때의 경우의 수는 2가지, 백의 자리에는 0이 오면 안 되고, 일의 자리에 쓰인 숫자가 올 수 없으므로 3가지가 올 수 있다. 나머지 자리에는 백의 자리, 일의 자리에 쓰인 수를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times3\times3=18$(가지)이다.

18 답 60

(i) 일의 자리에 0이 쓰인 경우
1, 2, 3, 4 중에 3개를 뽑아 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 ${}_4P_3=4\times3\times2=24$(가지)

(ii) 일의 자리에 2가 쓰인 경우
천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 0, 2를 제외한 3가지가 올 수 있고, 나머지 자리에는 2와 천의 자리에 쓰인 숫자를 제외한 3가지 중 2개를 뽑아 나열하면 된다.
이때의 경우의 수는 $3\times{}_3P_2=3\times3\times2=18$(가지)

(iii) 일의 자리에 4가 쓰인 경우
(ii)와 같은 방법으로 구하면 18가지이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$24+18+18=60$(가지)이다.

19 답 54

(i) 35□□□인 경우 : 1, 2, 4를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $3!=6$(가지)이다.

(ii) 4□□□□인 경우 : 1, 2, 3, 5를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $4!=24$(가지)이다.

(iii) 5□□□□인 경우 : (ii)의 경우와 같은 방법으로 구하면 24가지이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$6+24+24=54$(가지)이다.

20 답 14

5의 배수는 일의 자리의 수가 5이어야 한다.

(i) 1□□□5인 경우 : 2, 3, 4를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $3!=6$(가지)이다.

(ii) 2□□□5인 경우 : 1, 3, 4를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $3!=6$(가지)이다.

(iii) 31□□5인 경우 : 2, 4를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $2!=2$(가지)이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$6+6+2=14$(가지)이다.

21 답 2280

(i) 40 _ _ _ _ _ 인 경우 : 1, 2, 3, 5, 6을 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $5!=120$(가지)이다.

(ii) 3 _ _ _ _ _ _ 인 경우 : 0, 1, 2, 4, 5, 6을 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $6!=720$(가지)이다.

(iii) 2 _ _ _ _ _ _ 인 경우 : 0, 1, 3, 4, 5, 6을 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $6!=720$(가지)이다.

(iv) 1 _ _ _ _ _ _ 인 경우 : 0, 2, 3, 4, 5, 6을 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $6!=720$(가지)이다.

(i)~(iv)에서 4100000보다 작은 수의 개수는
$120+720+720+720=2280$

22 답 96

4의 배수는 가장 끝에 두 자리수가 00이거나 4의 배수인 수이므로 가능한 경우는 끝에 두 자리가 04이거나 40이다.
따라서 5000000보다 큰 4의 배수의 개수는

(i) 5 _ _ _ _ 04인 경우 : 1, 2, 3, 6을 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $4!=24$(가지)이다.

(ii) 5 _ _ _ _ 40인 경우 : 1, 2, 3, 6을 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $4!=24$(가지)이다.

(iii) 6 _ _ _ _ 04인 경우 : 1, 2, 3, 5를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $4!=24$(가지)이다.

(iv) 6 _ _ _ _ 40인 경우 : 1, 2, 3, 5를 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $4!=24$(가지)이다.

(i)~(iv)에서 5000000보다 큰 4의 배수의 개수는
$24+24+24+24=96$(가지)이다.

23 답 **(1) 먼저, 고정시킨 후, 곱한다. (2) 전체 경우, 뺀다.**

13 조합

▸ p.260

01 답 ${}_5C_2$

02 답 ${}_6C_4$

03 답 ${}_{10}C_3$

04 답 ${}_{15}C_9$

05 답 ${}_{10}C_4$

06 답 ${}_8C_2$

07 답 ${}_3C_2$

08 답 ${}_5C_3$

09 답 ${}_6C_4$

10 답 ${}_3C_2$

11 답 **순서, 조합,** ${}_nC_r$

14 조합의 수 ▸ p.261~263

01 답 3

$${}_3C_1=\frac{3!}{1!2!}=3$$

02 답 3

$${}_3C_2=\frac{3!}{2!1!}=3$$

03 답 6

$${}_4C_2=\frac{4!}{2!2!}=6$$

04 답 10

$${}_5C_3=\frac{5!}{3!2!}=10$$

05 답 1

$${}_{11}C_{11}=1$$

06 답 6

$$\frac{{}_4P_2}{2!}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

07 답 10

$$\frac{{}_5P_3}{3!}={}_5C_3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$$

[다른 풀이]

$$\frac{{}_5P_3}{3!}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$$

수력 UP

조합의 수는 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ (0\le r\le n)$

08 답 1

$${}_7C_0\times{}_{10}C_{10}=1\times1=1$$

09 답 20

$$\frac{6!}{3!3!}={}_6C_3=\frac{{}_6P_3}{3!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

수력 UP

조합의 수는 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ (0\le r\le n)$

10 답 70

$$\frac{8\times7\times6\times5}{4!}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

11 답 7

$${}_nC_1=n=7$$

12 답 5

${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2\times1}=10 \Rightarrow n(n-1)=20=5\times4$

$\therefore n=5$

[다른 풀이]

${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2\times1}=10 \Rightarrow n^2-n=20$

$n^2-n-20=0,\ (n+4)(n-5)=0$

$\therefore n=5\ (\because n>0)$

13 답 8

${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2\times1}=28 \Rightarrow n(n-1)=56=8\times7$

$\therefore n=8$

14 답 5

${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=10$

$n(n-1)(n-2)=5\times4\times3 \qquad \therefore n=5$

15 답 4

${}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2$이므로

$\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=15 \Rightarrow (n+2)(n+1)=6\times5$

$\therefore n=4$

16 답 5

${}_nC_2+{}_nC_3=20$이므로

$\frac{n(n-1)}{2\times1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=20$

$3n(n-1)+n(n-1)(n-2)=120$

$n(n-1)(n+1)=120$

$(n+1)n(n-1)=6\times5\times4 \qquad \therefore n=5$

17 답 15가지

${}_6C_2=\frac{{}_6P_2}{2!}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$(가지)

18 답 120가지

${}_{10}C_3=\frac{{}_{10}P_3}{3!}=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$(가지)

19 답 10가지

${}_5C_2=\frac{{}_5P_2}{2!}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$(가지)

20 답 56가지

${}_8C_3=\frac{{}_8P_3}{3!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$(가지)

21 답 **28가지**

$${}_8C_2=\frac{{}_8P_2}{2!}=\frac{8\times7}{2\times1}=28(\text{가지})$$

22 답 **9**

${}_nC_4={}_nC_5$에서 ${}_nC_{n-4}={}_nC_5$

$n-4=5 \qquad \therefore n=9$

23 답 **10**

${}_nC_7={}_nC_3$에서 ${}_nC_{n-7}={}_nC_3$

$n-7=3 \qquad \therefore n=10$

24 답 **7**

${}_nC_2={}_nC_5$에서 ${}_nC_{n-2}={}_nC_5$

$n-2=5 \qquad \therefore n=7$

25 답 **7**

${}_{10}C_3={}_{10}C_r$에서 ${}_{10}C_3={}_{10}C_{10-r}$

$10-r=3 \qquad \therefore r=7$

26 답 **4**

${}_7C_r={}_7C_{r-1}$에서 ${}_7C_{7-r}={}_7C_{r-1}$

$7-r=r-1,\ 2r=8 \qquad \therefore r=4$

27 답 **6**

${}_8C_r={}_8C_{r-4}$에서 ${}_8C_{8-r}={}_8C_{r-4}$

$8-r=r-4,\ 2r=12 \qquad \therefore r=6$

28 답 **4**

${}_{10}C_{r-2}={}_{10}C_{3r-4}$에서 ${}_{10}C_{12-r}={}_{10}C_{3r-4}$

$12-r=3r-4,\ 4r=16 \qquad \therefore r=4$

29 답 **2 또는 3**

(i) ${}_{15}C_{2r+3}={}_{15}C_{9-r}$에서

$2r+3=9-r,\ 3r=6 \qquad \therefore r=2$

(ii) ${}_{15}C_{2r+3}={}_{15}C_{9-r}$에서 ${}_{15}C_{2r+3}={}_{15}C_{6+r}$

$2r+3=6+r \qquad \therefore r=3$

(i), (ii)에서 $r=2$ 또는 $r=3$

30 답 **6**

$2\times{}_nC_4={}_nP_2$에서

$$\cancel{2}\times\frac{\cancel{n(n-1)}(n-2)(n-3)}{4\times3\times\cancel{2}\times1}=\cancel{n(n-1)}$$

$(n-2)(n-3)=12 \Rightarrow (n-2)(n-3)=4\times3$

$\therefore n=6$

[다른 풀이]

