Xi story 중등 수학 3(하) 해설편

Contents

★ 빠른정답찾기는 p.2~5에서 제공합니다.
★ 개념 체크의 문제는 빠른정답찾기에서 정답만을 제공합니다.

빠른 정답 찾기

J 삼각비

문제편 p. 11

[개념 체크]

001 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ **002** $\overline{AD}$, $\overline{AB}$

003 $\overline{AE}$, $\overline{BC}$ **004** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ **005** $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ **006** $\frac{2}{3}$

007 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ **008** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ **009** $\frac{3}{2}$ **010** 1 **011** $\sqrt{2}$

012 $\frac{1}{2}$ **013** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **014** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **015** 1 **016** $\frac{1}{2}$

017 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **018** $\frac{1}{2}$ **019** $\frac{3}{2}$ **020** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **021** 30

022 60 **023** 30 **024** 50 **025** 20 **026** 24

027 30 **028** $\overline{AB}$ **029** $\overline{OB}$ **030** $\overline{CD}$ **031** 0.7431

032 0.6691 **033** 1.1106 **034** $\sin 40^\circ$, $\cos 1^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\tan 47^\circ$

035 0 **036** 2 **037** 1 **038** 1 **039** 1

040 1 **041** 0.9703 **042** 0.2250 **043** 0.9659 **044** 0.2867

045 1.2163 **046** 0.5455 **047** 0.6988 **048** 0.7120 **049** 82°

050 84° **051** 80°

[유형 다지기]

052 ② **053** ④ **054** $\frac{c^2}{b^2}$ **055** ⑤ **056** ②

057 ② **058** ⑤ **059** ④ **060** ② **061** ⑤

062 $4+4\sqrt{3}$ **063** $\frac{32\sqrt{5}}{5}$ **064** 12 cm **065** ⑤ **066** ④

067 $\frac{11}{5}$ **068** ④ **069** ②, ⑤ **070** ⑤ **071** ②

072 ④ **073** ② **074** $\frac{5+\sqrt{11}}{6}$ **075** ①

076 ③ **077** $\frac{1}{2}$ **078** ③ **079** ① **080** ②

081 ① **082** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **083** ③ **084** $10\sqrt{3}$ cm

085 18 **086** ③ **087** $4\sqrt{3}$ **088** ④ **089** ③

090 ② **091** $3\sqrt{3}-4$ **092** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **093** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **094** ①

095 ⑤ **096** ③ **097** $\overline{DE}$ **098** 증가, 감소

099 ㄴ, ㄷ, ㄹ **100** ② **101** 0.3 **102** ②

103 $\sqrt{3}$ **104** ② **105** ③ **106** ⑤ **107** $\frac{9}{2}$

108 ② **109** ① **110** ⑤ **111** ②

112 $-1+\cos x$ **113** ④ **114** ② **115** ③

116 (1) 1.3431 (2) 0.4884 **117** 0.9793 **118** 30° **119** 61°

120 14.064 **121** 19.68 **122** 142.81 **123** 29.7

[잘 틀리는 유형 훈련]

124 ⑤ **125** ⑤ **126** $\frac{4}{5}$ **127** ④ **128** ④

129 ③ **130** ② **131** ① **132** ② **133** ③

134 ① **135** ③ **136** ⑤ **137** $\frac{7}{5}$

138 $1-\sin A$ **139** $\frac{1}{2}$ **140** ② **141** ③

142 ③ **143** ③

[서술형 다지기]

144 $\frac{8}{5}$ **145** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **146** $\frac{27}{20}$ **147** $4(3+\sqrt{3})$

148 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ **149** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **150** 2.25

151 $(\sqrt{3}-1)$ cm **152** $\sqrt{3}$ **153** $1+\sqrt{2}$

[최고난도 만점 문제]

154 $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ **155** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **156** ③ **157** $\sqrt{2}$ **158** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

159 $x<y$

K 삼각비의 활용

문제편 p. 33

[개념 체크]

001 $x=3$, $y=3\sqrt{3}$ **002** $x=6\sqrt{3}$, $y=3\sqrt{3}$

003 $x=4\sqrt{2}$, $y=4$ **004** $x=2\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$

005 $x=6\sqrt{2}$, $y=12$ **006** $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y=2\sqrt{2}$ **007** $2\sqrt{21}$

008 $\sqrt{5}$ **009** $2\sqrt{6}$ **010** $4\sqrt{6}$ **011** $6(3-\sqrt{3})$

012 $4\sqrt{3}$ **013** $12\sqrt{6}$ **014** $12\sqrt{2}$ **015** $6\sqrt{3}$ **016** $7\sqrt{2}$

017 $10\sqrt{2}$ **018** $18\sqrt{3}$ **019** $135\sqrt{2}$ **020** 42 **021** $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

022 $5\sqrt{3}$ **023** $20\sqrt{2}$ **024** $72\sqrt{3}$

[유형 다지기]

025 ① **026** ④ **027** ⑤ **028** 14.5 **029** ⑤

030 ⑤ **031** ⑤ **032** $36\sqrt{14}$ cm^3 **033** 96 cm^2

034 $108\sqrt{3}$ **035** $\sqrt{2}$ **036** ④ **037** ① **038** ④

039 81.52 m **040** 46.5 m **041** ④ **042** ② **043** 40 cm

044 $3+\sqrt{3}$ **045** ② **046** ② **047** $3\sqrt{6}$ **048** ⑤

049 $9(\sqrt{6}+3\sqrt{2})$ **050** ⑤ **051** 100 m **052** 100 m

053 $10\sqrt{31}$ m　**054** $50(\sqrt{3}-1)$ m

055 $4(\sqrt{3}-1)$　**056** ③　**057** $2(\sqrt{3}+1)$

058 ④　**059** $50(3-\sqrt{3})$ m　**060** $7(\sqrt{3}+1)$ m

061 $\dfrac{100}{\tan 35^\circ-\tan 15^\circ}$ m　**062** 6 m　**063** ③

064 4 cm^2　**065** $20\sqrt{3}$ cm^2　**066** ②　**067** ③

068 ④　**069** $4\sqrt{19}$ cm　**070** ②　**071** ①

072 ④　**073** ②　**074** ②　**075** ④　**076** 2.1

077 3 : 1 : 3　**078** ④　**079** $6\sqrt{3}$ cm^2

080 8 cm^2　**081** ③　**082** ④　**083** ②　**084** $3\sqrt{3}$ cm^2

085 ①　**086** ③　**087** ③　**088** ②　**089** ⑤

090 ④　**091** ③　**092** ③　**093** 4　**094** ②

095 $14\sqrt{3}$ cm^2　**096** $96\sqrt{3}$ cm^2　**097** ④

[잘 틀리는 유형 훈련]

098 ②　**099** ①, ③　**100** $72\sqrt{2}$ cm^2　**101** 48 cm^2

102 ⑤　**103** ③　**104** $150\sqrt{3}$ m　**105** $8\sqrt{3}$ m

106 12.52 m　**107** 9.5 m　**108** ③　**109** ④　**110** 30 cm^2

111 $\dfrac{35\sqrt{3}}{8}$ cm^2　**112** $\dfrac{28\sqrt{3}}{61}$　**113** ④　**114** ①

115 4　**116** ③　**117** ④　**118** $9\sqrt{3}$ cm^2

119 $(24-10\sqrt{3})$ cm^2　**120** $(3-\sqrt{3})$ km

121 14.165 km

[서술형 다지기]

122 $9(\sqrt{3}+1)$ m　**123** $4(3+\sqrt{3})$ m　**124** 1.4 m

125 $6(2-\sqrt{3})$ cm　**126** 1102 m　**127** $4(1+\sqrt{3})$ cm

128 $\dfrac{129\pi-153\sqrt{3}}{2}$　**129** 30　**130** 122 m

131 $20\sqrt{2}$ cm^2

[최고난도 만점 문제]

132 ③　**133** ⑤　**134** $2\sqrt{21}$ km　**135** $12\sqrt{3}$

136 ⑤　**137** $16\sqrt{3}$ cm^2

L 원과 직선

문제편 p. 55

[개념 체크]

001 2　**002** 90　**003** 5　**004** 4　**005** 120

006 수선　**007** 수직이등분선　**008** 3　**009** 8

010 14　**011** 3　**012** 5　**013** $\sqrt{5}$　**014** 60

015 50　**016** 100　**017** $\sqrt{11}$　**018** 8　**019** 8

020 x cm　**021** $(11-x)$ cm　**022** 6　**023** 13 cm

024 2 cm　**025** 4　**026** 6

[유형 다지기]

027 ②　**028** ③　**029** 135°　**030** ③　**031** 3 cm

032 ㄴ, ㄷ, ㄹ　**033** ③　**034** ④　**035** ②

036 15 cm　**037** 10 cm　**038** ⑤　**039** ①　**040** $8\sqrt{3}$ cm

041 ③　**042** $\dfrac{17}{3}$ cm　**043** ②　**044** ④　**045** 13π cm

046 ⑤　**047** ④　**048** $8\sqrt{3}$ cm　**049** 120°　**050** 8 cm

051 ④　**052** ⑤　**053** ③　**054** ②　**055** 62°

056 ④　**057** $4\sqrt{3}$ cm^2　**058** 130°　**059** 66°　**060** ④

061 $\dfrac{4}{3}\pi$ cm^2　**062** ③　**063** 4 cm　**064** 5　**065** ③

066 ④　**067** ⑤　**068** $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2　**069** 2π cm^2

070 ⑤　**071** 18 cm　**072** 4 cm　**073** 24 cm　**074** $\sqrt{21}$

075 ⑤　**076** 5　**077** 4 cm　**078** 6 cm　**079** ⑤

080 15　**081** 1 cm　**082** 6 cm　**083** 13 cm　**084** ③

085 13 cm　**086** 1 cm　**087** $(6-\pi)$ cm^2　**088** ⑤

089 60 cm^2　**090** 6 cm　**091** ⑤　**092** ②　**093** ⑤

094 ③　**095** ②　**096** 6 cm　**097** ④　**098** 3 cm

099 2　**100** 6 cm^2　**101** 10 cm　**102** 4 cm

103 $40(2-\sqrt{3})\pi$　**104** 2 : 1　**105** $2\sqrt{6}$ cm

[잘 틀리는 유형 훈련]

106 ③　**107** 5 cm　**108** $(12\pi-9\sqrt{3})$ cm^2　**109** 10 cm

110 ⑤　**111** $10\sqrt{3}$　**112** ②　**113** 8 cm　**114** ②

115 14 cm　**116** ③　**117** $4\sqrt{3}$ cm　**118** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm^2

119 $4(1+\sqrt{3})$ cm　**120** $(2\sqrt{3}-\pi)$ cm^2　**121** 11.56π cm^2

122 60 cm^2　**123** 11 cm　**124** $(40-8\pi)$ cm^2　**125** $24-4\pi$

126 ④　**127** 2　**128** $\dfrac{10}{3}$ cm　**129** $(16-4\pi)$ cm^2

[서술형 다지기]

130 $10\sqrt{3}$　**131** 24　**132** 7　**133** 9　**134** 18 cm

135 $4\sqrt{13}$ cm　**136** 1 cm　**137** 4π cm　**138** $\sqrt{69}$ cm

139 $\dfrac{32}{5}$

[최고난도 만점 문제]

140 26 cm　**141** $9\sqrt{2}\pi$ cm^3　**142** 30 cm^2　**143** 3π cm

144 12　**145** $\dfrac{27\sqrt{5}}{2}$ cm^2

빠른 정답 찾기

M 원주각

문제편 p. 77

[개념 체크]

001 $40°$ 002 $55°$ 003 $150°$ 004 $96°$
005 $\angle x=42°$, $\angle y=34°$ 006 $\angle x=46°$, $\angle y=85°$
007 $\angle x=30°$, $\angle y=55°$ 008 $90°$ 009 $60°$ 010 20
011 4 012 $40°$ 013 $95°$
014 $\angle x=80°$, $\angle y=110°$
015 $\angle x=65°$, $\angle y=115°$ 016 $87°$ 017 $35°$
018 ○ 019 × 020 $107°$ 021 $30°$ 022 $43°$
023 $93°$ 024 $44°$ 025 $75°$ 026 $61°$

[유형 다지기]

027 $65°$ 028 ④ 029 ④ 030 ③ 031 $115°$
032 (1) $60°$ (2) $65°$ 033 (1) $180°$ (2) $156°$ 034 $100°$
035 ③ 036 ③ 037 ② 038 ① 039 ③
040 $60°$ 041 ④ 042 (1) $\angle x=35°$ (2) $\angle y=65°$
043 ④ 044 $28°$ 045 ④ 046 ④ 047 ⑤
048 $23°$ 049 ③ 050 $8\sqrt{2}$ cm 051 $\frac{7}{5}$ 052 ③
053 $\frac{\sqrt{35}}{7}$ 054 9 055 ③ 056 $(6+2\sqrt{3})$ cm
057 ① 058 $27\sqrt{3}$ cm^2 059 ② 060 $64°$
061 ① 062 $28°$
063 $\angle A=60°$, $\angle B=80°$, $\angle C=40°$ 064 $80°$
065 ④ 066 $25°$ 067 $\frac{1}{9}$배 068 ④ 069 14π
070 ④ 071 ③ 072 ③ 073 ② 074 ⑤
075 $\angle x=112°$, $\angle y=110°$ 076 $266°$ 077 ③
078 ⑤ 079 ④ 080 ② 081 $80°$ 082 ②
083 ③ 084 ③ 085 $65°$ 086 ③ 087 ③
088 ③ 089 ⑤ 090 ④ 091 ⑤
092 ㄱ, ㄴ, ㄷ 093 ⑤ 094 (1) $92°$ (2) $95°$
095 ⑤ 096 ㄱ, ㄴ, ㅂ 097 ③ 098 ③
099 (1) $50°$ (2) $50°$ 100 ② 101 $80°$ 102 $29°$
103 ② 104 ⑤ 105 ① 106 ② 107 ④
108 5 : 13 109 ⑤ 110 ③ 111 $65°$ 112 $63°$
113 ④ 114 ① 115 $\angle x=65°$, $\angle y=65°$
116 ② 117 ③ 118 $\angle x=62°$, $\angle y=62°$ 119 ②

[잘 틀리는 유형 훈련]

120 ④ 121 ⑤ 122 ② 123 ② 124 ③
125 ③ 126 ③ 127 ④ 128 ③ 129 ⑤
130 $85°$ 131 $38°$ 132 ④ 133 ③ 134 ④
135 ④ 136 ② 137 ② 138 $\frac{32}{5}$ 139 $\frac{75}{2}$
140 ⑤ 141 ① 142 ⑤ 143 ②

[서술형 다지기]

144 $\angle x=54°$, $\angle y=38°$ 145 $\angle x=50°$, $\angle y=25°$ 146 $34°$
147 $72°$ 148 $25°$ 149 27π cm^2 150 $55°$
151 $110°$ 152 $39°$ 153 7

[최고난도 만점 문제]

154 ① 155 ② 156 ④ 157 ② 158 ⑤
159 $40°$

N 대푯값과 산포도

문제편 p. 101

[개념 체크]

001 21000원 002 7000원 003 8 004 19.4
005 15 006 $\frac{8}{15}$ 007 파랑 008 26, 27 009 없다
010 야구 011 평균 24회, 중앙값 23회, 최빈값 18회
012 시속 55 km
013 -3, 4, 6, -7, -8, -3, -1, 5, 4, 3
014 시속 0 km
015 수학 : 분산 30, 표준편차 $\sqrt{30}$점,
영어 : 분산 200, 표준편차 $10\sqrt{2}$점
016 수학 017 9점 018 1 019 1점

[유형 다지기]

020 (1) 84점 (2) 89점 021 5 022 83점 023 75.8점
024 ③ 025 51 kg 026 2편 027 ③
028 평균 8.4점, 중앙값 8.5점 029 78점 030 7시간
031 200만 원 032 ⑤ 033 ①
034 ③ 035 (1) 11 (2) 10 036 46 037 16
038 $a=1$, $b=2$ 039 평균 86점, 중앙값 88점
040 72

041 평균 10.4개, 중앙값 10개, 최빈값 5개 042 ②
043 (1) 중앙값 6.5시간, 최빈값 6시간
(2) 중앙값 6시간, 최빈값 6시간
044 25.15 045 ② 046 ① 047 ②, ④
048 평균 6.6시간, 중앙값 2.5시간, 중앙값이 대푯값으로 적절하다.
049 ② 050 ④ 051 ① 052 ④ 053 ④
054 ① 055 70점 056 63 kg 057 ③ 058 87점
059 80점 060 87 061 ⑤ 062 ① 063 3.6
064 ④ 065 216 066 ② 067 2
068 평균 20, 분산 20 069 ① 070 1
071 분산 6, 표준편차 $\sqrt{6}$ 072 $2\sqrt{3}$개 073 $\sqrt{10}$ 074 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$개
075 $\sqrt{6.8}$점 076 $-\frac{117}{2}$ 077 ⑤ 078 ④ 079 ④
080 ③ 081 $a=0$, $b=10$ 082 $\sqrt{82}$점
083 평균 75점, 분산 108 084 19.8 085 $\sqrt{26}$ kg 086 ②
087 ① 088 ⑤ 089 ① 090 ㄱ, ㄷ 091 ④
092 ㄴ, ㄷ 093 영훈 094 A, C 095 영어 096 ②
097 D

[잘 틀리는 유형 훈련]

098 13 099 $a=15$, $b=17$ 100 40 101 47
102 3, 8 103 7 104 28 105 16.9 106 142
107 99 108 2, 10 109 4, 6 110 ②
111 $a=b<c$ 112 ① 113 E, B

[서술형 다지기]

114 평균 5.7, 중앙값 6, 최빈값 9
115 평균 23.9, 중앙값 23.5, 최빈값 23
116 9 117 $2\sqrt{29}$ 118 9개
119 (1) 평균 9.8권, 중앙값 6권, 최빈값 7권 (2) 해설 참조
120 52 121 2 122 평균 80점, 분산 65 123 15

[최고난도 만점 문제]

124 ⑤ 125 22.8 126 40 127 42 128 $\sqrt{3}$
129 평균 8점, 분산 17 130 10.5
131 평균 2.5, 표준편차 $\frac{\sqrt{15}}{2}$

0 산점도와 상관관계

문제편 p. 121

[개념 체크]

001 80, 80 002 80점 003 80점 004 4명 005 3명
006 3명 007 ① 008 ③ 009 ②, ④
010 음의 상관관계 011 음의 상관관계
012 양의 상관관계

[유형 다지기]

013 해설 참조 014 해설 참조
015 해설 참조 016 해설 참조 017 ③
018 ④ 019 ④ 020 ② 021 ③ 022 ②
023 ⑤ 024 ④ 025 ② 026 ③ 027 ⑤
028 ⑤ 029 ① 030 B 031 ③ 032 ③, ⑤
033 ⑤ 034 ④ 035 ③ 036 3.5점 037 ②
038 ④ 039 4.3시간 040 ④ 041 ② 042 ③, ④
043 ③ 044 ② 045 ⑤

[잘 틀리는 유형 훈련]

046 4.7점 047 ③ 048 ④ 049 46.7 % 050 ①
051 45 % 052 8명 053 ② 054 ⑤ 055 ②

[서술형 다지기]

056 92.5점 057 8점 058 35 % 059 14
060 6명, 61.7점 061 50 % 062 해설 참조
063 해설 참조

[최고난도 만점 문제]

064 ㄷ 065 ③, ⑤ 066 ③ 067 ④ 068 ③

J 삼각비

개념 체크 001~051 정답은 p. 2에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

p. 14

052 답 ②

$\sin A=\frac{a}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$, $\tan A=\frac{a}{b}$

따라서 옳은 것은 ②야.

오답피하기

어떤 각에 대하여 sin, cos, tan의 값을 구할 때 그 각에 따라 밑변과 높이가 바뀜에 주의해야 해.

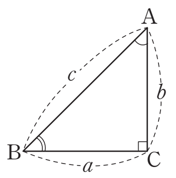
이 문제에서 $\sin A=\frac{b}{c}$, $\cos A=\frac{a}{c}$, $\tan A=\frac{b}{a}$로 구했다면

$\sin A=\frac{(\text{높이})}{(\text{빗변의 길이})}$, $\cos A=\frac{(\text{밑변의 길이})}{(\text{빗변의 길이})}$,

$\tan A=\frac{(\text{높이})}{(\text{밑변의 길이})}$로 정의되어 있는 것을 제대로 이해하지 못했다는 거야.

어떤 각을 기준으로 하느냐에 따라 밑변과 높이의 의미가 달라지기 때문이지.

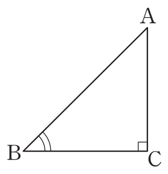
예를 들어, 이 문제의 직각삼각형 ABC에서 ∠B를 기준으로 보면 빗변의 길이는 c, 밑변은 a, 높이는 b가 되겠지만, ∠A를 기준으로 보면 빗변의 길이는 c, 밑변은 b, 높이는 a가 된다는 거지.



따라서 어떤 각이 기준이냐에 따라 sin, cos, tan의 값이 달라지니까 주의하자.

053 답 ④

직각삼각형 ABC에서 A를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{AC}$, 높이는 $\overline{BC}$지?



① $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ (거짓)

③ $\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ (거짓)

⑤ $\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ (거짓)

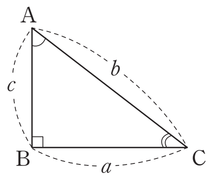
이번엔 직각삼각형 ABC에서 B를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{BC}$, 높이는 $\overline{AC}$지?

② $\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ (거짓)

④ $\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ (참)

054 답 $\frac{c^2}{b^2}$

직각삼각형 ABC에서 A를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AC}$, 밑변은 $\overline{AB}$, 높이는 $\overline{BC}$이므로 $\sin A=\frac{a}{b}$, $\cos A=\frac{c}{b}$



또, 직각삼각형 ABC에서 C를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AC}$, 밑변은 $\overline{BC}$, 높이는 $\overline{AB}$이므로 $\tan C=\frac{c}{a}$

$\therefore \sin A\times\cos A\times\tan C=\frac{a}{b}\times\frac{c}{b}\times\frac{c}{a}=\frac{c^2}{b^2}$

055 답 ⑤

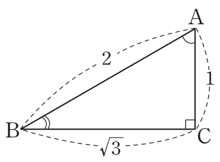
직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$

$2^2=(\sqrt{3})^2+\overline{AC}^2$

$\overline{AC}^2=1 \quad \therefore \overline{AC}=1$

직각삼각형 ABC에서 A를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{AC}$, 높이는 $\overline{BC}$이므로



① $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (참)

③ $\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}$ (참)

⑤ $\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$ (거짓)

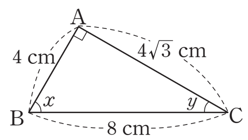
또, 직각삼각형 ABC에서 B를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{BC}$, 높이는 $\overline{AC}$이므로

② $\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}$ (참)

④ $\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (참)

056 답 ②

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면



$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$8^2=4^2+\overline{AC}^2$

$\overline{AC}^2=48 \quad \therefore \overline{AC}=4\sqrt{3}$ cm

직각삼각형 ABC에서 $\angle B=x$를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{BC}$, 밑변은 $\overline{AB}$, 높이는 $\overline{AC}$이므로

$\tan x=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$

직각삼각형 ABC에서 $\angle C=y$를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{BC}$, 밑변은 $\overline{AC}$, 높이는 $\overline{AB}$이므로

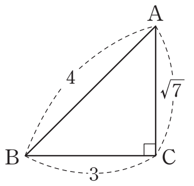
$\tan y=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \tan x+\tan y=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

057 답 ②

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

$4^2=3^2+\overline{AC}^2$, $\overline{AC}^2=7$ $\quad\therefore \overline{AC}=\sqrt{7}$



직각삼각형 ABC에서 B를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{BC}$, 높이는 $\overline{AC}$이므로

$\sin B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos B=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{4}$,

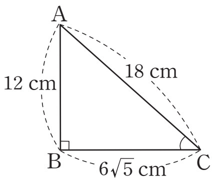
$\tan B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}+\dfrac{3}{4}\right)\times\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}-1\right)=\dfrac{\sqrt{7}+3}{4}\times\dfrac{\sqrt{7}-3}{3}$

$=\dfrac{(\sqrt{7})^2-3^2}{12}=-\dfrac{2}{12}=-\dfrac{1}{6}$

058 답 ⑤

직각삼각형 ABC에서 C를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AC}$, 밑변은 $\overline{BC}$, 높이는 $\overline{AB}$이므로 $\sin C=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$



이때, $\overline{AC}=18\,\text{cm}$, $\sin C=\dfrac{2}{3}$이므로

$\dfrac{\overline{AB}}{18}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \overline{AB}=\dfrac{2}{3}\times18=12\,(\text{cm})$

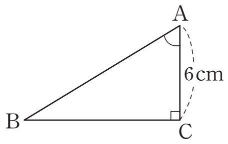
직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, $18^2=12^2+\overline{BC}^2$

$\overline{BC}^2=324-144=180$ $\quad\therefore \overline{BC}=6\sqrt{5}\,(\text{cm})$

059 답 ④

직각삼각형 ABC에서 A를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{AC}$, 높이는 $\overline{BC}$이므로 $\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$



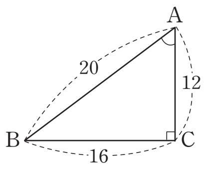
이때, $\tan A=\dfrac{3}{2}$, $\overline{AC}=6\,\text{cm}$이므로

$\dfrac{\overline{BC}}{6}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \overline{BC}=\dfrac{3}{2}\times6=9\,(\text{cm})$

060 답 ②

직각삼각형 ABC에서 A를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{AC}$, 높이는 $\overline{BC}$이므로 $\cos A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$



이때, $\cos A=\dfrac{3}{5}$, $\overline{AB}=20$이므로

$\dfrac{\overline{AC}}{20}=\dfrac{3}{5}$ $\quad\therefore \overline{AC}=\dfrac{3}{5}\times20=12$

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

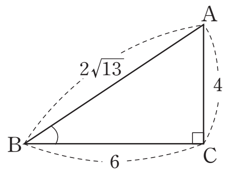
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$, $20^2=\overline{BC}^2+12^2$

$\overline{BC}^2=400-144=256$ $\quad\therefore \overline{BC}=16$

061 답 ⑤

직각삼각형 ABC에서 B를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{BC}$, 높이는 $\overline{AC}$이므로 $\tan B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

이때, $\tan B=\dfrac{2}{3}$, $\overline{AC}=4$이므로



$\dfrac{4}{\overline{BC}}=\dfrac{2}{3}$, $2\overline{BC}=12$

$\therefore \overline{BC}=6$

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=4^2+6^2=52$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=2\sqrt{13}+6+4=10+2\sqrt{13}$

062 답 $4+4\sqrt{3}$

직각삼각형 ABC에서 A를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{AC}$, 높이는 $\overline{BC}$이므로 $\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BC}}{8}$

또, 직각삼각형 ABC에서 B를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{BC}$, 높이는 $\overline{AC}$이므로

$\sin B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AC}}{8}$

$\therefore \sin A+\sin B=\dfrac{\overline{BC}+\overline{AC}}{8}$

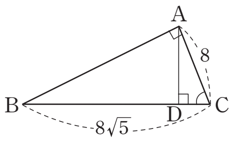
그런데 $\sin A+\sin B=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$이므로

$\dfrac{\overline{BC}+\overline{AC}}{8}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{BC}+\overline{AC}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\times8=4+4\sqrt{3}$

063 답 $\dfrac{32\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 ABC에서 C를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{BC}$, 밑변은 $\overline{AC}$, 높이는 $\overline{AB}$이므로



$\cos C=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

그런데 $\overline{AC}=8$, $\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로 $\dfrac{8}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

즉, $\sqrt{5}\,\overline{BC}=40$ $\quad\therefore \overline{BC}=\dfrac{40}{\sqrt{5}}=\dfrac{40\sqrt{5}}{5}=8\sqrt{5}$

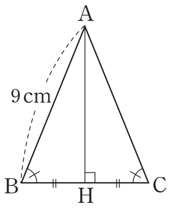
또, 직각삼각형 ADC에서 C를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AC}$, 밑변은 $\overline{CD}$, 높이는 $\overline{AD}$이므로

$\cos C=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \overline{CD}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\overline{AC}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times8=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \overline{BD}=\overline{BC}-\overline{CD}=8\sqrt{5}-\dfrac{8\sqrt{5}}{5}=\dfrac{32\sqrt{5}}{5}$

064 답 12 cm



$\angle B=\angle C$이므로 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이야.
그림과 같이 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.
직각삼각형 ABH에서 B를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{BH}$, 높이는 $\overline{AH}$이므로 $\cos B=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}$ 지?

그런데 $\overline{AB}=9$ cm, $\cos B=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{\overline{BH}}{9}=\frac{2}{3}$

$\therefore \overline{BH}=\frac{2}{3}\times 9=6(\text{cm})$

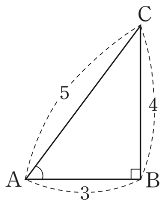
이때, 이등변삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선 AH는 $\overline{BC}$를 이등분하지?

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BH}=2\times 6=12(\text{cm})$

오답피하기

$\triangle ABC$가 직각삼각형이 아니므로 삼각비를 구할 수 없어. 이때, $\angle B$에 대한 삼각비의 값을 이용해야 하니까 이 각의 크기는 그대로 두어야겠지? 따라서 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 수선의 발을 내려 직각삼각형을 만들자. 삼각비는 '직각삼각형'의 두 변의 길이의 비임을 꼭 기억하자.

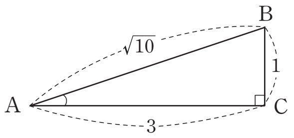
065 답 ⑤



주어진 조건 $\sin A=\frac{4}{5}$를 만족시키는 직각삼각형 ABC를 그리면 그림과 같지?
직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$에서
$5^2=\overline{AB}^2+4^2$, $\overline{AB}^2=9$
$\therefore \overline{AB}=3$

$\therefore \cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{3}{5}$

066 답 ④



주어진 조건 $\tan A=\frac{1}{3}$을 만족시키는 직각삼각형 ABC를 그리면 그림과 같지?
직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=3^2+1^2=10$
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{10}$

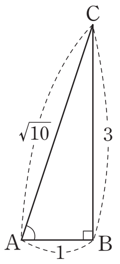
$\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\therefore \cos A+\sin A=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

오답피하기

$\tan A=\frac{1}{3}$을 그림과 같이 $\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=1$로 놓는 것이 조건을 만족시키는 특수한 삼각형 하나를 잡아서 푸는 거라면 $\overline{AC}=3k$, $\overline{BC}=k(k>0$인 상수)로 놓고 푸는 것은 가능한 모든 삼각형에 대하여 정확하게 푸는 거야. 하지만 어차피 삼각비가 비에 대한 것이기 때문에 k를 빼고 풀어도 상관은 없어. 만약 서술형이라면 $k>0$인 상수로 놓고 풀어야 만점짜리 답안이 되겠지?

067 답 $\frac{11}{5}$



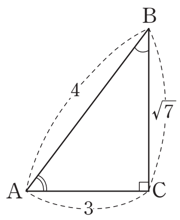
주어진 조건 $\tan A=3=\frac{3}{1}$을 만족시키는 직각삼각형 ABC를 그리면 그림과 같지?
직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=1^2+3^2=10$
$\therefore \overline{AC}=\sqrt{10}$

따라서 $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$이 되지?

$$\therefore \frac{3\sin A+2\cos A}{2\sin A-\cos A}=\frac{3\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+2\times\frac{\sqrt{10}}{10}}{2\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{10}}{10}}=\frac{\frac{11\sqrt{10}}{10}}{\frac{5\sqrt{10}}{10}}=\frac{11}{5}$$

068 답 ④



$\angle C=90^\circ$이고, 주어진 조건 $\cos A=\frac{3}{4}$을 만족시키는 직각삼각형 ABC를 그리면 그림과 같아. 직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$
$4^2=\overline{BC}^2+3^2$
$\overline{BC}^2=7$ $\quad\therefore \overline{BC}=\sqrt{7}$
직각삼각형 ABC에서 B를 기준으로 생각하면 빗변은 $\overline{AB}$, 밑변은 $\overline{BC}$, 높이는 $\overline{AC}$이므로

$\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{4}$

$\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan B=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{3}{\sqrt{7}}$

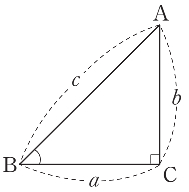
$\therefore \sin B\times\cos B\times\tan B=\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{9}{16}$

오|답|피|하|기

$\sin A=\dfrac{a}{c}$, $\cos A=\dfrac{b}{c}$, $\tan A=\dfrac{a}{b}$

이므로

$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ 이지?



많이 쓰이는 거니까 꼭 기억해 놓자.

참고로 $\tan(90^\circ-A)=\dfrac{1}{\tan A}$, $\cos(90^\circ-A)=\sin A$,

$\sin(90^\circ-A)=\cos A$가 됨을 알아 두자.

069 답 ②, ⑤

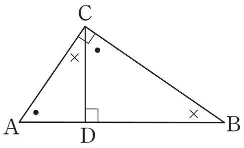
그림과 같이 직각삼각형 ABC에서

$\angle C=90^\circ$이고 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$이므로

$\angle A=\angle BCD$, $\angle ACD=\angle B$

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle CBD \backsim \triangle ACD$

(AA 닮음)



직각삼각형 ABC에서

$\cos A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

또, 직각삼각형 CDB에서

$\cos(\angle BCD)=\cos A=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$ ←⑤

그리고 직각삼각형 ADC에서

$\cos A=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$ ←②

오|답|피|하|기

$\angle A=\angle BCD$, $\angle ACD=\angle B$가 되는 이유?

$\triangle ABC$에서 $\angle A=\bullet$, $\angle B=\times$로 놓자.

$\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 항상 180°이므로

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

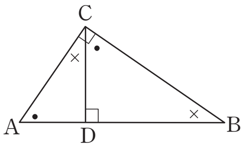
그런데 $\angle C=90^\circ$이므로

$\angle A+\angle B=\bullet+\times=90^\circ$

$\therefore \times=90^\circ-\bullet$ ⋯ ㉠ 또는 $\bullet=90^\circ-\times$ ⋯ ㉡

이때, $\triangle BCD$의 세 내각의 크기의

합이 180°이므로



$\angle B+\angle BCD+\angle CDB=180^\circ$

$\times+\angle BCD+90^\circ=180^\circ$

$\therefore \angle BCD=90^\circ-\times=\bullet$ (∵ ㉡)

$=\angle A$

또, $\triangle ACD$의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

$\angle A+\angle ACD+\angle CDA=180^\circ$

$\bullet+\angle ACD+90^\circ=180^\circ$

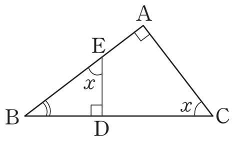
$\therefore \angle ACD=90^\circ-\bullet=\times$ (∵ ㉠) $=\angle B$

070 답 ⑤

$\triangle ABC$와 $\triangle DBE$에서 $\angle B$는 공통, $\angle A=\angle EDB=90^\circ$이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$ (AA 닮음)

$\overline{CA}:\overline{BC}=\overline{ED}:\overline{BE}$이므로



$\dfrac{\overline{CA}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{BE}}$ ⋯ ㉠

$\therefore \cos x=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{BE}}$ (∵ ㉠)

[다른 풀이]

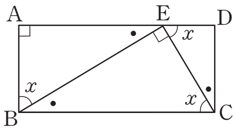
$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$(AA 닮음)이므로 $\angle BED=\angle BCA=x$

$\therefore \cos x=\cos(\angle BCA)=\cos(\angle BED)=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{BE}}$

071 답 ②

$\triangle ABE$에서 $\angle ABE=x$, $\angle AEB=\bullet$

로 놓으면



$\angle ABE+\angle AEB=x+\bullet=90^\circ$

$\therefore x=90^\circ-\bullet$ 또는 $\bullet=90^\circ-x$

각의 크기가 x와 $\bullet$인 것을 찾으면 그림과 같아.

$\therefore \angle ABE=\angle BCE=\angle CED=x$

ㄱ. $\triangle BCE$에서 $\sin x=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$ (참)

ㄴ. $\triangle DEC$에서 $\sin x=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$ (참)

ㄷ. $\triangle ABE$에서 $\sin x=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$ (거짓)

따라서 〈보기〉에서 $\sin x$를 나타내는 것은 ㄱ, ㄴ이야.

072 답 ④

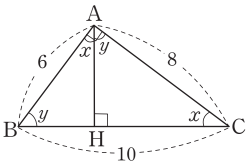
직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=6^2+8^2=100$ $\quad\therefore \overline{BC}=10$

$\angle BAC=\angle BAH+\angle CAH=x+y=90^\circ$이므로

$\angle ABC=y$, $\angle ACB=x$

직각삼각형 ABC에서



$\sin x=\sin(\angle ACB)=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

$=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

$\sin y=\sin(\angle ABC)=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \sin x+\sin y=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{7}{5}$

073 답 ②

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$5^2=4^2+\overline{AC}^2$

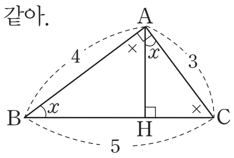
$\overline{AC}^2=9$ $\quad\therefore \overline{AC}=3$

$\angle CAH=x$로 놓았지?

이때, $\angle BAH=\times$라 하면

$\angle BAC=\angle BAH+\angle CAH=\times+x=90^\circ$

각의 크기가 x와 $\times$인 것을 찾으면 그림과 같아.



$\therefore \angle B=x$

따라서 직각삼각형 ABC에서

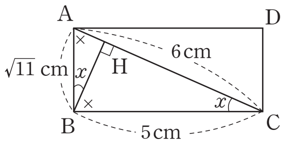
$\tan x=\tan B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{4}$

오|답|피|하|기

직각삼각형에서의 닮음을 상기시킬 필요가 있어. 직각삼각형의 닮음으로 유도한 여러 가지 공식들 다 기억하고 있니? 위의 그림에서
$\overline{AC}^2=\overline{CH}\times\overline{BC}$, $\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$, $\overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{CH}$
임을 확실하게 알고 있어야 해. 그리고 문제에서 주어진 각 x는 직각삼각형의 성질을 이용하여 $\angle ABH$의 크기와 같다는 것을 알 수 있지?
따라서 $\overline{AC}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이고, $\tan x=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$임을 알 수 있어.

074 답 $\dfrac{5+\sqrt{11}}{6}$

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=(\sqrt{11})^2+5^2=36$ $\quad\therefore \overline{AC}=6\,(\text{cm})$
이때, $\angle CBH=\times$라 하면



$\angle ABC=\angle ABH+\angle CBH$
$\qquad\quad =x+\times=90^\circ$
각의 크기가 x와 $\times$인 것을 찾으면 그림과 같지?
즉, $\angle ACB=x$야.
직각삼각형 ABC에서

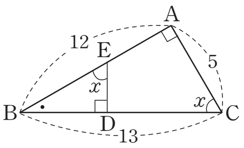
$\cos x=\cos(\angle ACB)=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{5}{6}$

$\sin x=\sin(\angle ACB)=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

$\therefore \cos x+\sin x=\dfrac{5}{6}+\dfrac{\sqrt{11}}{6}=\dfrac{5+\sqrt{11}}{6}$

075 답 ①

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=12^2+5^2=169$
$\therefore \overline{BC}=13$
$\triangle ABC$, $\triangle DBE$에서



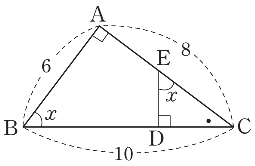
$\angle BAC=\angle BDE=90^\circ$,
$\angle B$는 공통이므로 두 삼각형은 AA 닮음이야.
$\therefore \angle C=x$
직각삼각형 ABC에서

$\sin x-\cos x=\sin C-\cos C=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}-\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

$\qquad\qquad\qquad =\dfrac{12}{13}-\dfrac{5}{13}=\dfrac{7}{13}$

076 답 ③

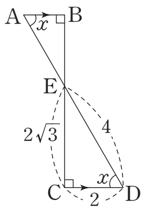
직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면



$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=6^2+8^2=100$
$\therefore \overline{BC}=10$
$\triangle ABC$, $\triangle DEC$에서
$\angle BAC=\angle EDC=90^\circ$,
$\angle C$는 공통이므로 두 삼각형은 AA 닮음이야.
$\therefore \angle B=x$
직각삼각형 ABC에서

$\sin x=\sin B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$

077 답 $\dfrac{1}{2}$



$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$, $\overline{AB}\perp\overline{BC}$이므로 $\angle B=\angle C=90^\circ$
이고, $\angle AEB=\angle DEC$ ($\because$ 맞꼭지각)이므로
$\triangle ABE\sim\triangle DCE$ (AA 닮음)
$\therefore \angle EAB=\angle EDC=x$
직각삼각형 CDE에 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{ED}^2=\overline{CD}^2+\overline{CE}^2$이므로
$4^2=\overline{CD}^2+(2\sqrt{3})^2$
$\overline{CD}^2=4$ $\quad\therefore \overline{CD}=2$

$\therefore \cos x=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DE}}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

078 답 ③

$\sin 45^\circ\div\cos 45^\circ+\tan 30^\circ\times\cos 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\div\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

★ **특수각에 대한 삼각비 중 sin과 cos을 쉽게 외워보자.**
sin 하나만 기억하면 cos은 저절로 외워질 수 있어. 특수한 각의 삼각비를 다음과 같이 생각해보자.

삼각비 \ A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	$\dfrac{\sqrt{0}}{2}$ $(=0)$	$\dfrac{\sqrt{1}}{2}$ $\left(=\dfrac{1}{2}\right)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{4}}{2}$ $(=1)$
$\cos A$	$\dfrac{\sqrt{4}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{1}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan A$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	정할 수 없다.

위의 표에서 특수각을 0°, 30°, 45°, 60°, 90°라 하자.
$\sin A$의 값은 $\dfrac{\sqrt{\square}}{2}$의 $\square$에 0, 1, 2, 3, 4를 대입한 값이 되고 있지? $\cos A$의 값은 $\dfrac{\sqrt{\square}}{2}$의 $\square$에 거꾸로 4, 3, 2, 1, 0을 대입한 값이 되고, $\tan A$는 30°부터 60°까지 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$에 $\sqrt{3}$을 차례로 곱한 값이 되는 거야. 이렇게 기억하면 쉽게 기억할 수 있어.

079 답 ①

① $\sin 30^\circ+\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ (참)

② $\cos 30^\circ\times\tan 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}$ (거짓)

③ $\sin 60^\circ\times\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{4}$ (거짓)

④ $\tan 45^\circ\div\sin 45^\circ=1\div\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (거짓)

⑤ $\tan 60^\circ - \cos 45^\circ = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (거짓)

080 답 ②

$\cos 30^\circ + \sin 30^\circ + \tan 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

081 답 ①

$$\frac{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{1}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{2}$$

082 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos^2 30^\circ - \sin 60^\circ \times \tan x + \sin^2 45^\circ = \frac{3}{4}$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \tan x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \tan x + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \times \tan x = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{2}{4}$

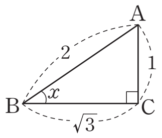
$-\frac{\sqrt{3}}{2} \times \tan x = -\frac{1}{2}$

양변에 -2를 곱해 주면

$\sqrt{3} \tan x = 1$

$\therefore \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

이를 만족시키는 직각삼각형 ABC를 그리면 B를 기준으로 밑변의 길이가 $\sqrt{3}$, 높이가 1이므로 피타고라스 정리에 의해



$\overline{AB} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore \cos x = \frac{(\text{밑변})}{(\text{빗변의 길이})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

오답피하기

삼각비의 제곱의 값을 표현하는 데 혼동하기 쉬워. 즉, ∠A에 대하여

$\sin^2 A = (\sin A)^2 = \sin A \times \sin A$

$\sin A^2 = \sin(A^2) = \sin(A \times A)$

$\sin^2 A$와 $\sin A^2$을 헷갈려서 계산하면 전혀 다른 값이 나오므로 주의하자.

★ 특수각에 대한 삼각비의 값

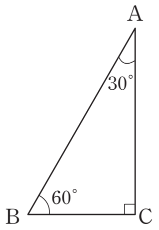
삼각비 \ A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

083 답 ③

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°지?

삼각형의 세 내각의 크기의 비가

∠A : ∠B : ∠C = 1 : 2 : 3이므로



$\angle A = 180^\circ \times \frac{1}{1+2+3} = 30^\circ$

$\angle B = 180^\circ \times \frac{2}{1+2+3} = 60^\circ$

$\angle C = 180^\circ \times \frac{3}{1+2+3} = 90^\circ$

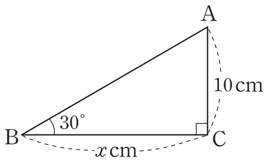
따라서 직각삼각형 ABC에서

$\sin B = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sin B \times \tan A = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

084 답 $10\sqrt{3}$ cm

그림의 30°를 기준으로 높이인 $\overline{AC} = 10$ cm와 밑변인 $\overline{BC} = x$ cm의 관계는 tan로 표현할 수 있지?



$\tan 30^\circ = \frac{10}{x}$

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$

$\therefore x = 10\sqrt{3}$, $\overline{BC} = 10\sqrt{3}$ cm

[다른 풀이]

특수한 각을 갖는 직각삼각형의 변의 길이의 비를 이용해볼까?

직각이 아닌 한 각의 크기가 30° 또는 60°일 때, 길이가 짧은 변부터 순서대로 $1 : \sqrt{3} : 2$의 길이 비를 갖지?

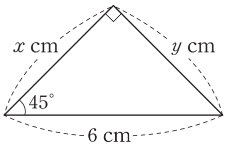
$\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : \sqrt{3}$, $10 : \overline{BC} = 1 : \sqrt{3}$

$\therefore \overline{BC} = 10\sqrt{3}$ cm

085 답 18

주어진 조건은 한 내각의 크기가 45°인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이가 6 cm라는 거야.

먼저, 그림의 45°를 기준으로 x는 밑변, 6은 빗변의 길이가 되므로 cos을 표현할 수 있지? $\cos 45^\circ = \frac{x}{6}$



$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\frac{x}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \therefore x = 3\sqrt{2}$

또, 그림의 45°를 기준으로 y는 높이, 6은 빗변의 길이가 되므로 sin을 표현할 수 있지? $\sin 45^\circ = \frac{y}{6}$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\frac{y}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \therefore y = 3\sqrt{2}$

$\therefore xy = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 18$

[다른 풀이]

특수한 각을 갖는 직각삼각형의 변의 길이의 비를 이용해볼까?
직각이 아닌 한 각의 크기가 45°일 때, 길이가 짧은 변부터 순서대로 $1:1:\sqrt{2}$의 길이 비를 갖지?

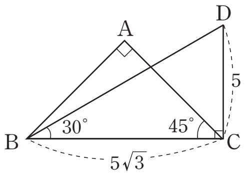
$y:6=1:\sqrt{2}$, $\sqrt{2}y=6$

$\therefore y=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$, $x=y=3\sqrt{2}$

$\therefore xy=3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=18$

086 답 ③

직각삼각형 BCD에서 30°를 기준으로 공통인 변 BC는 밑변, $\overline{\mathrm{CD}}$는 높이이므로 tan를 표현할 수 있지?



$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{5}{\overline{\mathrm{BC}}}$

$\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\dfrac{5}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{BC}}=5\sqrt{3}$

또, 직각삼각형 ABC에서 45°를 기준으로 $\overline{\mathrm{BC}}$는 빗변, $\overline{\mathrm{AB}}$는 높이이므로 sin으로 표현할 수 있지? $\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{5\sqrt{3}}$

$\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{5\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

[다른 풀이]

특수한 각을 갖는 직각삼각형의 변의 길이의 비를 이용해볼까?
직각이 아닌 한 각의 크기가 45°일 때, 길이가 짧은 변부터 순서대로 $1:1:\sqrt{2}$의 길이 비를 갖고, 직각이 아닌 한 각의 크기가 30° 또는 60°일 때 길이가 짧은 변부터 순서대로 $1:\sqrt{3}:2$의 길이 비를 갖지?

△BCD에서 $\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{3}:1$

$\overline{\mathrm{BC}}:5=\sqrt{3}:1$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{BC}}=5\sqrt{3}$

△ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}:5\sqrt{3}=1:\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

087 답 $4\sqrt{3}$

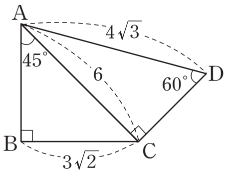
먼저 공통인 변 AC의 길이를 구하자. 직각삼각형 ABC에서 45°를 기준으로 $\overline{\mathrm{BC}}$는 높이, $\overline{\mathrm{AC}}$는 빗변이므로 sin으로 표현할 수 있지?

$\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{AC}}}$

$\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\dfrac{3\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=6$

또, 직각삼각형 ACD에서 60°를 기준으로 $\overline{\mathrm{AD}}$는 빗변, $\overline{\mathrm{AC}}$는 높이이므로 sin으로 표현할 수 있지?



$\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{6}{\overline{\mathrm{AD}}}$

$\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\dfrac{6}{\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=4\sqrt{3}$

[다른 풀이]

△ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}:1$

$\overline{\mathrm{AC}}:3\sqrt{2}=\sqrt{2}:1$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$

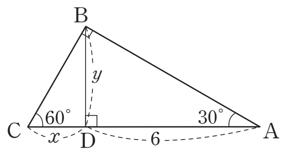
△ACD에서 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{AD}}:6=2:\sqrt{3}$, $\sqrt{3}\,\overline{\mathrm{AD}}=12$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=\dfrac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$

088 답 ④

먼저 △ABD에서 y의 값을 구하자.
직각삼각형 ABD에서 30°를 기준으로 $\overline{\mathrm{AD}}$는 밑변, $\overline{\mathrm{BD}}$는 높이이므로 tan로 표현할 수 있지?



$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{y}{6}$

$\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\dfrac{y}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore y=2\sqrt{3}$

직각삼각형 ABC에서

$\angle\mathrm{C}=180^\circ-(\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B})=180^\circ-(30^\circ+90^\circ)=60^\circ$

직각삼각형 BCD에서 60°를 기준으로 $\overline{\mathrm{CD}}$는 밑변, $\overline{\mathrm{BD}}$는 높이이므로 tan로 표현할 수 있지? $\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{CD}}}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{3}}{x}$

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로 $\dfrac{2\sqrt{3}}{x}=\sqrt{3}$

$\therefore x=2$

$\therefore xy=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

[다른 풀이]

△ABD에서 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{3}:1$

$6:y=\sqrt{3}:1$

$\therefore y=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

△BCD에서 $\angle\mathrm{C}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{BD}}=1:\sqrt{3}$

$x:2\sqrt{3}=1:\sqrt{3}$ $\quad\therefore x=2$

$\therefore xy=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

089 답 ③

직선 $x-\sqrt{3}y+6\sqrt{3}=0$의 기울기가 $\tan a$의 값과 같지?

$x-\sqrt{3}y+6\sqrt{3}=0$, $-\sqrt{3}y=-x-6\sqrt{3}$

$\therefore y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+6$

따라서 주어진 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\tan a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

[다른 풀이]

$\tan a=\dfrac{(y\text{절편의 절댓값})}{(x\text{절편의 절댓값})}$

$x-\sqrt{3}y+6\sqrt{3}=0$의 x절편은 $y=0$을 대입하여 구하자.

$x+6\sqrt{3}=0$ $\quad\therefore x=-6\sqrt{3}$, ($x$절편의 절댓값)$=6\sqrt{3}$

또, $x-\sqrt{3}y+6\sqrt{3}=0$의 y절편은 $x=0$을 대입하여 구하자.

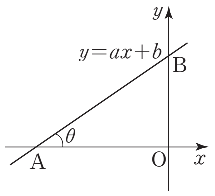
$-\sqrt{3}y+6\sqrt{3}=0$ $\quad\therefore y=6$, (y절편의 절댓값)$=6$

$\therefore \tan a=\dfrac{6}{6\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

오답피하기

직선 $y=ax+b(a\neq0)$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, $\tan\theta=$(직선의 기울기)가 됨을 살펴 볼까?

직선 $y=ax+b$와 x축, y축과의 교점을 각각 A, B라 하자.



직각삼각형 AOB에서

$\tan\theta=\dfrac{\overline{BO}}{\overline{AO}}$ … ㉠

직선 $y=ax+b$에서 기울기는 a이므로

$a=\dfrac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=\dfrac{(y\text{절편의 절댓값})}{(x\text{절편의 절댓값})}$이고

x, y의 값의 증가량이나 절편의 절댓값은 각각 $\overline{AO}$, $\overline{BO}$이지?

즉, $a=\dfrac{\overline{BO}}{\overline{AO}}$ … ㉡

그러므로 ㉠=㉡이 성립해.

090 답 ②

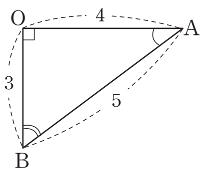
일차함수 $3x-4y=12$의 그래프와 x축, y축과의 교점이 각각 A, B이지?

두 점 A, B의 좌표를 각각 구하자.

직선 $3x-4y=12$의 x절편, y절편을 구하기 위해 $y=0$, $x=0$을 각각 대입하면 $x=4$, $y=-3$이야.

따라서 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -3)$이지?

즉, $\triangle$AOB에서 $\overline{OA}=4$, $\overline{OB}=3$이고 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AB}=5$야.



$\sin A=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{5}$,

$\sin B=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \sin A-\sin B=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{1}{5}$

오답피하기

$\sin A$와 $\sin B$를 구할 때, 주의할 점이 있어.

똑같은 sin이지만 결정적으로 A, B가 다르다라는 거야.

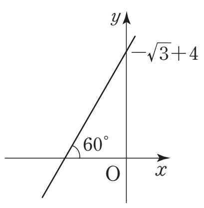
$\sin A$는 A라는 각을 기준으로 생각해야 하기 때문에 빗변은 $\overline{AB}$이고, 높이는 $\overline{OB}$가 되는데, $\sin B$는 B라는 각을 기준으로 생각해야 하기 때문에 빗변은 $\overline{AB}$로 같지만, 높이는 $\overline{OA}$가 되는 거야.

091 답 $3\sqrt{3}-4$

직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이므로 기울기는 $\tan 60^\circ$야.

직선 $y+a=bx+\sqrt{3}$, 즉

$y=bx+\sqrt{3}-a$에서 기울기는 x의 계수인 b이므로



$b=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

또, 주어진 직선의 y절편이 $\sqrt{3}-a$가 되겠지?

그런데 y절편이 $-\sqrt{3}+4$이므로

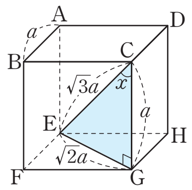
$-a+\sqrt{3}=-\sqrt{3}+4 \qquad \therefore a=2\sqrt{3}-4$

$\therefore a+b=(2\sqrt{3}-4)+\sqrt{3}=3\sqrt{3}-4$

092 답 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하자.

두 점 E, G를 연결하면 $\triangle$EGH는 한 변의 길이가 $a(a>0)$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{EG}=\sqrt{2}a$가 되겠지?

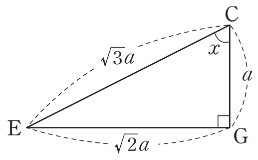


$\triangle$CEG는 $\angle$EGC$=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{EC}^2=\overline{EG}^2+\overline{CG}^2=(\sqrt{2}a)^2+a^2=3a^2$

$\therefore \overline{EC}=\sqrt{3}a$

따라서 직각삼각형 CEG에서



$\sin x=\dfrac{\overline{EG}}{\overline{CE}}=\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}$

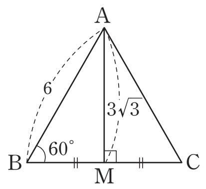
$=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

093 답 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

정사면체의 각 면은 한 변의 길이가 6인 정삼각형이지?

정삼각형 ABC에서 $\overline{BC}$의 중점이 M이므로 $\overline{AM}$은 $\overline{BC}$를 수직이등분해.

따라서 $\angle$ABM$=60^\circ$이므로 직각삼각형 ABM에서

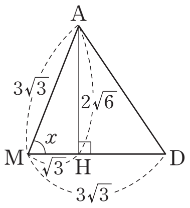


$\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AM}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{AM}=3\sqrt{3}$

이때, 점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이고 $\overline{DM}=\overline{AM}=3\sqrt{3}$이므로



$\overline{MH}=\dfrac{1}{3}\overline{DM}=\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{3}=\sqrt{3}$

또, 직각삼각형 AMH에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AM}^2=\overline{MH}^2+\overline{AH}^2$

$(3\sqrt{3})^2=(\sqrt{3})^2+\overline{AH}^2$

$\overline{AH}^2=24$

$\therefore \overline{AH}=2\sqrt{6}$

$\therefore \sin x=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AM}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

[다른 풀이]

정사면체의 한 변의 길이를 a라 하면

높이는 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$이지? $a=6$이므로

정사면체의 높이 $\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times6=2\sqrt{6}$

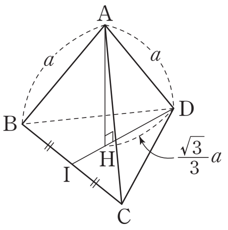
$\therefore \sin x=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AM}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\dfrac{6\sqrt{2}}{9}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

★ 정사면체에서 알아야 할 것들

정사면체의 변의 길이를 파헤쳐 보자.

한 모서리의 길이가 a인 정사면체에 대하여 모든 면이 정삼각형으로 이루어져 있으므로



① 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\overline{DI}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

② 정사면체의 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발은 밑면의 무게중심이므로

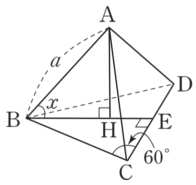
$$\overline{DH}=\frac{2}{3}\overline{DI}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

③ 정사면체의 높이

$$\overline{AH}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

094 답 ①

$\overline{BH}$를 연장하여 $\overline{DC}$와 만나는 점을 E라 하면 $\overline{BE}\perp\overline{DC}$



그림과 같이 정사면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 △BCD는 한 변의 길이가 a인 정삼각형이므로 ∠BCE=60°가 되지?

$\sin 60^\circ=\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\overline{BE}}{a}$ $\quad\therefore \overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

이때, 점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이므로

$\overline{BH}=\frac{2}{3}\overline{BE}$ $\quad\therefore \overline{BH}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

한편, 직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$에서

$a^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\overline{AH}^2$, $\overline{AH}^2=\frac{2}{3}a^2$ $\quad\therefore \overline{AH}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

$$\therefore \tan x=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

[다른 풀이]

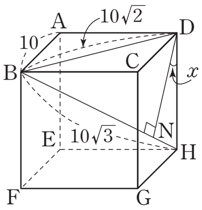
정사면체의 한 변의 길이를 a라 하면 높이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$지?

$\overline{BH}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$이고, $\overline{AH}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$이므로 삼각형 ABH에서

$$\tan x=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

095 답 ⑤

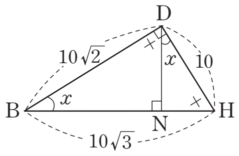
주어진 정육면체의 한 모서리의 길이가 10이라고 했지?



△ABD는 직각이등변삼각형이고, $\overline{AB}=10$이므로

$\overline{BD}=10\sqrt{2}$

그리고 △BHD는 ∠D=90°인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면



$\overline{BH}^2=\overline{BD}^2+\overline{DH}^2$

$\quad=(10\sqrt{2})^2+10^2$

$\quad=200+100=300$

$\therefore \overline{BH}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$

이때, ∠D=90°인 직각삼각형 BHD의 꼭짓점 D에서 $\overline{BH}$에 내린 수선의 발이 N이므로

△DBN과 △HDN에서

∠BDN+∠HDN=×+x=90°

∴ ∠DBH=x

직각삼각형 BHD에서

$$\sin x=\frac{\overline{DH}}{\overline{BH}}=\frac{10}{10\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos x=\frac{\overline{BD}}{\overline{BH}}=\frac{10\sqrt{2}}{10\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\tan x=\frac{\overline{DH}}{\overline{BD}}=\frac{10}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \sin x\times\cos x\times\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{36}}{18}=\frac{1}{3}$$

[다른 풀이]

정육면체의 한 변의 길이를 a라 하면 대각선의 길이는 $\sqrt{3}a$, 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$이지?

삼각형 BDH에서 넓이를 구하는 2가지 식을 비교하면

$\triangle BDH=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{DH}=\frac{1}{2}\times\overline{BH}\times\overline{DN}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times a=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}a\times\overline{DN}$

$\therefore \overline{DN}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$, $\overline{NH}=\frac{1}{\sqrt{3}}a$

따라서 삼각형 DNH에서

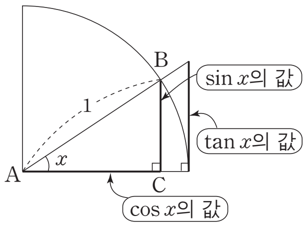
$$\sin x=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}a}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos x=\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\tan x=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}a}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(이하 동일)

096 답 ③

반지름의 길이가 1인 사분원에서 ∠BAC=x일 때, 다음이 성립하지?



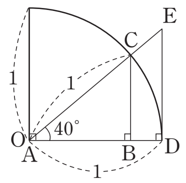
$\therefore \sin x=\overline{BC}$, $\cos x=\overline{AC}$

[다른 풀이]

빗변이 $\overline{AB}=1$인 직각삼각형 ABC에서

$\sin x=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\overline{BC}$, $\cos x=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\overline{AC}$

097 답 $\overline{DE}$

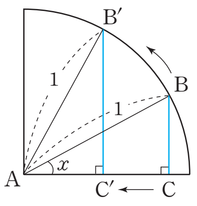


사분원의 반지름의 길이가 1이므로

$\overline{AC}=\overline{AD}=1$이지?

$\tan 40^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{DE}}{1}=\overline{DE}$

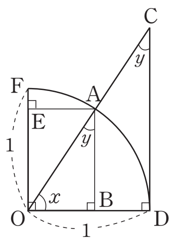
098 답 증가, 감소



반지름의 길이가 1인 사분원에서 x의 크기가 증가함에 따라 $\sin x$의 값은 $\overline{BC}$에서 $\overline{B'C'}$으로 커지지?

그런데 x의 크기가 증가함에 따라 $\cos x$의 값은 $\overline{AC}$에서 $\overline{AC'}$으로 감소하고 있어.

099 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ



ㄱ. 직각삼각형 AOB에서 x를 기준으로 할 때,

$\sin x=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$

또, 직각삼각형 AOB에서 y를 기준으로 할 때, $\sin y=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OB}}{1}=\overline{OB}$ (거짓)

ㄴ. 직각삼각형 COD에서

$\tan x=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\dfrac{\overline{CD}}{1}=\overline{CD}$ (참)

ㄷ. $\overline{BD}=\overline{OD}-\overline{OB}=1-\overline{OB}$지?

직각삼각형 AOB에서 $\cos x=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OB}}{1}=\overline{OB}$

$\therefore \overline{BD}=1-\overline{OB}=1-\cos x$ (참)

ㄹ. $\overline{EF}=\overline{OF}-\overline{OE}=1-\overline{OE}$지?

그런데 $\overline{OE}=\overline{AB}$이므로 $\overline{AB}$를 구해도 돼.

ㄱ에서 $\sin x=\overline{AB}$

또, 직각삼각형 AOB에서 y를 기준으로 할 때,

$\cos y=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$

$\therefore \overline{EF}=1-\overline{AB}=1-\sin x=1-\cos y$ (참)

ㅁ. $\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=\overline{OC}-1$이지?

직각삼각형 COD에서 $\angle OCD=\angle OAB=y$ ($\because$ 동위각)이므로

y를 기준으로 할 때, $\sin y=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OC}}=\dfrac{1}{\overline{OC}}$ $\quad\therefore \overline{OC}=\dfrac{1}{\sin y}$

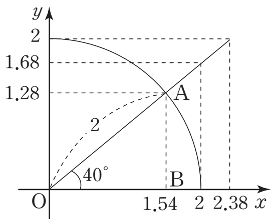
또, 직각삼각형 COD에서 x를 기준으로 할 때,

$\cos x=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OC}}=\dfrac{1}{\overline{OC}}$ $\quad\therefore \overline{OC}=\dfrac{1}{\cos x}$

$\therefore \overline{AC}=\overline{OC}-1=\dfrac{1}{\sin y}-1=\dfrac{1}{\cos x}-1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이야.

100 답 ②



그림과 같이 두 점을 각각 A, B라 할 때, 사분원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OA}=2$야.

직각삼각형 OAB에 대하여

$\cos 40^\circ=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{1.54}{2}=0.77$

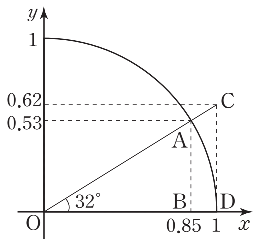
오|답|피|하|기

이 문제를 $\cos 40^\circ=\dfrac{1.54}{1}=1.54$로 풀었다면 문제를 제대로 읽지 못했거나 조건을 제대로 파악하지 못해서 틀리게 된 거야. 항상 사분원의 반지름의 길이가 1인 것만 풀어서 습관적으로 그렇게 풀 수 있는데 매우 바람직하지 않은 생각이야. 좋은 습관을 들이려면 조건이 공식을 쓰기에 알맞은지 살펴야 해.

이 문제처럼 사분원의 반지름의 길이가 1이 아닌 2라는 조건을 머릿속에 넣고 주의해서 풀어야 한다는 거야. 또, 삼각비의 특징을 알고 있다면 sin과 cos의 값은 1보다 작거나 같게 되기 때문에 1.54라는 값이 나올 수 없다는 걸 알 수 있었을 거야. 이런 특성을 모르고 있었다면 그냥 틀린 답을 쓸 수밖에 없겠지.

수학에서는 공식을 쓰기 위해 반드시 조건–예를 들면 사용된 문자가 양수인지, 범위가 어디인지 등을 먼저 살펴야 한다는 것을 기억하자.

101 답 0.3



그림과 같이 네 점을 각각 A, B, C, D라 할 때, 두 점 A, D는 사분원 위의 점이므로 $\overline{OA}=\overline{OD}=1$이야.

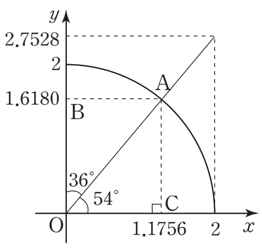
$\sin 32^\circ=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\overline{AB}=0.53$

$\cos 32^\circ=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\overline{OB}=0.85$

$\tan 32^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\overline{CD}=0.62$

$\therefore \sin 32^\circ-\cos 32^\circ+\tan 32^\circ=0.53-0.85+0.62=0.3$

102 답 ②



그림과 같이 세 점을 각각 A, B, C라 할 때, 구하고자 하는 것은 $\sin 36^\circ$이니까 54°를 이용하여 36°인 각을 찾아보자.

$\angle BOC=90^\circ$이므로

$\angle BOA=\angle BOC-\angle AOC$

$=90^\circ-54^\circ=36^\circ$

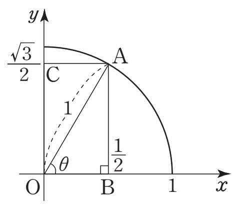
$\therefore \sin 36^\circ=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$

$=\dfrac{1.1756}{2}=0.5878$

오|답|피|하|기

이 문제처럼 각이 직접적으로 주어져 있지 않은 경우에 앞의 풀이처럼 풀어야 제대로 푼 거야. 주로 이런 문제는 $x+y=90^\circ$가 성립하는 x 또는 y의 각의 크기를 알 때, y 또는 x에 대한 삼각비를 구할 수 있게 출제가 돼.
이 문제처럼 주어진 그림에서는 54°에 대한 값만 나온 것 같지만 사실 36°에 대한 값도 나왔다는데 주목해야 해. 사분원에서 $\overline{OB}$, $\overline{OC}$가 그것을 알려 주고 있어.
따라서 이런 문제를 풀 때는 당황하지 말고, 주어진 조건이 더 있는지 살피면 십중팔구 조건을 발견할 수 있을 거야.

103 답 $\sqrt{3}$



점 C의 좌표가 $\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$\overline{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AC}\,/\!/\,\overline{OB}$이므로

$\overline{OC}=\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

직각삼각형 OAB에서

$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2-\overline{AB}^2=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore \overline{OB}=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

[다른 풀이]

직각삼각형 OAB에서 $\sin\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \theta=60^\circ$

$\therefore \tan\theta=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

104 답 ②

$$\cos 0^\circ\times\sin 90^\circ+\sin 60^\circ\times\tan 30^\circ=1\times1+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

105 답 ③

① $\sin 0^\circ+\cos 0^\circ=0+1=1$ (참)

② $\sin 30^\circ+\tan 45^\circ=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ (참)

③ $\cos 90^\circ-\tan 45^\circ+\sin 0^\circ=0-1+0=-1$ (거짓)

④ $\sin 60^\circ\times\cos 90^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times0=0$ (참)

⑤ $\sin 60^\circ\times\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$ (참)

106 답 ⑤

① $\sin 0^\circ=0=\tan 0^\circ$ (참)

② $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^\circ$ (참)

③ $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$ (참)

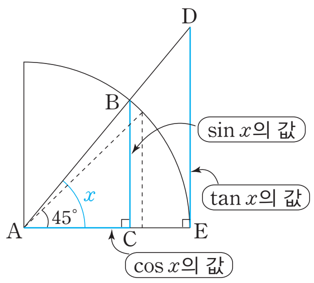
④ $\cos 0^\circ=1=\sin 90^\circ$ (참)

⑤ $\sin 90^\circ=1$이지만 $\tan 90^\circ$는 정할 수 없어. (거짓)

107 답 $\frac{9}{2}$

$$\cos 0^\circ\times(1+\tan 45^\circ+\cos 0^\circ)+\sin 60^\circ\times\tan 45^\circ\times\cos 30^\circ$$
$$+(1+\sin 30^\circ)\times(1-\cos 60^\circ)$$
$$=1\times(1+1+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$=3+\frac{3}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)\ (\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2)$$
$$=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

108 답 ②



반지름의 길이가 1인 사분원에서 $\angle BAC=45^\circ$일 때,
$\overline{AC}=\overline{BC}<\overline{DE}$가 성립하지?
$\angle BAC$의 크기가 45°보다 클수록 $\overline{DE}$, $\overline{BC}$의 길이는 각각 길어지고 $\overline{AC}$의 길이는 짧아져.
이때, $\cos x=\overline{AC}$, $\sin x=\overline{BC}$, $\tan x=\overline{DE}$이므로
$45^\circ<A<90^\circ$이면 $\cos A<\sin A<\tan A$

109 답 ①

① $\cos 0^\circ=1$ ② $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ③ $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ ②<④<③=⑤<①
따라서 가장 큰 값은 ①이야.

110 답 ⑤

$0^\circ\le A\le 90^\circ$일 때,
① A가 커지면 $\tan A$의 값은 0부터 무한히 증가하지? (참)
② A가 커지면 $\cos A$의 값은 1에서 0까지 감소하지? (참)
③ A가 커지면 $\sin A$의 값은 0에서 1까지 증가하므로 최솟값은 0, 최댓값은 1이야. (참)
④ A가 커지면 $\cos A$의 값은 1에서 0까지 감소하므로 최솟값은 0, 최댓값은 1이야. (참)
⑤ A가 커지면 $\tan A$의 값은 0부터 무한히 증가하므로 $\tan A$의 최솟값은 0이고 최댓값은 정할 수 없어. (거짓)

111 답 ②

$0^\circ \le x \le 90^\circ$에서 x의 값이 증가하면 $\sin x$의 값은 0에서 1까지 증가하므로

$\sin 45^\circ < \sin 60^\circ < \sin 75^\circ < \sin 90^\circ = 1$ ⋯ ㉠

또, $0^\circ \le x \le 90^\circ$에서 x의 값이 증가하면 $\cos x$의 값은 1에서 0까지 감소하지? 거꾸로 말하면 x의 값이 감소하면 $\cos x$의 값은 0에서 1까지 증가해.

$\cos 45^\circ < \cos 35^\circ < \cos 30^\circ < \cos 0^\circ = 1$ ⋯ ㉡

그런데 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

㉠과 ㉡에 의해

sin 값끼리 비교: $\sin 45^\circ \qquad < \sin 60^\circ < \sin 75^\circ < \sin 90^\circ$

$\qquad\qquad\qquad\quad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$

cos 값끼리 비교: $\cos 45^\circ < \cos 35^\circ < \cos 30^\circ \qquad < \cos 0^\circ$

결국 $\sin 45^\circ < \cos 35^\circ < \sin 75^\circ < \cos 0^\circ = 1$ ⋯ ㉢

그리고 $0^\circ \le x \le 90^\circ$에서 x의 값이 증가하면 $\tan x$의 값은 0부터 무한히 증가하므로

$1 = \tan 45^\circ < \tan 50^\circ < \tan 65^\circ$ ⋯ ㉣

㉢과 ㉣에 의해

$\sin 45^\circ < \cos 35^\circ < \sin 75^\circ < \cos 0^\circ < \tan 50^\circ < \tan 65^\circ$

따라서 삼각비를 작은 값부터 차례로 나열하면

Ⅰ-Ⅲ-Ⅳ-Ⅱ-Ⅴ-Ⅵ이야.

112 답 $-1+\cos x$

A에 대하여 $\sqrt{A^2} = \begin{cases} A\,(A \ge 0) \\ -A\,(A<0) \end{cases}$을 이용하자.

$0^\circ < x < 45^\circ$일 때,

(ⅰ) $\cos x > \sin x$이므로

$\quad \sin x - \cos x < 0$

(ⅱ) $0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\quad 1 - \sin x > 0$

$\therefore \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} - \sqrt{(1-\sin x)^2}$

$\quad = -(\sin x - \cos x) - (1 - \sin x)$

$\quad = -1 + \cos x$

113 답 ④

A에 대하여 $\sqrt{A^2} = \begin{cases} A\,(A \ge 0) \\ -A\,(A<0) \end{cases}$을 이용하자.

$0^\circ \le x \le 90^\circ$에서 $0 \le \cos x \le 1$이므로

$\cos x + 1 > 0$, $\cos x - 1 \le 0$

$\therefore \sqrt{(\cos x+1)^2} - \sqrt{(\cos x-1)^2} = (\cos x+1) + (\cos x - 1)$

$\quad = 2\cos x$

114 답 ②

$45^\circ < x < 90^\circ$일 때, $1 < \tan x$이므로

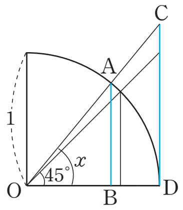
$1 - \tan x < 0$, $1 + \tan x > 0$

$\therefore \sqrt{(1-\tan x)^2} - \sqrt{(1+\tan x)^2} = -(1-\tan x) - (1+\tan x)$

$\quad = -1 + \tan x - 1 - \tan x$

$\quad = -2$

115 답 ③



ㄱ. 그림과 같은 반지름의 길이가 1인 사분원에서 $45^\circ < x < 90^\circ$일 때,

$\sin x = \overline{AB}$, $\tan x = \overline{CD}$이고

$\overline{AB} < \overline{CD}$이므로 $\sin x < \tan x$

$\therefore \sin x - \tan x < 0$ (참)

ㄴ. $45^\circ < x < 90^\circ$일 때, $\tan x > 1$이므로

$\tan x - 1 > 0$ (참)

ㄷ. $0^\circ < x < 45^\circ$이면 $\sin x < \cos x$이고

$45^\circ < x < 90^\circ$이면 $\sin x > \cos x$이므로

$\sin x - \cos x$의 부호는 알 수 없어. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이야.

[다른 풀이]

ㄷ. 【반례】 $x = 45^\circ$일 때, $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\sin x - \cos x = 0$ (거짓)

116 답 (1) 1.3431 (2) 0.4884

(1) $\sin 25^\circ + \cos 23^\circ = 0.4226 + 0.9205 = 1.3431$

각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663

(2) $\cos 21^\circ - \tan 24^\circ = 0.9336 - 0.4452 = 0.4884$

각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663

117 답 0.9793

각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
32°	0.5299	0.8480	0.6249
⋮	⋮	⋮	⋮
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265

$\cos 36^\circ - \sin 32^\circ + \tan 35^\circ = 0.8090 - 0.5299 + 0.7002$

$\quad = 0.9793$

118 답 30°

각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867

$\sin x = 0.2419$

$\therefore x = 14°$

$\tan y = 0.2867$

$\therefore y = 16°$

$\therefore x+y = 14°+16° = 30°$

119 답 61°

각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626

표에서 $\tan 63° = 1.9626$을 대입하면

$\sin x = \tan 63° - 1.088$

$= 1.9626 - 1.088$

$= 0.8746$

따라서 표의 sin값에서 0.8746에 맞는 각을 찾으면 $x = 61°$이야.

120 답 14.064

각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281

직각삼각형 ABC에 대하여

$\sin 51° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{x}{10} = 0.7771$

$\therefore x = 7.771$

$\cos 51° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{y}{10} = 0.6293$

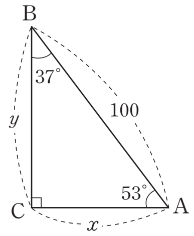
$\therefore y = 6.293$

$\therefore x+y = 7.771+6.293 = 14.064$

121 답 19.68

주어진 표에서 37°에 대한 삼각비의 값을 구할 수 없지?

그럼, 90°−37°=53°가 되니까 53°에 대한 삼각비의 값을 이용하면 되겠지?



각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281

$\sin 53° = 0.7986$이므로

$\sin 53° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{y}{100} = 0.7986$

$\therefore y = 79.86$

또, $\cos 53° = 0.6018$이므로

$\cos 53° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{x}{100} = 0.6018$

$\therefore x = 60.18$

$\therefore y-x = 79.86-60.18 = 19.68$

122 답 142.81

표에서 ∠B=35°에 대한 삼각비의 값을 알 수 없으니까 ∠A=90°−35°=55°에 대한 삼각비를 이용하자.

구하려는 것은 $\overline{BC}$이고, $\overline{AC}=100$으로 주어졌으니까 △ABC에서 ∠BAC를 기준으로 높이인 $\overline{BC}$와 밑변인 $\overline{AC}$의 관계는 tan 55°로 나타낼 수 있지?

각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281

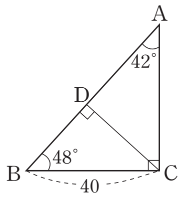
$\tan 55° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{100} = 1.4281$

$\therefore \overline{BC} = 142.81$

123 답 29.7

∠A=42°에 대한 삼각비의 값을 알 수 없으니까 ∠B=90°−42°=48°에 대한 삼각비를 이용하자.

구하려는 것은 $\overline{CD}$이고, $\overline{BC}=40$으로 주어졌으니까 △BCD에서 ∠B를 기준으로 높이인 $\overline{CD}$와 빗변인 $\overline{BC}$의 관계는 sin 48°로 나타낼 수 있지?



각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504

$\sin 48° = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{40} = 0.7431$

$\therefore \overline{CD} = 0.7431 \times 40 = 29.724$

따라서 선분 CD의 길이는 약 29.7이야.

잘 틀리는 유형 훈련+1up

p. 24

124 답 ⑤

1st 직각삼각형 속에 공통인 각을 포함한 직각삼각형이 또 있네. 그럼, 이 두 직각삼각형은 닮은 삼각형이지?

직각삼각형 ABC에 대하여 $\angle B=x$지?

직각삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

$\angle A+x+90^\circ=180^\circ$

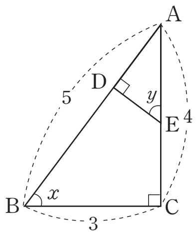
$\therefore \angle A=90^\circ-x \cdots$ ㉠

또, 직각삼각형 ADE의 세 내각의 합은 180°이므로

$\angle A+\angle AED+\angle ADE=180^\circ$

$(90^\circ-x)+y+90^\circ=180^\circ$ ($\because$ ㉠)

$\therefore x=y$



2nd $x=y$임을 이용해 삼각비의 값을 구하자.

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=3^2+4^2=25$

$\therefore \overline{AB}=5$

직각삼각형 ABC의 x에 대하여

$\cos x=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{5}$,

$\tan y=\tan x=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \cos x+\tan y=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{29}{15}$

오답피하기

이런 유형의 문제는 직각삼각형의 닮음을 충분히 알고 있지 않으면 풀기 힘들어. $x=y$가 된다는 것을 유도해야 $\tan y$의 값을 풀 수 있지? 이런 유형의 문제를 풀었어도 원리를 모르고 풀면 약간만 다르게 나와도 풀지 못하게 될 가능성이 있어. 왜 큰 직각삼각형과 그 속에 있는 조그만 직각삼각형이 서로 닮았는지 유도하면서 풀면 원리도 알게 되고 나중에는 유도하지 않아도 변형된 문제가 나와도 잘 풀 수 있게 될 거야. 유형을 알고 문제를 푸는 것도 중요하지만 원리를 확실히 알고 푸는 것이 더욱 중요해.

125 답 ⑤

1st 먼저 피타고라스 정리를 이용해서 $\overline{AB}$의 길이를 구하자.

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$10^2=\overline{AB}^2+6^2$, $\overline{AB}^2=64$

$\therefore \overline{AB}=8$

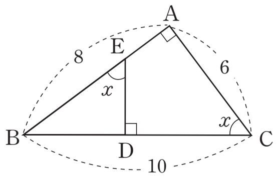
2nd 두 직각삼각형 ABC와 DBE가 닮음인 것을 이용하자.

두 직각삼각형 ABC와 DBE에서 $\angle B$는 공통,

$\angle BAC=\angle BDE=90^\circ$이므로

AA 닮음이지?

$\therefore x=\angle BCA=\angle BED$



3rd 이제 직각삼각형 ABC의 x에 대하여 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$의 값을 각각 구하자.

직각삼각형 ABC의 x에 대하여

$\sin x=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$

$\cos x=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

$\tan x=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \sin x+\cos x+\tan x=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{12}{15}+\dfrac{9}{15}+\dfrac{20}{15}=\dfrac{41}{15}$

126 답 $\dfrac{4}{5}$

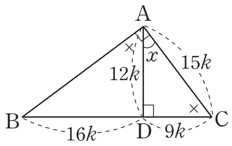
1st 주어진 선분의 길이의 비와 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AD}$의 길이를 구하자.

$\overline{BD}:\overline{DC}=16:9$이므로

$\overline{BD}=16k$, $\overline{DC}=9k$ (k는 양수)로 놓을 수 있지?

이때, $\angle BDA=\angle ADC=90^\circ$,

$\angle BAD=\angle ACD=\times$이므로



두 직각삼각형 DBA와 DAC는 AA 닮음이 돼.

즉, $\overline{AD}^2=\overline{BD}\times\overline{CD}=16k\times 9k=144k^2$에서 $\overline{AD}=12k$

2nd 직각삼각형 ADC에 대하여 $\cos x$의 값을 구하자.

직각삼각형 ADC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=(12k)^2+(9k)^2=225k^2$

$\therefore \overline{AC}=15k$

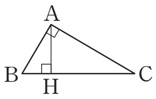
$\therefore \cos x=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{12k}{15k}=\dfrac{4}{5}$

★ **직각삼각형의 닮음의 성질**

(1) $\triangle ABC \backsim \triangle HBA \Rightarrow \overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$

(2) $\triangle ABC \backsim \triangle HAC \Rightarrow \overline{AC}^2=\overline{CH}\times\overline{CB}$

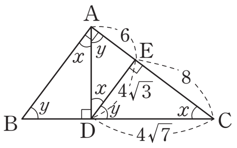
(3) $\triangle HBA \backsim \triangle HAC \Rightarrow \overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{CH}$



127 답 ④

1st 두 직각삼각형 AED와 DEC가 닮음임을 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구하자.

$\angle BAD=x$, $\angle CAD=y$이고, 이것과 크기가 같은 각을 각각 나타내면 그림과 같지?



두 직각삼각형 AED와 DEC는 AA 닮음이므로

$\overline{DE}^2=\overline{CE}\times\overline{EA}=8\times 6=48$

$\therefore \overline{DE}=4\sqrt{3}$

또, 두 직각삼각형 ADC와 DEC는 AA 닮음이므로

$\overline{CD}^2=\overline{CE}\times\overline{CA}=8\times 14=112$

$\therefore \overline{CD}=4\sqrt{7}$

2nd 직각삼각형 CDE에 대하여 $\sin^2 x$, $\cos^2 x$의 값을 각각 구하자.
$\triangle$CDE에서 $\angle C = x$이므로

$\sin x = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ $\quad\therefore \sin^2 x = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{3}{7}$

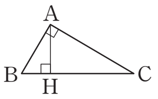
또, $\triangle$CDE에서 $\angle CDE = y$이므로

$\cos y = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ $\quad\therefore \cos^2 y = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{3}{7}$

$\therefore \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{6}{7}$

★ 직각삼각형의 닮음의 성질

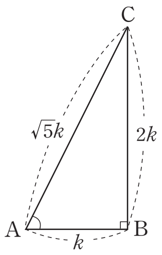
(1) $\triangle ABC \backsim \triangle HBA \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$
(2) $\triangle ABC \backsim \triangle HAC \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$
(3) $\triangle HBA \backsim \triangle HAC \Rightarrow \overline{AH}^2 = \overline{BH} \times \overline{CH}$



128 답 ④

1st 주어진 조건은 $\tan A = 2$ 하나뿐이지? 이것을 만족시키는 직각삼각형을 그려 보자.

$\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 2$를 만족시키는 직각삼각형 ABC는 k를 양수라 하면 그림과 같이 $\overline{AB} = k$, $\overline{BC} = 2k$로 놓을 수 있지.
직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = k^2 + (2k)^2 = 5k^2$
$\therefore \overline{AC} = \sqrt{5}k$



$\therefore \sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{2k}{\sqrt{5}k} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{k}{\sqrt{5}k} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

2nd 구한 삼각비의 값을 대입해 보자.

$$\therefore \frac{1+2\sin A \times \cos A}{\sin^2 A - \cos^2 A} = \frac{1+2\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{9}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{9}{3} = 3$$

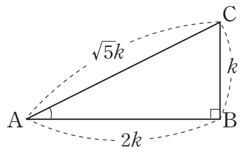
오답피하기

$\tan A = 2$에서 $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = 2$로 놓고 바로 풀어도 돼. 하지만 위의 풀이처럼 풀어야 제대로 푼 거야. k로 놓고 풀지 않은 것은 $\tan A = 2$를 만족시키는 특수한 경우 중 하나를 이용해서 푼 것이기 때문에 서술형 문제였다면 별로 좋은 점수를 얻을 수 없을 거야. 하지만 객관식이라면 기꺼이 추천하고 싶어. 왜냐하면 시험에서는 시간이 많이 주어지지 않기 때문에 빠르고 효과적으로 답을 내는 방법이 훨씬 낫거든. 수학적으로 푸는 훈련을 게을리하면 안 되니까 위의 풀이와 같은 방법은 반드시 알아 두어야 해.

129 답 ③

1st 주어진 조건은 $\tan A = \frac{1}{2}$ 하나뿐이지? 이것을 만족시키는 직각삼각형을 그려 보자.

$\angle B = 90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서
$\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$을 만족시킬 때, k를 양수라 하면 그림과 같이 $\overline{AB} = 2k$, $\overline{BC} = k$로 놓을 수 있지.



직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = (2k)^2 + k^2 = 5k^2$
$\therefore \overline{AC} = \sqrt{5}k$

$\therefore \sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{k}{\sqrt{5}k} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2k}{\sqrt{5}k} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

2nd 구한 삼각비의 값을 대입해 보자.

$$\therefore \frac{\sin A \times \cos A + \sin^2 A}{(\cos A + \sin A)\times(\cos A - \sin A)}$$
$$= \frac{\sin A \times \cos A + \sin^2 A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = 1$$

130 답 ②

1st 특수각에 대한 삼각비의 값을 알고 있어야 해.

주어진 $\sin(2x+10^\circ) = \frac{1}{2}$에 대해 사인값이 $\frac{1}{2}$이 나온 것은 특수한 각이 나온다는 것을 의미해.
즉, $0^\circ \le A \le 90^\circ$에서 $\sin A = \frac{1}{2}$이 성립하는 것은 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$을 기억하고 있으면 $A = 30^\circ$라는 것을 알 수 있을 거야. 즉,
$2x + 10^\circ = 30^\circ \qquad \therefore x = 10^\circ$

2nd 주어진 x의 값을 대입하자.

$\therefore \cos 6x = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

오답피하기

우리가 알고 있는 특수각(0°, 30°, 45°, 60°, 90°)에 대한 삼각비의 값을 알고 있지?

삼각비 \ A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	정할 수 없다.