$2\times{}_nC_4={}_nP_2$에서

$$2\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=n(n-1)$$

$(n-2)(n-3)=12,\ n^2-5n-6=0$

$(n+1)(n-6)=0 \qquad \therefore n=6\ (\because n>0)$

31 답 **5**

${}_nC_2=\frac{{}_nP_3}{6}$에서

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6},\ 1=\frac{n-2}{3}$$

$n-2=3 \qquad \therefore n=5$

32 답 **6**

${}_nC_3\times18={}_nP_4$에서

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}\times18=n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$3=n-3 \qquad \therefore n=6$

33 답 **9**

$14\times{}_nC_2=9\times{}_{n-1}P_2$에서

$$14\times\frac{n(n-1)}{2}=9(n-1)(n-2)$$

$7n=9(n-2),\ 2n=18 \qquad \therefore n=9$

34 답 **(1)** $\boldsymbol{\frac{{}_nP_r}{r!},\ \frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}{r!},}$

$\boldsymbol{\frac{n!}{r!(n-r)!}}$

(2) ① **1** ② **1** ③ $\boldsymbol{{}_nC_{n-r},\ r,\ n-r}$

④ $\boldsymbol{{}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r}$

15 특정한 것을 포함, 포함하지 않는 경우의 조합의 수

▸ p.264

01 답 **6**

D가 반드시 뽑혀야 하므로 D를 미리 뽑아 놓고 A, B, C, E의 4개의 문자 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_2=\frac{4!}{2!2!}=6$(가지)이다.

02 답 **81**

흰색 꽃 2송이를 반드시 포함하는 경우는 다음과 같이 3가지가 있다.

(i) 흰색 꽃 2송이, 노란색 꽃 2송이를 뽑는 경우의 수

$${}_4C_2\times{}_5C_2=\frac{4!}{2!2!}\times\frac{5!}{2!3!}=6\times10=60(\text{가지})$$

(ⅱ) 흰색 꽃 3송이, 노란색 꽃 1송이를 뽑는 경우의 수

$_4C_3\times{}_5C_1={}_4C_1\times{}_5C_1=4\times5=20$(가지)

(ⅲ) 흰색 꽃 4송이를 뽑는 경우의 수 $_4C_4=1$(가지)

구하는 경우의 수는 $60+20+1=81$(가지)이다.

03 답 10

특정한 남학생 1명을 이미 뽑았다고 하면 남학생 2명, 여학생 3명, 즉 총 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$_5C_2=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$(가지)

04 답 10

특정한 여학생 1명을 이미 뽑았다고 하면 남학생 3명, 여학생 2명, 즉 총 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$_5C_2=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$(가지)

05 답 6

5개의 문자 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ 중에서 ㄹ을 빼고 4개 중 2개를 뽑으면 되므로 $_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

06 답 35

A, B, C 세 사람을 포함한 10명 중에서 A, B는 반드시 포함하고 C는 포함하지 않고 뽑으려면 $10-2-1=7$(명) 중에서 $5-2=3$(명)을 뽑으면 되므로 $_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

07 답 35

학생 11명 중에서 특정한 중학생 1명을 반드시 포함하고, 특정한 고등학생 3명은 포함하지 않고 뽑으려면 $11-1-3=7$(명) 중에서 $4-1=3$(명)을 뽑으면 되므로

$_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

08 답 (1) $_{n-k}C_{r-k}$ (2) $_{n-k}C_r$

16 '적어도~'의 조건의 경우의 수와 뽑아서 나열하는 경우의 조합의 수

▸ p.265

01 답 16

6개의 문자 D, E, F, G, H, I 중에서 3개의 문자를 뽑을 때 모두 자음을 뽑는 경우의 수는 $_4C_3=4$

전체 경우의 수는 $_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $20-4=16$

02 답 69

1부터 8까지의 자연수 중에서 4개를 고를 때, 모두 홀수를 고르는 경우의 수는 $_4C_4=1$

전체 경우의 수는 $_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

따라서 구하는 경우의 수는 $70-1=69$

03 답 85

3개의 불량품이 포함된 서로 다른 10개의 제품 중에서 3개를 뽑을 때 모두 정상 제품을 뽑는 경우의 수는

$_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

전체 경우의 수는 $_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

따라서 구하는 경우의 수는 $120-35=85$

04 답 194

남학생 4명과 여학생 6명 중에서

남자만 4명을 뽑는 경우의 수는 $_4C_4=1$

여자만 4명을 뽑는 경우의 수는 $_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

전체 경우의 수는

$_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

따라서 구하는 경우의 수는 $210-1-15=194$

05 답 144000

남학생 5명 중 3명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

여학생 6명 중 3명을 뽑는 경우의 수는

$_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

뽑은 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times20\times6!=10\times20\times720=144000$

06 답 25200

서로 다른 화이트초콜릿 4개 중 2개를 뽑는 경우의 수는

$_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

서로 다른 다크초콜릿 7개 중 3개를 뽑는 경우의 수는

$_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

뽑은 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times35\times5!=6\times35\times120=25200$

07 답 36000

짝수 6개 중 3개를 뽑는 경우의 수는

$_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

홀수 6개 중 2개를 뽑는 경우의 수는 $_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

뽑은 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times15\times5!=20\times15\times120=36000$

08 답 12000

$-5\le x\le5$를 만족시키는 정수 x는

$-5,\ -4,\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ 4,\ 5$이다.

음수 5개 중 2개를 뽑는 경우의 수는 $_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

양수 5개 중 3개를 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

뽑은 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times10\times5!=10\times10\times120=12000$

09 답 (1) 아닌 (2) 조합, 조합

17 여러 가지 경우의 조합의 수 ▸ p.266~268

01 답 432

남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$(가지)

여학생 3명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$(가지)

뽑힌 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $6\times3\times24=432$(가지)이다.

02 답 216

남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$(가지)

여학생 3명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$(가지)

뽑힌 남학생 2명을 하나로 생각하면 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$(가지)이고 남학생 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times3\times6\times2=216$(가지)

03 답 144

남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$(가지)

여학생 3명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$(가지)

뽑힌 남학생 2명, 여학생 2명을 각각 하나로 생각하면 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $2!=2$(가지)이고 각각이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!\times2!=4$(가지)이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $6\times3\times2\times4=144$(가지)

04 답 144

남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$(가지)

여학생 3명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$(가지)

뽑힌 남학생 2명을 먼저 세우는 방법의 수는 2가지,

그 사이에 여학생을 세우는 방법의 수는

여남여남 또는 남여남여의 2가지이고,

여학생끼리 자리를 바꿀 수 있으므로

$2\times2=4$(가지)이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $6\times3\times2\times4=144$(가지)

05 답 3

3개의 점 중 2개를 선택하여 직선이 되므로

$_3C_2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$

06 답 15

6개의 점 중 2개를 선택하여 직선이 되므로

$_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

07 답 28

8개의 점 중 2개를 선택하여 직선이 되므로

$_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

08 답 26

(i) 첫 번째 직선과 두 번째 직선에서 각각 1개씩 점을 선택하여 이으면 직선이 된다.

첫 번째 직선 위에 있는 4개의 점 중 1개를 선택하면 $_4C_1=4$

두 번째 직선 위에 있는 6개의 점 중 1개를 선택하면 $_6C_1=6$

(ii) 평행한 직선의 개수는 2이다.

(i), (ii)에서 $4\times6+2=26$

09 답 **42**

(i) 첫 번째 직선과 두 번째 직선에서 각각 1개씩 점을 선택하여 이으면 직선이 된다.

왼쪽 직선 위에 있는 5개의 점 중 1개를 선택하면 ${}_5C_1=5$

오른쪽 직선 위에 있는 8개의 점 중 1개를 선택하면 ${}_8C_1=8$

(ii) 평행한 직선의 개수는 2이다.

(i), (ii)에서 $5\times8+2=42$

10 답 **13**

주어진 점 6개 중 2개를 선택하면 ${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$이다.

이때, 일직선 위에 있는 점 3개 중 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2=\dfrac{3\times2}{2\times1}=3$

일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $15-3+1=13$

11 답 **36**

주어진 점 10개 중 2개를 선택하면 ${}_{10}C_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$이다.

이때, 일직선 위에 있는 점 5개 중 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $45-10+1=36$

12 답 **35**

주어진 점 7개 중 3개를 선택하면 삼각형이 되므로

${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

13 답 **18**

삼각형은 3개의 점을 이어서 만들 수 있으므로

${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$(가지)이고, 이때 일직선 위의 세 점이 선택된 경우에는 삼각형을 만들 수 없으므로

첫 번째 직선 위에 있는 3개의 점 중 3개를 선택하면 ${}_3C_3=1$,

두 번째 직선 위에 있는 3개의 점 중 3개를 선택하면 ${}_3C_3=1$

의 $1+1=2$(가지)를 빼야 한다.