이 특수각에 대한 삼각비의 값을 정확히 기억하고 있어야 해.
$\sin 60^\circ$는 위의 표에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}$으로 값을 구할 수 있지?
그런데 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$이 되는 x의 값을 구하는 것은 표를 보면 쉽게 구할 수 있지만 표를 완전히 암기하지 않았다면 구하기가 곤란하지? 이렇게 값을 만족시키는 각을 구하는 것이 처음에는 능숙하게 되지 않아도 자주 문제를 풀다보면 익혀지게 돼. 특수각에 대한 삼각비의 값을 완전히 익히자.

131 답 ①

1st 특수각에 대한 삼각비의 값을 알고 있어야 해.

$\tan 45^\circ=1$이므로 $\cos(5x+10^\circ)=\frac{1}{2}$이야. 이때, 코사인값이 $\frac{1}{2}$이 나온 것은 특수각이 나온다는 것을 의미해.

즉, $0^\circ<A<90^\circ$에서 $\cos A=\frac{1}{2}$이 성립하는 것은 $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$에서 $A=60^\circ$라는 것을 알 수 있을 거야.

$5x+10^\circ=60^\circ$

$\therefore x=10^\circ$

2nd 주어진 x의 값을 대입하자.

$\therefore \sin 3x=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

132 답 ②

1st 특수각에 대한 삼각비의 값을 대입하자.

삼각비 \ A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	정할 수 없다.

① $\sin 90^\circ-\tan 30^\circ\times\tan 60^\circ=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}=1-1=0$ (참)

② $\tan 45^\circ\times\sin 0^\circ+\tan 30^\circ\div\tan 60^\circ=1\times 0+\frac{1}{\sqrt{3}}\div\sqrt{3}$

$=\frac{1}{3}$ (거짓)

③ $\cos 90^\circ-\tan 45^\circ=0-1=-1$ (참)

④ $\sin 90^\circ\times\cos 30^\circ+\cos 0^\circ\times\sin 60^\circ=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ (참)

⑤ $2\sin30^\circ\times\cos60^\circ-\sin45^\circ\times\cos45^\circ$

$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{2}{4}=0$ (참)

오답피하기

특수각의 삼각비의 값을 정확하게 알고 있어야 풀 수 있어. 그런데 가끔 헷갈리는 삼각비가 있어. 예를 들면 $\sin 30^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\cos 60^\circ$의 값이 그럴 거야. $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 값 중 하나라는 것은 기억하는데 정확히는 기억을 못하는 경우가 있어. 이럴 때에는 sin은 각도가 클수록 값도 크다는 걸 알고 있으면 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$으로 나오겠지? cos은 반대로 각이 클수록 값은 작아.

그래서 $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$이 되는 거야.

삼각비의 값을 잘못 대입하면 계산 결과가 틀려지니까 정확히 알고 있어야 해.

133 답 ③

1st 특수각에 대한 삼각비의 값을 대입하자.

삼각비 \ A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	정할 수 없다.

ㄱ. $\sin^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ (거짓)

ㄴ. $\cos 30^\circ\times\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$ (참)

ㄷ. $\sin 30^\circ+\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$이고

$\sin 90^\circ=1$이므로

$\sin 30^\circ+\sin 60^\circ\neq\sin 90^\circ$ (거짓)

ㄹ. $\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\tan 60^\circ}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이야.

134 답 ①

1st 반복되는 것을 간단한 문자로 바꾸자.

$\cos^2 A+4\cos A-5=0$

$(\cos A)^2+4\cos A-5=0$

여기서 $\cos A=X$로 놓으면 $X^2+4X-5=0$

이것은 X에 대한 이차방정식이지?

X에 대해 인수분해를 하면

$X^2+4X-5=0$, $(X+5)(X-1)=0$

$$\begin{array}{llll} X & -1 & \rightarrow & -X \\ X & 5 & \rightarrow & 5X \ (+ \\ \hline & & & 4X \end{array}$$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=1$

$\therefore \cos A=-5$ 또는 $\cos A=1$

2nd $\cos A$의 범위에 주의하고 A의 크기를 구하자.

그런데 $0^\circ\le A\le 90^\circ$에서 $0\le\cos A\le 1$이므로 $\cos A=1$

따라서 $\cos 0^\circ=1$이므로 $A=0^\circ$

135 답 ③

1st 반복되는 것을 간단한 문자로 바꾸자.

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$2(\sin x)^2+\sin x-1=0$

여기서 $\sin x=X$로 놓으면 $2X^2+X-1=0$

이것은 X에 대한 이차방정식이지?

X에 대해 인수분해를 하면

$2X^2+X-1=0$

$(2X-1)(X+1)=0$

$$\begin{array}{llll} 2X & -1 & \rightarrow & -X \\ X & 1 & \rightarrow & 2X \ (+ \\ \hline & & & X \end{array}$$

$\therefore X=\frac{1}{2}$ 또는 $X=-1$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$ ⋯ ㉠

2nd $\sin x$의 범위에 주의하여 x의 크기를 구하여 $\tan x$의 값을 구하자.

그런데 $0^\circ \le x \le 90^\circ$에서 $0 \le \sin x \le 1$이므로

㉠에서 $\sin x = \frac{1}{2}$

이때, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$임을 이용하면 $x = 30^\circ$

$\therefore \tan x = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

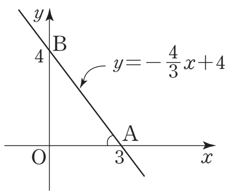
오|답|피|하|기

삼각비에 관련된 방정식은 그것을 우리가 알고 있는 식으로 어떻게 바꿔서 생각할 수 있느냐가 매우 중요해.
이 문제는 잘 관찰하지 않으면 어떻게 풀어야 할지 모를 수 있어.
그리고 $\sin^2 x = (\sin x)^2$이라는 약속을 잘 알고 있어야겠지?
$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$은 $2(\sin x)^2 + \sin x - 1 = 0$이므로 $\sin x$가 반복되는 식이라는 것을 알 수 있어.
수학에서는 반복되는 복잡한 식이나 문자는 어느 하나의 문자로 바꾸어 생각하는 경향이 있어. 이걸 수학에서 쓰이는 용어로 치환이라고 하지. 이 문제를 $\sin x = X$로 치환하면 $2X^2 + X - 1 = 0$이 되어 X에 대한 이차방정식이 나오는 거야. 그럼, 이 이차방정식을 풀면 되겠지?
참! 치환에서 중요한 것은 다시 원래 상태로 돌리는 거야. 즉, X로 나온 식을 $\sin x$로 반드시 바꿔야 해. 이 문제에서 $X = \frac{1}{2}$이 나오니까 문제에서 묻는 $\tan x$를 구하지 않고 답을 ②번으로 택하는 실수를 할 수 있으니까 주의해야 해.
그리고 삼각비의 치환에서 빼먹기 쉬운 중요한 것이 한 가지 더 있어. 바로 범위가 반드시 있다는 거야. 이 문제처럼 $0^\circ \le x \le 90^\circ$이면 $0 \le \sin x \le 1$이 되어 $0 \le X \le 1$이 되기 때문에 $X = -1$은 답이 될 수 없으니까 제외시켜 주는 거야. 즉, 치환할 때는 범위를 꼭 추가해야 한다는 것을 잊지 말자.

136 답 ⑤

1st 먼저 일차함수의 그래프를 그려보고 예각 A가 직각삼각형의 어느 각인지 살펴보자.

그림과 같이 일차함수 $y = -\frac{4}{3}x + 4$의 그래프에서 y절편은 $x = 0$을 대입하여 구하면 4, x절편은 $y = 0$을 대입하여 구하면 3이 돼.
따라서 일차함수의 그래프와 x축의 양의 방향이 이루는 예각이 A이므로 $\triangle OAB$에서



$\tan A = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{4}{3}$

2nd 삼각비의 뜻을 이용하여 $\sin A$, $\cos A$의 값을 구해 봐.

직각삼각형 OAB에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ $\quad\therefore \overline{AB} = 5$

직각삼각형 OAB에서

$\sin A = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}$, $\cos A = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$

$\therefore \frac{1}{\sin A - \cos A} = \frac{1}{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

오|답|피|하|기

이 문제는 일차함수의 기울기와 tan의 관계를 정확히 모르면 틀릴 수 있는 문제야. 일차함수의 그래프와 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, (직선의 기울기)$=\tan\theta$라는 것은 알고 있지?
그런데 이 문제처럼 일차함수 $y = -\frac{4}{3}x + 4$의 기울기가 $-\frac{4}{3}$로 음수이면 위의 풀이의 그림과 같이 x축의 양의 방향과 이루는 각이 90°가 넘는 둔각이 돼. 그래서 예각 A를 찾기 위해 직각삼각형을 찾으려면 x절편, y절편을 각각 구하여 풀 수밖에 없어. 문제에서 예각 A가 무엇을 의미하는지 잘 파악하는 게 중요해.

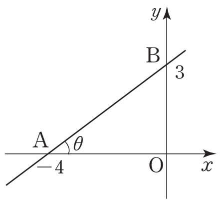
137 답 $\frac{7}{5}$

1st 먼저 일차함수의 그래프를 그려 θ가 직각삼각형의 어느 각인지 살펴보자.

일차함수를 y에 대해 나타내자.

$3x - 4y + 12 = 0$에서 $y = \frac{3}{4}x + 3 \cdots$ ㉠

그림과 같이 일차함수 $y = \frac{3}{4}x + 3$의 그래프에서 y절편은 $x = 0$을 대입하여 구하면 3, x절편은 $y = 0$을 대입하여 구하면 -4
따라서 ㉠의 그래프와 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기가 θ이므로



$\tan\theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{3}{4}$

2nd 삼각비의 뜻을 이용하여 $\sin A$, $\cos A$의 값을 구해봐.

직각삼각형 AOB에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$\therefore \overline{AB} = 5$

직각삼각형 AOB에서

$\sin\theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

138 답 $1 - \sin A$

1st 제곱근의 성질 중 $\sqrt{A^2} = \begin{cases} A\,(A \ge 0) \\ -A\,(A < 0) \end{cases}$임을 이용하여 제곱근을 풀자.

$0^\circ < A < 45^\circ$일 때, $\sin 0^\circ = 0 < \sin A < \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos A < \cos 0^\circ = 1$이므로

$\sin A < \cos A < 1$ $\quad\therefore \sin A - \cos A < 0$

$\therefore \sqrt{(\sin A - \cos A)^2} = -(\sin A - \cos A)$

$= -\sin A + \cos A \cdots$ ㉠

2nd 절댓값의 정의 $|A| = \begin{cases} A\,(A \ge 0) \\ -A\,(A < 0) \end{cases}$을 이용해서 절댓값을 풀자.

$0^\circ < A < 45^\circ$에서 $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos A < \cos 0^\circ = 1$이므로

$1-\cos A>0 \qquad \therefore |1-\cos A|=1-\cos A$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\sqrt{(\sin A-\cos A)^2}+|1-\cos A|$

$=-\sin A+\cos A+1-\cos A$

$=1-\sin A$

오|답|피|하|기

이런 유형의 문제는 주어진 범위에서 제곱근 속의 식과 절댓값 속의 식이 양수인지 음수인지 따져 줘야 풀 수 있어.
제곱근의 성질과 절댓값의 정의를 이용하면 풀 수 있는 문제이지만 구체적인 값이 주어진 것이 아니기 때문에 쉽지는 않겠지? 사실 제곱근의 성질과 절댓값의 정의는 비슷한 점이 많아.
만약 객관식으로 나왔다면 범위에 해당하는 특수한 값을 대입하여 따져 주기도 해. 이것은 객관식에만 해당되는 경우니까 서술형 문제의 경우는 앞의 풀이와 같이 풀어야 하는 게 정석이야.

139 답 $\frac{1}{2}$

1st 제곱근의 성질 중 $\sqrt{A^2}=\begin{cases} A(A\geq 0) \\ -A(A<0)\end{cases}$ 임을 이용하여 제곱근을 풀자.

$45^\circ \leq A < 90^\circ$일 때 $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\leq \sin A<\sin 90^\circ=1$이고,

$\cos 90^\circ=0<\cos A\leq \cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$0<\cos A\leq \sin A<1$

$\therefore \sin A+\cos A>0,\ \cos A-\sin A\leq 0$

$\therefore \sqrt{(\sin A+\cos A)^2}=\sin A+\cos A,$

$\quad \sqrt{(\cos A-\sin A)^2}=-\cos A+\sin A$

2nd 주어진 식을 만족시키는 A의 크기를 구해 보자.

$\sqrt{(\sin A+\cos A)^2}+\sqrt{(\cos A-\sin A)^2}$

$=(\sin A+\cos A)+(-\cos A+\sin A)$

$=2\sin A=\sqrt{2}$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

한편, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $A=45^\circ$야.

3rd $A=45^\circ$를 $\cos(105^\circ-A)$에 대입해서 계산하자.

$\therefore \cos(105^\circ-A)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

140 답 ②

1st x의 값이 증가할수록 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$의 값이 어떻게 되는지 생각해보자.

$0^\circ\leq x\leq 90^\circ$에서 x의 값이 증가하면 $\sin x$와 $\tan x$의 값도 증가하지? 반면에 $\cos x$의 값은 감소하고.

$\therefore \cos 15^\circ<\cos 0^\circ=1$ ⋯ ㉠

2nd 특수각에 대한 삼각비의 값을 이용하여 대소 관계를 따지자.

$\tan 45^\circ=1$이므로

$\cos 0^\circ=1=\tan 45^\circ<\tan 46^\circ$ ⋯ ㉡

그런데 $\cos x=\sin(90^\circ-x)$임을 이용하면

$\cos 15^\circ=\sin(90^\circ-15^\circ)=\sin 75^\circ<\sin 89^\circ<\sin 90^\circ=1$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\cos 15^\circ<\sin 89^\circ<\cos 0^\circ<\tan 46^\circ$

오|답|피|하|기

대소 관계를 쉽게 풀 수 없지? 왜냐하면 주어진 각도들이 모두 특수각이 아니기 때문이야. 이 문제는 x의 값이 증가함에 따라 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$의 값이 어떻게 변하는지 알고 있어야 풀 수 있어. 물론 대소 관계를 비교할 때, 특수각에 대한 삼각비의 값을 미리 알고 있어야 대소 관계를 쉽게 알 수 있기 때문에 특수각에 대한 삼각비도 잘 알아야겠지.
각의 변화에 따른 삼각비의 값의 변화를 잘 확인하면 풀 수 있는 것이 대소 관계니까 이것을 관찰하는 훈련을 많이 해야겠지?

141 답 ③

1st x의 값이 증가할수록 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$의 값이 어떻게 되는지 생각해 보자.

$0^\circ\leq x\leq 90^\circ$에서 x의 값이 증가하면 $\sin x$와 $\tan x$의 값도 증가하지? 반면에 $\cos x$의 값은 감소하고

$\sin 25^\circ<\sin 45^\circ$ ⋯ ㉠

$\cos 45^\circ<\cos 25^\circ<\cos 0^\circ$ ⋯ ㉡

$\tan 45^\circ<\tan 50^\circ<\tan 65^\circ$ ⋯ ㉢

2nd 같은 삼각비의 값을 이용하여 대소 관계를 따지자.

$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 ㉠, ㉡에서

$\sin 25^\circ<\sin 45^\circ=\cos 45^\circ<\cos 25^\circ<\cos 0^\circ$ ⋯ ㉣

또, $\cos 0^\circ=\tan 45^\circ=1$이므로 ㉡, ㉢에서

$\cos 25^\circ<\cos 0^\circ=\tan 45^\circ<\tan 50^\circ<\tan 65^\circ$ ⋯ ㉤

㉣, ㉤에서

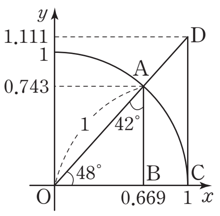
$\sin 25^\circ<\sin 45^\circ<\cos 25^\circ<\cos 0^\circ<\tan 50^\circ<\tan 65^\circ$

따라서 삼각비의 값을 작은 것부터 차례로 나열하면

Ⅰ－Ⅳ－Ⅲ－Ⅱ－Ⅴ－Ⅵ이야.

142 답 ③

1st 주어진 사분원의 반지름의 길이가 1임을 이용하여 $\tan 48^\circ$의 값을 구하자.



$\tan 48^\circ=\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\frac{1.111}{1}=1.111$

2nd $\cos A=\sin(90^\circ-A)$를 이용하여 $\cos 42^\circ$의 값을 구하자.

$42^\circ=90^\circ-48^\circ$이므로

$\cos 42^\circ=\sin 48^\circ$

$\quad=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\frac{0.743}{1}$

$\quad=0.743$

$\therefore \tan 48^\circ-\cos 42^\circ=1.111-0.743$

$\quad=0.368$

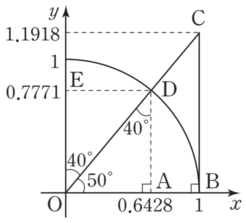
오|답|피|하|기

반지름의 길이가 1인 사분원을 이용하여 삼각비의 값을 구하는 문제는 삼각비의 뜻을 정확히 알고 있으면 풀 수 있어. 그런데 $\tan 48^\circ = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$로 구하지 않아야 제대로 풀 수 있을 거야. 그림에서 $\overline{CD}$가 왜 나와 있는지 생각해 봐.

반지름의 길이가 1인 경우 사분원 안의 삼각형의 빗변의 길이가 1이므로 x좌표는 cos값, y좌표는 sin값을 나타내고, 사분원 밖의 삼각형의 밑변의 길이가 1이므로 점 D의 y좌표가 tan값을 나타낸다는 걸 알고 있어야 해. 그런데 반지름의 길이가 1이 아닐 경우에는 주어진 좌표가 삼각비를 바로 나타내는 게 아님을 주의해야 해.

143 답 ③

1st 주어진 사분원의 반지름의 길이가 1임을 이용하여 $\sin 50^\circ$, $\tan 50^\circ$의 값을 구해 보자.



③ $\sin 50^\circ = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{OD}} = \dfrac{0.7771}{1}$

$=0.7771$ (거짓)

④ $\tan 50^\circ = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \dfrac{1.1918}{1}$

$=1.1918$ (참)

2nd $40^\circ = 90^\circ - 50^\circ$임을 이용하자.

① $\cos 40^\circ = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{OD}} = \dfrac{0.7771}{1} = 0.7771$ (참)

② $\sin 40^\circ = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \dfrac{0.6428}{1} = 0.6428$ (참)

⑤ $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

$= 1 - \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OD}}$ ($\because \overline{OD}=1$) $= 1 - \sin 40^\circ$ (참)

서술형 다지기

문제편 p. 28

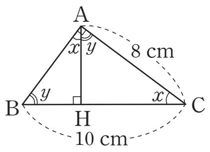
[144-145 채점기준표]

Ⅰ	x와 관련된 삼각비를 구한다.	40%
Ⅱ	y와 관련된 삼각비를 구한다.	40%
Ⅲ	구하고자 하는 값을 구한다.	20%

144 답 $\dfrac{8}{5}$

먼저, $\cos x$의 값을 구하자.

$\angle ABC = y$, $\angle ACB = x$이므로



$\cos x = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ … Ⅰ

그다음, $\sin y$의 값을 구하자.

$\sin y = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ … Ⅱ

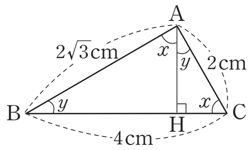
그래서, $\cos x + \sin y$의 값을 구하자.

$\therefore \cos x + \sin y = \dfrac{4}{5} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{5}$ … Ⅲ

145 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

먼저, $\sin x$, $\tan x$의 값을 각각 구하자.

$\angle ABC = y$, $\angle ACB = x$이므로



$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$(cm)

$\sin x = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan x = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ … Ⅰ

그다음, $\cos y$의 값을 구하자.

$\cos y = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ … Ⅱ

그래서, $\sin x \times \cos y \div \tan x$의 값을 구하자.

$\therefore \sin x \times \cos y \div \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \div \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ … Ⅲ

[다른 풀이]

직각삼각형 ABC에서 $\tan x = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$이므로 $x = 60^\circ$

이때, $x + y = 90^\circ$이므로 $y = 30^\circ$

$\therefore \sin x \times \cos y \div \tan x = \sin 60^\circ \times \cos 30^\circ \div \tan 60^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \div \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

[146-147 채점기준표]

Ⅰ	$\cos A$의 값 또는 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.	50%
Ⅱ	$\tan B$의 값 또는 $\overline{BC}$의 길이를 구한다.	30%
Ⅲ	구하고자 하는 식의 값 또는 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 구한다.	20%

146 답 $\dfrac{27}{20}$

먼저, $\cos A$의 값을 구하자.

$\overline{AB}$가 원 O의 지름이고, 점 O가 △ABC의 외심이므로

△ABC는 ∠C가 직각인 직각삼각형이다.

즉, $\angle C = 90^\circ$, $\overline{AB} = 2 \times 7.5 = 15$이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AC} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ $\quad\therefore \cos A = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$ … Ⅰ

그다음, $\tan B$의 값을 구하자.

$\tan B = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$ … Ⅱ

그래서, $\cos A + \tan B$의 값을 구하자.

$\therefore \cos A + \tan B = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{12+15}{20} = \dfrac{27}{20}$ … Ⅲ

147 답 $4(3+\sqrt{3})$

먼저, $\overline{AC}$의 길이를 구하자.

$\overline{AB}$가 원 O의 지름이고, 점 O가 △ABC의 외심이므로 $\angle C = 90^\circ$이고, $\overline{AB} = 2\overline{OB} = 8$이다.

즉, 직각삼각형 ABC에서 $\cos 60^\circ = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC}}{8}$

$\therefore \overline{AC}=8\cos 60°=8\times\frac{1}{2}=4$ … Ⅰ

그다음, $\overline{BC}$의 길이를 구하자.

$\sin 60°=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}}{8}$

$\therefore \overline{BC}=8\sin 60°=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ … Ⅱ

그래서, △ABC의 둘레의 길이를 구하자.

$\therefore$ (△ABC의 둘레의 길이)$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$

$=8+4\sqrt{3}+4=4(3+\sqrt{3})$ … Ⅲ

148 답 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$

먼저, 직선의 기울기를 구하자.

$\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 직선의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. … Ⅰ

그다음, y절편을 구하자.

직선의 y절편을 $b\,(b>0)$라 하면

$\tan 30°=\frac{(y\text{절편의 절댓값})}{(x\text{절편의 절댓값})}=\frac{b}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore b=2\sqrt{3}$ … Ⅱ

그래서, 일차함수의 식을 구하자.

따라서 이 그래프의 일차함수의 식은

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ … Ⅲ

[다른 풀이]

주어진 직선의 기울기는 $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$ … ㉠

x절편이 -6이므로 이 직선은 점 $(-6, 0)$을 지나지?

점 $(-6, 0)$의 좌푯값을 ㉠에 대입하면

$0=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-6)+b$ $\quad\therefore b=2\sqrt{3}$

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$

[채점기준표]

Ⅰ	직선의 기울기를 구한다.	40%
Ⅱ	y절편을 구한다.	40%
Ⅲ	일차함수의 식을 구한다.	20%

149 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 ABC에서

$\sin x=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{3}$이고 $\overline{BC}=3$이므로 $\overline{AB}=9$ … Ⅰ

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AC}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$ … Ⅱ

따라서 직각삼각형 ADC에서

$\tan(x+y)=\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}=\frac{6}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\sin x$를 활용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.	50%
Ⅱ	$\overline{AC}$의 길이를 구한다.	20%
Ⅲ	$\tan(x+y)$의 값을 구한다.	30%

150 답 2.25

먼저, x의 값을 구하자.

직각삼각형 OCD에서 $\angle DOC=a$라 하면

$\cos a=\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}=\overline{OC}=0.57$

삼각비의 표에서 $\cos 55°=0.57$이므로 $a=55°$

$\overline{CD}=\overline{OD}\sin a=\sin 55°=0.82$ $\quad\therefore x=0.82$ … Ⅰ

그다음, y의 값을 구하자.

$\overline{AB}=\overline{OA}\tan a=\tan 55°=1.43$ $\quad\therefore y=1.43$ … Ⅱ

그래서, $x+y$의 값을 구하자.

$\therefore x+y=0.82+1.43=2.25$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	삼각비의 표를 이용하여 x의 값을 구한다.	40%
Ⅱ	삼각비의 표를 이용하여 y의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	$x+y$의 값을 구한다.	20%

151 답 $(\sqrt{3}-1)$ cm

$\tan 30°=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$이므로

$\overline{AC}=\overline{BC}\tan 30°=2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=2(\text{cm})$ … Ⅰ

또, $\cos 30°=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}\times\frac{1}{\cos 30°}=2\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=4(\text{cm})$ … Ⅱ

이때, 내접원 I의 반지름의 길이를 r cm라 하면

△ABC=△IBC+△ICA+△IAB에서

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times r+\frac{1}{2}\times2\times r+\frac{1}{2}\times4\times r$

$2\sqrt{3}=\sqrt{3}r+r+2r$

$(3+\sqrt{3})r=2\sqrt{3}$

$\therefore r=\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{-6+6\sqrt{3}}{6}$

$=\sqrt{3}-1$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	특수한 각의 삼각비를 활용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.	20%
Ⅱ	특수한 각의 삼각비를 활용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.	20%
Ⅲ	삼각형 ABC의 넓이를 활용하여 내접원 I의 반지름의 길이를 구한다.	60%

152 답 $\sqrt{3}$

$\overline{AP}=\overline{AQ}=6$이므로 $\triangle APQ$는 이등변삼각형이야.

$\therefore \angle APQ=\angle AQP=x$

$\angle RAP=90^\circ$, $\angle AQB=90^\circ$이고

$\angle BQR=90^\circ-x=\angle PRA$이므로 $\overline{BQ}=\overline{BR}$ … Ⅰ

한편, 직각삼각형 AQB에서

$\overline{BQ}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-6^2}=2\sqrt{3}=\overline{BR}$이므로

$\overline{AR}=\overline{AB}+\overline{BR}=4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ … Ⅱ

따라서 직각삼각형 APR에서 $\angle RPA=\angle AQP=x$이므로

$\tan x=\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AP}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\angle P=x$이고, 삼각형 BQR가 $\overline{BQ}=\overline{BR}$인 이등변삼각형임을 구한다.	40%
Ⅱ	삼각형 ABQ에서 $\overline{AR}$의 길이를 구한다.	40%
Ⅲ	$\tan x$의 값을 구한다.	20%

153 답 $1+\sqrt{2}$

$\overline{C'D}=a$라 하면 $\overline{C'E}=a$ ($\because \angle C'ED=\angle C'DE=45^\circ$) … ㉠

즉, 직각삼각형 C′ED에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{DE}=\sqrt{2}a$

이때, $\angle C'ED=\angle AEB=45^\circ$($\because$ 맞꼭지각)이므로

$\angle C'ED=\angle C'DE=\angle AEB=\angle ABE=45^\circ$이고

$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{C'D}$이므로 $\triangle C'DE\equiv\triangle AEB$(ASA 합동)

$\overline{BE}=\overline{DE}=\sqrt{2}a$ … ㉡ … Ⅰ

$\triangle EBD$는 이등변삼각형이고 $\angle BED=135^\circ$이므로

$\angle EBD=\angle EDB=22.5^\circ$이다.

$\therefore \angle BDC'=22.5^\circ+45^\circ=67.5^\circ$ … Ⅱ

따라서 직각삼각형 BDC′에서

$\tan 67.5^\circ=\tan(\angle BDC')$

$=\dfrac{\overline{BC'}}{\overline{C'D}}=\dfrac{\overline{C'E}+\overline{BE}}{\overline{C'D}}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{2})a}{a}=1+\sqrt{2}$ ($\because$ ㉠, ㉡) … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\overline{C'D}$의 길이를 기준으로 $\overline{BE}$, $\overline{C'E}$의 길이가 몇 배인지 각각 구한다.	50%
Ⅱ	$\angle BDC'=67.5^\circ$임을 구한다.	30%
Ⅲ	$\overline{C'D}$, $\overline{BE}$, $\overline{C'E}$의 길이를 이용하여 $\tan 67.5^\circ$의 값을 구한다.	20%

최고난도 만점 문제

p. 30

154 답 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

1st $\angle B$, $\angle C$, $\angle ABD$의 크기를 구하자.

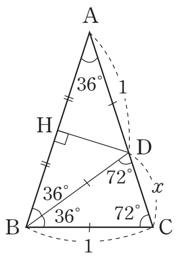
$\triangle ABC$는 $\angle A=36^\circ$인 이등변삼각형이므로

$\angle B=\angle C=\dfrac{180^\circ-36^\circ}{2}=\dfrac{144^\circ}{2}=72^\circ$

그런데 $\angle B$의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점이 D이므로

$\angle ABD=\angle CBD=\dfrac{72^\circ}{2}=36^\circ$

2nd $\overline{CD}$의 길이를 구하자.



$\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle DAB$는 이등변삼각형이므로 $\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{AD}=1$이야.

$\triangle ABC$와 $\triangle BCD$는 $\angle A=\angle CBD=36^\circ$, $\angle C$는 공통이므로 AA 닮음이야.

이때, $\overline{CD}=x$라 하면 $\overline{AC}:\overline{BD}=\overline{BC}:\overline{CD}$

$(1+x):1=1:x$, $x^2+x-1=0$

인수분해가 안 되니까 근의 공식을 이용하자.

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because x>0$)

3rd 이제 $\cos 36^\circ$의 값을 구하자.

이등변삼각형 ABD의 꼭짓점 D에서 $\overline{AB}$에 수선의 발 H를 내리면 $\overline{DH}$는 $\overline{AB}$를 수직이등분하게 되지.

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{CD})$

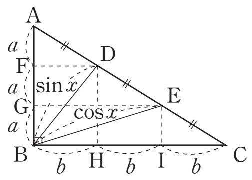
$=\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

따라서 직각삼각형 AHD에서

$\cos 36^\circ=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AD}}=\dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

155 답 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

1st 직각삼각형 ABC의 $\overline{AC}$ 위의 두 점 D, E에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$에 수선의 발을 각각 내리자.



그림과 같이 점 D와 E에서 $\overline{AB}$에 각각의 수선의 발 F, G를 내리자.

$\overline{FD}/\!/\overline{GE}/\!/\overline{BC}$이므로 선분의 길이의 비를 이용하면

$\overline{AD}:\overline{DE}:\overline{EC}=\overline{AF}:\overline{FG}:\overline{GB}$

그런데 $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EC}$이므로

$\overline{AF}=\overline{FG}=\overline{GB}$

또, 점 D와 E에서 $\overline{BC}$에 각각의 수선의 발 H, I를 내리자.

$\overline{EI}/\!/\overline{DH}/\!/\overline{AB}$이므로 선분의 길이의 비를 이용하면

$\overline{AD}:\overline{DE}:\overline{EC}=\overline{BH}:\overline{HI}:\overline{IC}$

그런데 $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EC}$이므로

$\overline{BH}=\overline{HI}=\overline{IC}$

2nd $\sin^2 x$, $\cos^2 x$를 변에 대한 식으로 나타내자.

$\overline{AF}=\overline{FG}=\overline{GB}=a$, $\overline{BH}=\overline{HI}=\overline{IC}=b$로 놓자.

직각삼각형 DBH에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{DB}^2=\overline{BH}^2+\overline{DH}^2$, $\sin^2 x=b^2+4a^2$ ⋯ ㉠

마찬가지 방법으로 직각삼각형 EBI에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BE}^2=\overline{EI}^2+\overline{BI}^2$, $\cos^2 x=a^2+4b^2$ ⋯ ㉡

3rd 이제 $\overline{BD}^2+\overline{BE}^2=1$을 이용하자.

$\overline{BD}^2+\overline{BE}^2=1$이므로

㉠+㉡을 하면

$\sin^2 x+\cos^2 x=5(a^2+b^2)=1$

$\therefore a^2+b^2=\frac{1}{5}$ ⋯ ㉢

직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=(3a)^2+(3b)^2=9a^2+9b^2=9(a^2+b^2)$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{9(a^2+b^2)}=\sqrt{\frac{9}{5}}$ ($\because$ ㉢)$=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

156 답 ③

1st 주어진 조건을 적절히 이용하여 구하려는 식을 변형해 보자.

조건 (가)에서

$\cos A+\cos^2 A=1$, $\cos A=1-\cos^2 A$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ ⋯ ㉡, $\sin^2 A=1-\cos^2 A$

이것을 ㉠에 대입하면 $\cos A=\sin^2 A$

이것의 양변을 제곱하면 $\cos^2 A=\sin^4 A$ ⋯ ㉢

2nd 이제 식을 구해 보자.

$\therefore \sin^2 A+\sin^4 A=\sin^2 A+\cos^2 A=1$ ($\because$ ㉡, ㉢)

[다른 풀이]

$\sin^2 A+\sin^4 A=\sin^2 A+(\sin^2 A)^2$

$=(1-\cos^2 A)+(1-\cos^2 A)^2$ ($\because$ 조건 (나))

$=2-3\cos^2 A+\cos^4 A$

$=2-3\cos^2 A+(\cos^2 A)^2$

$=2-3\cos^2 A+(1-\cos A)^2$ ($\because$ 조건 (가))

$=3-2\cos^2 A-2\cos A$

$=3-2(\cos^2 A+\cos A)$

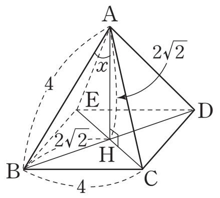
$=3-2\times1$ ($\because$ 조건 (가))

$=1$

157 답 $\sqrt{2}$

1st 직각삼각형 ABH의 변의 길이를 구하자.

정사각뿔의 꼭짓점 A에서 밑면에 내린 수선의 발 H는 정사각형인 밑면 BCDE의 서로 다른 두 대각선의 교점과 일치해.



△BCD에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

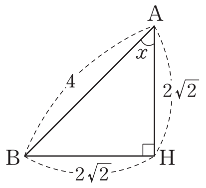
이때, △ABH는 ∠H=90°인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$, $4^2=(2\sqrt{2})^2+\overline{AH}^2$

$\overline{AH}^2=8$ $\quad\therefore \overline{AH}=2\sqrt{2}$

2nd 삼각비를 각각 구하여 계산하자.

∠BAH$=x$에서



$\cos x=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan x=\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=1$

$\therefore \frac{\cos x+\sin x}{\tan x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\sqrt{2}$

[다른 풀이]

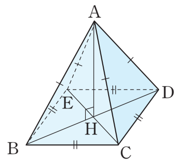
△ABH의 길이의 비를 이용하여 x의 크기를 알아보자.

즉, $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $x=45°$야.

따라서 $\sin x=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan x=\tan 45°=1$임을 알 수 있어.

오답피하기

정사각뿔의 꼭짓점 A에서 밑면에 내린 수선의 발은 밑면의 두 대각선의 교점이 될까? 정사각뿔은 옆면이 이등변삼각형인 도형이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}$이지? 그런데 △ABD와 △AEC는 각각 이등변삼각형이고 이등변삼각형의 성질에 의해 점 H는 밑면의 $\overline{BD}$와 $\overline{EC}$를 각각 이등분해. 한편, □BCDE는 정사각형이므로 두 대각선이 서로 다른 대각선을 이등분하므로 $\overline{BD}$와 $\overline{EC}$의 교점이 H가 되는 거야. 도형의 성질을 잘 이해하고 적용해야 고득점을 얻을 수 있어.



158 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

1st 이차방정식의 두 근이 주어졌으니까 방정식을 세워서 계수를 비교하자.

x에 대한 이차방정식 $4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$의 두 근이 $\sin A$, $\sin B$이므로 $4(x-\sin A)(x-\sin B)=0$

$4x^2-4(\sin A+\sin B)x+4\sin A\times\sin B=0$

계수를 비교하면

$\sin A+\sin B=\frac{2(1+\sqrt{3})}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin A\times\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin A=\frac{1}{2}$, $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B=\frac{1}{2}$

2nd x값이 증가하면 $\sin x$값도 증가하지? 즉, 각이 크면 클수록 그에 대한 sin값도 더 커진다구.

$A>B$니까 $\sin A>\sin B$겠지?

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B=\frac{1}{2}$

$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\sin A=\sin 60°$ $\quad\therefore A=60°$

또, $\sin 30°=\frac{1}{2}$에서 $\sin B=\sin 30°$ $\quad\therefore B=30°$

$\therefore \tan(A-B)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

오|답|피|하|기

x에 대한 이차방정식 $4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$을 직접 인수분해해보자.

$4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$

$2x \qquad -1 \rightarrow -2x$

$2x \qquad -\sqrt{3} \rightarrow -2\sqrt{3}x\ (+$

$-2(1+\sqrt{3})x$

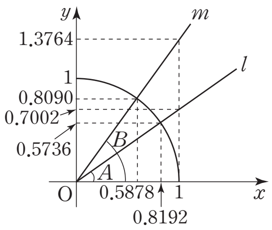
$(2x-1)(2x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=\frac{1}{2},\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉, $\sin A=\frac{1}{2}$, $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B=\frac{1}{2}$

159 답 $x<y$

1st 반지름의 길이가 1임을 이용해서 x의 값을 구해 보자.



$\cos 35^\circ=\cos A=0.8192$,

$\cos 54^\circ=\cos B=0.5878$,

$\tan 35^\circ=\tan A=0.7002$이지?

$\therefore x=\cos 35^\circ+\cos 54^\circ+\tan 35^\circ$

$=0.8192+0.5878+0.7002$

$=2.1072$

2nd 마찬가지 방법으로 y의 값을 구해 보자.

$\sin 54^\circ=\sin B=0.8090$이고

$\tan 54^\circ=\tan B=1.3764$이므로

$y=\sin 54^\circ+\tan 54^\circ=0.8090+1.3764=2.1854$

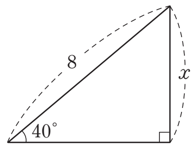
$\therefore x<y$

K 삼각비의 활용

개념 체크 001~024 정답은 p. 2에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가 p. 36

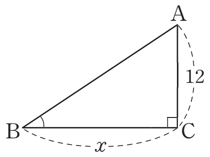
025 답 ①



직각삼각형에서 40°를 기준으로 빗변과 높이의 관계는 sin을 이용하면 돼.

$\frac{x}{8}=\sin 40^\circ \qquad \therefore x=8\sin 40^\circ$

026 답 ④



직각삼각형 ABC에서 B를 기준으로

$\tan B=\frac{12}{x}$

그런데 $\tan B=\frac{2}{3}$이므로

$\frac{12}{x}=\frac{2}{3}$, $2x=36 \qquad \therefore x=18$

027 답 ⑤

$\triangle$ABD에서 B를 기준으로 $\sin B=\sin 45^\circ=\frac{\overline{AD}}{6}$에서

$\overline{AD}=6\sin 45^\circ=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

$\triangle$ADC에서 $\angle$CAD를 기준으로

$\tan(\angle CAD)=\tan 60^\circ=\frac{\overline{DC}}{3\sqrt{2}}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \overline{DC}=3\sqrt{2}\tan 60^\circ=3\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}$

[다른 풀이]

$\triangle$ABD와 $\triangle$ADC는 모두 특수한 각을 갖는 직각삼각형이지?

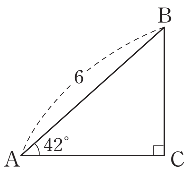
$\triangle$ABD에서 $\overline{AB}:\overline{AD}=\sqrt{2}:1$이므로

$6:\overline{AD}=\sqrt{2}:1 \qquad \therefore \overline{AD}=3\sqrt{2}$

또, $\triangle$ADC에서 $\overline{AD}:\overline{DC}=1:\sqrt{3}$이므로

$3\sqrt{2}:\overline{DC}=1:\sqrt{3} \qquad \therefore \overline{DC}=3\sqrt{6}$

028 답 14.5



직각삼각형 ABC에서 42°를 기준으로 빗변과 높이, 즉 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 관계는 sin으로 나타낼 수 있지?

$\sin 42^\circ=\frac{\overline{BC}}{6}$

$\therefore \overline{BC}=6\times0.6691(\because \sin 42^\circ=0.6691)=4.0146$

또, 직각삼각형 ABC에서 42°를 기준으로 빗변과 밑변, 즉 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 관계는 cos으로 나타낼 수 있지?

$\cos 42^\circ=\frac{\overline{AC}}{6}$

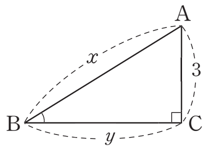
$\therefore \overline{AC}=6\times0.7431(\because \cos 42^\circ=0.7431)=4.4586$

따라서 $\triangle$ABC의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=6+4.0146+4.4586=14.4732$이므로 약 14.5야.

029 답 ⑤

직각삼각형 ABC에서 B를 기준으로



$\sin B=\dfrac{3}{x}$ $\quad\therefore x=\dfrac{3}{\sin B}$

$\tan B=\dfrac{3}{y}$ $\quad\therefore y=\dfrac{3}{\tan B}$

따라서 x, y의 길이를 각각 바르게 나타낸 것은 ⑤야.

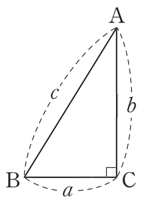
오답피하기

직각삼각형 ABC에서 A를 기준으로 x, y를 표현하면

$\cos A=\dfrac{3}{x} \Rightarrow x=\dfrac{3}{\cos A}$

$\tan A=\dfrac{y}{3} \Rightarrow y=3\tan A$

030 답 ⑤



ㄱ. 직각삼각형에서 A를 기준으로 빗변과 밑변, 즉 c와 a의 관계는 $\sin A=\dfrac{a}{c}$

$\therefore a=c\sin A$ (참)

ㄴ. 직각삼각형 ABC에서 B를 기준으로 빗변과 높이, 즉 c, b의 관계는

$\sin B=\dfrac{b}{c}$

$\therefore b=c\sin B$ (참)

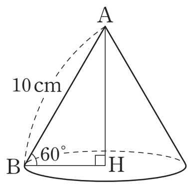
ㄷ. 직각삼각형 ABC에서 A를 기준으로 밑변과 높이, 즉 a와 b의 관계는 $\tan A=\dfrac{a}{b}$

$\therefore a=b\tan A$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳아.

031 답 ⑤

직각삼각형 ABH에서 60°를 기준으로 $\overline{AB}$와 $\overline{AH}$의 관계는 sin으로 나타낼 수 있지?

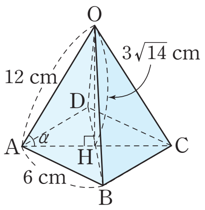


$\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{AH}}{10}$

$\therefore \overline{AH}=10\sin 60^\circ=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\,(\text{cm})$

032 답 $36\sqrt{14}\ \text{cm}^3$

직각삼각형 OAH에서 α를 기준으로 빗변과 높이, 즉 $\overline{OA}$와 $\overline{OH}$의 관계는 sin으로 나타낼 수 있지?



$\sin\alpha=\dfrac{\overline{OH}}{12}$

$\therefore \overline{OH}=12\sin\alpha$

$=12\times\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

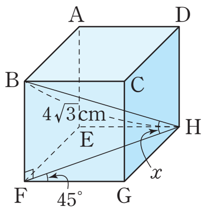
$=3\sqrt{14}\ (\text{cm})\left(\because \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right)$

$\therefore$ (정사각뿔의 부피)$=\dfrac{1}{3}\times\square\text{ABCD}\times\overline{OH}$

$=\dfrac{1}{3}\times(6\times6)\times3\sqrt{14}=36\sqrt{14}\,(\text{cm}^3)$

033 답 $96\ \text{cm}^2$

직각삼각형 BFH에서 $\angle x$를 기준으로 빗변과 밑변, 즉 $\overline{BH}$와 $\overline{FH}$의 관계는 cos으로 나타낼 수 있지?



$\cos x=\dfrac{\overline{FH}}{4\sqrt{3}}$

$\therefore \overline{FH}=4\sqrt{3}\cos x$

$=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(\because \cos x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$=4\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$\triangle$HFG는 직각이등변삼각형이므로 $\angle$HFG$=45^\circ$

직각삼각형 HFG에서 45°를 기준으로 빗변과 밑변, 즉 $\overline{FH}$와 $\overline{FG}$의 관계는 cos으로 나타낼 수 있지?

$\cos 45^\circ=\dfrac{\overline{FG}}{4\sqrt{2}}$

$\therefore \overline{FG}=4\sqrt{2}\cos 45^\circ=4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4\,(\text{cm})$

따라서 한 변의 길이가 4 cm인 정육면체의 겉넓이는

$6\times4^2=96\,(\text{cm}^2)$이야.

[다른 풀이]

정육면체의 한 변의 길이를 a cm라 하면 정육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{3}a$ cm이지?

이때, $\overline{BH}=4\sqrt{3}$ cm가 정육면체의 대각선의 길이이므로

$\sqrt{3}a=4\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=4$

따라서 한 변의 길이가 4 cm인 정육면체의 겉넓이는

$6\times4^2=96(\text{cm}^2)$

034 답 $108\sqrt{3}$

주어진 직육면체의 부피를 구하면

$\overline{FG}\times\overline{HG}\times\overline{DH}=\overline{FG}\times\overline{HG}\times3$ ⋯ ㉠

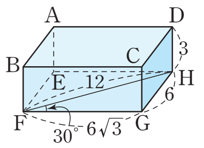
그럼, $\overline{FG}$와 $\overline{HG}$의 길이를 구하기만 하면 되겠지?

직각삼각형 FGH에서 30°를 기준으로 빗변과 밑변, 즉 $\overline{FH}$와 $\overline{FG}$의 관계는 cos으로 나타낼 수 있으므로

$\cos 30^\circ=\dfrac{\overline{FG}}{12}$

$\therefore \overline{FG}=12\cos 30^\circ=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

또, 직각삼각형 FGH에서 30°를 기준으로 빗변과 높이, 즉 $\overline{FH}$와 $\overline{HG}$의 관계는 sin으로 나타낼 수 있으므로



$\sin 30^\circ=\dfrac{\overline{GH}}{12}$

$\therefore \overline{GH}=12\sin 30^\circ=12\times\dfrac{1}{2}=6$

㉠에 의해 (직육면체의 부피)$=6\sqrt{3}\times6\times3=108\sqrt{3}$

035 답 $\sqrt{2}$

직각삼각형 ABH에서 30°를 기준으로 $\overline{AB}$와 $\overline{AH}$의 관계는 빗변과 높이 sin으로 나타낼 수 있지?

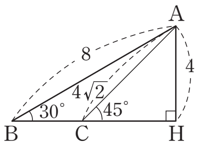
$\sin 30° = \dfrac{4}{\overline{AB}}$

여기서 $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{4}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \overline{AB} = 8$ ⋯ ㉠

또, 직각삼각형 ACH에서 45°를 기준으로 빗변과 높이 $\overline{AC}$와 $\overline{AH}$의 관계는 sin으로 나타낼 수 있지?

$\sin 45° = \dfrac{4}{\overline{AC}}$



여기서 $\sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$\dfrac{4}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \overline{AC} = 4\sqrt{2}$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에 의해

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{8}{4\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

036 답 ④

직각삼각형 ABC에서

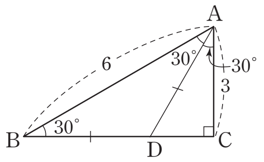
$\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle BCA = 180° - 30° - 90° = 60°$

$\angle BAD = \angle CAD = \dfrac{1}{2}\angle BAC = 30°$

즉, △ABD는 $\overline{BD} = \overline{AD}$인 이등변삼각형이야.

직각삼각형 ABC에서 ∠B를 기준으로 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 관계는 빗변과 높이, 즉 sin으로 나타낼 수 있지?

$\sin 30° = \dfrac{\overline{AC}}{6}$



그런데 $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$이지?

$\therefore \overline{AC} = 6\sin 30° = 6 \times \dfrac{1}{2} = 3$

또, 직각삼각형 ADC에서 ∠DAC를 기준으로 빗변과 밑변, 즉 $\overline{AD}$와 $\overline{AC}$의 관계는 cos으로 나타낼 수 있지?

$\cos 30° = \dfrac{3}{\overline{AD}}$

그런데 $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이지?

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{\overline{AD}}$ $\quad \therefore \overline{AD} = 2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BD} = \overline{AD} = 2\sqrt{3}$

037 답 ①

△ABC에서 ∠ACD=30°는 ∠ACB의 외각이므로

$\angle CBA + \angle CAB = 30°$ ⋯ ㉠

그런데 △ABC는 $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$인 이등변삼각형이므로

$\angle CBA = \angle CAB$이지?

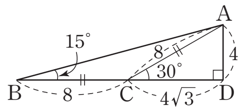
$\therefore \angle CBA = \angle CAB = \dfrac{30°}{2}$ (∵ ㉠) $= 15°$

직각삼각형 ACD에서 30°를 기준으로

$\cos 30° = \dfrac{\overline{CD}}{8}$, $\sin 30° = \dfrac{\overline{AD}}{8}$

그런데 $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$이므로

$\overline{CD} = 8\cos 30° = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$



$\overline{AD} = 8\sin 30° = 8 \times \dfrac{1}{2} = 4$

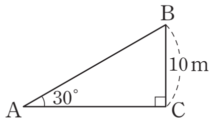
$\therefore \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 8 + 4\sqrt{3} = 4(2+\sqrt{3})$

$\therefore \tan 15° = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \dfrac{4}{4(2+\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$= \dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$

038 답 ④

직각삼각형 ABC에서 30°를 기준으로 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 관계는 sin으로 나타낼 수 있지? $\sin 30° = \dfrac{10}{\overline{AB}}$



$\therefore \overline{AB} = \dfrac{10}{\sin 30°} = \dfrac{10}{\frac{1}{2}} = 20(\text{m})$

[다른 풀이]

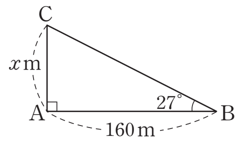
직각삼각형 ABC는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 특수한 삼각형이지? 따라서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 1$이므로

$\overline{AB} : 10 = 2 : 1$ $\quad \therefore \overline{AB} = 20\,\text{m}$

039 답 81.52 m

A와 C 사이의 거리를 x m라 하자.

직각삼각형 ABC에서 27°를 기준으로 밑변과 높이, 즉 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 관계는 tan로 나타낼 수 있지?



$\tan 27° = \dfrac{x}{160}$

그런데 $\tan 27° = 0.5095$이므로

$\dfrac{x}{160} = 0.5095$ $\quad \therefore x = 0.5095 \times 160 = 81.52(\text{m})$

따라서 A와 C 사이의 거리는 81.52 m야.

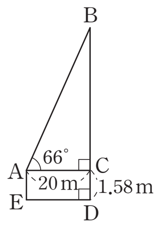
040 답 46.5 m

사람과 나무가 지면 위에 서 있는 지점을 각각 E, D라 하고, 사람이 나무를 바라본 지점을 C라 하고 주어진 그림을 간단히 나타내자.

그림에서 구하는 것은 나무의 높이는

$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$

$\overline{CD} = 1.58$ m이니까 $\overline{BC}$만 구하면 되지?



직각삼각형 ABC에서 밑변과 높이, 즉 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$의 관계는 tan로 나타낼 수 있지? $\tan 66° = \dfrac{\overline{BC}}{20}$

$\therefore \overline{BC} = 20\tan 66° = 20 \times 2.2460 = 44.92$

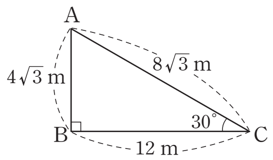
$\therefore \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 44.92 + 1.58 = 46.5(\text{m})$

오|답|피|하|기

정말 주의해야 하는 문제!
문제를 잘 읽지 못하면 사람의 눈높이를 더하는 걸 빼먹는 경우가 많을 거야. 구하는 건 나무의 높이이니까 꼭 더해줘야 해.
$20\times\tan 66^\circ=44.92(\mathrm{m})$를 답으로 하지 않게 문제에서 무엇을 묻고 있는지 언제나 꼼꼼히 읽어봐.

041 답 ④

나무가 서 있는 지점을 B, 부러진 지점을 A, 나무의 꼭대기 지점을 C라 하고 주어진 그림을 간단히 나타내자.



실제 나무의 높이는 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 합이므로 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 길이를 구하면 돼.
직각삼각형 ABC에서 30°를 기준으로 밑변과 높이, 즉 $\overline{BC}$와 $\overline{AB}$의 관계는 tan로 나타낼 수 있지?

$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{AB}}{12}$

$\therefore \overline{AB}=12\tan 30^\circ=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=\dfrac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\ (\mathrm{m})\ \cdots$ ㉠

또, 직각삼각형 ABC에서 30°를 기준으로 빗변과 높이, 즉 $\overline{AC}$와 $\overline{AB}$의 관계는 sin으로 나타낼 수 있지?

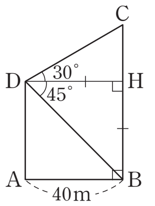
$\sin 30^\circ=\dfrac{4\sqrt{3}}{\overline{AC}}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \overline{AC}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=8\sqrt{3}\ \mathrm{m}\ \cdots$ ㉡

따라서 처음 나무의 높이는
$\overline{AB}+\overline{AC}=4\sqrt{3}+8\sqrt{3}=12\sqrt{3}\ (\mathrm{m})$ ($\because$ ㉠, ㉡)

042 답 ②

그림에서 건물 B의 높이는 $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HC}$지?
결국 $\overline{BH}$와 $\overline{HC}$의 길이를 구하면 돼.
△BCD의 꼭짓점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.
직각삼각형 BHD는 한 내각의 크기가 45°인 직각이등변삼각형이므로
$\overline{DH}=\overline{BH}=\overline{AB}=40\,\mathrm{m}$
그리고 직각삼각형 CDH에서 30°를 기준으로 밑변과 높이, 즉 $\overline{DH}$와 $\overline{HC}$의 관계는 tan로 나타낼 수 있지?



$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{HC}}{40}$

$\overline{HC}=40\tan 30^\circ$

$\quad=40\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}(\mathrm{m})$

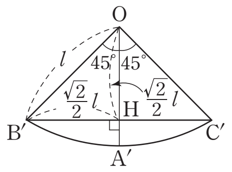
$\therefore \overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HC}=40+\dfrac{40\sqrt{3}}{3}=\dfrac{40(3+\sqrt{3})}{3}(\mathrm{m})$

043 답 40 cm

진자의 중심이 가장 높을 때는 진자가 B 또는 C 지점의 위치에 있을 때이고, 진자의 중심이 가장 낮을 때는 진자가 A 지점의 위치에 있을 때야.

A, B, C 지점에서 진자의 중심을 각각 점 A′, B′, C′이라 하고 주어진 그림을 간단히 나타내자.
점 B′에서 $\overline{OA'}$에 수선의 발 H를 내리면
$\overline{A'H}=\overline{OA'}-\overline{OH}=l-\overline{OH}$ ($\because \overline{OA'}=\overline{OB'}=\overline{OC'}=l$) ⋯ ㉠
여기서 $\overline{OH}$의 길이를 구하자.
직각삼각형 OB′H에서 45°를 기준으로 빗변과 높이, 즉 $\overline{OB'}$과 $\overline{OH}$의 관계는 cos으로 나타낼 수 있지?

$\cos 45^\circ=\dfrac{\overline{OH}}{l}$



$\therefore \overline{OH}=l\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l(\mathrm{cm})$

㉠에서

$\overline{A'H}=l-\dfrac{\sqrt{2}}{2}l=\dfrac{1}{2}(2-\sqrt{2})l(\mathrm{cm})$

주어진 조건에서 $\overline{A'H}=(40-20\sqrt{2})=20(2-\sqrt{2})$ cm이므로

$\dfrac{1}{2}(2-\sqrt{2})l=20(2-\sqrt{2})$

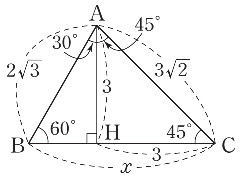
$\therefore l=2\times\dfrac{20(2-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}=40\ (\mathrm{cm})$

044 답 $3+\sqrt{3}$

△ABC의 한 각 C의 크기를 구하자.
삼각형의 세 내각의 합은 180°이므로
$75^\circ+60^\circ+C=180^\circ \quad \therefore C=45^\circ$
△ABC의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\angle BAH=30^\circ$, $\angle CAH=45^\circ$
△ACH는 한 각의 크기가 45°이므로 직각이등변삼각형이지?

$\therefore \overline{CH}=\overline{AC}\times\cos 45^\circ$

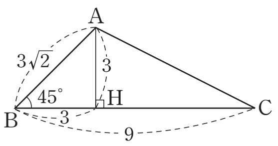
$\quad=3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3$



또, 직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{BH}^2=\overline{AB}^2-\overline{AH}^2=(2\sqrt{3})^2-3^2=3$
$\therefore \overline{BH}=\sqrt{3}$
$\therefore x=\overline{CH}+\overline{BH}=3+\sqrt{3}$

045 답 ②

삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
△ABH는 한 각의 크기가 45°이므로 직각이등변삼각형이지?



$\therefore \overline{AH}=3\sqrt{2}\times\sin 45^\circ$

$\quad=3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3$

이번엔 $\overline{CH}$의 길이를 구하고 직각삼각형 AHC에 피타고라스 정리를 적용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구하자.
$\overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=9-3=6$ ($\because \overline{BH}=\overline{AH}=3$)
$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{CH}^2=3^2+6^2=45$
$\therefore \overline{AC}=3\sqrt{5}$

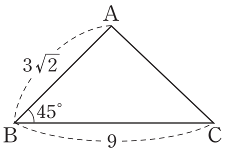
[다른 풀이]

공식을 직접 써서 구해도 돼.

두 변의 길이 a, c와 그 끼인각 $\angle B$의 크기를 알 때,

$\overline{AC}=\sqrt{(c\sin B)^2+(a-c\cos B)^2}$

임을 이용하자.



$\overline{AC}=\sqrt{(\overline{AB}\times\sin B)^2+(\overline{BC}-\overline{AB}\times\cos B)^2}$

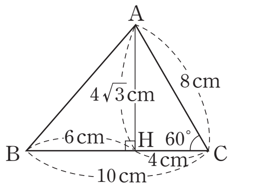
$=\sqrt{(3\sqrt{2}\times\sin 45^\circ)^2+(9-3\sqrt{2}\times\cos 45^\circ)^2}$

$=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(9-3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

046 답 ②

$\triangle ABC$의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AH}$와 $\overline{CH}$의 길이를 구하자.



직각삼각형 AHC에서

$\overline{AH}=\overline{AC}\times\sin 60^\circ$

$=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ (cm)

$\overline{CH}=\overline{AC}\times\cos 60^\circ$

$=8\times\frac{1}{2}=4$(cm)

이번엔 $\overline{BH}$의 길이를 구하고 직각삼각형 ABH에 피타고라스 정리를 적용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구하자.

$\overline{BH}=\overline{BC}-\overline{CH}=10-4=6$(cm)

$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{BH}^2=(4\sqrt{3})^2+6^2=84$

$\therefore\ \overline{AB}=2\sqrt{21}$cm

[다른 풀이]

공식을 직접 써서 구하자.

$\overline{AB}=\sqrt{\left(8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(10-8\times\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$(cm)

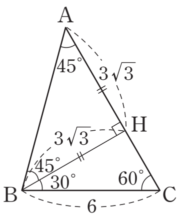
047 답 $3\sqrt{6}$

$\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$A+75^\circ+60^\circ=180^\circ$

$\therefore\ A=45^\circ$

그림과 같이 $\triangle ABC$의 꼭짓점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 BCH에서



$\overline{BH}=6\sin 60^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

직각삼각형 ABH에서

$\cos 45^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}$

$\therefore\ \overline{AB}=\frac{\overline{BH}}{\cos 45^\circ}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{6}$

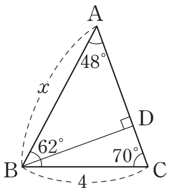
[다른 풀이]

공식을 이용하여 풀면

$\overline{AB}=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{6\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{6}$

048 답 ⑤

$\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로



$A+62^\circ+70^\circ=180^\circ$

$\therefore\ A=48^\circ$

$\triangle ABC$의 꼭짓점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 D라 하자.

$\triangle BCD$에서 $\overline{BD}=\overline{BC}\sin 70^\circ=4\sin 70^\circ$ ⋯ ㉠

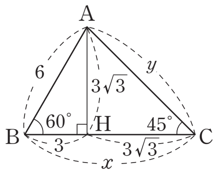
$\triangle ABD$에서 $\overline{BD}=\overline{AB}\sin 48^\circ=x\sin 48^\circ$ ⋯ ㉡

㉠=㉡이므로 $x\sin 48^\circ=4\sin 70^\circ$

$\therefore\ x=\frac{4\sin 70^\circ}{\sin 48^\circ}$

049 답 $9(\sqrt{6}+3\sqrt{2})$

$\triangle ABC$의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 수선의 발 H를 내리자.



$\triangle ABH$에서

$\overline{BH}=\overline{AB}\cos 60^\circ$

$=6\times\frac{1}{2}=3$

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin 60^\circ$

$=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\triangle AHC$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AH}=\overline{CH}=3\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=3+3\sqrt{3}=3(1+\sqrt{3})$

또, 직각삼각형 AHC에서

$\overline{AH}=\overline{AC}\sin 45^\circ=y\sin 45^\circ$

$\therefore\ y=\frac{\overline{AH}}{\sin 45^\circ}=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{6}$

$\therefore\ xy=3(1+\sqrt{3})\times 3\sqrt{6}=9(\sqrt{6}+3\sqrt{2})$

[다른 풀이]

$\triangle ABH$는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 특수한 직각삼각형이야.

$\overline{AB}:\overline{BH}=2:1$, $6:\overline{BH}=2:1$　　$\therefore\ \overline{BH}=3$

$\overline{AB}:\overline{AH}=2:\sqrt{3}$, $6:\overline{AH}=2:\sqrt{3}$　　$\therefore\ \overline{AH}=3\sqrt{3}$

이때, $\triangle AHC$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AH}=\overline{CH}=3\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=3+3\sqrt{3}=3(1+\sqrt{3})$

또, 직각삼각형 AHC에서

$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{CH}^2=2\overline{AH}^2=2\times(3\sqrt{3})^2=54$

$\therefore\ y=\overline{AC}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

$\therefore\ xy=3(1+\sqrt{3})\times 3\sqrt{6}=9(\sqrt{6}+3\sqrt{2})$

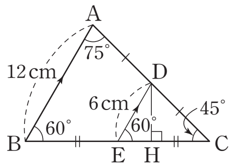
050 답 ⑤

$\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$75^\circ+60^\circ+C=180^\circ$　$\therefore\ C=45^\circ$

$\triangle$ABC에서 두 점 D, E는 각각 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 중점이므로

$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=6(\text{cm})$



점 D에서 $\overline{CE}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\triangle$DEH에서

$\overline{DH}=\overline{DE}\sin 60^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\quad=3\sqrt{3}\,(\text{cm})$ ⋯ ㉠

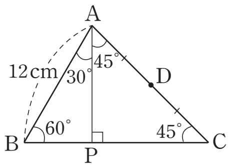
직각이등변삼각형 CDH에서

$\overline{DH}=\overline{CD}\sin 45^\circ=3\sqrt{3}\,(\because$ ㉠$)$

$\therefore \overline{CD}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{6}\,(\text{cm})$

[다른 풀이]

점 A에서 $\overline{BC}$에 수선의 발 P를 내리면



$\triangle$ABP에서

$\overline{AP}=12\sin 60^\circ=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$

직각이등변삼각형 APC에서

$\overline{AP}=\overline{AC}\times\sin 45^\circ=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$

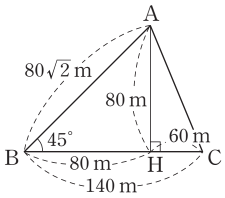
$\therefore \overline{AC}=\frac{6\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}=\frac{6\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=6\sqrt{6}\,(\text{cm})$

따라서 점 D는 $\overline{AC}$의 중점이므로

$\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AC}=3\sqrt{6}\,(\text{cm})$

051 답 100 m

점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\triangle$ABH에서

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin 45^\circ$

$\quad=80\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=80(\text{m})$

$\overline{BH}=\overline{AB}\cos 45^\circ=80\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=80(\text{m})$

$\therefore \overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=140-80=60(\text{m})$

직각삼각형 AHC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{CH}^2=80^2+60^2=10000$

$\therefore \overline{AC}=100\,\text{m}$

052 답 100 m

$\triangle$ABC의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$85^\circ+30^\circ+C=180^\circ\quad\therefore C=65^\circ$

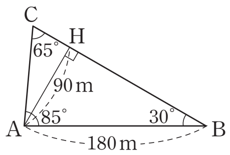
$\triangle$ABC의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin 30^\circ=180\times\frac{1}{2}=90(\text{m})$

직각삼각형 AHC에서 $\overline{AH}=\overline{AC}\sin 65^\circ$

$\therefore \overline{AC}=\frac{\overline{AH}}{\sin 65^\circ}$



$\quad=\frac{90}{\sin 65^\circ}=\frac{90}{0.9}$

$\quad=100(\text{m})$

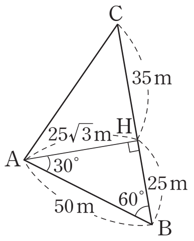
053 답 $10\sqrt{31}$ m

$\triangle$ABC의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin 60^\circ=50\sin 60^\circ$

$\quad=50\times\frac{\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}\,(\text{m})$

$\overline{BH}=\overline{AB}\cos 60^\circ=50\cos 60^\circ$



$\quad=50\times\frac{1}{2}=25(\text{m})$

$\therefore \overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=60-25=35(\text{m})$

직각삼각형 AHC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{CH}^2=(25\sqrt{3})^2+35^2$

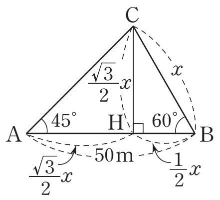
$\quad=3100$

$\therefore \overline{AC}=10\sqrt{31}(\text{m})$

054 답 $50(\sqrt{3}-1)$m

점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{BC}=x$라 하면



$\overline{CH}=\overline{BC}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}x$,

$\overline{BH}=\overline{BC}\cos 60^\circ=\frac{1}{2}x$

$\triangle$AHC는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AH}=\overline{CH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}=50$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}x=50$

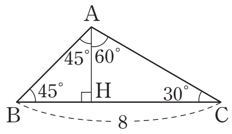
$\sqrt{3}x+x=100,\ (\sqrt{3}+1)x=100$

$\therefore x=\frac{100}{\sqrt{3}+1}=\frac{100(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{100(\sqrt{3}-1)}{3-1}$

$\quad=50(\sqrt{3}-1)(\text{m})$

055 답 $4(\sqrt{3}-1)$

직각삼각형 ABH에서



$\overline{BH}=\overline{AH}\tan 45^\circ$

$\quad=\overline{AH}$

또, 직각삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=\overline{AH}\tan 60^\circ=\sqrt{3}\,\overline{AH}$

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=\overline{AH}+\sqrt{3}\,\overline{AH}=8$이므로

$\overline{AH}(1+\sqrt{3})=8$

$\therefore \overline{AH}=\frac{8}{1+\sqrt{3}}=\frac{8(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$

$\quad=\frac{8(1-\sqrt{3})}{1-3}=\frac{8(1-\sqrt{3})}{-2}=4(\sqrt{3}-1)$

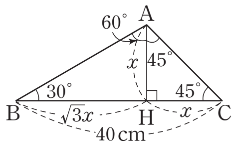
[다른 풀이]

공식을 이용하여 풀 수 있어.

$\overline{AH}=\frac{8}{\tan 45^\circ+\tan 60^\circ}=\frac{8}{1+\sqrt{3}}=4(\sqrt{3}-1)$

056 답 ③

△ABC의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{AH}=x$라 하자.



$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times 40\times x=20x$ ⋯ ㉠

이므로 x만 구하면 되지?

직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\overline{AH}\tan 60°=\sqrt{3}x$

또, 직각삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=\overline{AH}\tan 45°=x$

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=(\sqrt{3}+1)x=40$이므로

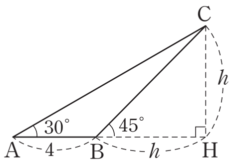
$x=\frac{40}{\sqrt{3}+1}=\frac{40(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=20(\sqrt{3}-1)(\text{cm})$

㉠에 의해

$\triangle ABC=20\times 20(\sqrt{3}-1)=400(\sqrt{3}-1)(\text{cm}^2)$

057 답 $2(\sqrt{3}+1)$

직각삼각형 BHC는 직각이등변삼각형이므로



$\overline{BH}=\overline{CH}=h$

또, 직각삼각형 AHC에서

$\tan 30°=\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}=\frac{h}{4+h}$

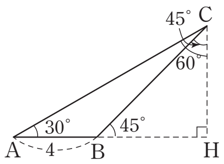
$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{h}{4+h}$

$4+h=\sqrt{3}h$, $(\sqrt{3}-1)h=4$

$\therefore h=\frac{4}{\sqrt{3}-1}=\frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2(\sqrt{3}+1)$

[다른 풀이]

공식을 이용하여 보자.



$\angle CAH=30°$이므로 $\angle ACH=60°$

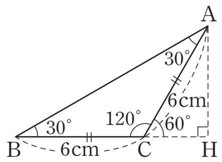
$\angle CBH=45°$이므로 $\angle BCH=45°$

$\therefore h=\frac{4}{\tan 60°-\tan 45°}=\frac{4}{\sqrt{3}-1}$

$=2(1+\sqrt{3})$

058 답 ④

△ABC의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로



$30°+\angle BAC+120°=180°$

$\therefore \angle BAC=30°$

즉, △ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}=6\,\text{cm}$인 이등변삼각형이지?

그런데 직각삼각형 ACH에서

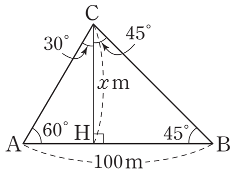
$\angle ACH=180°-\angle ACB=180°-120°=60°$이므로

$\overline{AH}=\overline{AC}\sin 60°=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\ (\text{cm})$

059 답 $50(3-\sqrt{3})\text{m}$

강 건너에 있는 나무의 지점을 C, 각도를 잰 지점을 각각 B, C라 하고 주어진 그림을 간단히 나타내자.

△ABC의 꼭짓점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{CH}=x\,\text{m}$라 하면



△AHC에서

$\angle ACH=180°-(\angle CAH+\angle CHA)$

$=180°-(60°+90°)=30°$

$\therefore \overline{AH}=\overline{CH}\tan 30°=x\tan 30°$

△BCH에서

$\angle BCH=180°-(\angle CBH+\angle CHB)$

$=180°-(45°+90°)=45°$

$\therefore \overline{BH}=\overline{CH}\tan 45°=x\tan 45°$

$\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}=100$이므로

$x\tan 30°+x\tan 45°=100$

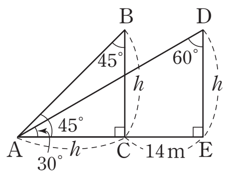
$x(\tan 30°+\tan 45°)=100$

$\therefore x=\frac{100}{\tan 30°+\tan 45°}=\frac{100}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}=\frac{100\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$=50(3-\sqrt{3})(\text{m})$

060 답 $7(\sqrt{3}+1)\text{ m}$

기준점을 A, 두 전신주가 지면과 만나는 점을 각각 C, E, 가장 높은 지점을 각각 B, D라 하여 주어진 그림을 간단히 나타내자.



두 전신주의 높이를 h라 하면

$\overline{BC}=\overline{DE}=h$

직각삼각형 ACB에서

$\overline{AC}=\overline{BC}\tan(\angle ABC)$

$=h\tan 45°=h$

또, 직각삼각형 ADE에서

$\overline{AE}=\overline{DE}\tan(\angle ADE)=h\tan 60°=\sqrt{3}h$

그런데 $\overline{CE}=\overline{AE}-\overline{AC}=14$이므로

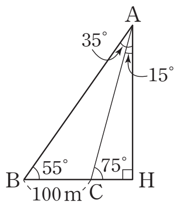
$\sqrt{3}h-h=14$, $h(\sqrt{3}-1)=14$

$\therefore h=\frac{14}{\sqrt{3}-1}=\frac{14(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\frac{14(\sqrt{3}+1)}{2}=7(\sqrt{3}+1)(\text{m})$

061 답 $\frac{100}{\tan 35°-\tan 15°}\text{ m}$

열기구가 떠있는 지점을 A, 지면에서 열기구를 바라봤을 때 50°인 지점을 B, 75°인 지점을 C, 열기구에서 지면에 내린 수선의 발을 H라 하여 주어진 그림을 간단히 나타내라.



△ABH에서

$\angle BAH=180°-(\angle ABH+\angle AHB)$

$=180°-(55°+90°)=35°$

$\therefore \overline{BH}=\overline{AH}\tan 35°$

△ACH에서

$\angle CAH=180°-(\angle ACH+\angle AHC)$

$=180°-(75°+90°)=15°$

$\therefore \overline{CH}=\overline{AH}\tan 15°$

그런데 $\overline{BC}=\overline{BH}-\overline{CH}=100$이므로

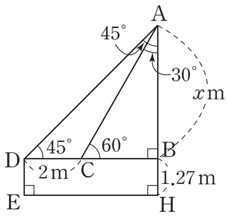
$\overline{AH}\tan 35^\circ - \overline{AH}\tan 15^\circ = 100$

$\overline{AH}(\tan 35^\circ - \tan 15^\circ) = 100$

$\therefore \overline{AH} = \dfrac{100}{\tan 35^\circ - \tan 15^\circ}\,(\text{m})$

062 답 6 m

국기게양대에서 가장 높은 지점을 A, 지면과 만나는 지점을 H, 정희와 은정이의 눈높이 위치를 각각 C, D, 그 눈높이와 수직거리가 같은 국기게양대의 지점을 B라 하고 주어진 그림을 간단히 나타내자.



먼저 $\overline{AB} = x$라 하자.

직각삼각형 ADB에서

$\overline{BD} = \overline{AB}\tan(\angle BAD) = x\tan 45^\circ$

또, 직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC} = \overline{AB}\tan(\angle BAC) = x\tan 30^\circ$

그런데 $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC} = 2$이므로

$x\tan 45^\circ - x\tan 30^\circ = 2$

$x(\tan 45^\circ - \tan 30^\circ) = 2$

$\therefore x = \dfrac{2}{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ} = \dfrac{2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

$= 3+\sqrt{3} = 3+1.73 = 4.73\ (\because \sqrt{3} = 1.73)$

$\therefore$ (국기게양대의 높이)$= \overline{AH} = \overline{AB} + \overline{BH}$

$= x +$(눈높이)$= 4.73 + 1.27$

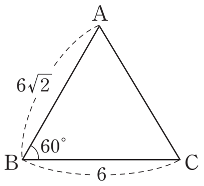
$= 6(\text{m})$

063 답 ③

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B$

$= \dfrac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 6 \times \sin 60^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6}$



오답피하기

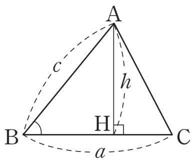
두 변의 길이와 그 끼인각의 크기의 sin값을 알면 삼각형의 넓이를 쉽게 구할 수 있다는 점이 신기하지?

그게 왜 그렇게 되는지 궁금하지?

삼각형의 넓이는 밑변과 높이만 알면 구할 수 있어.

그림에서 밑변의 길이가 a로 주어졌으니까 높이만 구하면 되겠지?

직각삼각형 ABH에서 c와 h의 관계는 B에 대하여 sin으로 나타낼 수 있지?



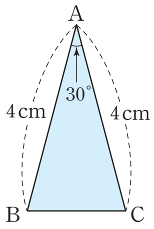
$\sin B = \dfrac{h}{c}$ $\quad\therefore h = c\sin B$

$\therefore \triangle ABC = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}ac\sin B$

이해가 되지? 공식을 외우기보다는 원리를 알고 있는 게 훨씬 도움이 돼.

064 답 4 cm²

이등변삼각형 ABC의 두 변의 길이는 각각 4 cm, 그 끼인각의 크기가 30°이므로



$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A$

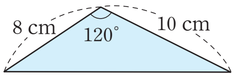
$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 30^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \dfrac{1}{2} = 4(\text{cm}^2)$

065 답 $20\sqrt{3}$ cm²

주어진 삼각형은 두 변의 길이가 각각 8 cm, 10 cm이고 끼인각의 크기가 120°인 둔각삼각형이므로

(삼각형의 넓이)



$= \dfrac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \sin(180^\circ - 120^\circ)$

$= \dfrac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \sin 60^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

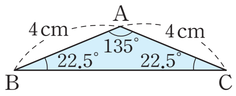
066 답 ②

$\triangle ABC$는 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle B = \angle C = 22.5^\circ$

$\therefore \angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 135^\circ$

즉, $\triangle ABC$는 $\angle A$가 둔각인 둔각삼각형이므로



$\triangle ABC$

$= \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin(180^\circ - A)$

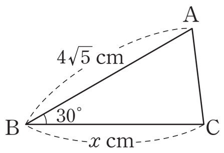
$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin(180^\circ - 135^\circ)$

$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 45^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$

067 답 ③

두 변의 길이가 각각 $4\sqrt{5}$ cm, x cm이고 끼인각의 크기가 30°이므로



$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B$

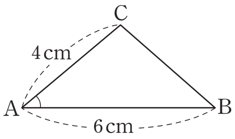
$= \dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times x \times \sin 30^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times x \times \dfrac{1}{2} = \sqrt{5}x$

그런데 $\triangle ABC$의 넓이가 40 cm²이므로 $\sqrt{5}x = 40$

$\therefore x = \dfrac{40}{\sqrt{5}} = 8\sqrt{5}\,(\text{cm})$

068 답 ④



$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$에서

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\sin A=12\sin A$

그런데 $\triangle ABC$의 넓이가 $6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$이므로

$12\sin A=6\sqrt{3}\qquad\therefore \sin A=\frac{6\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $A=60^\circ$

069 답 $4\sqrt{19}$ cm

먼저 $\triangle ABC$의 넓이를 구하자.

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 20\times\sin 60^\circ$

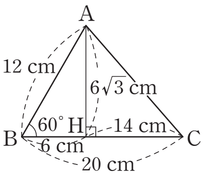
$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\,\overline{AB}$

그런데 $\triangle ABC$의 넓이가 $60\sqrt{3}\ \text{cm}^2$이므로

$5\sqrt{3}\,\overline{AB}=60\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}=\frac{60\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=12\,\text{cm}$

이때, $\triangle ABC$의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서



$\overline{BH}=\overline{AB}\times\cos 60^\circ=12\times\frac{1}{2}=6(\text{cm})$

$\overline{AH}=\overline{AB}\times\sin 60^\circ$

$=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sqrt{3}\ (\text{cm})$

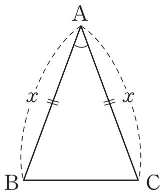
또, $\overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=20-6=14(\text{cm})$

직각삼각형 AHC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{CH}^2=(6\sqrt{3})^2+14^2=304$

$\therefore \overline{AC}=4\sqrt{19}\ (\text{cm})$

070 답 ②



$\overline{AB}=\overline{AC}=x$라 하면

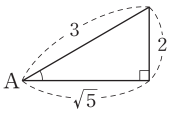
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin A$

$=\frac{1}{2}x^2\sin A$ ⋯ ㉠

$\triangle ABC$의 넓이를 구하기 위해서는 $\sin A$의 값을 구해야겠지?

$0^\circ<A<90^\circ$이고 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{3}$를 만족시키는 직각삼각형을 그려 보자.

그럼, 빗변의 길이가 3, 밑변의 길이는 $\sqrt{5}$인 직각삼각형에 피타고라스 정리를 적용하여 높이를 구하자.



$\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{4}=2$

$\therefore \sin A=\frac{2}{3}$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하고, $\triangle ABC$의 넓이가 27이므로

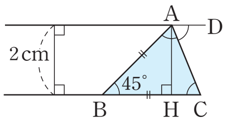
$\triangle ABC=\frac{1}{2}x^2\sin A$

$=\frac{1}{2}x^2\times\frac{2}{3}=27$

$x^2=81\qquad\therefore x=9$

$\therefore \overline{AB}+\overline{AC}=2x=18$

071 답 ①



주어진 그림을 간단히 나타내면

$\angle DAC=\angle BAC$(∵ 접은 부분),

$\angle DAC=\angle BCA$(∵ 엇각)이므로

$\angle BAC=\angle ACB$

따라서 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}$ ⋯ ㉠인 이등변삼각형이야.

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(\angle ABC)$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AB}\times\sin 45^\circ$(∵ ㉠)

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\overline{AB}^2$ ⋯ ㉡

그럼, $\overline{AB}$의 길이만 구하면 되겠지?

직각삼각형 ABH에서

$\sin 45^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{2}{\overline{AB}}$

$\therefore \overline{AB}=\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}\ (\text{cm})$

㉡에 의해

$\triangle ABC=\frac{\sqrt{2}}{4}\times(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$

072 답 ④

$\angle ACB=150^\circ$이므로 $\triangle ABC$는 둔각삼각형이지?

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\sin(180^\circ-\angle ACB)$

$=\frac{1}{2}\times 8\times\overline{AC}\times\sin(180^\circ-150^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 8\times\overline{AC}\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 8\times\overline{AC}\times\frac{1}{2}=2\overline{AC}$

그런데 $\triangle ABC$의 넓이가 $8\sqrt{3}\ \text{cm}^2$이므로

$\triangle ABC=2\overline{AC}=8\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AC}=4\sqrt{3}\,\text{cm}$

073 답 ②

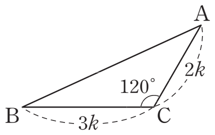
$\overline{BC}:\overline{AC}=3:2$이므로 $\overline{BC}=3k$, $\overline{AC}=2k$(k는 양수)로 놓을 수 있지?

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\sin(180^\circ-\angle ACB)$

$=\frac{1}{2}\times 3k\times 2k\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 3k\times 2k\times\sin 60^\circ$

$=3k^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}k^2$



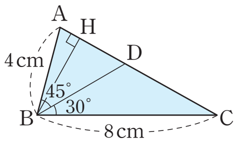
그런데 △ABC의 넓이가 $24\sqrt{3}$이므로

$\frac{3\sqrt{3}}{2}k^2=24\sqrt{3}$, $k^2=16$ $\therefore k=4$ ($\because k>0$)

$\therefore \overline{BC}-\overline{AC}=3k-2k=k=4$

074 답 ②

△ABC의 꼭짓점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{BH}$,

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BH}$에서 두 삼각형의 넓이의 비는

$\triangle ABD:\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{BH}:\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BH}$

$=\overline{AD}:\overline{CD}$ ⋯ ㉠

△ABD와 △BCD의 넓이의 비를 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 이용하여 각각 구해볼까?

$\triangle ABD:\triangle BCD$

$=\left(\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\sin(\angle ABD)\right):\left(\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BD}\times\sin(\angle CBD)\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\times 4\times\overline{BD}\times\sin 45^\circ\right):\left(\frac{1}{2}\times 8\times\overline{BD}\times\sin 30^\circ\right)$

$=(2\times\sin 45^\circ):(4\times\sin 30^\circ)$

$=\left(2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right):\left(4\times\frac{1}{2}\right)$

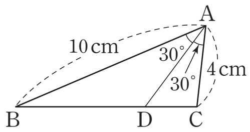
$=\sqrt{2}:2$

$=1:\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AD}:\overline{CD}=1:\sqrt{2}$ ($\because$ ㉠)

075 답 ④

△ABC=△ABD+△ACD이므로 각각의 넓이를 구하자.



△ABC

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 4\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ ⋯ ㉠

△ABD+△ACD

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin(\angle CAD)$

$=\frac{1}{2}\times 10\times\overline{AD}\times\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\times 4\times\overline{AD}\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 10\times\overline{AD}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 4\times\overline{AD}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\overline{AD}$ ⋯ ㉡

㉡=㉠이므로 $\frac{7}{2}\overline{AD}=10\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AD}=\frac{20\sqrt{3}}{7}$ (cm)

076 답 2.1

△ABC=△ABD+△ACD이므로 각각의 넓이를 구하자.

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(180^\circ-\angle BAC)$

$=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$ ⋯ ㉠

△ABD+△ACD

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin(\angle CAD)$

$=\frac{1}{2}\times 7\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times 3\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 7\times\overline{AD}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 3\times\overline{AD}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{10\sqrt{3}}{4}\overline{AD}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\overline{AD}$ ⋯ ㉡

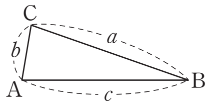
㉡=㉠이므로

$\frac{5\sqrt{3}}{2}\overline{AD}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \overline{AD}=\frac{21}{10}=2.1$

077 답 3 : 1 : 3

△ABC의 넓이를 S라 하면



$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=\frac{1}{2}ca\sin B$

$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{2S}{bc}:\frac{2S}{ca}:\frac{2S}{ab}$

$=\frac{1}{bc}:\frac{1}{ca}:\frac{1}{ab}$

$=\frac{a}{abc}:\frac{b}{abc}:\frac{c}{abc}=a:b:c$ ⋯ ㉠

주어진 식을 정리해 보자.

$a-6b+c=0$ ⋯ ㉡

$a+3b-2c=0$ ⋯ ㉢

㉡−㉢에서

$$\begin{array}{rl} & a-6b+c=0 \\ -) & a+3b-2c=0 \\ \hline & -9b+3c=0 \end{array}$$

$\therefore c=3b$

이것을 ㉡에 대입하면

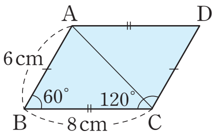
$a-3b=0$ $\therefore a=3b$

$\therefore a:b:c=3b:b:3b=3:1:3$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:1:3$ ($\because$ ㉠)

078 답 ④

사각형 ABCD는 평행사변형이므로 평행사변형의 성질에 의해 이웃하는 두 내각이 합이 180°가 되지?



$\therefore \angle B=180^\circ-\angle C=60^\circ$

보조선 $\overline{AC}$를 그어 만들어진 두 삼각형 $\triangle ABC$, $\triangle CDA$는 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{CB}=\overline{AD}$, $\angle B=\angle D$이므로 SAS 합동이지?

그럼, 평행사변형의 넓이는 $\triangle ABC$의 넓이의 2배가 되겠지?

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times6\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

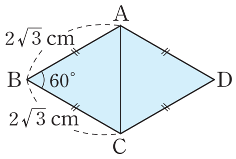
$\therefore$ (평행사변형 ABCD의 넓이)$=2\triangle ABC$

$=24\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

079 답 $6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

마름모는 평행사변형이지? 이때, 보조선 AC를 그어 만들어진 두 삼각형 ABC, ADC는 SSS 합동이므로 $\triangle ABC=\triangle ADC$

즉, 마름모의 넓이는 $\triangle ABC$의 넓이의 2배야.



또, 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=2\sqrt{3}$ cm 에서

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\sin60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

$\therefore$ (마름모 ABCD의 넓이)$=2\triangle ABC$

$=6\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

080 답 $8\ \text{cm}^2$

평행사변형 ABCD에서 $\triangle ABC$, $\triangle CDA$는 합동인 삼각형이니까 $\triangle ABC=\triangle CDA$

즉, 평행사변형 ABCD의 넓이는 $\triangle ABC$의 넓이의 2배야.

이때, $\overline{AC}\perp\overline{CD}$이므로 $\angle ACD=90^\circ$이고

$\angle BAC=\angle DCA=90^\circ$($\because$ 엇각)

직각삼각형 ABC에서

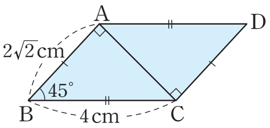
$$\cos B=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos45^\circ$$

$\therefore B=45^\circ$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

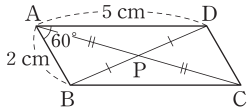
$$=4(\text{cm}^2)$$



$\therefore \square ABCD=2\triangle ABC=8\ (\text{cm}^2)$

081 답 ③

평행사변형 ABCD의 두 대각선은 각각을 이등분하지?



$\triangle APD$와 $\triangle CPB$는

$\overline{AP}=\overline{CP}$, $\overline{DP}=\overline{BP}$,

$\angle APD=\angle CPB$($\because$ 맞꼭지각)이므로

SAS 합동이지?

그럼, $\triangle APD+\triangle CPB=2\triangle APD$ ⋯ ㉠이지?

$\triangle APD$의 넓이만 구하면 되겠지?