따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수는 $20-2=18$(개)이다.

14 답 **45**

삼각형은 3개의 점을 이어서 만들 수 있으므로

${}_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$(가지)이고, 이때 일직선 위의 세 점이 선택된 경우에는 삼각형을 만들 수 없으므로

첫 번째 직선 위에 있는 5개의 점 중 3개를 선택하면

${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$,

두 번째 직선 위에 있는 3개의 점 중 3개를 선택하면 ${}_3C_3=1$

의 $10+1=11$(가지)를 빼야 한다.

따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$56-11=45$(개)이다.

15 답 **25**

삼각형은 3개의 점을 이어서 만들 수 있으므로

${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$(가지)이고, 이때 일직선 위의 세 점이 선택된 경우에는 삼각형을 만들 수 없으므로

${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$(가지)를 빼야 한다.

따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$35-10=25$(개)이다.

16 답 **5**

주어진 점 5개 중 4개를 선택하면 사각형이 되므로

${}_5C_4={}_5C_1=5$

17 답 **150**

사각형은 첫 번째 직선 위에 있는 2개의 점과 두 번째 직선 위에 있는 2개의 점과 점을 이어서 만들 수 있으므로

첫 번째 직선 위에 있는 6개의 점 중 2개를 선택하면

${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

두 번째 직선 위에 있는 5개의 점 중 2개를 선택하면

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

따라서 만들 수 있는 사각형의 개수는

$15\times10=150$(개)이다.

18 답 **100**

5개의 가로선 중 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$(가지)

5개의 세로선 중 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$(가지)

따라서 구하는 직사각형의 개수는 $10\times10=100$(개)이다.

19 답 **30**

(i) 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 $4\times4=16$(개)

(ii) 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 $3\times3=9$(개)

(iii) 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 $2\times2=4$(개)

(iv) 한 변의 길이가 4인 정사각형의 개수는 1개

따라서 정사각형은 $16+9+4+1=30$(개)이다.

20 답 **18**

4개의 가로선 중 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

3개의 세로선 중 2개를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$

평행사변형은 가로선 2개와 세로선 2개를 택하면 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는 $6\times3=18$(개)이다.

21 답 **18**

3개의 가로선 중 2개를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$

4개의 세로선 중 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

평행사변형은 가로선 2개와 세로선 2개를 택하면 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는 $3\times6=18$(개)이다.

22 답 **210**

5개의 가로선 중 2개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

7개의 세로선 중 2개를 택하는 방법의 수는

${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

평행사변형은 가로선 2개와 세로선 2개를 택하면 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는 $10\times21=210$(개)이다.

23 답 (1) ${}_nC_2$ (2) ${}_nC_3$ (3) ${}_nC_4$

18 분할과 분배

▸ p.269~270

01 답 **15**

6명의 학생을 2명, 4명의 인원으로 조를 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_4=\frac{6\times5}{2\times1}\times1=15$

02 답 **10**

6명의 학생을 3명, 3명의 인원으로 조를 나누는 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}=10$

03 답 **15**

6명의 학생을 2명, 2명, 2명의 인원으로 조를 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{3\times2\times1}$$
$$=15$$

04 답 **60**

6명의 학생을 1명, 2명, 3명의 인원으로 조를 나누는 경우의 수는 ${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=6\times\frac{5\times4}{2\times1}\times1=60$

05 답 **280**

서로 다른 과자 8개를 1개, 3개, 4개로 분할하는 경우의 수

${}_8C_1\times{}_7C_3\times{}_4C_4=8\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times1=280$

06 답 **280**

서로 다른 과자 8개를 2개, 3개, 3개로 분할하는 경우의 수

$${}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}$$
$$=\frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}$$
$$=280$$

07 답 **210**

서로 다른 과자 8개를 2개, 2개, 4개로 분할하는 경우의 수

$${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}$$
$$=\frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{6\times5}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}$$
$$=210$$

08 답 **840**

서로 다른 과자 8개를 1개, 2개, 2개, 3개로 분할하는 경우의 수

$${}_8C_1\times{}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}$$
$$=8\times\frac{7\times6}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}$$
$$=840$$

09 답 **1680**

서로 다른 8개의 과일을 2개, 3개, 3개로 나누어 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}\times3!$$
$$=\frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}\times3\times2\times1$$
$$=1680$$

10 답 7560

9명의 학생을 2명, 3명, 4명으로 나누어 서로 다른 세 동아리에 배정하는 경우의 수는

$${}_9C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 \times 3! = \frac{9\times8}{2\times1} \times \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \times 1 \times 3\times2\times1$$
$$=7560$$

11 답 420

서로 다른 7권의 책을 1권, 3권, 3권으로 나누어 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 3!$$
$$=7\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}\times3\times2\times1$$
$$=420$$

12 답 12600

서로 다른 볼펜 10개를 3개, 3개, 4개로 나누어 서로 다른 필통 3개에 각각 넣어 두는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} \times 3!$$
$$=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}\times3\times2\times1$$
$$=12600$$

13 답 3

4개 팀을 2팀, 2팀으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = \frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}$$
$$=3$$

14 답 30

5개 팀을 2팀, 3팀으로 나눈 후 3개 팀을 다시 2팀, 1팀으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$$({}_5C_2 \times {}_3C_3) \times ({}_3C_2 \times {}_1C_1) = \frac{5\times4}{2\times1}\times1\times3\times1$$
$$=30$$

15 답 90

6개 팀을 3팀, 3팀으로 나눈 후 3개 팀을 각각 다시 2팀, 1팀으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$$\left({}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!}\right) \times ({}_3C_2 \times {}_1C_1) \times ({}_3C_2 \times {}_1C_1)$$
$$=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}\times3\times3$$
$$=90$$

16 답 315

8개 팀을 4팀, 4팀으로 나눈 후 4개 팀을 각각 다시 2팀, 2팀으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$$\left({}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!}\right) \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right) \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}\right)$$
$$=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}$$
$$=315$$

17 답 (1) 분할 (2) 분배

단원 마무리 평가 [09~18]

▸ 문제편 p.271~273

01 답 ④

④ ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ (거짓)

02 답 ③

${}_nP_2 = n(n-1) = n^2 - n$, $3! \times {}_nP_1 = 6n$이므로

$n^2 - n + 6n = 36$, $n^2 + 5n - 36 = 0$

$(n+9)(n-4) = 0$ $\quad \therefore n = -9$ 또는 $n = 4$

그런데 $n \geq 2$일 때이므로 $n = 4$

수력 UP

주어진 조건 ${}_nP_2$가 정의되려면 n은 2보다 크거나 같아야 한다.
왜냐하면 순열의 정의를 생각해 보면 n개에서 r개를 선택해야 하는데 n보다 r가 작으면 말이 되지 않기 때문이다.

03 답 ④

서로 다른 수가 적힌 4장의 카드를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 ${}_4P_4 = 4! = 24$(개)

04 답 ④

10명 중 회장, 부회장, 총무를 선출하는 경우는 10명 중 3명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우와 같으므로

${}_{10}P_3 = 10\times9\times8 = 720$(가지)

05 답 ③

특별한 3권을 한 묶음으로 보고, 3권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

${}_3P_3 = 3! = 6$(가지)

이 각각에 대하여 특별한 3권을 한 묶음 안에서 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

${}_3P_3 = 3! = 6$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6 = 36$(가지)

06 답 ④

1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명을 각각 한 묶음으로 생각하여 먼저 일렬로 세우면 그 경우의 수 $3!$

이 각각에 대하여

1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

3학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times2!\times2!\times3!=144$(가지)

07 답 ③

남학생끼리 이웃하지 않으려면 여학생 사이사이에 남학생을 다음과 같이 세워야 한다.

남 여 남 여 남 여 남 여 남

먼저 여학생 4명을 세우자.

_ 여 _ 여 _ 여 _ 여 _

여학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!$

여학생 사이사이에 남학생을 세우는 경우의 수는 ${}_5P_5=5!$

따라서 구하는 경우의 수는 $4!\times5!$(가지)이다.