그런데 평행사변형 ABCD에서 $\triangle ABP$와 $\triangle APD$는 $\overline{BP}=\overline{DP}$이고, 높이는 같으니까

$\triangle ABP=\triangle APD$

$\therefore \triangle APD=\frac{1}{2}\triangle ABD$ ⋯ ㉡

$\triangle ABD$의 넓이는 $\square ABCD$의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\square ABCD$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin(\angle BAD)$$

$$=\frac{1}{2}\times2\times5\times\sin60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times2\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$$

㉡에 의해

$$\triangle APD=\frac{1}{2}\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$$

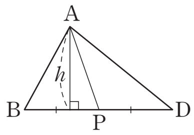
또, ㉠에서

$$\triangle APD+\triangle BCP=2\times\frac{5\sqrt{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$$

오|답|피|하|기

㉡이 성립하는 이유?

두 삼각형의 모양은 달라도 밑변의 길이와 높이가 같으면 두 삼각형의 넓이가 같잖아. 즉, $\triangle ABP$와 $\triangle ADP$에서 $\overline{BP}=\overline{PD}$이고 높이 h로 같으므로 두 삼각형 ABP와 ADP의 넓이는 같아.



082 답 ④

평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB}=k$ (k는 양수)라 하면

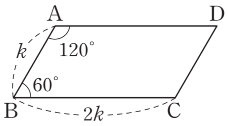
$\overline{BC}=2\overline{AB}=2k$

그리고 $\angle B=180^\circ-\angle A=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

$$\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=k\times2k\times\sin60^\circ$$

$$=k\times2k\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}k^2$$

그런데 평행사변형 ABCD의 넓이는 $64\sqrt{3}$이므로



$\sqrt{3}k^2=64\sqrt{3}$

$k^2=64$ $\quad\therefore k=8$ ($\because k>0$)

$\therefore$ ($\square ABCD$의 둘레의 길이)$=2(k+2k)=6k=6\times8=48$

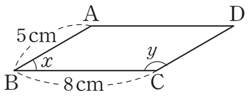
083 답 ②

먼저 평행사변형 ABCD의 넓이를 구하자.

$\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=5\times8\times\sin x=40\sin x$

그런데 평행사변형 ABCD의 넓이가 $20\,\text{cm}^2$이므로

$40\sin x=20 \qquad \therefore \sin x=\frac{1}{2}$



이때, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$이므로

$x=30^\circ$ ⋯ ㉠

평행사변형 ABCD의 이웃하는 두 내각의 크기의 합은 180°이므로

$x+y=180^\circ \qquad \therefore y=150^\circ(\because$ ㉠$)$

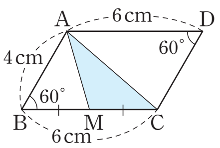
084 답 $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

사각형 ABCD는 평행사변형이므로

$\overline{BC}=\overline{AD}=6\,\text{cm},\ \angle B=\angle D=60^\circ$

그리고 $\triangle ABC=\triangle ACD$이고,

$\triangle AMC=\frac{1}{2}\triangle ABC$이므로



$\triangle AMC=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\square ABCD\right)=\frac{1}{4}\square ABCD$

$=\frac{1}{4}\times(\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B)=\frac{1}{4}\times(4\times6\times\sin 60^\circ)$

$=\frac{1}{4}\times\left(4\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

085 답 ①

점 D에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

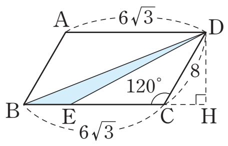
$\triangle BED:\triangle DEC=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{DH}:\frac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{DH}=\overline{BE}:\overline{EC}=1:2$

이므로 $2\triangle BED=\triangle DEC$ ⋯ ㉠

$\triangle BCD=\triangle BED+\triangle DEC$

$=\triangle BED+2\triangle BED(\because$ ㉠$)$

$=3\triangle BED$



$\therefore \triangle BED=\frac{1}{3}\triangle BCD$ ⋯ ㉡

그런데 사각형 ABCD는 평행사변형이므로

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\square ABCD$ ⋯ ㉢

그럼, 평행사변형 ABCD의 넓이만 구하면 되겠지?

$\square ABCD=\overline{BC}\times\overline{DC}\times\sin(180^\circ-\angle BCD)$

$=6\sqrt{3}\times8\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=6\sqrt{3}\times8\times\sin 60^\circ=6\sqrt{3}\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=72$

㉢에서 $\triangle BCD=\frac{1}{2}\times72=36$

이것을 ㉡에 대입하면 $\triangle BED=\frac{1}{3}\times36=12$

086 답 ③

사각형 ABCD의 두 대각선이 이루는 각의 크기가 60°이고, 두 대각선의 길이가 각각 6, 8이므로

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times6\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

087 답 ③

사각형 ABCD의 두 대각선이 이루는 각의 크기가 90°이고, 두 대각선 $\overline{BD}$, $\overline{AC}$의 길이가 각각 $5\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$이므로

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}\times\sin 90^\circ=\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin 90^\circ$

$=\frac{1}{2}\times5\times6\times1=15(\text{cm}^2)$

088 답 ②

주어진 사각형 ABCD의 두 대각선이 이루는 각의 크기가 135°이므로 두 대각선이 이루는 예각의 크기는 $180^\circ-135^\circ=45^\circ$지?

$\overline{BD}=x$라 하면 사각형 ABCD에서 $\overline{AC}=6$이므로

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times6\times x\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}x$

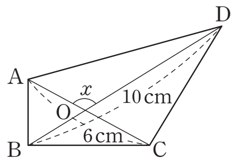
그런데 사각형 ABCD의 넓이가 $12\sqrt{2}$이므로

$\frac{3\sqrt{2}}{2}x=12\sqrt{2} \qquad \therefore x=8 \qquad \therefore \overline{BD}=x=8$

089 답 ⑤

$\angle x$는 둔각이므로 예각은 $180^\circ-\angle x$지?

사각형 ABCD의 두 대각선 $\overline{BD}$, $\overline{AC}$의 길이가 각각 $10\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$이므로



$\square ABCD$

$=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}\times\sin(180^\circ-\angle x)$

$=\frac{1}{2}\times10\times6\times\sin(180^\circ-\angle x)$

$=30\sin(180^\circ-\angle x)$

그런데 사각형 ABCD의 넓이가 $15\sqrt{3}\ \text{cm}^2$이므로

$30\sin(180^\circ-\angle x)=15\sqrt{3}$

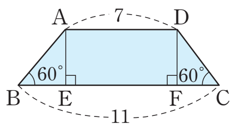
$\sin(180^\circ-\angle x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $180^\circ-\angle x=60^\circ$

$\therefore \angle x=120^\circ$

090 답 ④

등변사다리꼴 ABCD의 두 꼭짓점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면



$\square ABCD=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AE}$

$=\frac{1}{2}\times(7+11)\times\overline{AE}=9\overline{AE}$ ⋯ ㉠

그럼, $\overline{AE}$의 길이만 구하면 되겠지?

여기서 $\overline{EF}=7$이므로

$\overline{BE}=\overline{FC}=\frac{1}{2}(\overline{BC}-\overline{EF})=\frac{1}{2}\times(11-7)=2$

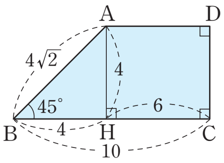
직각삼각형 ABE에서

$\overline{AE}=\overline{BE}\tan 60^\circ=2\tan 60^\circ=2\sqrt{3}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\square ABCD=9\times2\sqrt{3}=18\sqrt{3}$

091 답 ③

사다리꼴 ABCD의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\square ABCD=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+10)\times\overline{AH}$ ⋯ ㉠

그럼, $\overline{AD}$, $\overline{AH}$의 길이만 구하면 되겠지?

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin 45^\circ=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$ ⋯ ㉡

$\overline{BH}=\overline{AB}\cos 45^\circ=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$

$\therefore\ \overline{AD}=\overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=10-4=6$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

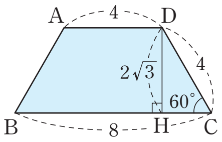
$\square ABCD=\frac{1}{2}\times(6+10)\times4=32$

092 답 ③

사다리꼴 ABCD의 꼭짓점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{DH}=\frac{1}{2}\times(4+8)\times\overline{DH}$

$=6\overline{DH}$ ⋯ ㉠



그럼, $\overline{DH}$의 길이만 구하면 되겠지?

직각삼각형 DCH에서

$\overline{DH}=\overline{DC}\times\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

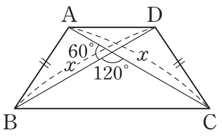
이것을 ㉠에 대입하면

$\square ABCD=6\times2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

093 답 4

등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 서로 같아.

이때, 사각형 ABCD가 등변사다리꼴이므로 $\overline{AC}=\overline{BD}=x(x>0)$라 하자.



사각형의 두 대각선이 이루는 각의 크기가 120°이므로 예각의 크기는

$180^\circ-120^\circ=60^\circ$

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times x\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

이때, 사각형 ABCD의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=4\sqrt{3}$, $x^2=16$ $\quad\therefore\ \overline{AC}=x=4\ (\because\ x>0)$

094 답 ②

$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle DAC$ ⋯ ㉠이므로

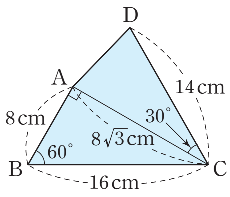
$\triangle ABC$와 $\triangle DAC$의 넓이를 구하면 되겠지?

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(\angle ABC)$

$=\frac{1}{2}\times8\times16\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times8\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=32\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$ ⋯ ㉡

한편, 직각삼각형 ABC에 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$



$16^2=8^2+\overline{AC}^2$, $\overline{AC}^2=192$

$\therefore\ \overline{AC}=8\sqrt{3}$ cm

$\triangle DAC=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ACD)$

$=\frac{1}{2}\times8\sqrt{3}\times14\times\sin 30^\circ$

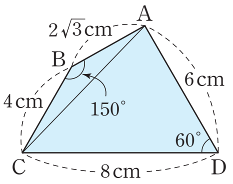
$=\frac{1}{2}\times8\sqrt{3}\times14\times\frac{1}{2}=28\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\square ABCD=32\sqrt{3}+28\sqrt{3}=60\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

095 답 $14\sqrt{3}$ cm²

사각형 ABCD에서 보조선 AC를 그으면 $\triangle ABC$와 $\triangle ACD$가 생기지?



$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$ ⋯ ㉠

이므로 $\triangle ABC$와 $\triangle ACD$의 넓이를 구해서 더하면 되겠지?

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(180^\circ-150^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin 60^\circ$

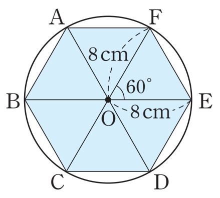
$=\frac{1}{2}\times6\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

이것들을 ㉠에 대입하면

$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD=2\sqrt{3}+12\sqrt{3}=14\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

096 답 $96\sqrt{3}$ cm²

원에 내접하는 정육각형을 그림과 같이 나누면 정육각형의 넓이는 $\triangle OEF$의 넓이의 6배이므로 $\triangle OEF$의 넓이만 구하면 되겠지?



$\overline{OE}=\overline{OF}=8$ cm (∵ 원의 반지름)

또, $\angle EOF=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$

$\therefore\ \triangle OEF=\frac{1}{2}\times\overline{OE}\times\overline{OF}\times\sin(\angle EOF)$

$=\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times8\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$

$\therefore$ (정육각형의 넓이)$=6\triangle OEF=6\times16\sqrt{3}=96\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

[다른 풀이]

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로

$\triangle OEF=\frac{\sqrt{3}}{4}\times8^2$

따라서 구하는 정육각형의 넓이는

$6\times\triangle OEF=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times8^2=96\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

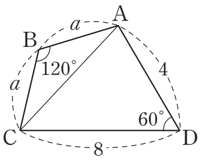
097 답 ④

사각형 ABCD에서 보조선 AC를 긋자.

□ABCD=△ABC+△ACD가 성립하고

□ABCD의 넓이가 $12\sqrt{3}$이므로

△ABC+△ACD=$12\sqrt{3}$ … ㉠이지?



$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(180^\circ-\angle ABC)$

$=\frac{1}{2}\times a\times a\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times a\times a\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ … ㉡

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AD}\times\sin(\angle ADC)$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 4\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$ … ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+8\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=4\sqrt{3}$, $a^2=16$ $\quad\therefore a=4$ ($\because a>0$)

잘 틀리는 유형 훈련+1up

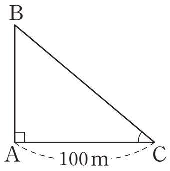
p. 46

098 답 ②

1st 먼저 직각삼각형 ABC의 C를 기준으로 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 관계를 나타낼 수 있는 삼각비를 생각해 봐.

구하려는 것은 두 지점 A, B 사이의 거리이므로 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 길이를 구하자.

직각삼각형 ABC에서 C를 기준으로 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 관계는 tan로 나타낼 수 있지?

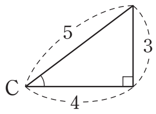


$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\tan C$

$\overline{AB}=\overline{AC}\tan C=100\tan C$ … ㉠

2nd $\sin C=\frac{3}{5}$을 이용하여 $\tan C$의 값을 구하자.

$\sin C=\frac{3}{5}$을 만족시키는 직각삼각형을 구하면 그림과 같겠지?



즉, $\tan C=\frac{3}{4}$이지?

이것을 ㉠에 대입하면 $\overline{AB}=100\times\frac{3}{4}=75$(m)

오답피하기

이런 유형의 문제에서 틀리기 쉬운 부분이 직각삼각형의 어떤 각을 기준으로 변과 변 사이의 관계를 찾지 못하는 경우와 삼각비를 하나 주었을 때 나머지 삼각비를 구하지 못하는 경우야.

삼각비에서 어떤 각을 기준으로 하느냐에 따라 높이가 밑변이 될 수 있고, 밑변이 높이가 될 수 있어. 그래서 기준이 되는 각에 주의하면서 두 변 사이의 관계를 잘 따져야 해.

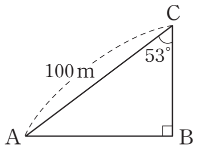
삼각비는 직각삼각형에서 다루어지는 거니까 삼각비가 하나 주어지면 나머지 삼각비를 구할 수 있어. 물론 주어진 삼각비를 만족하는 직각삼각형을 그리고 피타고라스 정리를 이용하여 나머지 변을 구하는 과정이 있어야겠지? 이런 과정만 잘 이해하고 있다면 실수하지 않을 거야.

099 답 ①, ③

1st 먼저 직각삼각형 ABC의 ∠C=53°를 기준으로 $\overline{AC}$와 $\overline{AB}$의 관계를 나타낼 수 있는 삼각비를 생각해 봐.

구하려는 것은 두 지점 A, B 사이의 거리이므로 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 길이를 구하자.

직각삼각형 ABC에서 C를 기준으로 $\overline{AC}$와 $\overline{AB}$의 관계는 sin으로 나타낼 수 있지?



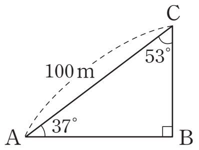
$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\sin C$에서

$\overline{AB}=\overline{AC}\sin C$

$=100\sin 53^\circ$(m) ←①

2nd 이번엔 직각삼각형 ABC의 ∠A=90°−53°=37°를 기준으로 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$의 관계를 나타낼 수 있는 삼각비를 생각해 봐.

직각삼각형 ABC에서 A를 기준으로 $\overline{AC}$와 $\overline{AB}$의 관계는 cos으로 나타낼 수 있지?



$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\cos A$에서

$\overline{AB}=\overline{AC}\cos A$

$=100\cos 37^\circ$(m) ←③

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $100\sin 53^\circ$ m 또는 $100\cos 37^\circ$ m야.

100 답 $72\sqrt{2}$ cm²

1st ∠AOB의 크기를 구하자.

∠AOB=360°÷8=45°

2nd △OAB의 넓이를 구하자.

△OAB에서 $\overline{OA}=\overline{OB}=6$(cm)

$\therefore\triangle OAB=\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin 45^\circ$

$=9\sqrt{2}$ (cm²)

3rd 정팔각형의 넓이를 구하자.

∴ (정팔각형의 넓이)=8△OAB

$=8\times 9\sqrt{2}$

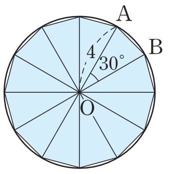
$=72\sqrt{2}$ (cm²)

101 답 48 cm^2

1st 하나의 삼각형의 내각의 크기를 구하자.

그림과 같이 지름을 그리면 12개의 합동인 삼각형이 만들어진다.

$\angle AOB = 360^\circ \times \frac{1}{12} = 30^\circ$



2nd 하나의 삼각형의 넓이를 구하자.

$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 30^\circ = 4(\text{cm}^2)$

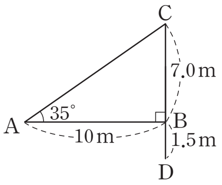
3rd 정십이각형의 넓이를 구하자.

$\therefore$ (정십이각형의 넓이)$=12\triangle OAB = 12 \times 4$

$=48(\text{cm}^2)$

102 답 ⑤

1st 주어진 그림을 간단히 나타내자.



그림에서 구하는 것은 $\overline{CD}$지?

사람의 눈높이가 1.5m이므로

$\overline{BD}=1.5\text{m}$

$\therefore \overline{CD}=\overline{BC}+\overline{BD}$

$=\overline{BC}+1.5 \cdots$ ㉠

그럼, $\overline{BC}$의 길이만 구하면 되지? 직각삼각형 ABC에서 A를 기준으로 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 관계는 tan로 나타낼 수 있지?

$\tan 35^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{10}$

$\therefore \overline{BC} = 10 \tan 35^\circ$

$=10 \times 0.70$

$=7.0(\text{m})$

2nd 나무의 높이는 $\overline{BC}$의 길이와 사람의 눈높이의 합이야.

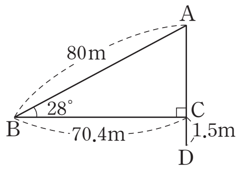
㉠에 의해 $\overline{CD}=7.0+1.5=8.5(\text{m})$

오|답|피|하|기

혹시 답을 ③번으로 선택한 사람있지? 이런 유형에서 실수하기 쉬운 부분이 눈높이를 빼먹는 경우야. 이 점은 항상 주의해야 해. 그리고 이런 응용 문제는 그림을 단순하게 바꾸어 풀도록 해야 해. 식으로 놓고 풀 때는 잘 풀던 사람이 응용 문제를 어려워하는 이유는 식을 스스로 세워야 한다는 점 때문일 거야. 미지수를 도입해야 하고, 문제 사이에 숨어 있는 식들의 관계를 잘 알아야 한다는 거야. 응용 문제를 잘 풀기 위해서는 미지수를 적절히 도입해야 하고, 식의 관계를 잘 따져 주면 되기 때문에 여기에 초점을 두어야 해.

103 답 ③

1st 주어진 그림을 간단히 나타내자.



그림에서 구하는 것은 지면에서 연까지의 높이므로 $\overline{AD}$지?

이때, 사람의 눈의 높이가 1.5m라 하므로 $\overline{CD}=1.5\text{m}$

$\therefore \overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}=\overline{AC}+1.5 \cdots$ ㉠

그럼, $\overline{AC}$의 길이만 구하면 되지?

$\overline{BC}=70.4\text{m}$이고 28°를 기준으로 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 관계는 cos으로 나타낼 수 있지?

$\cos 28^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{70.4}{\overline{AB}}$에서

$\overline{AB} = \frac{70.4}{\cos 28^\circ} = \frac{70.4}{0.88} = 80(\text{m})$

또, 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 관계는 28°를 기준으로 sin으로 나타낼 수 있지?

$\sin 28^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{80}$에서

$\overline{AC} = 80 \sin 28^\circ = 80 \times 0.47 = 37.6(\text{m})$

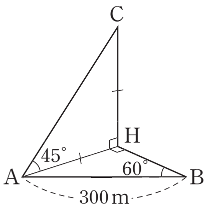
2nd 지면에서 연까지의 높이는 $\overline{AC}$의 길이와 사람의 눈높이를 합해야 해.

㉠에 의해

$\overline{AD}=37.6+1.5=39.1(\text{m})$

104 답 $150\sqrt{3}$ m

1st 그림을 간단히 나타내자



주어진 문제의 그림을 단순화하면 그림과 같지? 산의 정상 지점을 C라 하고, 점 C에서 지면에 수선의 발 H를 내리자. 그럼, 산의 높이는 $\overline{CH}$의 길이지?

2nd 직각삼각형의 길이에 주목하여 구하려는 것을 유도하자.

직각삼각형 AHC는 한 각의 크기가 45°이므로 직각이등변삼각형이야.

$\therefore \overline{CH}=\overline{AH}$

$\overline{AH}$의 길이를 구하면 산의 높이를 알 수 있지?

직각삼각형 ABH에서 60°를 기준으로 $\overline{AB}$와 $\overline{AH}$의 관계는 sin으로 나타낼 수 있지?

$\sin 60^\circ = \frac{\overline{AH}}{300} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{m})$

$\therefore \overline{AH}=\overline{CH}=300 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}(\text{m})$

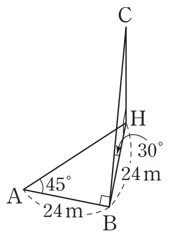
따라서 산의 높이는 $150\sqrt{3}$ m야.

오|답|피|하|기

이런 유형의 문제를 어려워하는 이유는 직각삼각형 사이의 관계를 파악하기 힘들기 때문이야. 물론 특수각에 대한 직각삼각형이므로 특수각에 대한 삼각비를 알고 있어야 제대로 풀 수 있어.
특히 이 문제는 두 직각삼각형의 공통인 변을 기준으로 삼각비를 적용하면 돼. 그리고 특수한 각의 삼각비의 값은 필수로 알고 있어야 해.

105 답 $8\sqrt{3}$ m

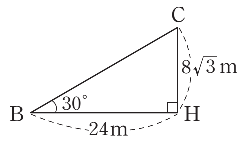
1st 그림을 간단히 나타내자.



주어진 문제의 그림을 단순화하면 그림과 같지? 나무의 꼭대기 지점을 C, 나무의 밑을 H라 하자.

그럼, 나무의 높이는 $\overline{CH}$의 길이지?

2nd 직각삼각형의 길이에 주목하여 구하려는 것을 유도하자.
직각삼각형 AHB는 한 각의 크기가 45°이므로 직각이등변삼각형이야.
$\therefore \overline{AB}=\overline{HB}=24\,\mathrm{m}$
직각삼각형 BCH에서 30°를 기준으로 $\overline{BH}$와 $\overline{CH}$의 관계는 tan로 나타낼 수 있지?



$\overline{HB}=24\,\mathrm{m}$이고, $\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

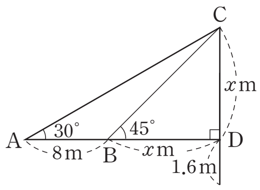
$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{CH}}{24}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \overline{CH}=24\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}(\mathrm{m})$

따라서 나무의 높이는 $8\sqrt{3}$ m야.

106 답 12.52 m

1st 그림을 간단히 나타내자.
주어진 문제의 그림을 단순화하면 그림과 같지?
$\overline{CD}=x\,\mathrm{m}$라 하면 직각삼각형 BCD는 한 내각의 크기가 45°이므로 직각이등변삼각형이지?
$\therefore \overline{BD}=\overline{CD}=x\,\mathrm{m}$



2nd 직각삼각형 ACD에서 x를 구하자.
직각삼각형 ACD의 30°에 대하여 $\overline{AD}$와 $\overline{CD}$의 관계는 tan로 나타낼 수 있으므로

$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}+\overline{BD}}=\dfrac{x}{8+x}$

그런데 $\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이니까

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{x}{8+x}$

$8+x=\sqrt{3}x,\ (\sqrt{3}-1)x=8$

$\therefore x=\dfrac{8}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
$=\dfrac{8(\sqrt{3}+1)}{2}=4(\sqrt{3}+1)(\mathrm{m})$

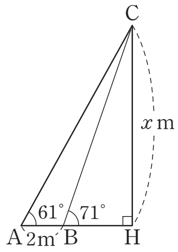
3rd 풍력 발전기의 높이는 $\overline{CD}$에 사람의 눈높이를 더해야 함을 잊지 말자.
따라서 풍력 발전기의 높이는
$x+1.6=4(\sqrt{3}+1)+1.6=4(1.73+1)+1.6$
$=10.92+1.6=12.52(\mathrm{m})$

오|답|피|하|기

이 유형의 문제에서 틀리기 쉬운 부분은 올려다 본 각도가 두 개인 것을 이용하여 식을 세우는 것과 눈높이를 빼고 답을 하게 되는 실수를 자주 할 수 있어.
이런 유형의 문제를 푸는 방법을 잘 기억하자.
(i) 꼭대기에서 눈높이를 뺀 부분을 x로 놓자.
(ii) 각의 크기가 큰 것에 대한 tan를 이용하여 밑변의 길이를 x에 대한 식으로 나타내보자.
(iii) 각의 크기가 작은 것에 대한 tan를 이용하여 x의 값을 구하자.
(iv) 눈높이와 x를 합한 값이 구하는 값이야.
이렇게 구하는 순서를 알고 있으면 비슷한 유형이 나와도 풀 수 있겠지?

107 답 9.5 m

1st 그림을 간단히 나타낸 뒤, 높이를 문자로 나타내자.
주어진 문제의 그림을 단순화하면 그림과 같지?
그럼, $\overline{AB}=\overline{AH}-\overline{BH}=2(\mathrm{m})$ ⋯ ㉠
$\overline{CH}=x\,\mathrm{m}$라 하면 직각삼각형 BCH의 한 각이 71°이고, $\tan 71^\circ=2.9$이므로



$\tan 71^\circ=\dfrac{x}{\overline{BH}}=2.9$

$\therefore \overline{BH}=\dfrac{x}{2.9}$ ⋯ ㉡

2nd 이제 $\overline{AH}$의 길이를 문자로 나타내자.
직각삼각형 △AHC의 61°에 대하여 $\overline{AH}$와 $\overline{CH}$의 관계는 tan로 나타낼 수 있고, $\tan 61^\circ=1.8$이므로

$\tan 61^\circ=\dfrac{x}{\overline{AH}}=1.8$

$\therefore \overline{AH}=\dfrac{x}{1.8}$ ⋯ ㉢

3rd ㉠을 이용하여 $\overline{CH}$의 길이를 구하자.
㉡과 ㉢을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{x}{1.8}-\dfrac{x}{2.9}=2$

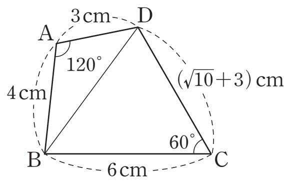
$x\left(\dfrac{1}{1.8}-\dfrac{1}{2.9}\right)=2,\ x\times\dfrac{55}{261}=2$

$\therefore x=2\times\dfrac{261}{55}=\dfrac{522}{55}=9.49\cdots$

따라서 지면에서부터 세종대왕상까지의 높이는 약 9.5 m야.

108 답 ③

1st □ABCD에서 보조선 BD를 그어 두 개의 삼각형으로 나누자.
□ABCD의 보조선 BD를 그으면 두 삼각형 ABD, BCD가 생기지?
□ABCD=△ABD+△BCD ⋯ ㉠



2nd 두 변의 길이가 각각 a, b이고, 그 끼인각의 크기가 둔각 θ이면 그 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ab\sin(180^\circ-\theta)$로 구할 수 있지?
△ABD는 두 변의 길이가 4 cm, 3 cm이고, 그 끼인각의 크기가 ∠BAD=120°인 둔각삼각형이지?

$\therefore \triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin(180^\circ-\angle BAD)$
$=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\sin(180^\circ-120^\circ)$
$=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$=3\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$ ⋯ ㉡

3rd 두 변의 길이가 각각 a, b이고, 그 끼인각의 크기가 예각 θ이면 그 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$로 구할 수 있지?
또, △BCD는 두 변의 길이가 6 cm, $(\sqrt{10}+3)$ cm이고, 그 끼인각의 크기가 ∠BCD=60°인 삼각형이지?

$\therefore \triangle BCD=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\angle BCD)$

$=\frac{1}{2}\times 6\times(\sqrt{10}+3)\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 6\times(\sqrt{10}+3)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{10}+3)}{2}=\frac{3\sqrt{30}+9\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$ ⋯ ㉢

4th 두 삼각형의 넓이의 합이 사각형의 넓이임을 이용하자.

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\square ABCD=3\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{30}+9\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}+3\sqrt{30}}{2}$

$=\frac{15}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{30}(\text{cm}^2)$

이것이 $(a\sqrt{3}+b\sqrt{30})\text{cm}^2$이므로

$a=\frac{15}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=\frac{18}{2}=9$

오|답|피|하|기

이런 유형의 문제는 적절히 보조선을 긋고 두 변과 그 끼인각의 크기를 알 때의 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 이용하여 풀어야 해.
이 문제의 경우 한 변의 길이가 제곱근으로 표현되어서 풀기에 쉽지 않게 보이지만 식이 약간 복잡해도 원리대로 정확히 풀면 돼. 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알 때, 삼각형의 넓이를 구하는 공식은 반드시 알아 두어야 해.

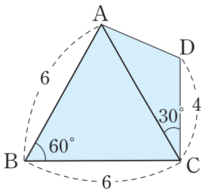
109 답 ④

1st □ABCD는 $\overline{AC}$를 경계로 두 개의 삼각형으로 나뉘지?

$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$ ⋯ ㉠

2nd 두 변의 길이가 각각 a, b이고, 그 끼인각의 크기가 예각 θ이면 그 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$로 구할 수 있지?

△ABC는 두 변의 길이가 6, 6이고, 그 끼인각이 ∠ABC=60°인 삼각형이지?



$\therefore \triangle ABC$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(\angle ABC)$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ ⋯ ㉡

3rd 두 변의 길이가 같은 삼각형은 이등변삼각형이지?

△ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}=6$이므로 이등변삼각형이야. 이때,

$\angle BAC=\angle BCA=\frac{1}{2}(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$이므로 △ABC는 정삼각형이야.

$\therefore \overline{AC}=6$

또, △ACD는 두 변의 길이가 $\overline{AC}=6$, $\overline{CD}=4$이고, 그 끼인각의 크기가 ∠ACD=30°인 삼각형이지?

$\therefore \triangle ACD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ACD)$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\frac{1}{2}=6$ ⋯ ㉢

4th 두 삼각형의 넓이의 합이 사각형의 넓이임을 이용하자.

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\square ABCD=6+9\sqrt{3}$

110 답 30 cm²

1st 사각형의 넓이를 구하자.

사각형의 두 대각선이 이루는 각의 크기를 x라 하면

사각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}\times 10\times 6\times\sin x$

2nd 넓이가 최대가 되는 조건을 찾자.

넓이 S가 최대가 되려면 $\sin x$가 최대가 되어야 하므로 $\sin x=1$이어야 한다.

3rd 사각형의 넓이의 최댓값을 구하자.

따라서 두 대각선이 90°를 이룰 때 S가 최댓값을 갖고

$S=\frac{1}{2}\times 10\times 6\times 1=30(\text{cm}^2)$

111 답 $\frac{35\sqrt{3}}{8}$ cm²

1st 평행사변형 ABCD의 넓이를 구하자.

$\square ABCD=5\times 7\times\sin(180^\circ-120^\circ)=35\times\sin 60^\circ=\frac{35\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$

2nd △BCD의 넓이를 구하자.

$\overline{BD}$는 평행사변형 ABCD의 대각선이므로

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\square ABCD=\frac{35\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$

3rd 색칠한 부분의 넓이를 구하자.

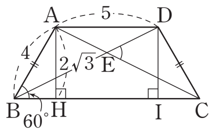
이때, $\overline{CM}=\overline{DM}$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\triangle BMD=\frac{1}{2}\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\frac{35\sqrt{3}}{4}=\frac{35\sqrt{3}}{8}(\text{cm}^2)$

112 답 $\frac{28\sqrt{3}}{61}$

1st 등변사다리꼴의 성질을 이용하여 같은 것이 무엇인지 찾아내자.

□ABCD가 등변사다리꼴이므로



$\overline{AB}=\overline{CD}=4$, ∠ABH=∠DCI=60°

즉, △ABH와 △DCI는 RHA 합동이야.

$\therefore \overline{BH}=\overline{IC}$ ⋯ ㉠

2nd $\overline{AH}$와 $\overline{BC}$의 길이를 구하여 등변사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하자.

$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=4\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\overline{BH}=4\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2=\overline{IC}$ (∵ ㉠)

그런데 $\overline{AD}=\overline{HI}=5$이므로

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HI}+\overline{IC}=2+5+2=9$

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times(5+9)\times2\sqrt{3}=14\sqrt{3}$ ⋯ ㉡

3rd 사각형의 두 대각선의 길이가 각각 a, b이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ일 때, 그 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$지?

직각삼각형 DBI에서

$\overline{BI}=\overline{BH}+\overline{HI}=2+5=7$, $\overline{DI}=\overline{AH}=2\sqrt{3}$이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BD}^2=\overline{BI}^2+\overline{DI}^2=7^2+(2\sqrt{3})^2=61$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{61}$

즉, 등변사다리꼴 ABCD의 대각선의 길이는 $\sqrt{61}$이야.

등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 서로 같으므로

$\overline{BD}=\overline{AC}=\sqrt{61}$

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}\times\sin(\angle CED)$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{61}\times\sqrt{61}\times\sin(\angle CED)$

$=\frac{61}{2}\sin(\angle CED)$ ⋯ ㉢

㉢=㉡이므로 $\frac{61}{2}\sin(\angle CED)=14\sqrt{3}$

$\therefore \sin(\angle CED)=\frac{28\sqrt{3}}{61}$

오답피하기

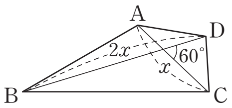
이 문제는 상당히 복잡한 과정을 통해서 답을 구하기 때문에 틀리기 쉽지. 하지만 과정을 알게 되면 어렵지 않아.
먼저 삼각비를 이용하여 변의 길이를 구하여 등변사다리꼴의 넓이를 구하고, 대각선의 길이를 피타고라스 정리를 이용하여 구하자.
그리고 두 대각선의 길이와 그 두 대각선이 만나서 이루는 각의 크기를 이용하여 구할 넓이와 먼저 구한 등변사다리꼴의 넓이를 같게 놓아서 $\sin(\angle CED)$의 값을 구하면 되지?
이런 문제 해결 과정들을 생각하면서 푸는 게 실수도 적고 정확하게 답을 구할 수 있는 거야.

113 답 ④

1st $\overline{BD}=2\overline{AC}$이니까 두 변의 길이를 한 문자로 표현할 수 있지?

양수 x에 대하여 $\overline{AC}=x$라 하면

$\overline{BD}=2x$ ⋯ ㉠



2nd 사각형의 두 대각선의 길이가 각각 a, b이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 예각 θ이면 그 사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$로 구할 수 있지?

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin60^\circ$이고 $\square ABCD=8\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times x\times2x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$

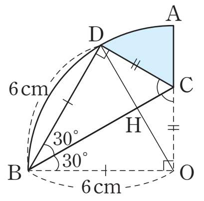
$x^2=16$ $\quad\therefore x=4\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{BD}=8\ (\because ㉠)$

114 답 ①

1st △BOD가 어떤 삼각형인지 알아보자.

반지름의 길이가 6 cm인 사분원을 그림과 같이 $\overline{BC}$를 접는 선으로 하여 접었으므로



$\overline{BD}=\overline{BO}=6\text{ cm}$ ⋯ ㉠

$\angle DBC=\angle OBC$ ⋯ ㉡

$\angle DCB=\angle OCB$ ⋯ ㉢

$\overline{CD}=\overline{CO}$ ⋯ ㉣

그런데 $\overline{DO}$는 원의 반지름이므로 $\overline{BO}=\overline{DO}$ ⋯ ㉤

㉠과 ㉤에 의해 $\overline{BD}=\overline{BO}=\overline{DO}=6(\text{cm})$이므로 △BOD는 정삼각형이야.

또, $\angle DBC=\angle OBC=\frac{1}{2}\times\angle DBO=\frac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$ ($\because$ ㉡)

그리고 $\angle CDB=90^\circ$이므로 △BCD에서

$\angle DCB=180^\circ-(\angle CBD+\angle CDB)=180^\circ-(30^\circ+90^\circ)=60^\circ$

$\therefore \angle DCO=2\times\angle DCB=2\times60^\circ=120^\circ$ ($\because$ ㉢)

2nd 색칠한 부분의 넓이를 직접 구할 수 없지? 알고 있는 도형의 넓이를 이용하여 색칠한 부분의 넓이를 구하자.

(도형 ADC의 넓이)=(부채꼴 AOD)−△COD ⋯ ㉥

즉, 부채꼴 AOD의 넓이와 △COD의 넓이만 구하면 되지?

부채꼴 AOD의 반지름의 길이는 6 cm이고, 중심각의 크기는

$\angle AOD=\angle AOB-\angle BOD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

$\therefore$ (부채꼴 AOD의 넓이)$=\pi\times\overline{AO}^2\times\frac{(\angle AOD\text{의 중심각})}{360}$

$=\pi\times6^2\times\frac{30}{360}$

$=\pi\times36\times\frac{1}{12}=3\pi(\text{cm}^2)$ ⋯ ㉦

직각삼각형 BCD에서

$\overline{CD}=\overline{DB}\tan(\angle CBD)=6\times\tan30^\circ$

$=6\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}=\overline{CO}$ ($\because$ ㉣)

$\therefore \triangle COD=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{CO}\times\sin(180^\circ-\angle DCO)$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$ ⋯ ㉧

㉦, ㉧을 ㉥에 대입하면

(도형 ADC의 넓이)$=3\pi-3\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

오답피하기

이 문제와 같은 유형은 상당히 복잡하게 풀리기 때문에 어려워할 수 있어. 이 문제를 푸는 핵심 키는 △BOD가 정삼각형임을 밝히는 거야. 그리고 색칠한 부분의 넓이를 구하기 위해 ∠DOC의 크기를 구해야 해. △DCO가 이등변삼각형임을 이용해서 삼각형의 넓이를 구하면 색칠한 부분의 넓이를 구할 수 있어.
구하는 과정이 상당히 복잡하지만 구하려는 것이 무엇인지를 명확히 알고 접근하면 답을 구할 수 있어. 특히 이런 유형에서 힌트가 될 수 있는 것이 원이라는 것과 접는 선이 있다는 것이고, 접게 되면 같은 변이나 각이 나오게 돼.

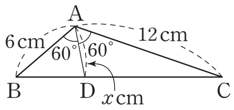
115 답 4

1st $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$이므로 무엇을 구해야 할지 찾자.

그림에서

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$ ⋯ ㉠

이므로 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$의 넓이를 각각 구하자.



2nd 두 변의 길이가 각각 a, b이고, 그 끼인각의 크기가 예각 θ이면 그 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$로 구할 수 있지?

먼저, $\triangle ABC$의 넓이를 구하자.

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(180°-120°)$

$=\frac{1}{2}\times6\times12\times\sin60°$

$=\frac{1}{2}\times6\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=18\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$ ⋯ ㉡

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin60°$

$=\frac{1}{2}\times6\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}x(\text{cm}^2)$ ⋯ ㉢

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin60°$

$=\frac{1}{2}\times12\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}x(\text{cm}^2)$ ⋯ ㉣

3rd ㉠을 이용하여 x의 값을 구하자.

㉡, ㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

$18\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}x+3\sqrt{3}x$, $\frac{9\sqrt{3}}{2}x=18\sqrt{3}$ $\quad\therefore x=4$

116 답 ③

1st 먼저 $\overline{AD}$가 중선임을 이용하여 알 수 있는 것을 구하자.

$\overline{AD}$가 중선이므로 $\overline{BD}=\overline{CD}$

$\therefore \triangle ABD=\triangle ACD=\frac{1}{2}\triangle ABC$ ⋯ ㉠

2nd 점 G가 무게중심이므로 무게중심의 성질을 이용하자.

점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로 $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$이지?

즉, $\overline{AG}:\overline{GD}=\triangle ABG:\triangle GBD=2:1$

$\therefore \triangle GBD=\frac{1}{3}\triangle ABD$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\triangle GBD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{6}\triangle ABC$ ⋯ ㉢

3rd 두 변의 길이가 각각 a, b이고, 그 끼인각의 크기가 예각 θ이면 그 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$로 구할 수 있지?

$\triangle ABC$에서 두 변의 길이는 10cm, $8\sqrt{3}$cm이고, 그 끼인각의 크기는 60°이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)$

$=\frac{1}{2}\times10\times8\sqrt{3}\times\sin60°$

$=\frac{1}{2}\times10\times8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=60(\text{cm}^2)$

이것을 ㉢에 대입하면

$\triangle GBD=\frac{1}{6}\times60=10(\text{cm}^2)$

오|답|피|하|기

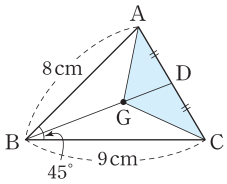
이런 유형의 문제는 삼각형의 무게중심의 성질을 충분히 알고 있다면 풀 수 있어. 삼각형의 무게중심의 성질은 닮은 도형의 성질 단원에서 배웠지? 앞의 개념 정리 부분을 참고해서 보고 관련된 문제는 찾아서 공부하면 잊었던 부분이 생각날 거야.

삼각형의 무게중심의 성질은 고등학교에서도 자주 이용되는 개념이야. 그러니 정확히 알고 있어야겠지?

117 답 ④

1st 먼저 중선을 그어 알 수 있는 것을 구하자.

그림과 같이 두 점 B와 G를 연결한 선분을 연장하여 $\overline{AC}$와 만나는 점을 D라 하면 $\overline{BD}$는 중선이지?



$\overline{AD}=\overline{CD}$이므로

$\triangle ABD=\triangle BCD$

$\therefore \triangle ABD=\triangle BCD=\frac{1}{2}\triangle ABC$ ⋯ ㉠

2nd 무게중심의 성질을 이용하자.

점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로 $\overline{BG}:\overline{GD}=2:1$이지?

즉, $\overline{BG}:\overline{GD}=\triangle ABG:\triangle AGD=2:1$

$\therefore \triangle AGD=\frac{1}{3}\triangle ABD$ ⋯ ㉡

마찬가지 방법으로 $\triangle CDG=\frac{1}{3}\triangle BCD$

㉠에 의해 $\triangle AGD=\triangle CDG$ ⋯ ㉢

㉠을 ㉡에 대입하면

$\triangle AGD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{6}\triangle ABC$ ⋯ ㉣

$\therefore \triangle AGC=\triangle AGD+\triangle CDG=2\triangle AGD$ ($\because$ ㉢)

$=2\times\frac{1}{6}\triangle ABC$ ($\because$ ㉣)$=\frac{1}{3}\triangle ABC$ ⋯ ㉤

3rd 두 변의 길이가 각각 a, b이고, 그 끼인각의 크기가 예각 θ이면 그 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$로 구할 수 있지?

$\triangle ABC$에서 두 변의 길이는 8cm, 9cm이고, 그 끼인각의 크기는 45°이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(\angle ABC)$

$=\frac{1}{2}\times8\times9\times\sin45°$

$=\frac{1}{2}\times8\times9\times\frac{\sqrt{2}}{2}=18\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$

이것을 ㉤에 대입하면

$\triangle AGC=\frac{1}{3}\times18\sqrt{2}=6\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$

118 답 $9\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

1st 보조선 $\overline{AE}$를 긋자.

$\triangle AB'E$와 $\triangle ADE$에서

$\angle AB'E=\angle ADE=90^\circ$,

$\overline{AB'}=\overline{AD}=3\sqrt{3}$ (∵ 정사각형의 한 변의 길이)

$\overline{AE}$는 공통이므로 $\triangle AB'E\equiv\triangle ADE$(RHS 합동)이야.

$\angle DAB'=\angle DAB-\angle B'AB=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

그런데 $\triangle AB'E$와 $\triangle ADE$는 합동이므로

$\angle EAD=\angle EAB'=\frac{1}{2}\angle DAB'=30^\circ$ ⋯ ㉠

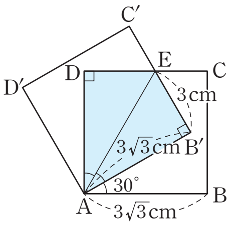
구하려는 것은 색칠한 부분의 넓이인 $\triangle EAD+\triangle EAB'$인데

$\triangle AB'E$와 $\triangle ADE$는 합동이므로 $\triangle ADE=\triangle AB'E$

(색칠한 부분의 넓이)$=2\times\triangle AB'E$ ⋯ ㉡

2nd 그럼, $\triangle AB'E$의 넓이만 구하면 되겠지?

직각삼각형 $AB'E$에서 ㉠에 의해 $\angle EAB'=30^\circ$이므로 직각삼각형 $AB'E$에서 30°를 기준으로



$\tan 30^\circ=\frac{\overline{EB'}}{3\sqrt{3}}$

$\overline{EB'}=3\sqrt{3}\tan 30^\circ$

그런데 $\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$\overline{EB'}=3\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=3(\mathrm{cm})$

$\therefore\ \triangle AB'E=\frac{1}{2}\times\overline{AB'}\times\overline{EB'}$

$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times3=\frac{9\sqrt{3}}{2}(\mathrm{cm}^2)$

따라서 ㉡에 의해

(색칠한 부분의 넓이)$=2\times\triangle AB'E$

$=2\times\frac{9\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

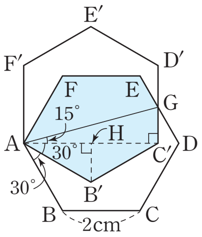
119 답 $(24-10\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2$

1st 보조선 $\overline{AG}$를 그어 보자.

그림과 같이 $\overline{AG}$를 그으면 겹치는 부분은 합동인 두 사각형 $AB'C'G$와 $AGEF$로 나눌 수 있어. 그리고

$\square AB'C'G=\triangle AB'C'+\triangle AC'G$ ⋯ ㉠

한편, $\triangle AB'C'$은 $\overline{AB'}=\overline{B'C'}$인 이등변삼각형이지?



점 B′에서 변 AC′ 위에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직각삼각형 $AB'H$에서

$\overline{AH}=\overline{AB'}\cos 30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$

$\therefore\ \overline{AC'}=2\overline{AH}=2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$

그리고 $\overline{B'H}=\overline{AB'}\sin 30^\circ=2\times\frac{1}{2}=1(\mathrm{cm})$

또, 직각삼각형 $AC'G$에서

$\overline{C'G}=\overline{AC'}\tan 15^\circ$

$=2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=4\sqrt{3}-6(\mathrm{cm})$

2nd $\triangle AC'G$와 $\triangle AB'C'$의 넓이를 구해 보자.

$\triangle AC'G=\frac{1}{2}\times\overline{AC'}\times\overline{C'G}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times(4\sqrt{3}-6)$

$=12-6\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

$\triangle AB'C'=\frac{1}{2}\times\overline{AC'}\times\overline{B'H}$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

$\square AB'C'G=\triangle AC'G+\triangle AB'C'$(∵ ㉠)

$=(12-6\sqrt{3})+\sqrt{3}$

$=12-5\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

따라서 두 정육각형이 겹쳐지는 부분의 넓이는

$2\square AB'C'G=2\times(12-5\sqrt{3})=24-10\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

120 답 $(3-\sqrt{3})\ \mathrm{km}$

1st $\tan 60^\circ$를 이용하자.

직각삼각형 ABH에서 $\tan 60^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$

$\overline{BH}=\frac{\overline{AH}}{\tan 60^\circ}=\frac{\overline{AH}}{\sqrt{3}}$

2nd $\tan 45^\circ$를 이용하자.

$\tan 45^\circ=1$이므로 $\overline{HC}=\overline{AH}$

이때, $\overline{BC}=2\,\mathrm{km}$이므로

$\overline{BH}+\overline{HC}=\frac{\overline{AH}}{\sqrt{3}}+\overline{AH}=2$에서

$(\sqrt{3}+1)\overline{AH}=2\sqrt{3}$

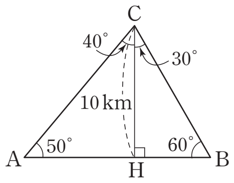
3rd $\overline{AH}$의 길이를 구하자.

$\therefore\ \overline{AH}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=3-\sqrt{3}\ (\mathrm{km})$

121 답 $14.165\ \mathrm{km}$

1st 비행기에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

비행기의 높이를 C라 하고 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\triangle AHC$에서 $\angle C=90^\circ-50^\circ=40^\circ$

$\triangle BCH$에서 $\angle C=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

2nd $\overline{AH}$, $\overline{BH}$의 길이를 각각 구하자.

$\overline{AH}=10\tan 40^\circ=10\times0.8391=8.391(\mathrm{km})$

$\overline{BH}=10\tan 30^\circ=10\times0.5774=5.774(\mathrm{km})$

3rd $\overline{AB}$의 길이를 구하자.

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}=14.165(\mathrm{km})$

따라서 A, B 두 지점 사이의 거리는 $14.165\,\mathrm{km}$

서술형 다지기

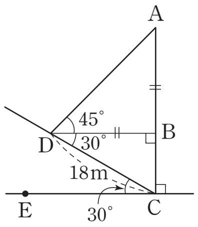
문제편 p. 50

[122-123 채점기준표]

Ⅰ	지면으로부터 관측 장소까지 높이를 구한다.	30%
Ⅱ	관측 장소로부터 나무 또는 구조물의 높이를 구한다.	30%
Ⅲ	지면으로부터 나무 또는 구조물의 높이를 구한다.	40%

122 답 $9(\sqrt{3}+1)$ m

먼저, $\overline{BC}$의 길이를 구하자.



그림의 직각삼각형 BDC에서

$\angle DCE=\angle BDC=30^\circ$($\because$ 엇각)

$\overline{BC}=18\sin 30^\circ=9(\mathrm{m})$ ⋯ Ⅰ

그다음, $\overline{BD}$의 길이를 구하자.

또, 직각삼각형 BDC에서

$\overline{BD}=18\cos 30^\circ=9\sqrt{3}\,(\mathrm{m})$ ⋯ Ⅱ

그래서, 나무의 높이를 구하자.

$\triangle ADB$가 $\angle ADB=45^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{BD}=9\sqrt{3}\,(\mathrm{m})$

$\therefore$ (나무의 높이)$=\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$

$=9\sqrt{3}+9$

$=9(\sqrt{3}+1)(\mathrm{m})$ ⋯ Ⅲ

123 답 $4(3+\sqrt{3})$ m

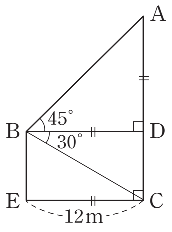
먼저, 지면에서부터 사람의 눈까지의 높이를 구하자.

직각삼각형 BCD에서

$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{DC}}{12}$

$\therefore \overline{DC}=12\tan 30^\circ=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\,(\mathrm{m})$ ⋯ Ⅰ

그다음, 사람의 눈높이부터 송신탑 꼭대기까지의 높이를 구하자.



$\overline{BD}=\overline{EC}=12\,(\mathrm{m})$

직각삼각형 ABD에서

$\tan 45^\circ=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AD}}{12}$

$\therefore \overline{AD}=12\tan 45^\circ=12(\mathrm{m})$ ⋯ Ⅱ

그래서, 탑의 높이를 구하자.

따라서 구하는 탑의 높이는

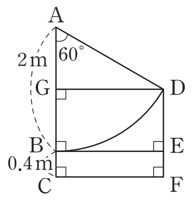
$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=12+4\sqrt{3}=4(3+\sqrt{3})(\mathrm{m})$ ⋯ Ⅲ

[124-125 채점기준표]

Ⅰ	주어진 상황을 그림으로 간단하게 나타낸다.	30%
Ⅱ	그네 꼭대기에서 그네까지의 높이 또는 추의 중심에서 B 지점까지의 높이를 구한다.	40%
Ⅲ	구하고자 하는 값을 구한다.	30%

124 답 1.4 m

먼저, 그림으로 간단히 나타내자.



사람의 발 끝을 점 D, 점 D에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 G, $\overline{GD}$와 평행하면서 점 B, C를 각각 지나는, 길이가 같은 선분을 각각 $\overline{BE}$, $\overline{CF}$라 하자. ⋯ Ⅰ

그다음, 그네 꼭대기에서 그네까지의 높이를 구하자.

그림과 같이 세 점 E, F, G를 정하면 그네를 타고 있는 사람의 지면으로부터의 높이는

$\overline{DF}=\overline{GC}=\overline{AC}-\overline{AG}$ ⋯ ㉠

그런데 직각삼각형 AGD에서

$\overline{AG}=\overline{AD}\cos 60^\circ=\overline{AB}\cos 60^\circ=2\times\dfrac{1}{2}=1(\mathrm{m})$ ⋯ Ⅱ

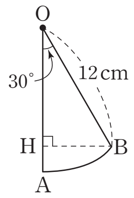
그래서, 지면으로부터 그네까지의 높이를 구하자.

㉠에 의해

$\overline{DF}=(2+0.4)-1=1.4(\mathrm{m})$ ⋯ Ⅲ

125 답 $6(2-\sqrt{3})$ cm

먼저, 그림으로 간단히 나타내자.



B 지점에서 $\overline{AO}$에 내린 수선의 발을 H라 하자. ⋯ Ⅰ

그다음, $\overline{OH}$의 길이를 구하자.

직각삼각형 OHB에서

$\overline{OH}=12\cos 30^\circ=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$ ⋯ Ⅱ

그래서, A 지점과 B 지점에서의 추의 중심의 높이의 차를 구하자.

$\therefore \overline{AH}=\overline{AO}-\overline{OH}=12-6\sqrt{3}=6(2-\sqrt{3})(\mathrm{cm})$

따라서 A 지점과 B 지점에서의 추의 중심의 높이의 차는 $6(2-\sqrt{3})$cm이다. ⋯ Ⅲ

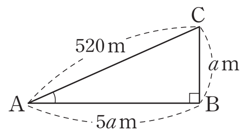
126 답 1102 m

기울어진 경사각 A에 대하여 경사도가 20 %이므로

$\tan A\times 100=20$

$\therefore \tan A=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$ ⋯ Ⅰ

직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$ m라 하면



$\overline{AB}=\dfrac{\overline{BC}}{\tan A}=\dfrac{a}{\frac{1}{5}}=5a$ m이다.

피타고라스 정리에 의하여

$(5a)^2+a^2=520^2$

$26a^2=520^2$

$a^2=10400$

$a=\pm\sqrt{10400}=\pm 20\sqrt{26}$

그런데 $a>0$이므로

$a=20\sqrt{26}=20\times 5.1=102$ ⋯ Ⅱ

따라서 멈춘 위치는 해발 $1000+102=1102(\mathrm{m})$인 지점이다. ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 상황을 그림으로 간단하게 나타내고, 경사도를 이용하여 $\tan A$의 값을 구한다.	30%
Ⅱ	피타고라스 정리를 이용하여 필요한 변의 길이를 구한다.	50%
Ⅲ	멈춘 위치가 해발 몇 m인지 구한다.	20%

127 답 $4(1+\sqrt{3})$ cm

보조선 $\overline{\mathrm{CO}}$를 그으면 $\triangle\mathrm{AOC}$와 $\triangle\mathrm{COB}$는 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OCA}$, $\angle\mathrm{OCB}=\angle\mathrm{OBC}$이다.

또한, $\triangle\mathrm{AOB}$도 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OBA}=\frac{1}{2}(180^\circ-150^\circ)=15^\circ$이다.

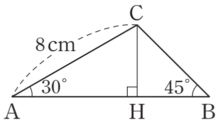
$\therefore\ \angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{OCB}=\angle\mathrm{COB}=60^\circ$

$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{AOB}-\angle\mathrm{COB}=150^\circ-60^\circ=90^\circ$이므로

$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OCA}=45^\circ$이다.

$\therefore\ \angle\mathrm{CAB}=45^\circ-15^\circ=30^\circ$ $\cdots$ Ⅰ

그림과 같이 점 C에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos 30^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ (cm)

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AC}}\sin 30^\circ=8\times\frac{1}{2}=4$(cm)

또한, $\triangle\mathrm{CHB}$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{HB}}=\overline{\mathrm{CH}}=4$ cm $\cdots$ Ⅱ

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{HB}}=4\sqrt{3}+4=4(1+\sqrt{3})$(cm) $\cdots$ Ⅲ

[다른 풀이]

호 AB의 중심각 $\angle\mathrm{AOB}=150^\circ$이므로 호 AB의 반대편 중심각은 $360^\circ-150^\circ=210^\circ$

원주각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{ACB}=105^\circ$

$\angle\mathrm{CAB}=180^\circ-105^\circ-45^\circ=30^\circ$

(이하 동일)

[채점기준표]

Ⅰ	$\angle\mathrm{CAB}$의 크기를 구한다.	40%
Ⅱ	$\overline{\mathrm{AH}}$, $\overline{\mathrm{BH}}$의 길이를 각각 구한다.	40%
Ⅲ	$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BH}}$임을 이용하여 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구한다.	20%

128 답 $\frac{129\pi-153\sqrt{3}}{2}$

(부채꼴 AOB의 넓이)$-$($\triangle$AOB의 넓이)를 S_1이라 하면

$S_1=\pi\times15^2\times\frac{60}{360}-\frac{1}{2}\times15^2\times\sin 60^\circ$

$=\frac{75}{2}\pi-\frac{225\sqrt{3}}{4}$ $\cdots$ Ⅰ

(부채꼴 AO′B의 넓이)$-$($\triangle$AO′B의 넓이)를 S_2라 하면

$S_2=\pi\times9^2\times\frac{120}{360}-\frac{1}{2}\times9^2\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=27\pi-\frac{81\sqrt{3}}{4}$ $\cdots$ Ⅱ

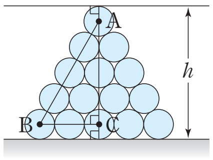
두 원이 겹쳐진 부분의 넓이는 S_1+S_2이므로

$S_1+S_2=\frac{129}{2}\pi-\frac{153\sqrt{3}}{2}=\frac{129\pi-153\sqrt{3}}{2}$ $\cdots$ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	(부채꼴 AOB의 넓이)$-$($\triangle$AOB의 넓이)를 구한다.	40%
Ⅱ	(부채꼴 AO′B의 넓이$-\triangle$AO′B의 넓이)를 구한다.	40%
Ⅲ	두 원이 겹치는 넓이를 구한다.	20%

129 답 30



구하는 높이는

$h=10+\overline{\mathrm{AC}}$(cm) $\cdots$ ㉠ $\cdots$ Ⅰ

$\triangle\mathrm{ABC}$는 직각삼각형이고

$\overline{\mathrm{AB}}=4\times10=40$(cm),

$\angle\mathrm{B}=60^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin 60^\circ=40\times\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}$ (cm)

㉠에 의해

$h=10+\overline{\mathrm{AC}}=10+20\sqrt{3}=a+b\sqrt{3}$(cm) $\cdots$ Ⅱ

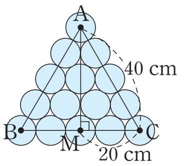
$\therefore\ a=10,\ b=20$

$\therefore\ a+b=30$ $\cdots$ Ⅲ

[다른 풀이]

$\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$일 때, $\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{CM}}$이다.

직각삼각형 AMC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=40$ cm, $\overline{\mathrm{MC}}=20$ cm이므로 피타고라스 정리를 적용하면



$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{40^2-20^2}=\sqrt{1200}=20\sqrt{3}$

$\therefore\ h=10+\overline{\mathrm{AM}}=10+20\sqrt{3}$(cm)

따라서 $a=10$, $b=20$이므로 $a+b=30$

[채점기준표]

Ⅰ	구하고자 하는 높이를 직각삼각형 ABC의 높이를 사용하여 식을 세운다.	40%
Ⅱ	직각삼각형 ABC의 높이를 구한다.	40%
Ⅲ	$a+b$의 값을 구한다.	20%

130 답 122 m

$\overline{\mathrm{CH}}=h$ m라 하면

$\angle\mathrm{ACH}=90^\circ-42^\circ=48^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=h\tan 48^\circ$(m) $\cdots$ Ⅰ

$\angle\mathrm{BCH}=90^\circ-55^\circ=35^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=h\tan 35^\circ$(m) $\cdots$ Ⅱ

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{BH}}=50$(m)에서 $50=h\tan 48^\circ-h\tan 35^\circ$

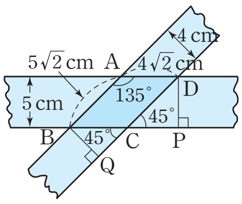
$50=h(1.1106-0.7002)$, $50=h\times0.4104$

$h=\frac{50}{0.4104}=121.83\cdots$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{CH}}=122$ m $\cdots$ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\angle\mathrm{BCH}$의 크기를 구하여 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 삼각비를 이용하여 나타낸다.	40%
Ⅱ	$\angle\mathrm{ACH}$의 크기를 구하여 $\overline{\mathrm{BH}}$의 길이를 삼각비를 이용하여 각각 나타낸다.	40%
Ⅲ	$\overline{\mathrm{CH}}$의 길이를 구한다.	20%

131 답 $20\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$



그림과 같이 겹친 부분을 □ABCD라 하면 직각삼각형 DCP에서

$\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{DP}}{\overline{CD}}$이므로

$\overline{CD}=\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=5\div\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$ ⋯ Ⅰ

직각삼각형 BQC에서 $\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}$이므로

$\overline{BC}=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=4\div\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$ ⋯ Ⅱ

$\square ABCD=5\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times\sin(180^\circ-135^\circ)$

$=5\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=20\sqrt{2}\,(\mathrm{cm}^2)$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	겹친 부분이 평행사변형이므로 한 변의 길이를 구한다.	35%
Ⅱ	이웃하는 다른 한 변의 길이를 구한다.	35%
Ⅲ	겹친 부분의 넓이를 구한다.	30%

최고난도 만점 문제 p. 52

132 답 ③

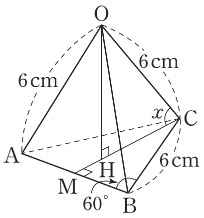
1st 구하려는 것이 무엇인지 알아보자.

구하려는 것은 직각삼각형 OCH에서 $\angle OCH=x$에 대한 코사인, 즉 $\cos x$지?

직각삼각형 OHC에서 x를 기준으로

$\cos x=\dfrac{\overline{CH}}{6}$ ⋯ ㉠

따라서 $\overline{CH}$의 길이만 구하면 되겠지?



2nd 점 H가 △ABC의 무게중심임을 이용하여 $\overline{CH}$의 길이를 구하자.

점 H가 정삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{CH}:\overline{HM}=2:1$ $\therefore \overline{CH}=\dfrac{2}{3}\overline{CM}$ ⋯ ㉡

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$이므로

$\overline{CM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

이것을 ㉡에 대입하면

$\overline{CH}=\dfrac{2}{3}\times3\sqrt{3}=2\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$ ⋯ ㉢

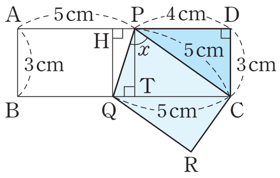
3rd $\cos x$의 값을 구하자.

㉠에 ㉢을 대입하면

$\cos x=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

133 답 ⑤

1st 접은 도형에서 길이가 같은 변, 크기가 같은 각을 찾아보자.



그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 T라 하고, 점 Q에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 직사각형 ABCD에서 $\overline{PQ}$를 접는 선으로 할 때,

$\overline{AP}=\overline{PC}=5\,\mathrm{cm}$, $\angle APQ=\angle CPQ=x$ ⋯ ㉠

구하는 것은 $\tan x$이므로 직각삼각형 PQH에서

$\tan(\angle QPH)=\tan x=\dfrac{\overline{HQ}}{\overline{PH}}=\dfrac{3}{\overline{PH}}$

$\overline{PH}$의 길이만 구하면 되겠지?

2nd 직각삼각형에서 $\overline{PH}$의 길이를 구하자.

직각삼각형 CDP에서 $\overline{PC}=5\,\mathrm{cm}$, $\overline{CD}=3\,\mathrm{cm}$이므로

$\overline{PC}^2=\overline{PD}^2+\overline{DC}^2$, $5^2=\overline{PD}^2+3^2$

$\overline{PD}^2=16$ $\therefore \overline{PD}=4\,\mathrm{cm}$, $\overline{TC}=\overline{PD}=4\,\mathrm{cm}$

그런데 $\angle APQ=\angle PQC=x$ ($\because$ 엇각)이고 ㉠에 의해

$\angle CPQ=\angle PQC=x$이므로 △PQC는 이등변삼각형이지?

즉, $\overline{PC}=\overline{QC}=5\,\mathrm{cm}$

$\therefore \overline{PH}=\overline{QT}=\overline{QC}-\overline{TC}=5-4=1\,(\mathrm{cm})$

3rd $\tan x$의 값을 구하자.

$\therefore \tan(\angle QPH)=\tan x=\dfrac{3}{1}=3$

134 답 $2\sqrt{21}\ \mathrm{km}$

1st (거리)=(속력)×(시간)이라는 공식 알고 있지?

O 지점에서 P 지점 방향으로 시속 24 km의 속력으로 움직이니까 20분 후, 즉 $\dfrac{20}{60}$시간 후에 도달한 P 지점까지의 거리는

$\overline{OP}=24\times\dfrac{20}{60}=8\,(\mathrm{km})$

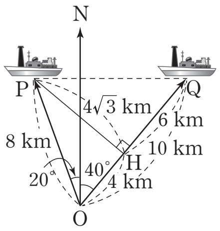
또, O 지점에서 Q 지점 방향으로 시속 30 km의 속력으로 움직이니까 20분 후, 즉 $\dfrac{20}{60}$시간 후에 도달한 Q 지점까지의 거리는

$\overline{OQ}=30\times\dfrac{20}{60}=10\,(\mathrm{km})$

2nd $\angle PON=20^\circ$, $\angle NOQ=40^\circ$니까 $\angle POQ=60^\circ$로 특수한 각이 나오지? 이걸 이용해 보자.

점 P에서 $\overline{OQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

그림과 같은 직각삼각형 POH에서



$\overline{PH}=8\sin 60^\circ=4\sqrt{3}\,(\mathrm{km})$

$\overline{OH}=8\cos 60^\circ=4\,(\mathrm{km})$

이므로 $\overline{QH}=10-4=6\,(\mathrm{km})$

직각삼각형 PQH에 피타고라스 정리를 적용하자.

$\overline{PQ}^2=\overline{PH}^2+\overline{QH}^2=(4\sqrt{3})^2+6^2=84$ $\therefore \overline{PQ}=2\sqrt{21}\,\mathrm{km}$

오|답|피|하|기

이 문제에서 틀리기 쉬운 부분은 단위를 시간으로 통일하지 않아서 답이 틀리게 된다는 거야. 속력이 시속으로 주어져 있기 때문에 단위를 시간으로 바꿔서 답을 구해야 한다는 사실을 잊으면 안 돼. 이런 문제는 무척 자주 나오니까 주의해야 해.

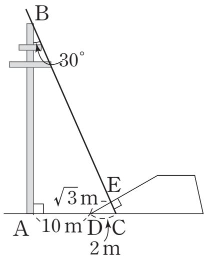
135 답 $12\sqrt{3}$

1st 그림을 간단히 해서 $\overline{DC}$의 길이를 구해.

그림과 같이 각 지점에 A, B, C, D, E를 지정해 주면 전봇대의 높이는 $\overline{AB}$의 길이가 돼. 직각삼각형 EDC에서

$\cos 30^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{3}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \overline{CD}=2\text{ m}$

2nd $\tan 30^\circ$의 값을 이용하여 전봇대의 높이를 구하자.



직각삼각형 ACB에서

$\tan 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}+\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{10+2}{x}$

$= \frac{12}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore x = 12\sqrt{3}$

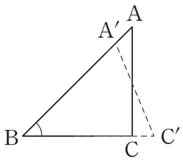
136 답 ⑤

1st 두 변의 길이가 각각 a, b이고, 그 끼인각의 크기가 예각 θ이면 그 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$로 구할 수 있지?

처음 삼각형 ABC의 넓이를 먼저 구해야겠지?

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$ ⋯ ㉠

2nd a를 r % 줄인 것은 $\left(1-\frac{r}{100}\right)a$가 되고, r % 늘인 것은 $\left(1+\frac{r}{100}\right)a$가 됨을 이용하자.



그런데 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 길이를 20 % 줄인 것이 $\overline{A'B}$이므로

$\overline{A'B} = \left(1-\frac{20}{100}\right)\times\overline{AB} = \frac{80}{100}\times\overline{AB} = 0.8\overline{AB}$ ⋯ ㉡

그리고 $\overline{BC}$의 길이를 30 % 늘인 것이 $\overline{BC'}$이므로

$\overline{BC'} = \left(1+\frac{30}{100}\right)\times\overline{BC} = \frac{130}{100}\times\overline{BC} = 1.3\overline{BC}$ ⋯ ㉢

새롭게 만들어진 삼각형 A′BC′의 넓이를 구하자.

$\triangle A'BC' = \frac{1}{2}\times\overline{A'B}\times\overline{BC'}\times\sin B$

$= \frac{1}{2}\times(0.8\overline{AB})\times(1.3\overline{BC})\times\sin B$ ($\because$ ㉡, ㉢)

$= 0.8\times1.3\times\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

$= 1.04\triangle ABC$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \triangle ABC : \triangle A'BC' = \triangle ABC : 1.04\triangle ABC = 100 : 104$

따라서 삼각형 A′BC′의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이보다 4 % 늘어나게 돼.

오|답|피|하|기

이런 유형의 문제에서 실수하기 쉬운 부분은 몇 % 늘었다 또는 줄었다하는 부분에서 식을 제대로 세우지 못해서 자주 틀리게 돼. 이 부분은 고등학교에서도 자주 이용되는 거니까 잘 정리해 놓자. 또, 삼각형의 넓이를 구하기 위해서는 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알면 구할 수 있다는 것을 적용하는 것이 중요해. 비록 삼각형의 넓이를 수로 나타낼 수 없어도 문자로 적절히 나타낼 수 있으면 식이 세워진 것과 같으므로 이 문제는 거의 풀린 거야.

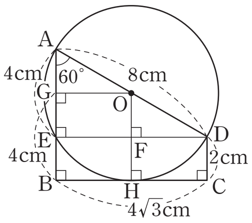
137 답 $16\sqrt{3}$ cm²

1st 사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하기 위해서 무엇을 구해야 하는지 알아보자.

(사다리꼴 ABCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(\overline{CD}+\overline{AB})\times\overline{BC}$ ⋯ ㉠

이므로 $\overline{CD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 길이를 구하면 되겠지?

2nd 주어진 각의 크기와 변의 길이를 이용해서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$의 길이를 구하자.



직각삼각형 AED에서

$\overline{AE} = 8\cos 60^\circ = 4$(cm)

$\overline{BC} = \overline{DE} = 8\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$(cm) ⋯ ㉡

또, 직각삼각형 AOG에서

$\overline{AG} = \overline{AO}\times\cos 60^\circ$

$= 4\times\frac{1}{2} = 2$(cm)

그런데 $\overline{AO}=\overline{OH}=4$cm($\because$ 반지름)이므로

$\overline{AB} = \overline{AG}+\overline{GB} = \overline{AG}+\overline{OH} = 2+4 = 6$(cm) ⋯ ㉢

또, $\overline{CD} = \overline{BE} = \overline{AB}-\overline{AE} = 6-4 = 2$(cm) ⋯ ㉣

3rd 이제 사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하자.

㉡, ㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

(사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(2+6)\times4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ (cm²)

L 원과 직선

개념 체크 001~026 정답은 p. 3에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

p. 58

027 답 ②

한 원에서 중심각의 크기와 호의 길이는 정비례해.

$25^\circ : 50^\circ = x : 8$, $1 : 2 = x : 8$ $\quad\therefore x=4$

$50^\circ : y^\circ = 8 : 16$, $50^\circ : y^\circ = 1 : 2$ $\quad\therefore y=100$

028 답 ③

한 원에서 중심각의 크기와 호의 길이는 정비례하므로

$\overset{\frown}{AB} : 4 = 120^\circ : 30^\circ$

$\therefore \overset{\frown}{AB} = 16\text{ cm}$

029 답 135°

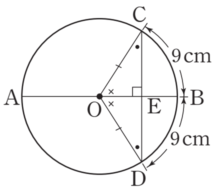
$\overset{\frown}{AB}=3\pi$, $\overset{\frown}{CD}=9\pi$이므로 두 호의 길이의 비는 $1:3$이야.

이때, 한 원에서 중심각의 크기와 호의 길이는 정비례하므로

$1 : 3 = 45^\circ : \angle x$

$\therefore \angle x = 135^\circ$

030 답 ③



$\overline{OC}$, $\overline{OD}$는 원 O의 반지름이므로

$\triangle ODC$는 이등변삼각형이지?

따라서 $\angle OCE = \angle ODE$이고

$\angle OEC = \angle OED = 90^\circ$이므로

$\angle COE = \angle DOE$가 돼.

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC} = 9\text{cm}$

이때, $\angle COE = 3\angle OCE$이므로

$\angle OCE = \angle ODE = x$라 하면

$\angle DOE = 3x$이고 $\angle ODE + \angle DOE = 90^\circ$이므로

$x + 3x = 90^\circ$ $\quad\therefore x = \dfrac{45^\circ}{2}$

$\therefore \angle DOE = 3x = \dfrac{135^\circ}{2}$

또한, $\angle AOD = 180^\circ - \dfrac{135^\circ}{2} = \dfrac{225^\circ}{2}$이고 $\overset{\frown}{BD} = 9\text{cm}$이므로

$\dfrac{135^\circ}{2} : \dfrac{225^\circ}{2} = 9 : \overset{\frown}{AD}$

$\therefore \overset{\frown}{AD} = 15\text{cm}$

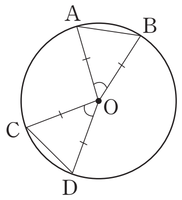
031 답 3 cm

한 원 또는 합동인 두 원에서 중심각의 크기가 같으면 현의 길이가 같지?

따라서 $\angle AOB = \angle COD$이고 $\overline{AB} = 3\text{cm}$이므로 $\overline{CD} = 3\text{cm}$야.

오답피하기

왜 한 원 또는 합동인 두 원에서 중심각의 크기가 같으면 현의 길이가 같을까?



그림과 같은 $\triangle AOB$와 $\triangle COD$에서

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$이고

$\angle AOB = \angle COD$이므로

$\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (SAS 합동)

$\therefore \overline{AB} = \overline{CD}$

따라서 두 현의 중심각의 크기가 같다면, 즉 $\angle AOB = \angle COD$이면 두 현의 길이는 $\overline{AB} = \overline{CD}$가 되지.

032 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $\overset{\frown}{AB}$의 중심각의 크기 60°, $\overset{\frown}{CD}$의 중심각의 크기는 20°로 $\overset{\frown}{AB}$의 중심각의 크기는 $\overset{\frown}{CD}$의 중심각의 크기의 3배이지만 현의 길이는 중심각의 크기에 정비례하지 않지?
$\therefore \overline{AB} \neq 3\overline{CD}$ (거짓)

ㄴ. 한 원에서 중심각의 크기와 호의 길이는 정비례하지?
$\overset{\frown}{AB}$의 중심각의 크기는 $\overset{\frown}{CD}$의 중심각의 크기의 3배이므로
$\overset{\frown}{AB} = 3\overset{\frown}{CD}$ (참)

ㄷ. 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면
부채꼴 OAB의 넓이는 $\pi r^2 \times \dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{6}\pi r^2$이고,
부채꼴 OCD의 넓이는 $\pi r^2 \times \dfrac{20}{360} = \dfrac{1}{18}\pi r^2$이므로
(부채꼴 OCD의 넓이)$=\dfrac{1}{3}$(부채꼴 OAB의 넓이) (참)

ㄹ. 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{OA} = \overline{OB} = r$이므로
$\triangle OAB$는 이등변삼각형이야. 따라서 $\angle OAB = \angle OBA$이지.
그런데 $\angle AOB = 60^\circ$이므로 $\angle OAB = \angle OBA = 60^\circ$가 돼.
따라서 $\triangle OAB$는 정삼각형이야. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이야.

033 답 ③

① 한 원에서 중심각의 크기가 같으면 현의 길이도 같지?
$\therefore \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{DE}$ (참)

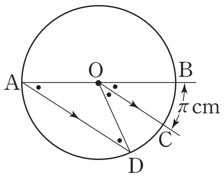
② $\angle AOB = \angle COD = \angle DOE$이고
$\angle COE = \angle COD + \angle DOE$이므로
$\angle AOB = \dfrac{1}{2}\angle COE$ (참)

③ 현의 길이는 중심각의 크기에 정비례하지 않지?
따라서 $\overline{AB} = 3\text{cm}$일 때, $\overline{CE} \neq 6\text{cm}$야. (거짓)

④ $\overset{\frown}{CE}$의 중심각의 크기는 $\overset{\frown}{AB}$의 중심각의 크기의 2배이므로
$\overset{\frown}{CE} = 8\text{cm}$이면 $\overset{\frown}{AB} = 4\text{cm}$야. (참)

⑤ 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 정비례하므로 부채꼴 OCE의 넓이는 부채꼴 OAB의 넓이의 2배야. (참)

034 답 ④



$\overline{AD} /\!/ \overline{OC}$이므로

$\angle OAD = \angle BOC$ ($\because$ 동위각)

또, $\triangle OAD$는 $\overline{OA} = \overline{OD}$인 이등변삼각형이므로

$\angle ODA = \angle OAD$

한편, $\angle COD=\angle ODA$($\because$ 엇각)

$\therefore\ \angle BOC=\angle COD$

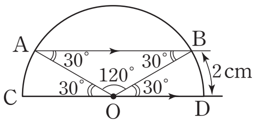
따라서 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 $\overset{\frown}{CD}$의 길이는 $\overset{\frown}{BC}$의 길이와 같지?

$\therefore\ \overset{\frown}{CD}=\pi$ cm

035 답 ②

$\angle BOD=\angle OBA=30^\circ$($\because$ 엇각)

이고 $\triangle OAB$는 이등변삼각형이므로



$\angle OAB=\angle OBA=30^\circ$

$\therefore\ \angle AOB=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

따라서 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 $\overset{\frown}{AB}$의 길이는 $\overset{\frown}{BD}$의 길이의 4배가 돼.

$\therefore\ \overset{\frown}{AB}=4\times2=8$(cm)

036 답 15 cm

$\overline{OC}\,/\!/\,\overline{AD}$이므로

$\angle OAD=\angle BOC=40^\circ$($\because$ 동위각)

$\overline{OA}=\overline{OD}$($\because$ 원의 반지름)이므로 $\triangle OAD$는 이등변삼각형이다.

$\therefore\ \angle ODA=\angle OAD=40^\circ$

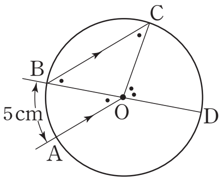
$\therefore\ \angle AOD=180^\circ-(40^\circ+40^\circ)=100^\circ$

$40^\circ : 100^\circ=6 : \overset{\frown}{AD}$ $\quad\therefore\ \overset{\frown}{AD}=15$ cm

037 답 10 cm

$\overline{AO}\,/\!/\,\overline{BC}$에 의해 $\angle AOB=\angle OBC$ ($\because$ 엇각)

두 점 O, C를 연결하여 만들어지는 삼각형 OBC는 $\overline{OB}=\overline{OC}$인 이등변삼각형이므로



$\angle OCB=\angle OBC$

또한, $\angle COD$는 삼각형 OBC의 한 외각이므로 $\angle COD=\angle OBC+\angle OCB=2\angle OBC$ $\therefore\ \angle COD=2\angle AOB$

따라서 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 $\overset{\frown}{CD}$의 길이는 $\overset{\frown}{AB}$의 길이의 2배가 돼. 즉, $\overset{\frown}{CD}=2\overset{\frown}{AB}=2\times5=10$(cm)

[다른 풀이]

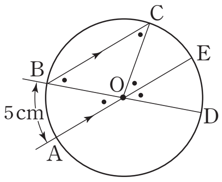
$\overline{AO}$를 연장하여 원 O와의 교점을 E라 하자.

$\angle AOB=\angle OBC$ ($\because$ 엇각)

$\angle OCB=\angle OBC$ ($\because$ $\overline{OB}=\overline{OC}$)

$\angle COE=\angle OCB$ ($\because$ 엇각)

$\angle DOE=\angle AOB$ ($\because$ 맞꼭지각)



$\therefore\ \angle COD=2\angle AOB$

$\therefore\ \overset{\frown}{CD}=2\overset{\frown}{AB}=2\times5=10$(cm)

038 답 ⑤

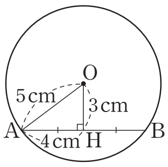
$\overline{OH}$는 $\overline{AB}$의 수선이므로 $\overline{AH}=\overline{BH}$

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times8=4$(cm)

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OA}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$(cm)

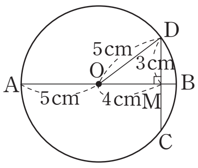
따라서 원 O의 반지름의 길이는 5 cm야.



039 답 ①

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 $\overline{DM}=3$ cm야.

이때, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$는 원 O의 반지름이므로 $\overline{OB}=\overline{OD}=5$ cm이고 $\triangle ODM$은 $\angle OMD=90^\circ$인 직각삼각형이므로



$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{DM}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$(cm)

$\therefore\ \overline{BM}=\overline{OB}-\overline{OM}=5-4=1$(cm)

040 답 $8\sqrt{3}$ cm

$\overline{OM}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}$

$\overline{AM}=x$ cm라 하면 $\triangle OAM$은 직각삼각형이므로

$\overline{OA}^2=\overline{AM}^2+\overline{OM}^2$

$8^2=x^2+4^2$, $x^2=48$ $\qquad\therefore\ x=4\sqrt{3}$ ($\because$ $x>0$)

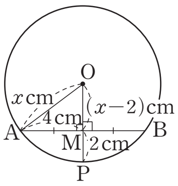
$\therefore\ \overline{AM}=4\sqrt{3}$ cm

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AM}=8\sqrt{3}$ (cm)

041 답 ③

$\overline{AB}\perp\overline{OP}$이므로 $\overline{OM}$은 현 AB의 수선이지?

즉, $\overline{AM}=\overline{BM}=4$ cm이고 $\overline{OA}=x$ cm로 놓으면



$\overline{OM}=\overline{OP}-\overline{MP}=(x-2)$ cm

직각삼각형 OAM에서

$\overline{OA}^2=\overline{AM}^2+\overline{OM}^2$

$x^2=4^2+(x-2)^2$

$x^2=16+x^2-4x+4$

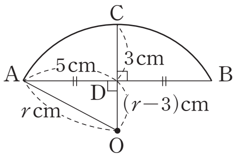
$\therefore\ x=5$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 5 cm야.

042 답 $\dfrac{17}{3}$ cm

점 D가 $\overline{AB}$의 이등분점이고, $\overline{AB}\perp\overline{CD}$이므로 그림과 같이 $\overline{CD}$의 연장선은 이 원의 중심 O를 지나.

이때, 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면 $\overline{OD}=(r-3)$cm



따라서 직각삼각형 AOD에서 피타고라스 정리를 적용하면

$r^2=(r-3)^2+5^2$

$r^2=r^2-6r+9+25$

$6r=34$ $\qquad\therefore\ r=\dfrac{17}{3}$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{17}{3}$ cm야.

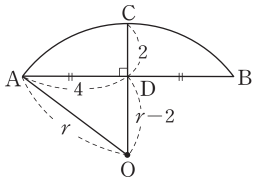
043 답 ②

점 D는 $\overline{AB}$의 이등분점이므로 $\overline{AD}=4$

$\overline{AB}\perp\overline{CD}$이므로 그림과 같이 $\overline{CD}$의 연장선은 이 원의 중심 O를 지나.

이때, 이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

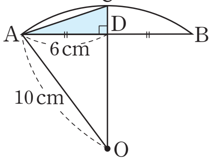
$\overline{AO}=r$, $\overline{OD}=r-2$



따라서 직각삼각형 AOD에서 피타고라스 정리를 적용하면
$r^2=4^2+(r-2)^2$
$r^2=16+r^2-4r+4$
$4r=20 \quad \therefore r=5$

044 답 ④

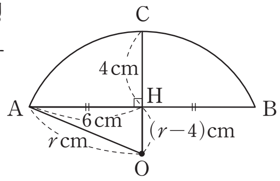
점 D는 $\overline{AB}$의 이등분점이고 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$이므로 그림과 같이 $\overline{CD}$의 연장선은 이 원의 중심 O를 지나.



$\overline{OA}=10\,\text{cm}$,
$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=6(\text{cm})$
이므로 직각삼각형 AOD에서 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{OD}=\sqrt{10^2-6^2}=8(\text{cm})$
$\overline{CD}=\overline{OC}-\overline{OD}=10-8=2(\text{cm})$
$\therefore \triangle ACD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times6\times2=6(\text{cm}^2)$

045 답 13π cm

$\overline{CH}$가 $\overline{AB}$의 수직이등분선이므로 그림과 같이 $\overline{CH}$의 연장선은 이 원의 중심 O를 지나.
원의 반지름의 길이를 $\overline{OA}=r\,\text{cm}$라 하면
$\overline{OH}=(r-4)\text{cm}$
$\overline{AH}=\overline{BH}=6\,\text{cm}$이므로 직각삼각형 OAH에서 피타고라스 정리를 적용하면 $r^2=6^2+(r-4)^2$



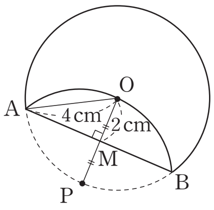
$r^2=36+r^2-8r+16$
$8r=52 \quad \therefore r=\frac{13}{2}$
따라서 원 모양의 접시의 반지름의 길이가 $\frac{13}{2}$ cm이므로 접시의 둘레의 길이는 $2\pi\times\frac{13}{2}=13\pi(\text{cm})$야.

오|답|피|하|기

$\overline{CH}$가 $\overline{AB}$의 수직이등분선이라 함은 $\overline{CH}\perp\overline{AB}$이고 $\overline{AH}=\overline{BH}$임을 뜻하지?
즉, 현 AB의 수직이등분선이 $\overline{CH}$가 되므로 $\overline{CH}$를 연장하면 원의 중심 O를 지나. 그래서 $\overline{OC}=r$ cm로 놓을 수 있는 거야. 동일한 의미를 다른 말로 표현을 하였을 때 식으로 표현하여 알고 있으면 문제가 변형이 되어도 금방 파악할 수 있어.

046 답 ⑤

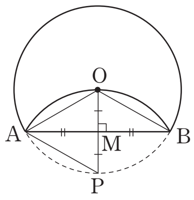
$\overline{OA}=4\,\text{cm}$이고 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면
$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}=2(\text{cm})$



직각삼각형 OAM에서 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{AM}^2=\overline{OA}^2-\overline{OM}^2$이므로
$\overline{AM}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (cm)
이때, $\overline{OM}$은 현 AB의 수직이등분선이지?
$\therefore \overline{AB}=2\,\overline{AM}=4\sqrt{3}$ (cm)

★ **접힌 원에서 현의 수직이등분선**

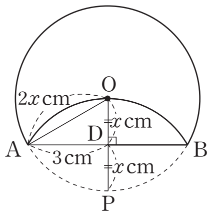
원주 위의 한 점 P가 원의 중심 O에 오도록 접은 경우



(1) 현 AB에서 $\overline{OM}$은 수선이므로
$\overline{AM}=\overline{BM}$
(2) $\overline{OM}=\overline{MP}$ (∵ 접은 선)이고,
$\overline{OA}=\overline{OP}$ (∵ 반지름)이므로
$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{OA}$
(3) $\triangle OAM$은 $\angle OMA=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{OA}^2=\overline{OM}^2+\overline{AM}^2$

047 답 ④

원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 D라 하고, $\overline{OD}$의 길이를 x cm라 하면 이 원의 반지름인 $\overline{OA}$의 길이는 $2x$ cm가 되겠지? 또, $\overline{AD}=\overline{BD}=3\,\text{cm}$야.
직각삼각형 OAD에서 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{OA}^2=\overline{OD}^2+\overline{AD}^2$



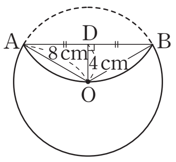
$(2x)^2=x^2+3^2$
$x^2=3$
$\therefore x=\sqrt{3}$ (∵ $x>0$)
따라서 원의 반지름의 길이는 $2x=2\sqrt{3}$ (cm)야.

오|답|피|하|기

원 위의 한 점이 원의 중심과 겹치도록 접는 문제에서는 $\overline{OD}$의 길이가 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$임을 이용하여 방정식을 세워야 해.
접힌 도형의 특징을 이해하지 못한다면 풀기 힘든 유형이야. 접힌 도형과 펼친 도형은 합동이 돼. 즉, 접은 도형에서는 접힌 길이와 펼친 길이가 같으므로 $\overline{OD}=\overline{DP}$, $\overline{OA}=\overline{AP}$, $\overline{OB}=\overline{BP}$야.