08 답 ⑤

서로 다른 빨간색 꽃 3송이를 한 묶음으로 생각하고 이 빨간색 꽃과 파란색 꽃을 먼저 일렬로 심는 경우의 수는 $2!=2$

_ 꽃 _ 꽃 _

이들의 양 끝과 사이사이의 3개의 자리 중에서 2개의 자리에 서로 다른 노란색 꽃 2송이를 심는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

빨간색 꽃 3송이가 서로 자리를 바꾸어 심는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times6\times6=72$(가지)

09 답 ⑤

남 _ _ _ 남

남학생 3명 중 2명을 택하여 양 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_3P_2$, 다섯 명 중에서 남은 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 ${}_3P_3$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3P_2\times{}_3P_3=6\times6=36$(가지)

10 답 ⑤

적어도 한 쪽 끝에 모음이 오도록 나열하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 양 쪽 끝에 자음이 오는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 양쪽 끝에 자음이 오는 경우

3개의 자음 m, n, d 중 양쪽 끝에 올 자음을 선택하는 경우의 수는 ${}_3P_2$

이 각각에 대하여 나머지 알파벳을 나열하는 경우의 수는 $4!$

따라서 양 끝에 자음이 있는 경우의 수는 ${}_3P_2\times4!$

(ii) 전체 경우의 수

6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $6!$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6!-{}_3P_2\times4!=6\times5\times4!-6\times4!$$
$$=(30-6)\times4!=24\times4!(\text{가지})$$

11 답 ③

선생님을 △, 학생을 ○로 나타내면

선생님과 학생이 번갈아 서는 경우는

△○△○△○

○△○△○△

의 2가지 경우가 있다.

각각의 경우에 대하여 선생님을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$, 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$이므로 $3!\times3!$

$\therefore 2\times3!\times3!=72$(가지)

12 답 ④

첫 번째 자리에는 0을 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지가 올 수 있고, 나머지 두 자리에는 첫 번째 배열한 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 2개를 택하는 순열이므로

$4\times{}_4P_2=4\times4\times3=48$(개)

13 답 ④

(i) a로 시작하는 문자열의 개수

$a□□□\rightarrow3!$

(ii) b로 시작하는 문자열의 개수

$b□□□\rightarrow3!$

(iii) ca로 시작하는 문자열의 개수

$ca□□\rightarrow2!$

(i)~(iii)에서 $3!+3!+2!=6+6+2=14$이므로

15번째 오는 문자열은 $cbad$,

16번째 오는 문자열은 $cbda$이다.

14 답 ⑤

① ${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

② ${}_4C_3=\dfrac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=4$

③ ${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

④ ${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

⑤ ${}_5C_3=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$ (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

15 답 ③

${}_{n}P_{r}={}_{n}C_{r}\times r!$에서

$120=20\times r!$, $r!=6=3\times2\times1$ $\quad\therefore r=3$

이때, ${}_{n}P_{3}=120$에서 $n(n-1)(n-2)=120$이고,

$120=12\times10=6\times5\times4=n(n-1)(n-2)$

이므로 $n=6$

$\therefore n+r=6+3=9$

16 답 ③

8개의 축구팀이 다른 모든 팀과 각각 한 번씩 경기를 하는 경우는 8개의 팀에서 2팀을 선택하는 경우와 같으므로

${}_{8}C_{2}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$(경기)

17 답 ③

12개의 공 중에서 정해 놓은 2개의 공을 제외시킨 10개의 공 중에서 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_{10}C_{3}$이다.

18 답 ①

전체 8명 중에서 3명을 선출하는 경우는 ${}_{8}C_{3}$가지

전체 8명 중에서 남자만 3명을 선출하는 경우는 ${}_{5}C_{3}$가지

$\therefore {}_{8}C_{3}-{}_{5}C_{3}=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}-\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$

$=56-10=46$(가지)

19 답 ②

아빠, 엄마를 선택하고 남은 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{4}C_{2}$

4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{4}C_{2}\times4!=6\times24=144$

20 답 ④

9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{9}C_{3}=84$

이때, 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{4}C_{3}$이고, 이러한 일직선이 3개 있으므로 ${}_{4}C_{3}\times3=12$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$84-12=72$(개)

21 답 ②

6개의 보라색 평행선 중에서 2개, 4개의 진홍색 평행선 중에서 2개를 선택하면 하나의 평행사변형이 결정된다.

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

${}_{6}C_{2}\times{}_{4}C_{2}=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times\dfrac{4\times3}{2\times1}=90$(개)

22 답 ④

$a={}_{6}C_{3}\times{}_{3}C_{3}\times\dfrac{1}{2!}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\dfrac{1}{2}=10$

$b={}_{6}C_{3}\times{}_{3}C_{2}\times{}_{1}C_{1}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times3\times1=60$

$\therefore a+b=70$

23 답 ④

7개의 구슬을 3개, 2개, 2개로 나누고, 이 세 묶음의 구슬을 3명의 어린이에게 나누어 주는 경우의 수는 $3!$이므로 구하는 경우의 수는

${}_{7}C_{3}\times{}_{4}C_{2}\times{}_{2}C_{2}\times\dfrac{1}{2!}\times3!=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\dfrac{4\times3}{2\times1}\times1\times\dfrac{1}{2}\times6$

$=105\times6=630$

24 답 ②

먼저 2개의 학급, 4개의 학급으로 분할한 후, 4개의 학급을 다시 2개의 학급, 2개의 학급으로 분할하는 경우의 수와 같으므로

$({}_{6}C_{2}\times{}_{4}C_{4})\times\left({}_{4}C_{2}\times{}_{2}C_{2}\times\dfrac{1}{2!}\right)$

$=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times1\times\dfrac{4\times3}{2\times1}\times1\times\dfrac{1}{2}$

$=45$

Ⅴ-1 행렬과 그 연산

01 행렬의 뜻

▸ p.278

01 답 $\begin{pmatrix}5&7&10\\4&5&6\end{pmatrix}$

02 답 10

$\begin{pmatrix}5&7&10\\4&5&6\end{pmatrix}$

03 답 4

$\begin{pmatrix}5&7&10\\4&5&6\end{pmatrix}$

04 답 7, 5 **05** 답 22 **06** 답 27

07 답 18

08 답 목요일, 12시 **09** 답 월요일, 18

10 답 (1) 행렬 (2) 성분 (3) 가로 (4) 세로

02 행렬의 구조 ▸ p.279

01 답 2

02 답 2

03 답 4

04 답 2

05 답 3

06 답 2, 7

07 답 7

08 답 1×2행렬, ×

09 답 2×2행렬, 2

10 답 2×1행렬, ×

$$\begin{array}{rc} & \text{제 1열} \\ & \downarrow \\ \text{제 1행} \Rightarrow & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 10x+2y \\ -3x-5y \end{pmatrix}$} \\ \text{제 2행} \Rightarrow & \end{array}$$

11 답 1×2행렬, ×

$$\begin{array}{rcc} & \text{제 1열} & \text{제 2열} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \text{제 1행} \Rightarrow & (3 & 3) \end{array}$$

12 답 3×3행렬, 3

13 답 (1) $m\times n$행렬 (2) 정사각행렬 (3) n차정사각행렬

03 행렬의 (i, j) 성분 ▸ p.280

01 답 10

02 답 9

$a_{13}=7$, $a_{22}=2$이므로

$a_{13}+a_{22}=7+2=9$

03 답 7

행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$에서 $i=j$인 성분은

$a_{11}=5$, $a_{22}=2$

이므로 그 합은 $5+2=7$이다.

04 답 9

05 답 0

$b_{31}=8$이고, $b_{13}=-4$이므로

$b_{31}+2b_{13}=8+2\times(-4)=8-8=0$

06 답 20

행렬 $B=\begin{pmatrix} 2 & 10 & -4 \\ 3 & -6 & 5 \\ 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$에서 $i>j$인 성분은

$b_{21}=3$, $b_{31}=8$, $b_{32}=9$

이므로 그 합은 $3+8+9=20$이다.

07 답 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2×2행렬 A가 $a_{ij}=i+j$이면

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

08 답 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2×3행렬 B가 $b_{ij}=i-j+1$이면

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

09 답 $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

3×3행렬 C가 $c_{ij}=i\times j$이면

$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

10 답 $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3×2행렬 D가 $d_{ij}=(-1)^{i+j}$이면

$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

11 답 (1) 대, 소 (2) a_{ij}

04 서로 같은 행렬 ▸ p.281

01 답 $a=2$, $b=-7$, $c=3$, $d=-5$

02 답 $a=-1$, $b=-6$, $c=-2$, $d=6$

03 답 $a=7$, $b=2$, $c=-10$, $d=9$

04 답 $a=8$, $b=4$, $c=3$, $d=4$

$a-2=6$이므로 $a=8$

$b=a-b$이므로 $b=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\times8=4$

$c=3$, $d=4$

05 답 $a=5,\ b=-24$

$A=\begin{pmatrix} a-1 \\ 10+b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ -14 \end{pmatrix}$에 대하여

$A=B$이므로

$a-1=4 \qquad \therefore a=5$

$10+b=-14 \qquad \therefore b=-24$

06 답 $a=0,\ b=-1$

$A=(5a+3b \quad 7)$, $B=(-3 \quad -7b-4a)$에 대하여

$A=B$이므로

$5a+3b=-3 \cdots$ ㉠

$-4a-7b=7 \cdots$ ㉡

㉠$\times 4+$㉡$\times 5$를 하면

$$\begin{array}{rr} & 20a+12b=-12 \\ +) & -20a-35b=\ \ 35 \\ \hline & -23b=\ \ 23 \end{array}$$

$\therefore b=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면

$5a-3=-3 \qquad \therefore a=0$

07 답 $a=2,\ b=-4$

$A=\begin{pmatrix} a^2 & -2 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & a+b \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$에 대하여

$A=B$이므로

$a^2=4 \qquad \therefore a=\pm 2$

$b^2=16 \qquad \therefore b=\pm 4$

이 중 $a+b=-2$, $ab=-8$을 만족시키는 값은

$a=2,\ b=-4$

08 답 (1) 서로 같은 꼴 (2) 같다, $A=B$

03 답 $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & \boxed{3} \\ \boxed{6} & 7 \end{pmatrix}$$

04 답 $\begin{pmatrix} -11 & 33 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -10 & 25 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{-11} & 33 \\ 4 & \boxed{11} \end{pmatrix}$$

05 답 $x=5,\ y=1$

$\begin{pmatrix} x & -20 \\ 5 & y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여

$x+5=10 \qquad \therefore x=5$

$y+3=4 \qquad \therefore y=1$

06 답 $x=7,\ y=4$

$\begin{pmatrix} 4 & x \\ 1 & -25 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -7 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -6 & -21 \end{pmatrix}$에 대하여

$x+8=15 \qquad \therefore x=7$

$-25+y=-21 \qquad \therefore y=4$

07 답 $x=4,\ y=5$

$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x & 9 \\ -y & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여

$7-x=3 \qquad \therefore x=4$

$2-y=-3 \qquad \therefore y=5$

08 답 $x=11,\ y=-5$

$\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ y & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8 & x \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ -3 & 16 \end{pmatrix}$에 대하여

$3+x=14 \qquad \therefore x=11$

$y+2=-3 \qquad \therefore y=-5$

09 답 $\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

05 행렬의 덧셈

▸ p.282

01 답 $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

02 답 $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & \boxed{11} \\ 1 & \boxed{-3} \end{pmatrix}$$

06 행렬의 뺄셈

▸ p.283~284

01 답 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \boxed{-3} & \boxed{9} \end{pmatrix}$$

02 답 $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & \boxed{1} \\ -2 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

03 답 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 23 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 23 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 0 \end{pmatrix}$$

04 답 $\begin{pmatrix} -7 & -7 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{-7} & -7 \\ -5 & \boxed{-6} \end{pmatrix}$$

05 답 $x=25,\ y=5$

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ x & y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 17 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여

$x-8=17 \quad \therefore x=25$

$y-1=4 \quad \therefore y=5$

06 답 $x=17,\ y=-4$

$\begin{pmatrix} x & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ y & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$에 대하여

$x-9=8 \quad \therefore x=17$

$3-y=7 \quad \therefore y=-4$

07 답 $x=12,\ y=3$

$\begin{pmatrix} 1 & x \\ -3 & -y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여

$x-11=1 \quad \therefore x=12$

$-y-(-5)=2,\ -y=-3 \quad \therefore y=3$

08 답 $x=-3,\ y=-3$

$\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ x & 11 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -y & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$에 대하여

$15-(-y)=12,\ 15+y=12 \quad \therefore y=-3$

$x-2=-5 \quad \therefore x=-3$

09 답 $(0 \quad 0)$

10 답 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

11 답 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

12 답 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13 답 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

14 답 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

15 답 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

16 답 O

17 답 O

18 답 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -27 \end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ \boxed{6} & -27 \end{pmatrix}$$

19 답 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$$

20 답 $\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

21 답 $\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 7 & -15 \end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 7 & -15 \end{pmatrix}$$

22 답 $\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$

07 행렬의 실수배

▸ p.285~286

01 답 $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}$

$$A+2B=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \boxed{-12} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ \boxed{-14} & \boxed{14} \end{pmatrix}$$

02 답 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

03 답 $\begin{pmatrix} -14 & 6 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$

$$2A-3B=2\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 6 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$$

04 답 $\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -10 & 22 \end{pmatrix}$

$3(A-B)-(A-4B)=3A-3B-A+4B=2A+B$

이므로

$$2A+B=2\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -10 & 22 \end{pmatrix}$$

05 답 $\begin{pmatrix} -1 & -15 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$

$-A+(2B-X)=0\times A+3B$, $-A+2B-X=3B$

$\therefore X=2B-3B-A=-A-B$

$=-\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -15 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$

06 답 $\begin{pmatrix} 0 & 18 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$

$2(X-B)=2A+B$, $X-B=A+\frac{1}{2}B$

$\therefore X=A+\frac{3}{2}B$

$=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\frac{3}{2}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 18 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$

07 답 $\begin{pmatrix} 3 & 45 \\ 21 & 18 \end{pmatrix}$

$3(2A-X)=-2X+3(A-B)$,

$6A-3X=-2X+3A-3B$, $3X-2X=6A-3A+3B$

$\therefore X=3A+3B$

$=3\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 9 & 27 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 24 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 45 \\ 21 & 18 \end{pmatrix}$

08 답 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{21}{2} \\ \frac{15}{2} & 4 \end{pmatrix}$

$-(B-A-2X)=2A+B$

$-B+A+2X=2A+B$, $2X=2A-A+B+B$

$\therefore X=\frac{1}{2}A+B$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{21}{2} \\ \frac{15}{2} & 4 \end{pmatrix}$

09 답 $X=\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

$X+Y=A$ ⋯ ㉠, $X-Y=B$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2X=A+B$

$\therefore X=\frac{1}{2}(A+B)$ ⋯ ㉢

$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 6 & 13 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 22 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

한편, ㉢을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}(A+B)+Y=A$

$\therefore Y=\frac{1}{2}(A-B)$

$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 6 & 13 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

10 답 $X=\begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

$X-Y=A$ ⋯ ㉠, $X+2Y=B$ ⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면 $3Y=B-A$

$\therefore Y=\frac{1}{3}(B-A)$ ⋯ ㉢

$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 17 & 26 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -12 & -18 \\ -12 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

㉢을 ㉠에 대입하면

$X=\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}B=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 17 & 26 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 34 & 52 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 39 & 60 \\ 3 & 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

11 답 $X=\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 2 & 23 \\ 12 & -22 \end{pmatrix}$

$3X-2Y=A+B$ ⋯ ㉠, $2X-Y=A-B$ ⋯ ㉡

㉠−㉡×2를 하면 $-X=-A+3B$

$\therefore X=A-3B$ ⋯ ㉢

$=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$

㉢을 ㉡에 대입하면

$2(A-3B)-Y=A-B$, $2A-6B-Y=A-B$

$\therefore Y=A-5B$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 20 \\ 15 & -25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 23 \\ 12 & -22 \end{pmatrix}$$

12 답 8

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$a_{ij}=i+j+1$, $b_{ij}=2i-j$이므로

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬 A의 $(1,\ 2)$ 성분이 4이고,

행렬 B의 $(1,\ 2)$ 성분이 0이므로

$2(A-B)-B=2A-3B$의 $(1,\ 2)$ 성분은

$2\times4-3\times0=8$이다.

[다른 풀이]

$2(A-B)-B=2A-3B$

$$=2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

이므로 $(1,\ 2)$ 성분은 8이다.

13 답 -12

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$a_{ij}=ij+2$, $b_{ij}=-i-j-1$이므로

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

행렬 A의 $(2,\ 1)$ 성분이 4이고,

행렬 B의 $(2,\ 1)$ 성분이 -4이므로

$3(A+B)-(2A-B)=A+4B$의 $(2,\ 1)$ 성분은

$4+4\times(-4)=-12$이다.

[다른 풀이]

$3(A+B)-(2A-B)=A+4B$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -12 & -16 \\ -16 & -20 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -14 \end{pmatrix}$$

이므로 $(2,\ 1)$ 성분은 -12이다.