048 답 $8\sqrt{3}$ cm

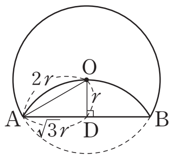
원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 D라 하면 반지름의 길이가 8 cm이므로
$\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{OA}=4(\text{cm})$



직각삼각형 $\triangle OAD$에서 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{AD}^2=\overline{OA}^2-\overline{OD}^2$이므로
$\overline{AD}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}(\text{cm})$
$\therefore \overline{AB}=2\,\overline{AD}=8\sqrt{3}(\text{cm})$

049 답 120°

원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 D라 하고, 이 원의 반지름의 길이 $2r$로 놓으면 $\overline{OD}=r$가 돼.
$\therefore \overline{AD}=\sqrt{(2r)^2-r^2}=\sqrt{3}r$



이때, 직각삼각형 OAD에서

$$\cos(\angle AOD)=\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$$

그런데 $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$이므로 $\angle AOD=60^\circ$

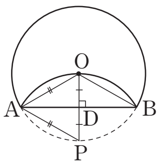
또한, $\triangle OAD$와 $\triangle OBD$에서

$\angle ODA=\angle ODB=90^\circ$, $\overline{AD}=\overline{BD}$, $\overline{OD}$는 공통이므로

$\triangle OAD \equiv \triangle OBD$(SAS 합동)

$\therefore \angle AOB=2\angle AOD=120^\circ$

[다른 풀이]



접은 원에서 원의 중심 O와 겹쳐지는 원주 위의 한 점을 P라 하고 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 D라 하자.

이때, $\overline{OA}=\overline{OP}$ ($\because$ 원의 반지름)이고,

$\overline{OA}=\overline{AP}$ ($\because$ 접은 선)이므로

$\overline{OA}=\overline{OP}=\overline{AP}$

즉, $\triangle OAP$는 정삼각형이므로

$\angle AOD=60^\circ$

$\triangle OAB$는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\angle BOD=\angle AOD$

$\therefore \angle AOB=2\angle AOD=120^\circ$

050 답 8 cm

원의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같지?

따라서 $\overline{AB}=\overline{CD}$가 되고 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선은 현 AB를 이등분해.

즉, $\overline{AB}=2\overline{BM}=2\times4=8$(cm)

$\therefore \overline{CD}=\overline{AB}=8$ cm

051 답 ④

$\triangle AMO$는 직각삼각형이므로

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\overline{AB}=2\overline{AM}=8$

원의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같아.

즉, $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{CD}=\overline{AB}=8$

052 답 ⑤

① 원의 중심 O에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로
$\overline{AM}=\overline{BM}=3$ cm (참)

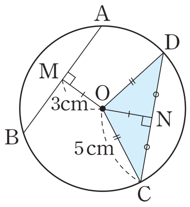
② 원의 중심 O에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같으므로
$\overline{AB}=\overline{CD}$ (참)

③ $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC$, $\angle BOD=\angle COD+\angle BOC$
그런데 $\triangle OAB\equiv\triangle OCD$이므로 $\angle AOB=\angle COD$
$\therefore \angle AOC=\angle BOD$ (참)

④ 두 삼각형 OAB, OCD의 밑변은 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$이고 높이는 각각 $\overline{OM}$, $\overline{ON}$이지?
그런데 $\overline{AB}=\overline{CD}$이고, 주어진 조건에서 $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 두 삼각형의 넓이는 같아. (참)

⑤ 주어진 조건만으로 $\angle AOD=\angle BON$인지 알 수 없어. (거짓)

053 답 ③



원의 중심 O에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $\overline{AB}=\overline{CD}$에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있으니까 $\overline{ON}=\overline{OM}=3$ cm

$\overline{ON}$은 현 CD의 수선이므로 $\overline{CN}=\overline{DN}$이야.

이때, 직각삼각형 OCN에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{CN}^2=\overline{OC}^2-\overline{ON}^2$이므로 $\overline{CN}=\sqrt{5^2-3^2}=4$(cm)

$\therefore \overline{CD}=2\overline{CN}=8$(cm)

$$\therefore \triangle OCD=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{ON}=\frac{1}{2}\times8\times3=12(\text{cm}^2)$$

054 답 ②

$\overline{OM}\perp\overline{AB}$, $\overline{ON}\perp\overline{AC}$이고, $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$야.

즉, $\triangle ABC$는 이등변삼각형이지.

이등변삼각형 ABC의 두 밑각의 크기는 같으므로 $\angle C=\angle B=65^\circ$

$\therefore \angle x=180^\circ-(65^\circ+65^\circ)=50^\circ$

055 답 62°

$\overline{AB}\perp\overline{OM}$, $\overline{AC}\perp\overline{ON}$이고 $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$야.

즉, $\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로 $\angle B=\angle C$야.

$\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 180°이고 $\angle A=56^\circ$이므로

$$\angle B=\frac{1}{2}\times(180^\circ-56^\circ)=62^\circ$$

056 답 ④

사각형의 네 내각의 크기의 합은 360°이지?

$\square AMON$에서 $\angle A=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+140^\circ)=40^\circ$

이때, 원의 중심 O에서 두 현에 이르는 거리가 같으면 그 두 현의 길이는 같지? 즉, $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$

따라서 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로

$$\angle C=\frac{1}{2}\times(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$$

057 답 $4\sqrt{3}$ cm²

$\overline{AB}\perp\overline{OL}$, $\overline{BC}\perp\overline{OM}$, $\overline{AC}\perp\overline{ON}$이고,

$\overline{OL}=\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

즉, $\triangle ABC$는 정삼각형이야.

한편, $\overline{ON}$은 현 AC의 수선이므로 $\overline{AN}=\overline{CN}=2$ cm가 되지?

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=2\overline{CN}=4$(cm)

$$\therefore \triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

058 답 130°

$\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$에서

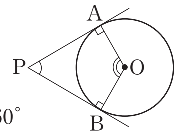
$\angle APB+\angle AOB=180^\circ$이므로

$\angle AOB=180^\circ-\angle APB=180^\circ-50^\circ=130^\circ$

L

오|답|피|하|기

왜 $\angle APB+\angle AOB=180^\circ$일까?
$\overline{PA}$, $\overline{PB}$는 원 O의 접선이므로
$\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$지.
사각형의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로
$\angle APB+\angle PAO+\angle PBO+\angle AOB=360^\circ$
$\angle APB+90^\circ+90^\circ+\angle AOB=360^\circ$
$\therefore \angle APB+\angle AOB=180^\circ$



059 답 66°

원 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 길이는 서로 같지?
따라서 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\triangle APB$는 이등변삼각형이야.
이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같고, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle PAB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-48^\circ)=66^\circ$

오|답|피|하|기

원의 외부의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 원의 외부의 한 점과 두 접점을 이어서 만든 삼각형은 항상 이등변삼각형이 되지. 이때, 두 접선의 끼인각의 크기가 60°이면 세 내각의 크기가 모두 60°가 되므로 정삼각형이 되는 거야.

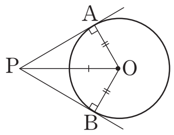
060 답 ④

반지름의 길이를 알고 있으므로 $\widehat{AB}$의 길이를 구하려면 $\angle AOB$의 크기만 구하면 되지?
$\overline{PA}$, $\overline{PB}$는 원 O의 접선이므로 $\angle APB+\angle AOB=180^\circ$가 성립해.
$\angle AOB=180^\circ-\angle APB=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

$\therefore \widehat{AB}=2\pi\times6\times\frac{135}{360}=\frac{9}{2}\pi(\text{cm})$

★ **원의 접선의 성질**

왜 $\overline{PA}=\overline{PB}$일까?
$\overline{PA}$, $\overline{PB}$는 원 O의 접선이므로
$\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$
$\overline{OA}=\overline{OB}$ ($\because$ 반지름), $\overline{OP}$는 공통이므로
$\triangle OAP\equiv\triangle OBP$ (RHS 합동)
따라서 $\overline{PA}=\overline{PB}$가 돼.



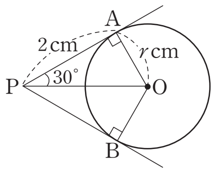
061 답 $\frac{4}{3}\pi\ \text{cm}^2$

원 O의 넓이를 구하기 위해서는 원의 반지름의 길이만 알면 돼.
원의 반지름의 길이를 r cm라 하자.
직각삼각형 OAP에서 $\angle APO=30^\circ$이므로

$\tan 30^\circ=\frac{\overline{OA}}{\overline{AP}}=\frac{r}{2}$

그런데 $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

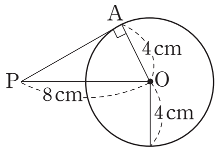
$\frac{r}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad\therefore r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$



$\therefore$ (원 O의 넓이)$=\pi r^2=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}\pi(\text{cm}^2)$

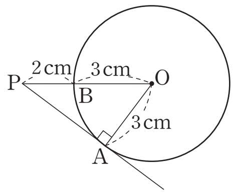
062 답 ③

$\overline{PA}$는 원 O의 접선이므로
$\overline{PA}\perp\overline{OA}$야.
$\triangle POA$는 $\angle PAO=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{PA}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}(\text{cm})$



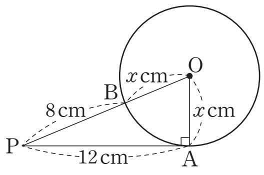
063 답 4 cm

반지름인 $\overline{OB}=3$ cm이므로 $\overline{OA}=3$ cm이고 $\overline{PA}$는 원 O의 접선이므로
$\angle OAP=90^\circ$
따라서 $\triangle PAO$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{PA}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4(\text{cm})$



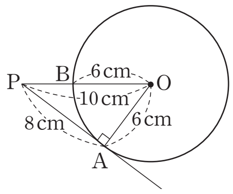
064 답 5

$\overline{PA}$는 원 O의 접선이므로
$\overline{PA}\perp\overline{OA}$지?
$\overline{OA}$, $\overline{OB}$는 원 O의 반지름이므로
$\overline{OB}=\overline{OA}=x$ cm
직각삼각형 OPA에서 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{OP}^2=\overline{OA}^2+\overline{PA}^2$
$(8+x)^2=x^2+12^2$
$16x=80\qquad\therefore x=5$



065 답 ③

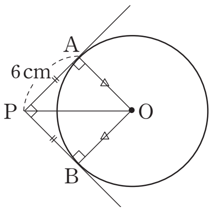
원의 둘레의 길이가 12π cm이므로 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면
$2\pi r=12\pi\qquad\therefore r=6$
$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=6$ cm
$\overline{PA}$는 원 O의 접선이므로
$\overline{OA}\perp\overline{PA}$
$\triangle PAO$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{OP}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{OA}^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10(\text{cm})$
$\therefore \overline{BP}=\overline{OP}-\overline{OB}=10-6=4(\text{cm})$



066 답 ④

원 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 길이는 같으므로
$\overline{PA}=\overline{PB}$지?
또한, $\triangle PAO$, $\triangle PBO$에서 $\overline{PO}$는 공통이고, $\overline{OA}=\overline{OB}$ ($\because$ 원의 반지름)이므로
$\triangle PAO\equiv\triangle PBO$(SSS 합동)
따라서 $\angle APO=\angle BPO=45^\circ$이고
$\angle PAO=90^\circ$이므로 $\triangle PAO$에서

$\cos 45^\circ=\frac{\overline{PA}}{\overline{PO}}=\frac{6}{\overline{PO}}$



그런데 $\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\dfrac{6}{\overline{PO}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\therefore \overline{PO}=6\sqrt{2}\,\text{cm}$

[다른 풀이]

$\overline{PA}$, $\overline{PB}$가 원 O의 접선이므로

$\angle APB+\angle AOB=180^\circ$, $\overline{PA}=\overline{PB}=6\,\text{cm}$

이때, $\angle APB=90^\circ$이므로

$\angle AOB=180^\circ-\angle APB=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

즉, □OAPB는 한 변의 길이가 6 cm인 정사각형이고, $\overline{PO}$는 이 정사각형의 대각선이므로

$\overline{PO}=\sqrt{2}\,\overline{AP}=6\sqrt{2}\,(\text{cm})$

067 답 ⑤

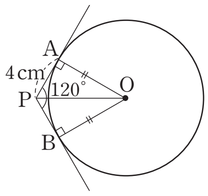
두 삼각형 PAO, PBO에서

$\overline{PA}=\overline{PB}$ (∵ 접선), $\overline{PO}$는 공통,

$\overline{AO}=\overline{BO}$ (∵ 반지름)이므로

△PAO≡△PBO(SSS 합동)

$\therefore \angle APO=\angle BPO=60^\circ$



원 O의 반지름의 길이는 $\overline{AO}$의 길이와 같고 △OPA는 세 내각의 크기가 각각 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이므로

$\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{OA}}{4}$

그런데 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로 $\dfrac{\overline{OA}}{4}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore \overline{AO}=4\sqrt{3}\,\text{cm}$

오|답|피|하|기

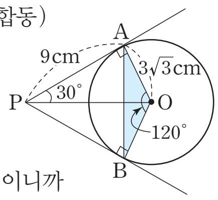
삼각형의 세 내각의 크기가 각각 30°, 60°, 90°인 직각삼각형의 세 변의 길이의 비는 항상 $1:\sqrt{3}:2$로 일정해. 이 삼각형의 세 변의 길이의 비가 생각이 나지 않을 때에는 정삼각형을 이등분하면 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 삼각형이 만들어지므로 여기에서 30°, 60°에 대한 sin, cos, tan의 값을 각각 구할 수 있지. 외우기보다는 원리를 아는 게 중요해.

068 답 $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2$

△PAO, △PBO에서 $\overline{PA}=\overline{PB}$ (∵ 접선), $\overline{OA}=\overline{OB}$ (∵ 반지름), $\overline{OP}$는 공통이므로 △APO≡△BPO(SSS 합동)

$\therefore \angle APO=\angle BPO=30^\circ$

따라서 △APO는 세 내각의 크기가 각각 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이므로



$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{OA}}{9}$이고, $\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이니까

$\dfrac{\overline{OA}}{9}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore \overline{OA}=3\sqrt{3}\,\text{cm}$

한편, $\angle APB+\angle AOB=180^\circ$에서 $\angle APB=60^\circ$이므로

$\angle AOB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\therefore \triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}^2\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\times(3\sqrt{3})^2\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times 27\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{27\sqrt{3}}{4}\,(\text{cm}^2)$

[다른 풀이]

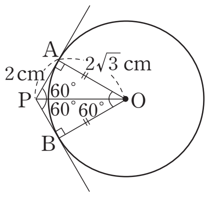
$\angle APB=60^\circ$이고 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 △APB는 정삼각형이야.

$\therefore$ △OAB=□PBOA−△APB=2×△APO−△APB

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times 9\times 3\sqrt{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 9^2=\dfrac{27\sqrt{3}}{4}\,(\text{cm}^2)$

069 답 $2\pi\,\text{cm}^2$

부채꼴 OAB의 넓이를 구하려면 원의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 구해야겠지?



△PAO, △PBO에서

$\overline{PA}=\overline{PB}$ (∵ 접선), $\overline{OA}=\overline{OB}$ (∵ 반지름),

$\overline{OP}$는 공통이므로

△PAO≡△PBO(SSS 합동)

$\therefore \angle APO=\angle BPO=60^\circ$

따라서 △OPA는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이므로

$\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{AO}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{AO}}{2}$

그런데 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{\overline{AO}}{2}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AO}=2\sqrt{3}\,\text{cm}$

이제 중심각의 크기를 구하자.

$\angle APB+\angle AOB=180^\circ$이므로

$\angle AOB=180^\circ-\angle APB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

$\therefore$ (부채꼴 OAB의 넓이)$=\pi\times(2\sqrt{3})^2\times\dfrac{60}{360}$

$=2\pi\,(\text{cm}^2)$

070 답 ⑤

$\overline{CP}$, $\overline{AC}$, $\overline{AR}$는 원 O의 접선이야.

원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$\overline{CP}=\overline{CQ}$, $\overline{AQ}=\overline{AR}$

이때, $\overline{CP}=3\,\text{cm}$에서 $\overline{CQ}=3\,\text{cm}$

$\overline{AQ}=\overline{AC}-\overline{CQ}=7-3=4\,(\text{cm})$

$\therefore \overline{AR}=4\,\text{cm}$

또, $\overline{BR}$, $\overline{BP}$는 원 밖의 점 B에서 원 O에 그은 접선이므로

$\overline{BR}=\overline{BP}=12\,\text{cm}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BR}-\overline{AR}=12-4=8\,(\text{cm})$

071 답 18 cm

$\overline{PB}$, $\overline{PA}$, $\overline{CD}$는 원 O의 접선이므로

$\overline{DB}=\overline{DE}$, $\overline{CA}=\overline{CE}$ ⋯ ㉠,

$\overline{PA}=\overline{PB}$ ⋯ ㉡가 성립해.

$\therefore$ ($\triangle$PCD의 둘레의 길이)$=\overline{PD}+\overline{CD}+\overline{CP}$

$=\overline{PD}+\overline{DE}+\overline{CE}+\overline{CP}$

$=(\overline{PD}+\overline{DB})+(\overline{CA}+\overline{CP})$ ($\because$ ㉠)

$=\overline{PB}+\overline{PA}=2\,\overline{PA}$ ($\because$ ㉡)

$=2\times(8+1)=18$(cm)

072 답 4 cm

$\overline{BC}$, $\overline{BY}$는 원 밖의 한 점 B에서 원 O에 그은 접선이므로

$\overline{BY}=\overline{BC}=3$ cm

$\therefore\ \overline{PY}=\overline{PB}+\overline{BY}=8+3=11$(cm)

$\overline{PX}$, $\overline{PY}$도 원 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 접선이므로

$\overline{PX}=\overline{PY}=11$(cm)

$\therefore\ \overline{AX}=\overline{PX}-\overline{PA}=11-7=4$(cm)

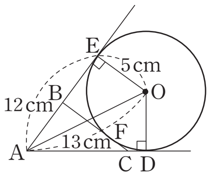
또, $\overline{AX}$, $\overline{AC}$도 원 밖의 한 점 A에서 원 O에 그은 접선이므로

$\overline{AC}=\overline{AX}$ $\quad\therefore\ \overline{AC}=4$ cm

오|답|피|하|기

원의 외부의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같다는 사실이 핵심이야. 따라서 원 O의 외부의 점인 A, B, P에서 그은 각각의 접선들의 길이가 같다고 주어진 그림에 표시하여 풀면 쉽게 풀 수 있어. 도형 단원의 문제는 문제의 조건에 의해 생기는 다른 조건을 빠짐없이 문제에 나타내면 문제에 보다 쉽게 접근할 수 있는 경우가 많으니까 여기에 주의하자.

073 답 24 cm



점 E는 접선 AE에 대하여 원 O의 접점이므로 $\overline{AE}\perp\overline{EO}$지?

즉, $\triangle$AEO는 직각삼각형이야.

$\therefore\ \overline{AE}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{EO}^2}$

$=\sqrt{13^2-5^2}=12$(cm)

또한, $\overline{AE}$, $\overline{AD}$는 점 A에서 원 O에 그은 접선이므로 두 선분의 길이는 같고, 마찬가지로 생각하면

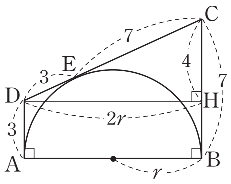
$\overline{BE}=\overline{BF}$, $\overline{CF}=\overline{CD}$

따라서 $\triangle$ABC의 둘레의 길이는 두 접선인 $\overline{AD}$, $\overline{AE}$의 길이의 합과 같으므로

($\triangle$ABC의 둘레의 길이)$=\overline{AD}+\overline{AE}$

$=2\,\overline{AE}=24$(cm)

074 답 $\sqrt{21}$



점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 반원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{BH}=\overline{AD}=3$, $\overline{CH}=7-3=4$

$\overline{DE}=\overline{AD}=3$, $\overline{CE}=\overline{CB}=7$이므로

$\overline{CD}=3+7=10$

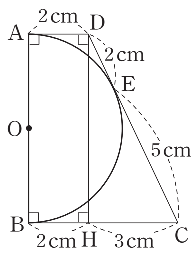
직각삼각형 DHC에서 $\overline{DH}=\overline{AB}=2r$이므로

$10^2=(2r)^2+4^2$

$r^2=21$

$\therefore\ r=\sqrt{21}$ ($\because r>0$)

075 답 ⑤



$\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$는 반원 O의 접선이므로

$\overline{DE}=\overline{AD}=2$ cm,

$\overline{CE}=\overline{CB}=5$ cm

$\therefore\ \overline{DC}=\overline{DE}+\overline{CE}=7$(cm)

점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}=\overline{AD}=2$ cm이므로

$\overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=5-2=3$(cm)

$\triangle$DHC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

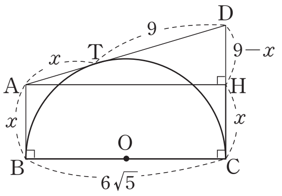
$\overline{AB}=\overline{DH}=\sqrt{\overline{DC}^2-\overline{HC}^2}$

$=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$(cm)

따라서 반원 O의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{10}$ (cm)

076 답 5



점 A에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AB}=x$라 하자.

$\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$는 반원 O의 접선이므로

$\overline{AT}=\overline{AB}=x$,

$\overline{DT}=\overline{DC}=9$

$\overline{AH}=\overline{BC}=6\sqrt{5}$

직각삼각형 AHD에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AD}^2=\overline{DH}^2+\overline{AH}^2$

$(x+9)^2=(9-x)^2+(6\sqrt{5})^2$

$x^2+18x+81=81-18x+x^2+180$

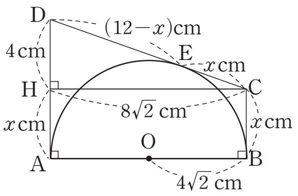
$36x=180$ $\quad\therefore\ x=5$ $\quad\therefore\ \overline{AB}=5$

오|답|피|하|기

반원이 사각형에 내접하는 문제를 원이 사각형에 내접하는 문제와 혼동하는 경우가 많아.

즉, $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$라고 무심코 놓고 푸는 경우가 아주 많아. 원이 사각형에 내접하는 경우가 아니라 반원이 내접하는 경우이므로 원 밖의 한 점에서 그은 접선의 길이가 같음과 피타고라스 정리를 이용해서 문제를 풀어야 돼!

077 답 4 cm



점 C에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{DC}=12$ cm,

$\overline{CH}=\overline{AB}=8\sqrt{2}$ cm이므로

직각삼각형 DHC에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{DC}^2-\overline{CH}^2}$

$=\sqrt{12^2-(8\sqrt{2})^2}=4$(cm)

이때, $\overline{BC}=\overline{AH}=x$ cm라 하면 $\overline{DE}=\overline{DA}$이므로

$12-x=4+x$ $\quad\therefore\ x=4$

$\therefore\ \overline{BC}=4$ cm

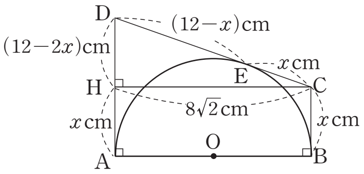
[다른 풀이]

$\overline{AD}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$가 반원 O의 접선이므로

$\overline{BC}=\overline{CE}=x$ cm,

$\overline{DA}=\overline{DE}=(12-x)$cm

$\Rightarrow \overline{DH}=(12-2x)$cm



직각삼각형 CDH에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{CD}^2=\overline{CH}^2+\overline{DH}^2$

$12^2=(8\sqrt{2})^2+(12-2x)^2$

$x^2-12x+32=0$

$(x-8)(x-4)=0$

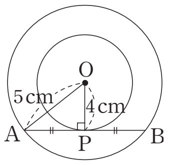
$\therefore x=4$ ($\because$ $\overline{AD}>\overline{BC}$)

078 답 6 cm

$\overline{AB}$는 반지름의 길이가 4 cm인 원의 접선이기도 하지만, 반지름의 길이가 5 cm인 원의 현이므로 중심 O에 대하여

$\overline{OP}\perp\overline{AB}$, $\overline{AB}=2\,\overline{AP}$가 성립해.

따라서 직각삼각형 OAP에서 피타고라스 정리를 적용하면



$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$(cm)

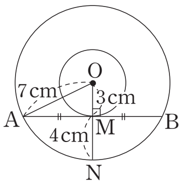
$\therefore \overline{AB}=2\,\overline{AP}=2\times3=6$(cm)

079 답 ⑤

$\overline{ON}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 △OAM은 직각삼각형이고, $\overline{AB}=2\,\overline{AM}$이야.

$\overline{OA}=\overline{ON}=7$(cm)

직각삼각형 OAM에 피타고라스 정리를 적용하면



$\overline{AM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OM}^2}$

$\quad=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$ (cm)

$\therefore \overline{AB}=2\,\overline{AM}=4\sqrt{10}$ (cm)

080 답 15

△OAH에서 ∠AHO$=90^\circ$이므로 $\overline{AH}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{BH}=\overline{AH}=8$

△ACD에서 ∠ADC$=90^\circ$이고

$\overline{AD}=2\overline{OA}=20$, $\overline{AC}=\overline{AH}+\overline{BH}+\overline{BC}=25$이므로

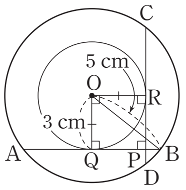
$\overline{CD}=\sqrt{25^2-20^2}=\sqrt{225}=15$

081 답 1 cm

원의 중심과 접점을 이은 반지름은 접선과 수직이므로 $\overline{OR}\perp\overline{CD}$, $\overline{OQ}\perp\overline{AB}$이고

$\overline{OR}=\overline{OQ}=3$ cm지?

따라서 ∠QPR$=90^\circ$이므로 □OQPR는 정사각형이 돼.



이때, $\overline{OB}=5$ cm이므로 직각삼각형 OQB에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{QB}=\sqrt{5^2-3^2}=4$(cm)

$\therefore \overline{BP}=\overline{QB}-\overline{PQ}=4-3=1$(cm)

082 답 6 cm

$\overline{CE}=\overline{CF}=x$ cm로 놓으면 $\overline{AD}=\overline{AF}=(9-x)$ cm,

$\overline{BD}=\overline{BE}=(10-x)$ cm

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=(9-x)+(10-x)=7$이므로

$2x=12 \qquad \therefore x=6 \qquad \therefore \overline{CF}=6$ cm

[다른 풀이]

$\overline{CF}=\overline{CE}=x$ cm, $\overline{BE}=\overline{BD}=y$ cm, $\overline{AF}=\overline{AD}=z$ cm로 놓으면

$x+y=10$ ⋯ ㉠

$y+z=7$ ⋯ ㉡

$z+x=9$ ⋯ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(x+y+z)=26$, $x+y+z=13$

$x+7=13$ ($\because$ ㉡) $\qquad \therefore x=6$

$\therefore \overline{CF}=6$ cm

083 답 13 cm

두 접점 E, F에서 $\overline{AF}=\overline{AE}=3$ cm이므로

$\overline{BD}=\overline{BF}=11-3=8$(cm), $\overline{CD}=\overline{CE}=8-3=5$(cm)

$\therefore \overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=8+5=13$(cm)

084 답 ③

△ABC가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$(cm)

세 점 D, E, F가 원 O의 접점이므로

$\overline{AD}=\overline{AE}$, $\overline{BE}=\overline{BF}$, $\overline{CF}=\overline{CD}$

△ABC의 둘레의 길이는 $10+6+8=24$(cm)이므로

$(\overline{AD}+\overline{AE})+(\overline{BE}+\overline{BF})+(\overline{CF}+\overline{CD})=2\overline{AE}+2\overline{BF}+2\overline{CD}$

$\qquad=2(\overline{AE}+\overline{BF}+\overline{CD})$

$\qquad=24$(cm)

$\therefore \overline{AE}+\overline{BF}+\overline{CD}=12$(cm)

085 답 13 cm

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용하여 △BDE의 둘레의 길이를 구하자.

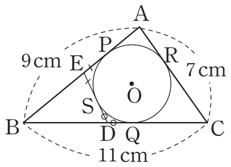
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$와 원 O의 접점을 각각 P, Q, R라 하면

$\overline{BP}=\overline{BQ}$, $\overline{CQ}=\overline{CR}$, $\overline{AP}=\overline{AR}$ ⋯ ㉠

또, $\overline{ED}$와 원 O의 접점을 S라 하면

$\overline{EP}=\overline{ES}$, $\overline{DQ}=\overline{DS}$ ⋯ ㉡

(△BDE의 둘레의 길이)



$=\overline{BE}+\overline{BD}+\overline{DE}$

$=\overline{BE}+\overline{BD}+(\overline{ES}+\overline{DS})$

$=\overline{BE}+\overline{BD}+(\overline{EP}+\overline{DQ})$($\because$ ㉡)

$=\overline{BE}+\overline{EP}+\overline{BD}+\overline{DQ}$

$=\overline{BP}+\overline{BQ}$

$=(\overline{AB}-\overline{AP})+(\overline{BC}-\overline{CQ})$

$=(9-\overline{AP})+(11-\overline{CQ})$

$=20-(\overline{AP}+\overline{CQ})$

$=20-(\overline{AR}+\overline{CR})$($\because$ ㉠)

$=20-\overline{AC}=20-7=13$(cm)

[다른 풀이]

$\overline{AP}=\overline{AR}=x$ cm라 하면 $\overline{BP}=(9-x)$ cm, $\overline{CR}=(7-x)$ cm

이때, 세 점 P, Q, R가 원 O의 접점이므로

$\overline{BQ}=\overline{BP}=(9-x)$ cm, $\overline{CQ}=\overline{CR}=(7-x)$ cm

한편, $\overline{BC}=\overline{BQ}+\overline{CQ}$이므로

$11=(9-x)+(7-x)\quad \therefore x=2.5$

즉, $\overline{AP}=2.5$ cm이므로

$\overline{BP}=\overline{AB}-\overline{AP}=9-2.5=6.5$(cm), $\overline{BQ}=\overline{BP}=6.5$ cm

따라서 $\triangle$BDE의 둘레의 길이는

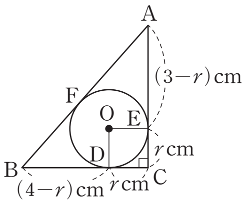
$$\begin{aligned}\overline{BE}+\overline{ES}+\overline{SD}+\overline{DB}&=\overline{BE}+\overline{EP}+\overline{DQ}+\overline{DB}\\&=\overline{BP}+\overline{BQ}\\&=6.5+6.5=13(\text{cm})\end{aligned}$$

086 답 1 cm

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$(cm)

점 O에서 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면



$\overline{CD}=\overline{CE}=r$ cm

$\overline{BF}=\overline{BD}=(4-r)$ cm

$\overline{AF}=\overline{AE}=(3-r)$ cm

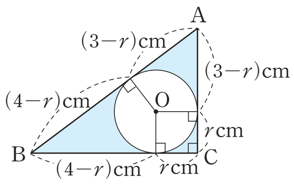
$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{AF}+\overline{BF}\\&=(3-r)+(4-r)=5\end{aligned}$$

$\therefore r=1$

따라서 내접원의 반지름의 길이는 1 cm이다.

087 답 $(6-\pi)$ cm^2

$\triangle$ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면



$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}\\&=\sqrt{4^2+3^2}=5(\text{cm})\end{aligned}$$

이때, 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$(4-r)+(3-r)=5\qquad \therefore r=1$

이때, 색칠한 부분은 $\triangle$ABC의 넓이에서 원 O의 넓이를 뺀 부분이지?

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times3\times4-\pi\times1^2=6-\pi$(cm^2)

088 답 ⑤

원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면 정사각형 AFOE의 한 변의 길이는 r cm야.

$\overline{EC}=\overline{DC}=4$ cm, $\overline{BF}=\overline{BD}=6$ cm, $\overline{AF}=\overline{AE}=r$ cm이므로

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(\overline{AF}+\overline{BF})^2+(\overline{AE}+\overline{CE})^2$

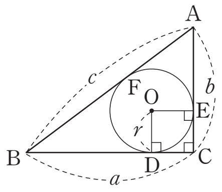
$10^2=(r+6)^2+(r+4)^2$, $r^2+10r-24=0$

$(r+12)(r-2)=0\qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$

따라서 원 O의 둘레의 길이는

$2\pi\times2=4\pi$(cm)

★ **직각삼각형의 내접원의 성질**



(1) $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2\quad \therefore c^2=a^2+b^2$

(2) □ODCE에서

$\angle DCE=\angle ODC=\angle OEC=90^\circ$

이고 $\overline{OD}=\overline{OE}=r$이므로

□ODCE는 한 변의 길이가 r인 정사각형이야.

(3) 세 접점 D, E, F에 의해 $\overline{DC}=\overline{EC}$, $\overline{AE}=\overline{AF}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$이므로

$\overline{BF}=\overline{BD}=a-r$, $\overline{AF}=\overline{AE}=b-r$

$\therefore c=(a-r)+(b-r)$

(4) $\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$\therefore \dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

---

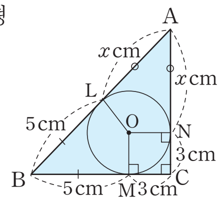
089 답 60 cm^2

□OMCN은 정사각형이고 원 O의 반지름의 길이가 3 cm지?

세 점 L, M, N이 원 O의 접점이므로

$\overline{MC}=\overline{NC}=3$ cm, $\overline{BL}=\overline{BM}=5$ cm야.

이때, $\overline{AL}=\overline{AN}=x$ cm라 하고 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리를 적용하면



$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$이므로

$8^2+(3+x)^2=(5+x)^2$

$64+9+6x+x^2=25+10x+x^2$

$4x=48\qquad \therefore x=12$

$\overline{AC}=\overline{NC}+\overline{AN}=3+12=15$(cm)

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC&=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}\\&=\frac{1}{2}\times8\times15=60(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

090 답 6 cm

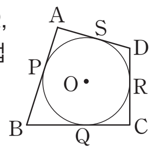
원에 외접하는 사각형의 두 쌍의 대변의 길이의 합은 서로 같으므로

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$이지?

$6+\overline{CD}=4+8$

$\therefore \overline{CD}=6$ cm

★ **외접사각형의 성질**



□ABCD가 원 O에 외접하고 접점을 각각 P, Q, R, S라 하면 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이가 같으므로

(1) $\overline{AP}=\overline{AS}$, $\overline{BP}=\overline{BQ}$, $\overline{CQ}=\overline{CR}$, $\overline{DR}=\overline{DS}$

(2) $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB}+\overline{CD}&=(\overline{AP}+\overline{BP})+(\overline{CR}+\overline{DR})\\&=(\overline{AS}+\overline{BQ})+(\overline{CQ}+\overline{DS})\\&=(\overline{AS}+\overline{DS})+(\overline{BQ}+\overline{CQ})\\&=\overline{AD}+\overline{BC}\end{aligned}$$

091 답 ⑤

□ABCD가 원 O에 외접하므로

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

$7+5=3+5+\overline{CF}$

$\therefore \overline{CF}=4$ cm

092 답 ②

원에 외접하는 사각형의 두 쌍의 대변의 길이의 합은 서로 같으므로

$(4x-1)+2x=3x+(2x+2)$

$\therefore x=3$

093 답 ⑤

□ABCD가 원 O에 외접하므로

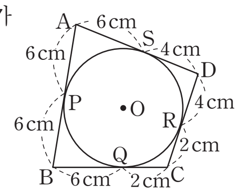
$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$가 성립해.

$(\overline{AP}+6)+(\overline{CR}+4)=10+8$

$\therefore \overline{AP}+\overline{CR}=8$ cm

[다른 풀이]

원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이가 서로 같음을 이용해 보자.



$\overline{DS}=\overline{DR}=4$ cm이므로

$\overline{AP}=\overline{AS}=10-4=6$(cm)

또, $\overline{BQ}=\overline{BP}=6$ cm이므로

$\overline{CR}=\overline{CQ}=8-6=2$(cm)

$\therefore \overline{AP}+\overline{CR}=6+2=8$(cm)

094 답 ③

$\overline{AQ}=\overline{AP}=4$ cm이므로

$\overline{AB}=\overline{AQ}+\overline{BQ}=2\overline{AQ}=2\times4=8$(cm)

한편, □ABCD는 원 O에 외접하므로

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

$8+10=\overline{AD}+12$

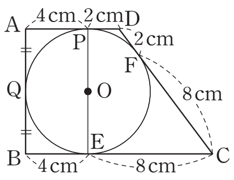
$\therefore \overline{AD}=6$ cm

이때, $\overline{AP}=4$ cm이므로

$\overline{DP}=\overline{AD}-\overline{AP}=6-4=2$(cm)

[다른 풀이]

원 O의 접선인 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$에서 접점을 각각 E, F라 하자.



$\overline{BE}=\overline{BQ}=4$ cm이므로

$\overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=12-4=8$(cm)

접선의 성질에 의해

$\overline{CF}=\overline{CE}=8$(cm)

$\therefore \overline{DP}=\overline{DF}=\overline{CD}-\overline{CF}$

$=10-8=2$(cm)

095 답 ②

△DBC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{DC}=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$(cm)

한편, □ABCD는 원 O에 외접하므로

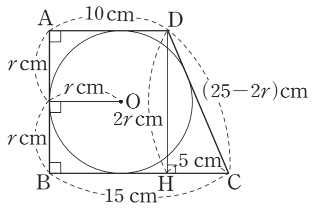
$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$에서 $\overline{AB}+9=8+12$

$\therefore \overline{AB}=11$ cm

096 답 6 cm

원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$에 의해 $\overline{AB}$는 원 O의 지름이므로

$\overline{AB}=2r$ cm



원에 외접하는 사각형의 두 쌍의 대변의 길이의 합은 서로 같으므로

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}=10+15=25$(cm)

$2r+\overline{CD}=25$

$\therefore \overline{CD}=(25-2r)$ cm

이때, 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}=10$ cm이고 $\overline{HC}=5$ cm이므로 직각삼각형 DHC에서 피타고라스 정리를 적용하면

$(2r)^2+5^2=(25-2r)^2$

$4r^2+25=625-100r+4r^2$

$100r=600 \qquad \therefore r=6$

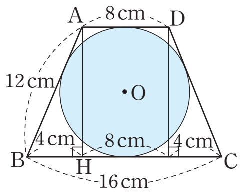
097 답 ④

□ABCD는 등변사다리꼴이므로 $\overline{AB}=\overline{DC}$야.

이때, $\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}=8+16=24$(cm)이므로

$2\overline{AB}=24 \qquad \therefore \overline{AB}=12$ cm

점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서



$\overline{BH}=\frac{1}{2}\times(16-8)=4$(cm)이므로

$\overline{AH}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$ (cm)

따라서 원 O의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AH}=4\sqrt{2}$ (cm)이므로 원 O의 넓이는

$\pi\times(4\sqrt{2})^2=32\pi$(cm²)

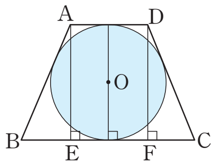
오답피하기

외접사각형이 어떤 사각형이냐에 따라 적절한 도형의 성질을 이용해야 해. 097번 문제를 살펴보자.

□ABCD가 등변사다리꼴이라고 하면 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이고 $\overline{AB}=\overline{DC}$야.

따라서 [그림 1]과 같이 $\overline{BE}=\overline{CF}$, $\overline{AD}=\overline{EF}$가 되지.

즉, $\overline{BE}=\frac{1}{2}(\overline{BC}-\overline{AD})$야.

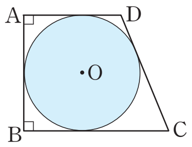


[그림 1]

또한, [그림 1]에서 원 O의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AE}$가 돼.

반면, 096번 문제의 도형은 $\angle A=\angle B=90°$이므로 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$가 되어 사다리꼴이지?

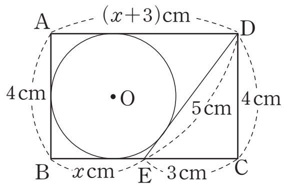
[그림 2]와 같은 □ABCD에 내접한 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$가 됨을 알 수 있겠지?



[그림 2]

따라서 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이고 $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$가 원의 접선일 때, 이 원의 반지름의 길이는 두 선분 AD와 BC 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$배임을 알아 두자.

098 답 3 cm



직각삼각형 DEC에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{CE}=\sqrt{5^2-4^2}=3(\text{cm})$

$\overline{BE}=x\text{cm}$로 놓으면

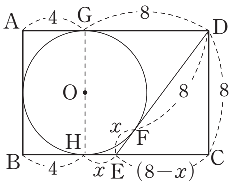
$\overline{AD}=\overline{BC}=(x+3)\text{cm}$이고

□ABED가 원 O에 외접하므로

$\overline{AB}+\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{BE}$

$4+5=(x+3)+x\qquad \therefore x=3\qquad \therefore \overline{BE}=3\text{cm}$

099 답 2



$\overline{AB}=8$이므로 원 O의 반지름의 길이는 4야. 즉, 그림과 같이 $\overline{AG}=\overline{BH}=4$야.

$\overline{EF}=x$라 하면 $\overline{BE}=4+x$이므로

$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}=12-(4+x)=8-x$

원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 길이는 같지?

$\overline{AG}=4$이므로 $\overline{DF}=\overline{DG}=12-4=8\qquad \therefore \overline{DE}=8+x$

△DEC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{DE}^2=\overline{CE}^2+\overline{CD}^2$

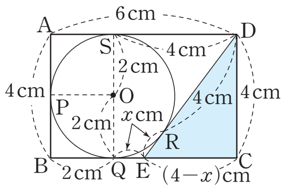
$(8+x)^2=(8-x)^2+8^2$

$64+16x+x^2=64-16x+x^2+64$

$32x=64\qquad \therefore x=2\qquad \therefore \overline{EF}=2$

100 답 6 cm²

그림과 같이 접점을 P, Q, R, S라 하자.



$\overline{DC}=\overline{AB}=4\text{cm}$,

$\overline{AS}=\overline{BQ}=2\text{cm}$이므로

$\overline{QC}=\overline{SD}=\overline{DR}=4\text{cm}$

이때, $\overline{QE}=\overline{ER}=x\text{cm}$라 하면

$\overline{EC}=(4-x)\text{cm}$,

$\overline{DE}=(4+x)\text{cm}$

직각삼각형 DEC에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{DE}^2=\overline{EC}^2+\overline{CD}^2$

$(4+x)^2=(4-x)^2+4^2$

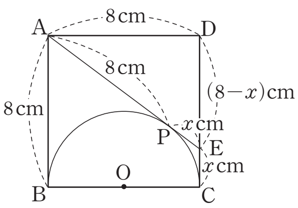
$16+8x+x^2=16-8x+x^2+16$

$16x=16\qquad \therefore x=1$

따라서 $\overline{CE}=4-1=3(\text{cm})$이므로

$\triangle CDE=\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times3\times4=6(\text{cm}^2)$

101 답 10 cm



□ABCD가 정사각형이므로

$\overline{AD}=\overline{AB}=8\text{cm}$

반원 O와 $\overline{AE}$가 접하는 점을 P라 하고 $\overline{PE}=\overline{CE}=x$ cm라 하면 $\overline{AP}=\overline{AB}=8\text{cm}$이므로

$\overline{AE}=(8+x)\text{cm}$이고

$\overline{DE}=(8-x)\text{cm}$

직각삼각형 ADE에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AE}^2=\overline{DE}^2+\overline{AD}^2$

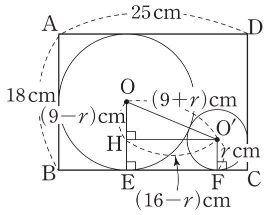
$(8+x)^2=(8-x)^2+8^2$

$64+16x+x^2=64-16x+x^2+64$

$32x=64\qquad \therefore x=2$

$\therefore \overline{AE}=\overline{AP}+\overline{PE}=8+2=10(\text{cm})$

102 답 4 cm



$\overline{AB}=18\text{cm}$이므로 원 O의 반지름의 길이는 9cm야.

두 원의 중심 O, O′에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.