14 답 $a=-2,\ b=-1$

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4b & 5b \\ b & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$에서

$a+b=-3$ ⋯ ㉠

$a-b=-1$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $a=-2$, $b=-1$

15 답 $a=2,\ b=-2$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2b & 6b \\ 3b & 5b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$에서

$6b=-12 \qquad \therefore b=-2$

이 값을 $a-2b=6$에 대입하면 $a+4=6$

$\therefore a=2$

16 답 $a=3,\ b=9$

$$\begin{pmatrix} -2a & 5a \\ -7a & -6a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & -b \\ -b & 2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -30 & 0 \end{pmatrix}$$에서

$-6a+2b=0 \qquad \therefore b=3a$ ⋯ ㉠

이 값을 $-2a+b=3$에 대입하면

$-2a+3a=3 \qquad \therefore a=3$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=9$

17 답 $a=4,\ b=2$

$$\begin{pmatrix} -a & -3a \\ 2a & 4a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5b & -b \\ 5b & 2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -14 \\ 18 & 20 \end{pmatrix}$$에서

$-a+5b=6$ ⋯ ㉠

$2a+5b=18$ ⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면 $3a=12 \qquad \therefore a=4$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=2$

18 답 (1) k배, kA (2) $\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

(3) ① A ② O, O ③ $k(lA)$

④ $kA+lA$, $kA+kB$

08 행렬의 곱셈

▸ p.287~288

01 답 (11)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=(1\times3+2\times4)=(3+8)=(11)$$

02 답 (-11)

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-3\times1+4\times(-2))$$

$$=(-3-8)=(-11)$$

03 답 (-8)

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}=(2\times(-1)+6\times(-1))$$

$$=(-2-6)=(-8)$$

04 답 (-18)

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}=((-5)\times2+2\times(-4))$$

$$=(-10-8)=(-18)$$

05 답 $\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}(-2 \quad 4)=\begin{pmatrix} 3\times(-2) & 3\times4 \\ 1\times(-2) & 1\times4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

06 답 $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}(1 \quad 1)=\begin{pmatrix} 5\times1 & 5\times1 \\ -1\times1 & -1\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

07 답 $\begin{pmatrix} -24 & 15 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}(8 \quad -5)=\begin{pmatrix} -3\times8 & -3\times(-5) \\ 1\times8 & 1\times(-5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -24 & 15 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

08 답 $\begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 21 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}(-3 \quad -1)=\begin{pmatrix} 6\times(-3) & 6\times(-1) \\ -7\times(-3) & -7\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 21 & 7 \end{pmatrix}$$

09 답 $\begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\times(-3)+3\times5 \\ 3\times(-3)+1\times5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+15 \\ -9+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$$

10 답 $\begin{pmatrix} -26 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times(-4)-3\times6 \\ 5\times(-4)+5\times6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8-18 \\ -20+30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -26 \\ 10 \end{pmatrix}$$

11 답 $\begin{pmatrix} 4 \\ 116 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 \\ 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times(-13)+2\times15 \\ -2\times(-13)+6\times15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -26+30 \\ 26+90 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 116 \end{pmatrix}$$

12 답 $\begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -2\times4+1\times(-2) & -2\times1+1\times1 \\ 3\times4+5\times(-2) & 3\times1+5\times1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -8-2 & -2+1 \\ 12-10 & 3+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

13 답 $\begin{pmatrix} 17 & -30 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 5\times3+2\times1 & 5\times(-4)+2\times(-5) \\ -4\times3+3\times1 & -4\times(-4)+3\times(-5) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 15+2 & -20-10 \\ -12+3 & 16-15 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 17 & -30 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$$

14 답 $\begin{pmatrix} -39 & 26 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 6\times(-3)-7\times3 & 6\times2-7\times(-2) \\ 2\times(-3)+4\times3 & 2\times2+4\times(-2) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -18-21 & 12+14 \\ -6+12 & 4-8 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -39 & 26 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

15 답 $a=-6,\ b=17$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 3a+b \\ 5a+2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 3a+b=-1 \cdots ㉠ \\ 5a+2b=4 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times2-$㉡을 하면 $a=\boxed{-6}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $-18+b=\boxed{-1}$ $\quad\therefore b=\boxed{17}$

16 답 $a=-2,\ b=5$

$(3 \quad b)\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=(4 \quad -17)$에서

$(3a+2b \quad 3-4b)=(4 \quad -17)$, $\begin{cases} 3a+2b=4 \cdots ㉠ \\ 3-4b=-17 \end{cases}$

$4b=20 \qquad \therefore b=5$

이 값을 ㉠에 대입하면

$3a+10=4,\ 3a=-6 \qquad \therefore a=-2$

17 답 $a=7,\ b=-5$

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 \\ -b & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} -a-3b & -2+21 \\ -2a-2b & -4+14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$

$-a-3b=8 \cdots ㉠$

$-2a-2b=-4,\ a+b=2 \cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$-2b=10 \qquad \therefore b=-5$

이 값을 ㉡에 대입하면 $a-5=2 \qquad \therefore a=7$

18 답 $a=-3,\ b=-29$

$\begin{pmatrix} -a & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 76 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} -3a-4 & -6a-2b \\ 15+2 & 30+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 76 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$

$30+b=1 \qquad \therefore b=-29$

$-3a-4=5,\ 3a=-9 \qquad \therefore a=-3$

19 답 (1) $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

(2) $m\times l$

09 행렬의 곱셈의 성질

▸ p.289~290

01 답 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

02 답 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

03 답 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^6=A^3A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

04 답 $\begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$

$(2A)^{10}=2^{\boxed{10}}A^{10}=2^{\boxed{10}}A^6(A^2)^2$

$=2^{\boxed{10}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & \boxed{2^{10}} \end{pmatrix}$

05 답 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

06 답 $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2+4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

07 답 $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4+4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

08 답 $\begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{13}=A^4A^4A^4A=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[다른 풀이]

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로 $A^{13}=\begin{pmatrix} 1 & 2\times 13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

수력 UP

$A^2,\ A^3,\ A^4,\ \cdots$을 계산하면 행렬 A가 다음과 같은 규칙을 갖고 있음을 발견할 수 있고, 이를 이용하여 행렬의 거듭제곱을 쉽게 구할 수 있다.

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (n은 자연수)

09 답 $\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$AB+AC=A(B+C)$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7+3 & -2-2 \\ 0-3 & 0+2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

10 답 $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$AB-AC=A(B-C)$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3-5 & 2-4 \\ 0+5 & 0+4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

11 답 $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

$A(3B)=3AB=3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$=3\begin{pmatrix} 2-1 & 0-3 \\ 0+1 & 0+3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

12 답 $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & 0-3 \\ 0+1 & 0+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+0 & 2-0 \\ -1+0 & -1+3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

이므로 $AB-BA=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

13 답 $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

$BA-CA=(B-C)A$

$=\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3+0 & -3-2 \\ -5+0 & -5+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

14 답 ×

〈반례〉 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$(AB)C=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$

$B(AC)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

이므로 $(AB)C\neq B(AC)$

15 답 ○

16 답 ×

〈반례〉 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면

$A\neq O$, $B\neq O$이지만 $AB=O$

17 답 ○

18 답 ×

〈반례〉 $X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면

$(X-A)(X-B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$이지만

$X\neq A$이고, $X\neq B$이다.

수력 UP

행렬의 곱셈에서는 $AB=O$이지만 $A\neq O$이고, $B\neq O$일 수 있다.
이때, 이러한 두 행렬 A, B를 영인자 (zero divisor)라 한다.
행렬에서는 영인자가 존재하므로 다음을 주의해야 한다.

① $(A-B)(A-C)=O$이면 $A=B$ 또는 $A=C$가 성립하지 않는다.
② $A\neq O$이고 $AB=AC$이면 $B=C$가 성립하지 않는다.
③ $AB=O$이면 $BA=O$가 성립하지 않는다.
④ $A^2=O$이면 $A=O$가 성립하지 않는다.

19 답 ① $\neq$ ② $A(BC)$ ③ $AB+AC$, $AC+BC$ ④ kA, kB

10 행렬의 곱셈의 주의사항

▸ p.291~292

01 답 $A+2B$, $A+2B$ / A / A^2, $2BA$

02 답 $3A-B$, $3A-B$ / $3A$ / $9A^2$, $3BA$

03 답 $3A-2B$, $3A-2B$ / $3A$ / $9A^2$, $6BA$

04 답 $A-2B$, $A-2B$ / A / A^2, $2BA$

05 답 $2A-B$, $2A-B$ / $2A$ / $2A^2$, $6BA$

06 답 $5A-B$, $5A-B$ / $5A$ / $20A^2$, $5BA$

07 답 $a=-1$, $b=-2$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$에 대하여

$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5a-3b & 2a+5b \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5a+6 & 5b-2 \\ -3a+15 & -3b-5 \end{pmatrix}$

에서 $5a-3b=5a+6$, $-3b=6$ $\quad\therefore b=-2$

$18=-3a+15$, $3a=-3$ $\quad\therefore a=-1$

08 답 $a=10$, $b=12$

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이면

$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$이므로

$AB=\boxed{BA}$이다.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & -3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -3 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b & -5 \\ -4a+5b & 17 \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} a & -3 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+12 & a-15 \\ 2b-4 & b+5 \end{pmatrix}$

에서 $-5=a-15$ $\quad\therefore a=\boxed{10}$

$17=b+5$ $\quad\therefore b=\boxed{12}$

09 답 $a=-\dfrac{9}{8}$, $b=-16$

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$이면

$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$이므로

$AB=BA$이다.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$AB=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2b+6 \\ -7a-3 & ab-1 \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} -7 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ a & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14+ab & -42-b \\ 6+a & 17 \end{pmatrix}$

에서 $-7a-3=6+a$, $8a=-9$ $\quad\therefore a=-\dfrac{9}{8}$

$2b+6=-42-b$, $3b=-48$ $\quad\therefore b=-16$

10 답 $a=-\frac{1}{7}$, $b=\frac{13}{7}$

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이면

$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$이므로 $AB=BA$이다.

$A=\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -1 & b \end{pmatrix}$에 대하여

$AB=\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 8a+b \\ -5 & 7a-2b \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8+7a & 1+2a \\ 8-7b & -1-2b \end{pmatrix}$

에서 $-9=-8+7a$, $7a=-1$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{7}$

$-5=8-7b$, $7b=13$ $\quad\therefore b=\frac{13}{7}$

11 답 $a=1$, $b=13$

$(A+2B)(A-2B)=A^2-4B^2$이면

$A^2-2AB+2BA-4B^2=A^2-4B^2$이므로 $AB=BA$이다.

$A=\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ 4 & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -a & 3 \end{pmatrix}$에 대하여

$AB=\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -a & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34+8a & 10 \\ 8-ab & 8+3b \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -a & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ 4 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 42 & -16+2b \\ -17a+12 & 8a+3b \end{pmatrix}$

에서 $34+8a=42$, $8a=8$ $\quad\therefore a=1$

$10=-16+2b$, $2b=26$ $\quad\therefore b=13$

12 답 (1) $\neq$ (2) $\neq$ (3) $\neq$ (4) $\neq$

11 단위행렬

▸ p.293~294

01 답 E **02** 답 E **03** 답 $-E$

04 답 O **05** 답 A^2-4E

06 답 $A^2-6A+9E$ **07** 답 A^3+E

08 답 A^3-3A^2+3A-E

09 답 2

$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 $n=2$

10 답 6

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^6=A^3A^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 $n=6$

11 답 4

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 $n=4$

12 답 6

$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^6=A^3A^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 $n=6$

13 답 2

$A^2=\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 $n=2$

14 답 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$라 하고, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 연립방정식을 푼다.

$x+3y=1$ ⋯ ㉠, $x+4y=0$ ⋯ ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $y=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x-3=1$ $\quad\therefore x=4$

$u+3v=0$ ⋯ ㉢, $u+4v=1$ ⋯ ㉣

㉣$-$㉢을 하면 $v=1$

이 값을 ㉢에 대입하면 $u=-3$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

15 답 $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$라 하고, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 연립방정식을 푼다.

$3x+5y=1$ ⋯ ㉠, $x+2y=0$ ⋯ ㉡

㉡×3−㉠을 하면 $y=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $3x-5=1$, $3x=6$ $\quad\therefore x=2$

$3u+5v=0$ ⋯ ㉢, $u+2v=1$ ⋯ ㉣

㉣×3−㉢을 하면 $v=3$

이 값을 ㉢에 대입하면 $3u+15=0$ $\quad\therefore u=-5$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

16 답 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$라 하고, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을

두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 연립방정식을 풀자.

$x+y=1$ ⋯ ㉠, $-x-2y=0$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $-y=1$ $\quad\therefore y=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x=2$

$u+v=0$ ⋯ ㉢, $-u-2v=1$ ⋯ ㉣

㉢+㉣을 하면 $-v=1$ $\quad\therefore v=-1$

이 값을 ㉢에 대입하면 $u-1=0$ $\quad\therefore u=1$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

17 답 (1) ① 1 ② 0 ③ E (2) A (3) E, E, E

12 케일리 – 해밀턴의 정리

▸ p.295

01 답 $p=-7$, $q=22$

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$가 $A^2+pA+qE=O$를 만족시킨다.

한편, 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(2+5)A+\{10-(-12)\}E=O$,

$A^2-7A+\boxed{22}E=O$

이므로 $p=-7$, $q=\boxed{22}$

02 답 $p=-8$, $q=3$

행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$가 $A^2+pA+qE=O$를 만족시킨다.

한편, 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(-1+9)A+\{-9-(-12)\}E=O$,

$A^2-8A+3E=O$

이므로 $p=-8$, $q=3$

03 답 $p=11$, $q=16$

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$가 $A^2+pA+qE=O$를 만족시킨다.

한편, 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(1-12)A+\{-12-(-28)\}E=O$,

$A^2+11A+16E=O$

이므로 $p=11$, $q=16$

04 답 $p=0$, $q=-27$

행렬 $A=\begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$가 $A^2+pA+qE=O$를 만족시킨다.

한편, 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(-4+4)E+(-4\times4-11\times1)E=O$,

$A^2-27E=O$

이므로 $p=0$, $q=-27$

05 답 $x=-2$, $y=2$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$에서 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(1+y)A+(y-2x)E=O$이다.

한편, $A^2-3A+6E=O$에서

$-3=-(1+y)$

$-3=-1-y$ $\quad\therefore y=2$

$6=y-2x=2-2x$, $2x=-4$ $\quad\therefore x=-2$

06 답 $x=2$, $y=0$

$B=\begin{pmatrix} x & -3 \\ y & 4 \end{pmatrix}$에서 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$B^2-(x+4)B+(4x+3y)E=O$이다.

한편, $B^2-6B+8E=O$에서

$-(x+4)=-6$

$x+4=6$ $\quad\therefore x=2$

$4x+3y=8+3y=8$, $3y=0$ $\quad\therefore y=0$

07 답 $x=7$, $y=4$

$C=\begin{pmatrix} x & -6 \\ 5 & y \end{pmatrix}$에서 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$C^2-(x+y)C+(xy+30)E=O$이다.

한편, $C^2-11C+58E=O$에서

$x+y=11$ ⋯ ㉠

$xy+30=58$, $xy=28$ ⋯ ㉡

이때, x, y를 근으로 하고, 최고차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식을 ㉠, ㉡을 이용하여 나타내면

$t^2-11t+28=0$, $(t-4)(t-7)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=7$

$\therefore x=7$, $y=4$ ($\because x>y$)

08 답 $(a+d)$, $(ad-bc)$, 케일리 – 해밀턴의 정리

13 케일리 – 해밀턴의 정리의 응용

▸ p.296

01 답 $\begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+A-E=O$이므로 $A^2=-A+E$

$A^4=(A^2)^2=(-A+E)^2=A^2-2A+E$

$=(-A+E)-2A+E=\boxed{-3}A+2E$

$=\boxed{-3}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \boxed{-6} & -15 \\ \boxed{3} & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \boxed{-4} & -15 \\ \boxed{3} & 11 \end{pmatrix}$

02 답 $\begin{pmatrix} -11 & -40 \\ 8 & 29 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+A-E=O$이므로 $A^2=-A+E$이고,

01에서 $A^4=-3A+2E$임을 이용하자.

$A^6=A^4A^2=(-3A+2E)(-A+E)$

$=3A^2-5A+2E=3(-A+E)-5A+2E$

$=-3A+3E-5A+2E=-8A+5E$

$=-8\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -16 & -40 \\ 8 & 24 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -11 & -40 \\ 8 & 29 \end{pmatrix}$

03 답 $\begin{pmatrix} 18 & 65 \\ -13 & -47 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+A-E=O$이므로 $A^2=-A+E$이고,

02에서 $A^6=-8A+5E$를 이용하자.

$A^7=A^6A=(-8A+5E)A=-8A^2+5A$

$=-8(-A+E)+5A=8A-8E+5A$

$=13A-8E$

$=13\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}-8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 26 & 65 \\ -13 & -39 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 18 & 65 \\ -13 & -47 \end{pmatrix}$

04 답 $\begin{pmatrix} -76 & -275 \\ 55 & 199 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+A-E=O$이므로 $A^2=-A+E$이고,

01에서 $A^4=-3A+2E$, **02**에서 $A^6=-8A+5E$를 이용하자.

$A^{10}=A^4A^6=(-3A+2E)(-8A+5E)$

$=24A^2-31A+10E=24(-A+E)-31A+10E$

$=-24A+24E-31A+10E=-55A+34E$

$=-55\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}+34\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -110 & -275 \\ 55 & 165 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 34 & 0 \\ 0 & 34 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -76 & -275 \\ 55 & 199 \end{pmatrix}$

05 답 $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+3E=O$이므로 $A^2=-3E$

$A^4=(A^2)^2=(-3E)^2$

$=9E^2=9E$

$=9\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

06 답 $\begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+3E=O$이므로 $A^2=-3E$

$A^6=(A^2)^3=(-3E)^3$

$=-27E^3=-27E$

$=-27\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$

07 답 $\begin{pmatrix} -27 & -54 \\ 54 & 27 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+3E=O$이므로 $A^2=-3E$

$A^7=(A^2)^3A=(-3E)^3A$

$=-27EA=-27A$

$=-27\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -27 & -54 \\ 54 & 27 \end{pmatrix}$

08 답 $\begin{pmatrix} -243 & 0 \\ 0 & -243 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+3E=O$이므로 $A^2=-3E$

$A^{10}=(A^2)^5=(-3E)^5=-243E^5=-243E$

$=-243\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -243 & 0 \\ 0 & -243 \end{pmatrix}$

09 답 $\begin{pmatrix} 729 & 1458 \\ -1458 & -729 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+3E=O$이므로 $A^2=-3E$

$A^{13}=(A^2)^6A=(-3E)^6A=729EA=729A$

$=729\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 729 & 1458 \\ -1458 & -729 \end{pmatrix}$

10 답 **(1) 케일리-해밀턴의 정리 (3) 않는다.**

단원 마무리 평가 [01~13]

▸문제편 p.297~299

01 답 ④

① 행렬 A는 2×2행렬이다.

② 행렬 A의 $(1, 2)$ 성분은 5이다.

③ 행렬 A의 $(2, 2)$ 성분은 2이다.

⑤ 행렬 A의 모든 성분은 $4, 5, -1, 2$이므로 그 합은 $4+5-1+2=10$이다.

02 답 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$에 대하여 $a_{ij}=\begin{cases} i & (i>j) \\ 0 & (i=j) \\ j & (i<j) \end{cases}$로 정의하면

$a_{11}=0,\ a_{12}=2,\ a_{13}=3,$

$a_{21}=2,\ a_{22}=0,\ a_{23}=3,$

$a_{31}=3,\ a_{32}=3,\ a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

03 답 ③

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$에 대하여 $a_{ij}=2i-ij+5$로 정의하면

$a_{21}=2\times2-2\times1+5=7,$

$a_{22}=2\times2-2\times2+5=5,$

$a_{23}=2\times2-2\times3+5=3$

따라서 행렬 A의 제 2행의 모든 성분의 합은 $7+5+3=15$

04 답 ②

$a+2=1 \quad \therefore a=-1$

$3-b=5 \quad \therefore b=-2$

$\therefore a+b=-3$

05 답 ⑤

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ x & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에서 $x=3,\ y=-2,\ z=1$이므로

$x+y+z=2$

06 답 ①

$2A+3B=2\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

07 답 ①

좌변을 정리하면

$\begin{pmatrix} 2 & x+1 \\ 0 & 3+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

이고, $x+1=6$에서 $x=5$

$3+2y=-3,\ 2y=-6$이므로 $y=-3$

$\therefore xy=-15$

08 답 ③

$A+2B=5A$의 양변에 $-A$를 더하면

$(A+2B)+(-A)=5A+(-A)$

$\{(-A)+A\}+2B=4A,\ O+2B=4A$

$\therefore B=2A=2\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 8 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

09 답 ①

$A+X=B$에서 $X=B-A$이므로

$X=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

이므로 $a=-5,\ b=-2,\ c=2,\ d=-8$

$\therefore ad-bc=(-5)\times(-8)-(-2)\times2=40+4=44$

10 답 ③

A는 2×1행렬, B는 1×2행렬, C는 2×2행렬이므로

① A는 2×1행렬, B는 1×2행렬 ⇨ AB는 2×2행렬

② B는 1×2행렬, A는 2×1행렬 ⇨ BA는 1×1행렬

④ C는 2×2행렬, A는 2×1행렬 ⇨ CA는 2×1행렬

⑤ B는 1×2행렬, C는 2×2행렬 ⇨ BC는 1×2행렬

③ AC ⇨ 2×1행렬과 2×2행렬의 곱은 구할 수 없다.

11 답 ②

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6+2 \\ -2+1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4-1 \\ 0-3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\therefore a+b=3-4=-1$

12 답 ⑤

$X=AB-2A$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[다른 풀이]

$X=AB-2A=A(B-2E)$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

13 답 ①

$$AB+BA=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore k=-2$

14 답 ②

1학년 점수를 40 %, 2학년 점수를 60 %로 반영한 환산 점수에 대하여

지우의 수학 점수는 $80\times0.4+90\times0.6$

현지의 수학 점수는 $75\times0.4+85\times0.6$

따라서 두 학생의 환산 점수를 행렬의 곱으로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 80 & 90 \\ 75 & 85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}=AD$$

15 답 ④

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2a & -a \\ -2 & 2a \end{pmatrix}$$

행렬 A^2의 모든 성분의 합이 11이므로

$1+2a-a-2+2a=11$, $3a=12$

$\therefore a=4$

16 답 ④

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 4 \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2-4 & 4a+4b \\ -a-b & b^2-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a^2-4=1 \quad \therefore a^2=5$

$b^2-4=1 \quad \therefore b^2=5$

$\therefore a^2+b^2=10$

[다른 풀이]

(1, 1) 성분을 비교하면 $a^2-4=1$

$\therefore a^2=5$

(1, 2) 성분을 비교하면 $4a+4b=0$

$\therefore b=-a$

$\therefore b^2=(-a)^2=a^2=5$

$\therefore a^2+b^2=10$

17 답 ③

$AE=EA=A$이므로

$(A+E)(A-E)=A^2-AE+EA-E^2$

$=A^2-A+A-E$

$=A^2-E$

한편, $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$이므로

$(A+E)(A-E)=A^2-E$

$=E-E=O$

18 답 ②

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$이다.

따라서 $A^9=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$이므로 (2, 1) 성분은 9이다.

19 답 ④

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-2a & -2+3a \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 0 & -2+3a \end{pmatrix}$$이고,

$AB=BA$이므로 (1, 2) 성분을 비교하면

$1-a=0 \quad \therefore a=1$

20 답 ③

$(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

$=A^2+2AB+B^2$

이므로 $AB=BA$가 성립한다.

$\therefore A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -24 & 24 \\ 36 & 24 \end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 $-24+24+36+24=60$이다.

수력 UP

만일 $AB=BA$가 성립하지 않으면
$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$로 구할 수 없고,
A, B를 각각 제곱을 해서 A^2, B^2을 구하고, 빼야 한다.

21 답 ①

케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(1+4)A+\{1\times4-(-2)\times2\}E=O$

$A^2-5A+8E=O \qquad \therefore x=-5,\ y=8$

$\therefore x+y=(-5)+8=3$

22 답 ③

케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(1+3)A+(1\times3-2\times4)E=O$

$A^2-4A-5E=O$

이므로 $A^2-A-5E=3A$

23 답 ④

$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 4 \end{pmatrix}$가 $A^2-3A-6E=O$를 만족시키고,

케일리 – 해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(a+4)A+(4a-b)E=O$

$a+4=3 \qquad \therefore a=-1$

이 값을 $4a-b=-6$에 대입하면

$-4-b=-6 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=1$

24 답 ③

ㄱ. 〈반례〉 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이다.

이때, $A^2B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이나

$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq O$이다. (거짓)

ㄴ. 〈반례〉 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때

$AB=O$이지만 $A\neq O$, $B\neq O$ (거짓)

ㄷ. $A^2=AA=(AB)A=A(BA)=AB=A$ (참)

결합법칙

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

〈고등 수학 공부법〉

1. 기본적인 개념 이해와 공식 암기하기

개념에 대한 이해는 수학을 공부하는 가장 기본입니다.
게임으로 비유하자면 게임의 룰을 배우는 과정이라고 볼 수 있습니다.
수학을 공부하는데 수학의 룰을 모르고 수학을 한다는 것은 있을 수 없겠죠? 그런데 수학은 이해가 중요하니까 암기는 안 해도 된다고 생각할 수 있지만 수학도 역시 암기가 없이 공부할 수 있는 것은 아닙니다.
반드시 알아야 되는 공식들은 정확하게 외워야 합니다.

2. 개념과 공식 적용하기

배운 개념을 스스로 제대로 익혔는지는 많은 문제를 풀면 알 수 있습니다.
특히 잘 나오는 유형을 많이 접하면 개념이 체계적으로 잡히는 것을 느낄 수 있습니다.
간혹 모르는 유형의 문제를 접하더라도 배운 개념과 공식을 적절히 이용하여 사고하면 실력이 급격히 오를 것입니다.

3. 개념과 문제 풀이를 통한 복습하기

수학은 예습보다 복습이 더 중요합니다.
복습을 통해 단계가 높아지는 것입니다. 마치 계단을 오르는 것처럼 실력이 늘게 됩니다.
그런데 부실하게 단계를 나아가는 것보다 기초부터 든든하게 쌓아나가야 다음 단계로 넘어가는데 무리가 없게 됩니다.
차근차근 수학을 공부하는 것이 중요합니다.

memo

memo

memo

memo

memo