또, 점 O′에서 $\overline{OE}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 O'의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\overline{OO'}=(9+r)$ cm,

$\overline{HO'}=\overline{EF}=\overline{BC}-\overline{BE}-\overline{FC}$

$=25-9-r=(16-r)$ cm

$\overline{OH}=(9-r)$ cm

직각삼각형 OHO′에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{OO'}^2=\overline{OH}^2+\overline{HO'}^2$

$(9+r)^2=(9-r)^2+(16-r)^2$

$81+18r+r^2=81-18r+r^2+256-32r+r^2$

$r^2-68r+256=0$

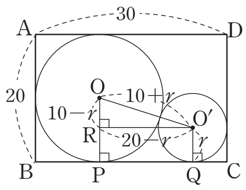
$(r-64)(r-4)=0$

$\therefore r=4\ (\because r<9)$

오|답|피|하|기

크기가 다른 두 원이 각각 직사각형에 내접하는 문제는 102번 풀이에 있는 그림과 같이 두 원의 중심을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형을 만들어 피타고라스 정리를 이용하여 풀어야 하는 거야. 이때, $\overline{HO'}$의 길이는 직사각형의 가로의 길이에서 두 원의 반지름의 길이를 빼야 함을 이해하자.

103 답 $40(2-\sqrt{3})\pi$



원 O의 지름은 직사각형 ABCD의 세로의 길이와 같으므로 원 O의 반지름의 길이는 10이야. 원 O'의 반지름의 길이를 r, $\overline{BC}$와 두 원 O, O'의 접점을 각각 P, Q라 하면

$\overline{PQ}=\overline{BC}-\overline{BP}-\overline{CQ}$

$=30-10-r=20-r$

점 O′에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{O'R}=\overline{PQ}=20-r$

$\overline{OR}=\overline{OP}-\overline{RP}=10-r$

$\overline{OO'}=10+r$

△OO′R는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{OO'}^2=\overline{OR}^2+\overline{O'R}^2$

$(10+r)^2=(10-r)^2+(20-r)^2$

$100+20r+r^2=100-20r+r^2+400-40r+r^2$

$r^2-80r+400=0$

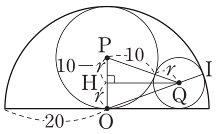
$\therefore r=40\pm20\sqrt{3}$

이때, $0<r<10$이므로 $r=40-20\sqrt{3}$이야.

$\therefore$ (원 O'의 둘레의 길이)$=2\pi\times20(2-\sqrt{3})=40(2-\sqrt{3})\pi$

104 답 2 : 1

반원 O의 반지름의 길이가 20이므로 원 P의 반지름의 길이는 10이야.

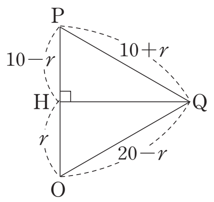


또한, 그림과 같이 원 Q의 반지름의 길이를 r, 점 Q에서 $\overline{PO}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{OQ}$의 연장선이 반원 O와 만나는 점을 I라 하면

$\overline{HO}=r$, $\overline{OQ}=\overline{OI}-\overline{QI}=20-r$

$\overline{PQ}=10+r$, $\overline{PH}=\overline{PO}-\overline{HO}=10-r$

이때, $\triangle$PHQ, $\triangle$OQH는 직각삼각형이므로 두 삼각형에서 피타고라스 정리를 적용하여 원 Q의 반지름의 길이를 구하자.



(i) $\triangle$PHQ에서

$\overline{HQ}^2=\overline{PQ}^2-\overline{PH}^2$

$=(10+r)^2-(10-r)^2$

$=40r$ ⋯ ㉠

(ii) $\triangle$OQH에서

$\overline{HQ}^2=\overline{OQ}^2-\overline{HO}^2$

$=(20-r)^2-r^2$

$=400-40r$ ⋯ ㉡

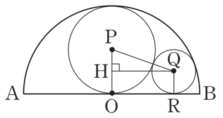
㉠=㉡이므로

$40r=400-40r$ $\quad\therefore r=5$

따라서 원 P의 반지름의 길이는 10, 원 Q의 반지름의 길이는 5이므로 두 원의 반지름의 길이의 비는 2 : 1이야.

오답피하기

이 문제는 앞의 102, 103번 문제와는 그 성격이 달라. 아래 그림처럼 반원 O의 지름의 양 끝점을 A, B라 하고, 점 Q에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 R라 하면 앞 문제들과는 달리 $\overline{RB}\neq r$이기 때문에 $\overline{OR}=\overline{HQ}=20-r$라고 놓을 수 없고, 이렇게 놓는다면 틀린 답이 나오게 돼.

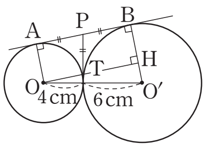


따라서 $\overline{OQ}$를 추가적으로 그려서 피타고라스 정리를 두 번 사용해야 올바른 답이 나와.

105 답 $2\sqrt{6}$ cm

원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 접선의 길이는 같으므로

$\overline{PA}=\overline{PT}=\overline{PB}$ ⋯ ㉠



또한, 두 점 A, B는 접점이므로

$\overline{OA}\perp\overline{AB}$, $\overline{O'B}\perp\overline{AB}$

이때, 점 O에서 $\overline{O'B}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=\overline{OA}=4$ cm이므로

$\overline{O'H}=\overline{O'B}-\overline{BH}=6-4=2$(cm)

직각삼각형 OO′H에서 $\overline{OO'}=10$ cm, $\overline{OH'}=2$ cm이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}=\sqrt{10^2-2^2}=4\sqrt{6}$ (cm)

이때, ㉠에 의해 $\overline{PT}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$\therefore \overline{PT}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ (cm)

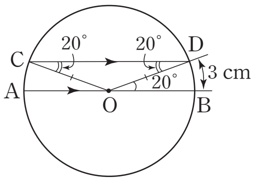
잘 틀리는 유형 훈련+1up

p. 68

106 답 ③

1st 평행하다는 조건과 이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같음을 이용하여 $\overset{\frown}{CD}$의 중심각의 크기를 구하자.

$\angle CDO=\angle BOD=20^\circ$($\because$ 엇각)



이때, $\triangle$OCD는 $\overline{OC}=\overline{OD}$인 이등변삼각형이므로

$\angle DCO=\angle CDO=20^\circ$

$\therefore \angle COD=180^\circ-(20^\circ+20^\circ)$

$=140^\circ$

2nd 한 원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례해.

$\overset{\frown}{BD}:\overset{\frown}{CD}=\angle BOD:\angle COD$

$3:\overset{\frown}{CD}=20^\circ:140^\circ$

$\therefore \overset{\frown}{CD}=21$ cm

오답피하기

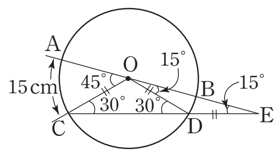
평행선의 성질을 이용하여 중심각의 크기를 구할 수 있어야 해. '호의 길이는 중심각의 크기에 정비례한다.'는 것만으로는 문제를 해결할 수 없어. 평행선의 성질과 위치 관계 내용을 다시 생각해 봐!

107 답 5 cm

1st 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같음을 이용하여 $\angle$DOE, $\angle$AOC의 크기를 각각 구하자.

$\overline{DE}=\overline{DO}$에서

$\angle DOE=\angle DEO=15^\circ$이고



$\angle$ODC는 $\triangle$ODE의 한 외각이므로

$\angle ODC=\angle DEO+\angle DOE=30^\circ$

이때, $\overline{OC}=\overline{OD}$에서 $\triangle$COD는 이등변삼각형이므로 $\angle OCD=\angle ODC=30^\circ$

또한, $\angle$AOC는 $\triangle$CEO의 한 외각이므로

$\angle AOC=\angle OEC+\angle OCE=45^\circ$

2nd 한 원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례해.

$45^\circ:15^\circ=\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{BD}$

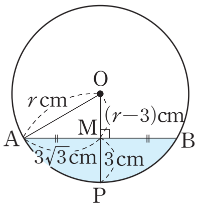
$3:1=15:\overset{\frown}{BD}$

$\therefore \overset{\frown}{BD}=5$ cm

108 답 $(12\pi-9\sqrt{3})\text{cm}^2$

1st 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분해.
$\overline{AB}\perp\overline{OP}$이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}$이야.
$\therefore\ \overline{AM}=3\sqrt{3}\,\text{cm}$

2nd 피타고라스 정리를 이용하여 원 O의 반지름의 길이를 구하자.
이때, 원 O의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$라 하면 $\overline{OM}=(r-3)\text{cm}$, $\overline{OA}=r\,\text{cm}$이므로 직각삼각형 OAM에서 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{OA}^2=\overline{AM}^2+\overline{OM}^2$



$r^2=(3\sqrt{3})^2+(r-3)^2$
$6r=36 \qquad \therefore\ r=6$

3rd 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 OAB의 넓이에서 삼각형 OAB의 넓이를 빼면 되지?

$\cos(\angle AOM)=\dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

그런데 $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$이므로 $\angle AOM=60^\circ$

$\angle AOB=2\angle AOM=120^\circ$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)=(부채꼴 OAB의 넓이)−(삼각형 OAB의 넓이)

$=\pi\times6^2\times\dfrac{120}{360}-\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times3$

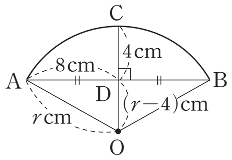
$=12\pi-9\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

오|답|피|하|기

색칠한 부분의 넓이를 구하기 위해 우선 원의 반지름의 길이가 필요함을 알아야 해. 따라서 원의 반지름의 길이를 미지수로 두고 △OAM에서 피타고라스 정리를 이용해야 해. 문제에서 주어진 조건을 이용하여 그림에 표시를 하면 조건을 이용하기가 좀 더 쉬워. 부채꼴의 넓이를 구하기 위해 중심각의 크기가 필요한데 알 수 있는 것은 $\overline{OA}$, $\overline{AM}$, $\overline{OM}$의 길이이므로 삼각비를 이용하여 각의 크기를 구해야 해. 특수각에 대한 삼각비는 자주 나오니까 반드시 기억하고 있자.

109 답 10 cm

1st 한 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지나지?
$\overline{CD}$는 현 AB를 수직이등분하므로 $\overline{CD}$의 연장선은 원 O의 중심을 지나.
이때, 원 O의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$라 하면 $\overline{OD}=(r-4)\text{cm}$, $\overline{OA}=r\,\text{cm}$

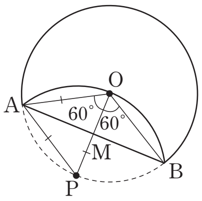


2nd 피타고라스 정리를 이용하여 원 O의 반지름의 길이를 구하자.
△ODA는 빗변의 길이가 $r\,\text{cm}$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{OD}^2+\overline{AD}^2=\overline{OA}^2$, $(r-4)^2+8^2=r^2$
$r^2-8r+16+64=r^2$, $8r=80 \qquad \therefore\ r=10$

110 답 ⑤

1st $\overline{AO}$와 $\overline{AP}$는 접었을 때 겹치는 부분이므로 길이가 같아.
△OAP에서 $\overline{AO}=\overline{OP}=\overline{AP}$이므로 $\angle AOP=60^\circ$
$\angle AOB=2\angle AOP=120^\circ$
$\therefore\ \widehat{AOB}=\widehat{APB}=2\pi\times6\times\dfrac{120}{360}=4\pi\,(\text{cm})$

[다른 풀이]
$\overline{AB}$와 $\overline{OP}$의 교점을 M이라 하자.
삼각형 OAP에서 $\overline{OA}=6\,\text{cm}$이고, $\overline{AM}\perp\overline{OP}$이므로 $\overline{OM}=\overline{MP}=3\,\text{cm}$가 돼.
즉, △AOM은 $\overline{AO}=6\,\text{cm}$, $\overline{OM}=3\,\text{cm}$인 직각삼각형이지.



이때, $\cos(\angle AOM)=\dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$이고,

$\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$이므로 $\angle AOM=60^\circ$

$\angle AOB=2\angle AOM=120^\circ$

$\therefore\ \widehat{AOB}=2\pi\times6\times\dfrac{120}{360}=4\pi(\text{cm})$

오|답|피|하|기

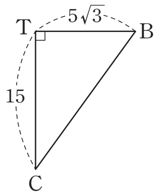
접은 도형에 대한 문제는 접어도 변하지 않는 것을 알지 못하면 풀 수 없어. 접은 도형이므로 $\widehat{AOB}$와 $\widehat{APB}$의 길이가 같음을 알아채면 △AOP가 정삼각형임을 쉽게 알 수 있어.
접은 도형에서는 항상 접힌 도형과 펼친 도형이 합동이 됨을 기억하자. 즉, $\overline{OA}=\overline{AP}$, $\angle OAM=\angle PAM$, $\overline{AM}$은 공통이므로 △AOM≡△APM(SAS 합동)이 됨을 꼭 알아 두자.

111 답 $10\sqrt{3}$

1st $\overline{AO}$와 $\overline{AP}$는 접었을 때 겹치는 부분이므로 길이가 같아.
$\overline{AO}$, $\overline{PO}$, $\overline{BO}$의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{AO}=\overline{PO}=\overline{BO}=10$이야.

2nd 두 활꼴 APB와 AOB는 $\overline{AB}$에 대하여 대칭이야.
이때, $\overline{AB}$와 $\overline{PC}$의 교점을 T라 하면 $\overline{PT}=\overline{OT}$이므로 $\overline{PT}=\overline{OT}=5$야.
$\therefore\ \overline{CT}=\overline{CO}+\overline{OT}=10+5=15$
한편, $\overline{AB}\perp\overline{PC}$이고 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 $\overline{BT}=\overline{AT}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$

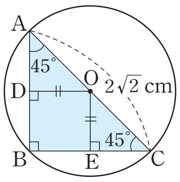
3rd △TCB는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하자.
△TCB는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면



$\overline{BC}=\sqrt{\overline{CT}^2+\overline{TB}^2}=\sqrt{15^2+(5\sqrt{3})^2}$
$=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$

112 답 ②

1st 원의 중심에서 같은 거리에 있는 현의 길이는 같아.
$\overline{OD}=\overline{OE}$이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}$지?
즉, △ABC는 세 내각의 크기가 각각 45°, 45°, 90°인 직각이등변삼각형이야.



2nd 특수한 각의 삼각비를 이용하자.

$\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AB}}{2\sqrt{2}}$

그런데 $\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\dfrac{\overline{AB}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore\ \overline{AB}=\overline{BC}=2\,\text{cm}$

$\therefore\ \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2(\text{cm}^2)$

[다른 풀이]

$\triangle$ABC가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=x$ cm라 하면

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이지?

$x^2+x^2=(2\sqrt{2})^2$, $x^2=4$ $\quad\therefore x=2(\because x>0)$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times2\times2=2(cm^2)$

오|답|피|하|기

$\triangle$ABC의 넓이를 구하기 위해 $\triangle$ABC가 어떤 꼴인지 알아야겠지? 우선, $\angle B=90°$이므로 $\overline{BC}$가 밑변, $\overline{AB}$가 높이야. 두 변의 길이를 알아야 하는데 원의 중심 O에서 $\overline{OD}=\overline{OE}$임을 이용하면 알 수 있어. 즉, 주어진 삼각형이 직각이등변삼각형임을 이용하여 세 내각의 크기를 구할 수 있고, 특수한 각의 삼각비를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있어. 앞에서 배웠던 삼각비를 꼭 기억해 둬. 고등학교 가서도 유용하게 쓰여.

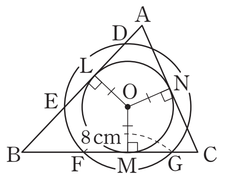
113 답 8 cm

1st 삼각형의 내심의 성질을 이용하자.

내심에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리는 같아.

점 O에서 삼각형의 세 변에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N이라 하면

$\overline{OL}=\overline{OM}=\overline{ON}$ ⋯ ㉠



2nd 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 현의 길이를 생각해 보자.

한 원 또는 합동인 두 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 현의 길이는 모두 같아.

따라서 $\overline{FG}$, $\overline{DE}$는 내접원 O의 현이고 ㉠에 의하여

$\overline{DE}=\overline{FG}=8$ cm

114 답 ②

1st 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 이용하자.

$\overline{AB}\perp\overline{OM}$, $\overline{AB}=8$ cm이므로 $\overline{AM}=4$ cm

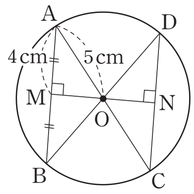
직각삼각형 OAM에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{OM}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3(cm)$

이때, $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=5$ cm이고,

$\angle AOB=\angle COD$($\because$ 맞꼭지각)이므로

$\triangle AOB\equiv\triangle COD$(SAS 합동)



2nd 길이가 같은 두 현은 원의 중심에서 같은 거리에 있어.

따라서 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 $\overline{OM}=\overline{ON}$이야.

$\therefore \overline{MN}=2\overline{OM}=2\times3=6(cm)$

오|답|피|하|기

이 문제를 해결하는 데 중요한 단서 중 하나가 $\triangle AOB\equiv\triangle COD$임을 아는 거야. 이걸 알지 못하면 문제의 조건이 부족하다고 느낄 거야. 즉, $\overline{CD}$의 길이를 구할 수가 없거든.

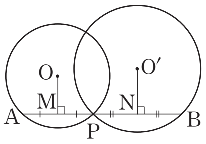
원 O에서 원 위의 점 A, B, C, D까지의 거리가 모두 같고, 특히 두 직선 AC와 BD가 만날 때, 생기는 $\angle$AOB와 $\angle$COD가 맞꼭지각임을 알아챌 수 있다면 거의 다 푼 셈이야. 도형 부분에서 문제의 조건이 부족하다면 삼각형의 닮음이나 삼각형의 합동을 이용해서 다른 조건들을 찾아내야 해.

115 답 14 cm

1st 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 이용하자.

$\overline{OM}\perp\overline{AP}$, $\overline{O'N}\perp\overline{PB}$이므로

$\overline{AM}=\overline{MP}$, $\overline{PN}=\overline{NB}$ ⋯ ㉠



2nd $\overline{AB}$의 길이를 이용하여 $\overline{MN}$의 길이를 구하자.

$\overline{AB}=(\overline{AM}+\overline{MP})+(\overline{PN}+\overline{NB})$

$=2\overline{MP}+2\overline{PN}$($\because$ ㉠)

$=2(\overline{MP}+\overline{PN})$

$=2\overline{MN}=28(cm)$

$\therefore \overline{MN}=14$ cm

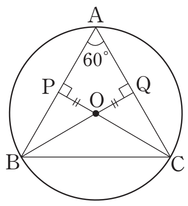
116 답 ③

1st $\triangle$ABC가 어떤 삼각형인지 알아보자.

한 원의 중심에서 같은 거리에 있는 현의 길이는 같아. 조건에서 $\overline{OP}=\overline{OQ}$이므로 $\triangle$ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이지?

이때, $\angle A=60°$이므로

$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180°-60°)=60°$야.



따라서 $\triangle$ABC는 정삼각형이야.

2nd 특수한 각의 삼각비를 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구하자.

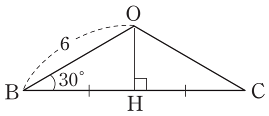
원의 넓이가 36π이므로 이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r^2\pi=36\pi$ $\quad\therefore r=6$ ($\because r>0$)

즉, $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=6$

점 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle OBH=\frac{1}{2}\angle ABH=30°$이므로



직각삼각형 OBH에서 $\cos30°=\frac{\overline{BH}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{BH}}{6}$

그런데 $\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\frac{\overline{BH}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \overline{BH}=3\sqrt{3}$

3rd 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분해.

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BH}=6\sqrt{3}$

[다른 풀이]

이 원의 반지름의 길이가 6이므로 $\overline{AO}=6$

직각삼각형 AOP에서 $\overline{AP}:\overline{AO}=\sqrt{3}:2$ $\quad\therefore \overline{AP}=3\sqrt{3}$

이때, $\overline{OP}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{AB}=2\overline{AP}=6\sqrt{3}$

$\triangle$ABC는 정삼각형이므로 $\overline{BC}=\overline{AB}=6\sqrt{3}$

오|답|피|하|기

$\triangle$ABC가 정삼각형임을 알지 못하면 문제 푸는 데 많은 어려움을 느낄 거야.

$\triangle$ABC에서 한 내각의 크기가 60°이고 이 각을 끼고 있는 두 변의 길이가 같다면? 우선, $\triangle$ABC는 이등변삼각형이 돼. 즉, 다른 두 내각의 크기가 같다는 거야. 이때, 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°이므로 다른 두 내각의 크기의 합은 120°가 되어 한 내각의 크기는 60°가 돼. 따라서 $\triangle$ABC는 정삼각형임을 알 수 있어. 정삼각형은 난이도 높은 문제에서 잘 나오니까 성질을 잘 정리하여 기억하자.

117 답 $4\sqrt{3}$ cm

1st △ABC가 어떤 삼각형인지 알아보자.

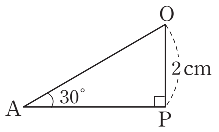
원 O에 대하여 원의 중심 O에서 같은 거리에 있는 현의 길이는 같지? 즉, $\overline{OP}=\overline{OQ}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$야.

2nd 특수한 각에 대한 삼각비를 이용하여 $\overline{AP}$의 길이를 구해 보자.

$\triangle OAP$, $\triangle OAQ$는 $\overline{OA}$가 공통, $\angle P=\angle Q=90^\circ$,

$\overline{OP}=\overline{OQ}$이므로 $\triangle OAP\equiv\triangle OAQ$(RHS 합동)

$\angle PAQ=60^\circ$에서 $\angle PAO=30^\circ$이므로



$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{PO}}{\overline{AP}}=\dfrac{2}{\overline{AP}}$

그런데 $\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

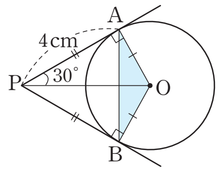
$\dfrac{2}{\overline{AP}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore \overline{AP}=2\sqrt{3}$ cm

3rd 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분해.

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AP}=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ (cm)

118 답 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm²

1st 두 삼각형 OAP와 OBP가 합동임을 보이자.



두 접선 PA, PB에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PB}$,

$\overline{AO}=\overline{BO}$($\because$ 반지름), $\overline{OP}$는 공통이므로 $\triangle OAP\equiv\triangle OBP$(SSS 합동)

$\therefore \angle APO=30^\circ$

2nd 특수한 각의 삼각비를 이용하여 $\overline{AO}$의 길이를 구하자.

직각삼각형 OAP에서

$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{OA}}{4}$

그런데 $\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\dfrac{\overline{OA}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore \overline{OA}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

3rd △OAB의 넓이는 □PAOB의 넓이에서 △PBA의 넓이를 빼면 돼.

또한, $\angle APB=60^\circ$이고 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 △PBA는 정삼각형이야.

$\therefore \triangle OAB=\square PAOB-\triangle PAB=2\triangle APO-\triangle PBA$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4^2$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$(cm²)

[다른 풀이]

$\angle APB+\angle AOB=180^\circ$이므로

$60^\circ+\angle AOB=180^\circ$ $\quad\therefore \angle AOB=120^\circ$

$\overline{PO}$가 $\angle APB$를 이등분하므로 $\angle APO=30^\circ$

$\therefore \overline{OA}=\overline{PA}\tan 30^\circ$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$(cm)

$\therefore \triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

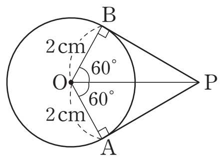
$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$(cm²)

오|답|피|하|기

특수각의 삼각비를 암기하고 있으면 문제 풀이에 많은 도움이 돼. 또, 원 밖의 한 점 P에서 그은 접선인 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$는 길이가 같고, 두 삼각형 PAO와 PBO가 합동임을 알아야 해. 문제의 조건이 부족하면 보조선을 그어 닮음이거나 합동인 도형을 찾자.

119 답 $4(1+\sqrt{3})$ cm

1st 두 삼각형 OAP와 OBP가 합동임을 보이자.



두 점 A, B가 원 O의 접점이므로

$\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$이고,

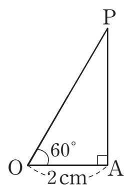
$\overline{OA}=\overline{OB}$($\because$ 반지름),

$\overline{OP}$는 공통이므로

$\triangle OAP\equiv\triangle OBP$(RHS 합동)

$\therefore \angle AOP=\dfrac{1}{2}\angle AOB=60^\circ$

2nd 특수한 각의 삼각비를 이용하여 $\overline{AP}$의 길이를 구하자.



직각삼각형 OAP에서 $\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{AP}}{2}$

그런데 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{\overline{AP}}{2}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore \overline{AP}=2\sqrt{3}$ cm

3rd 접선의 길이가 같음을 이용하여 □OAPB의 둘레의 길이를 구해.

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로

$\overline{BP}=\overline{AP}=2\sqrt{3}$ cm

$\overline{OA}$, $\overline{OB}$는 원 O의 반지름이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=2$ cm

$\therefore$ (사각형 OAPB의 둘레의 길이)

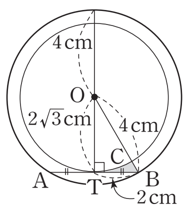
$=\overline{OA}+\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{OB}$

$=2+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2$

$=4(1+\sqrt{3})$(cm)

120 답 $(2\sqrt{3}-\pi)$ cm²

1st 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직이야.



$\overline{AB}$는 점 T에서 접하는 작은 원의 접선이므로 $\overline{OT}\perp\overline{AB}$지?

2nd △OTB는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하자.

큰 원의 반지름의 길이가 4 cm이므로

$\overline{OB}=4$ cm

직각삼각형 OTB에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BT}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$(cm)

$\cos(\angle BOT)=\dfrac{\overline{OT}}{\overline{OB}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

그런데 $\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\angle BOT=30^\circ$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=\triangle OTB-$(부채꼴 OTC의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}-\pi\times(2\sqrt{3})^2\times\dfrac{30}{360}$

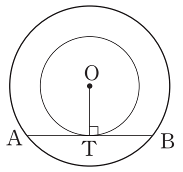
$=2\sqrt{3}-\pi$(cm²)

오답피하기

동심원이 주어졌을 때 작은 원의 접선이 큰 원의 현이 됨을 알아야 해.

(ⅰ) 작은 원에서 접선 AB는 원의 중심 O에 의해 $\overline{AB}\perp\overline{OT}$

(ⅱ) 큰 원에서 중심을 지나는 현의 수직이등분선의 성질에 의해 $\overline{AT}=\overline{BT}$

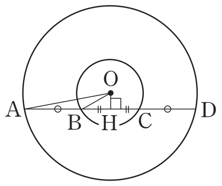


개념을 그냥 외우려고 하지말고 이해하고 정리하여 암기하자.

121 답 $11.56\pi\ \mathrm{cm}^2$

1st 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분해.

점 O에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로 $\overline{AH}=\overline{HD}$, $\overline{BH}=\overline{HC}$야.



이때, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=4\,\mathrm{cm}$이므로

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\times(4+4+4)=6(\mathrm{cm})$, $\overline{BH}=\frac{1}{2}\times4=2(\mathrm{cm})$

2nd △AOH, △BOH는 직각삼각형임이므로 피타고라스 정리를 이용하자.

이때, 큰 원과 작은 원의 반지름의 길이를 각각 R cm, r cm라 하자.

직각삼각형 AOH에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{OH}^2=\overline{AO}^2-\overline{AH}^2=R^2-6^2=R^2-36$ ⋯ ㉠

또, 직각삼각형 BOH에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{OH}^2=\overline{BO}^2-\overline{BH}^2=r^2-2^2=r^2-4$ ⋯ ㉡

㉠=㉡에서 $R^2-36=r^2-4$, $R^2-r^2=32$

$(R+r)(R-r)=32$ ⋯ ㉢

또한, 두 원의 반지름의 길이의 합이 10이므로

$R+r=10$ ⋯ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$R-r=3.2$ ⋯ ㉤

㉣−㉤을 하면 $2r=6.8$　　$\therefore r=3.4$

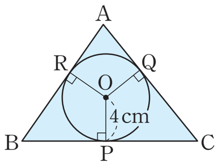
따라서 작은 원의 반지름의 길이가 3.4 cm이므로 작은 원의 넓이는 $\pi\times3.4^2=11.56\pi(\mathrm{cm}^2)$가 돼.

122 답 $60\ \mathrm{cm}^2$

1st 원의 중심 O에서 △ABC의 각 변에 수선의 발을 내리자.

그림과 같이 원의 중심 O에서 각 변에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 하면 △ABC의 각 변이 원 O의 접선이므로

$\overline{OP}\perp\overline{BC}$, $\overline{OQ}\perp\overline{CA}$, $\overline{OR}\perp\overline{AB}$



2nd △ABC의 넓이를 원 O의 반지름의 길이를 이용하여 나타내보자.

$\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}=4$ cm이고 △ABC의 둘레의 길이가 30 cm이므로

△ABC=△OBC+△OCA+△OAB

$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times4+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times4+\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times4$

$=\frac{1}{2}\times4\times(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})$

$=\frac{1}{2}\times4\times30=60(\mathrm{cm}^2)$

123 답 11 cm

1st 원의 접선의 성질을 이용하여 $\overline{AD}$의 길이를 구해.

$\overline{AD}=\overline{AF}=x$ cm라 하자.

$\overline{BD}=\overline{BE}=8$ cm, $\overline{CE}=\overline{CF}=9$ cm이고,

△ABC의 둘레의 길이가 40 cm이므로

(△ABC의 둘레의 길이)

$=(\overline{AD}+\overline{BD})+(\overline{BE}+\overline{CE})+(\overline{CF}+\overline{AF})$

$=2(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF})$

$=2(x+8+9)=40$

$x+17=20$　　$\therefore x=3$

2nd $\overline{AB}$의 길이를 구하자.

$\therefore \overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=3+8=11(\mathrm{cm})$

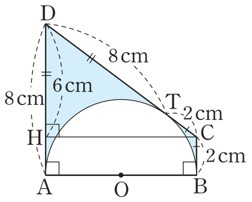
124 답 $(40-8\pi)\ \mathrm{cm}^2$

1st 접선과 접점을 지나는 반지름은 서로 수직이지?

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로

$\overline{DT}=\overline{DA}=8\,\mathrm{cm}$,

$\overline{CT}=\overline{CB}=2\,\mathrm{cm}$



이때, 점 C에서 $\overline{DA}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 직각삼각형 CDH에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{DC}^2-\overline{DH}^2}$

$=\sqrt{10^2-6^2}=8(\mathrm{cm})$

$\therefore \overline{AB}=\overline{CH}=8$ cm

2nd 색칠한 부분의 넓이를 구하자.

색칠한 부분의 넓이는 사다리꼴 ABCD의 넓이에서 반지름의 길이가 4 cm인 반원의 넓이를 뺀 것이지?

$\therefore$ (구하는 넓이)$=\square\mathrm{ABCD}-\frac{(\text{원 }O\text{의 넓이})}{2}$

$=\frac{1}{2}\times(2+8)\times8-\frac{1}{2}\times\pi\times4^2$

$=40-8\pi(\mathrm{cm}^2)$

오답피하기

색칠한 부분의 넓이를 구하려면 사다리꼴의 넓이부터 구해야 하는데 사다리꼴의 높이, 즉 반원의 지름의 길이를 구해야 해. 즉, 도형에서 적절한 선을 그어 $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있어야 해.

$\overline{AD}$와 $\overline{BC}$가 반원에 대한 접선이므로 $\angle A=\angle B=90^\circ$가 되지?

$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$인 사다리꼴에서 높이를 구하는 방법을 이용하면 돼. 즉, 점 C에서 $\overline{AD}$에 수선의 발을 내리는 거지.

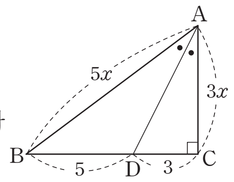
125 답 $24-4\pi$

1st 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용하자.

삼각형의 한 내각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=5:3$이므로

$\overline{AB}=5x$, $\overline{AC}=3x$라 하자.

이때, △ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하자.



$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$

$(3x)^2+8^2=(5x)^2$

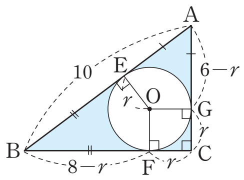
$9x^2+64=25x^2$

$16x^2=64,\ x^2=4 \qquad \therefore x=2(\because x>0)$

$\therefore \overline{AB}=10,\ \overline{AC}=6$

2nd 원 O의 반지름의 길이를 구하자.

원 O와 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 접점을 각각 E, F, G라 하고 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{CG}=\overline{FC}=r$



$\overline{AE}=\overline{AG}=6-r$,

$\overline{BE}=\overline{BF}=8-r$이므로

$\overline{BE}+\overline{AE}=\overline{AB}$, $(8-r)+(6-r)=10$

$2r=4 \qquad \therefore r=2$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 2야.

3rd 색칠한 부분의 넓이를 구하자.

색칠한 부분의 넓이는 △ABC의 넓이에서 원 O의 넓이를 뺀 것이므로

(구하는 넓이) $=\dfrac{1}{2}\times8\times6-\pi\times2^2=24-4\pi$

[다른 풀이]

삼각형에 내접하는 원의 성질을 이용하여 구할 수도 있어.

원 O의 반지름의 길이를 r라 하자.

$\overline{AB}\perp\overline{OE}$, $\overline{BC}\perp\overline{OF}$, $\overline{CA}\perp\overline{OG}$이므로

$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA\\&=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OE}+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OF}+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OG}\\&=\frac{1}{2}\times10\times r+\frac{1}{2}\times8\times r+\frac{1}{2}\times6\times r\\&=\frac{1}{2}r(10+8+6)=12r\ \cdots ㉠\end{aligned}$$

또한, $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}=\dfrac{1}{2}\times8\times6=24\ \cdots ㉡$

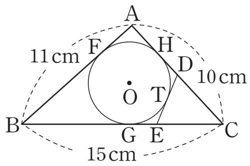
㉠=㉡에 의해 $12r=24 \qquad \therefore r=2$

(이하 동일)

126 답 ④

1st 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용하자.

$\overline{CG}=\overline{CH}=x$ cm라 하자.



$\overline{AF}=\overline{AH}=(10-x)$ cm,

$\overline{BF}=\overline{BG}=(15-x)$ cm이고

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}$이므로

$(10-x)+(15-x)=11 \qquad \therefore x=7$

$\therefore \overline{CG}=\overline{CH}=7$ cm

2nd △DEC의 둘레의 길이는 $\overline{CH}+\overline{CG}$의 길이임을 이용하자.

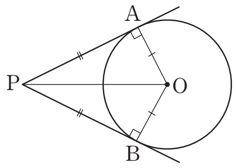
$\overline{DE}$와 원 O가 접하는 점을 T라 하면 $\overline{DH}=\overline{DT}$, $\overline{EG}=\overline{ET}$야.

$$\begin{aligned}\therefore (\triangle DEC\text{의 둘레의 길이})&=\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EC}\\&=\overline{CD}+(\overline{DT}+\overline{ET})+\overline{EC}\\&=\overline{CD}+(\overline{DH}+\overline{EG})+\overline{EC}\\&=\overline{CH}+\overline{CG}=2\overline{CH}\\&=2\times7=14(\text{cm})\end{aligned}$$

오답피하기

이 문제는 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이가 같다는 걸 여러 번 이용해야 풀 수 있기 때문에 풀기에 쉽지 않았을 거야. '원에 접한다'는 문장이 보이면 항상 두 접선의 길이가 같다는 걸 이용해야 해. 원리를 알면 기억하기 좋겠지?

그림에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$가 원 O의 접선이고 두 점 A, B가 접점이지.



△PAO, △PBO에서 $\overline{PA}\perp\overline{OA}$, $\overline{PB}\perp\overline{OB}$이고, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$는 반지름으로 서로 같고 $\overline{OP}$는 공통이므로 이 두 삼각형은 RHS 합동이야. 그럼, 당연히 $\overline{PA}=\overline{PB}$가 되겠지?

127 답 2

1st $\overline{BD}$의 길이부터 구하자.

△BDE는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BD}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

2nd 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같음을 이용하자.

$\overline{DQ}=\overline{DP}$, $\overline{EQ}=\overline{ER}$이고 $\overline{BR}=\overline{BP}$지?

이때, 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{EQ}=\overline{ER}=r$이고 $\overline{DP}=\overline{DQ}=3-r$이므로

$\overline{BP}=\overline{BD}+\overline{DP}=5+(3-r)=8-r$

$\overline{BR}=\overline{BE}+\overline{ER}=4+r$

따라서 $\overline{BR}=\overline{BP}$이므로

$4+r=8-r \qquad \therefore r=2$

128 답 $\dfrac{10}{3}$ cm

1st 원의 외접사각형의 성질을 이용하자.

□ABCD가 원 O에 외접하므로

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}=12+18=30(\text{cm})$

2nd $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 길이를 각각 구하자.

이때, $\overline{AB}:\overline{CD}=5:4$이므로

$\overline{AB}=\dfrac{5}{9}\times30=\dfrac{50}{3}(\text{cm})$

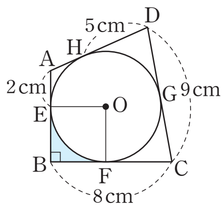
$\overline{CD}=\dfrac{4}{9}\times30=\dfrac{40}{3}(\text{cm})$

$\therefore \overline{AB}-\overline{CD}=\dfrac{50}{3}-\dfrac{40}{3}=\dfrac{10}{3}(\text{cm})$

129 답 $(16-4\pi)$ cm^2

1st 원의 외접사각형의 성질을 이용하자.

원의 외부의 한 점에서 원에 그은 접선의 길이는 서로 같으므로 $\overline{AH}=\overline{AE}=2$ cm



이때, □ABCD가 원 O에 외접하므로

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$에서

$(2+\overline{EB})+9=(2+5)+8$

$\therefore \overline{EB}=4$ cm

2nd 색칠한 부분의 넓이는 □EBFO의 넓이에서 부채꼴 OEF의 넓이를 빼면 돼.

그런데 □EBFO는 정사각형이므로 원 O의 반지름의 길이는 4 cm야.

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=$□EBFO$-$(부채꼴 OEF의 넓이)

$$=4^2-\left(\pi\times4^2\times\frac{90}{360}\right)$$

$$=16-4\pi(\text{cm}^2)$$

서술형 다지기

문제편 p. 72

[130-131 채점기준표]

Ⅰ	주어진 조건을 이용하여 필요한 $\angle$OAF의 크기를 구하거나 $\overline{DO}$의 길이를 구한다.	40%
Ⅱ	$\overline{AF}$의 길이 또는 $\overline{PD}$의 길이를 구한다.	30%
Ⅲ	삼각형의 둘레의 길이를 구한다.	30%

130 답 $10\sqrt{3}$

먼저, $\angle$OAF의 크기를 구하자.

$\overline{AF}\perp\overline{OF}$, $\overline{AE}\perp\overline{OE}$에서 $\angle OFA=\angle OEA=90^\circ$이고,

$\overline{OF}=\overline{OE}$, $\overline{OA}$는 공통이므로

$\triangle AFO\equiv\triangle AEO$ (RHS 합동)

$\therefore \angle OAF=\angle OAE=30^\circ$ … Ⅰ

그다음, $\overline{AF}$의 길이를 구하자.

$\triangle AFO$에서 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°이므로

$\overline{AF}:\overline{OF}:\overline{OA}=\sqrt{3}:1:2$

$\overline{AF}:10=\sqrt{3}:2 \quad \therefore \overline{AF}=5\sqrt{3}$ … Ⅱ

그래서, $\triangle ABC$의 둘레의 길이를 구하자.

$\therefore$ ($\triangle ABC$의 둘레의 길이)$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=\overline{AB}+(\overline{BD}+\overline{DC})+\overline{CA}$

$=\overline{AB}+(\overline{BF}+\overline{CE})+\overline{CA}$

$=\overline{AF}+\overline{AE}=2\overline{AF}=10\sqrt{3}$ … Ⅲ

131 답 24

먼저, $\overline{DO}$의 길이를 구하자.

직각삼각형 POD에서 $\cos(\angle POD)=\dfrac{\overline{DO}}{\overline{PO}}=\dfrac{\overline{DO}}{13}=\dfrac{5}{13}$

$\therefore \overline{DO}=5$ … Ⅰ

그다음, $\overline{PD}$의 길이를 구하자.

$\overline{PD}=\sqrt{13^2-5^2}=12$ … Ⅱ

그래서, $\triangle PAB$의 둘레의 길이를 구하자.

$\overline{PC}=\overline{PD}$, $\overline{AE}=\overline{AC}$, $\overline{BE}=\overline{BD}$이므로

($\triangle PAB$의 둘레의 길이)$=\overline{PA}+\overline{AB}+\overline{PB}$

$=\overline{PA}+(\overline{AE}+\overline{BE})+\overline{PB}$

$=(\overline{PA}+\overline{AC})+(\overline{BD}+\overline{PB})$

$=\overline{PC}+\overline{PD}=2\overline{PD}=24$ … Ⅲ

[132-133 채점기준표]

Ⅰ	x의 값을 구한다.	40%
Ⅱ	y의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	구하고자 하는 값을 구한다.	20%

132 답 7

먼저, x의 값을 구하자.

$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$이므로

$x+(2.7+5)=4.7+8 \quad \therefore x=5$ … Ⅰ

그다음, y의 값을 구하자.

원의 외부의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$y=\overline{AB}-\overline{PB}=\overline{AB}-\overline{BQ}=4.7-2.7=2$ … Ⅱ

그래서, $x+y$의 값을 구하자.

$\therefore x+y=5+2=7$ … Ⅲ

133 답 9

먼저, x의 값을 구하자.

원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이가 서로 같으므로

$\overline{DG}=\overline{DH}=4$

$\therefore x=\overline{CF}=\overline{CG}=15-4=11$ … Ⅰ

그다음, y의 값을 구하자.

$\overline{BE}=\overline{BF}=7$

$\therefore y=\overline{AH}=\overline{AE}=9-7=2$ … Ⅱ

그래서, $x-y$의 값을 구하자.

$\therefore x-y=11-2=9$ … Ⅲ

134 답 18 cm

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$\overline{AB}=2\overline{AL}=2\times3=6$(cm) … Ⅰ

$\overline{OL}=\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$ … Ⅱ

따라서 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로

($\triangle ABC$의 둘레의 길이)$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=3\overline{AB}=3\times6=18$(cm) … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	현 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.	40%
Ⅱ	$\triangle ABC$가 정삼각형임을 알아낸다.	40%
Ⅲ	구하고자 하는 값을 구한다.	20%

135 답 $4\sqrt{13}$ cm

$\overline{OA}=\overline{OB}$($\because$ 원의 반지름)이고 $\overline{OP}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{AP}=\overline{BP}$이다. … Ⅰ

직각삼각형 OBP에서 $\overline{BP}=\sqrt{13^2-5^2}=12$(cm)

$\therefore \overline{AP}=\overline{BP}=12$ cm … Ⅱ

$\overline{CP}=13-5=8$(cm)

직각삼각형 ACP에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AC}=\sqrt{12^2+8^2}=\sqrt{208}=4\sqrt{13}$ (cm) … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 비교한다.	20%
Ⅱ	$\overline{AP}$의 길이를 구한다.	40%
Ⅲ	$\overline{AC}$의 길이를 구한다.	40%

136 답 1 cm

원 O의 반지름의 길이를 r cm로 놓으면

$\overline{BF}=\overline{BD}=3$ cm, $\overline{CE}=\overline{CD}=2$ cm,

$\overline{AF}=\overline{AE}=r$ cm

$\therefore \overline{AB}=(3+r)$ cm, $\overline{AC}=(2+r)$ cm … Ⅰ

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

$(3+r)^2+(2+r)^2=5^2$ … Ⅱ

$r^2+5r-6=0$

$(r+6)(r-1)=0$

$\therefore r=1\ (\because r>0)$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 1 cm이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	반지름의 길이를 r라 하고 이를 이용하여 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 길이를 각각 나타낸다.	40%
Ⅱ	피타고라스 정리를 적용하여 이차방정식을 세운다.	30%
Ⅲ	반지름의 길이를 구한다.	30%

137 답 4π cm

원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면

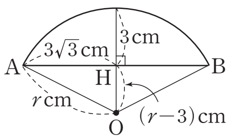
$\overline{OA}=r$ cm, $\overline{OH}=(r-3)$cm

△OAH는 직각삼각형이므로

$(r-3)^2+(3\sqrt{3})^2=r^2$

$6r=36 \quad \therefore r=6$

$\overline{OA}=6$ cm, $\overline{OH}=3$ cm … Ⅰ



△OAH에서 $\cos(\angle AOH)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$이므로

$\angle AOH=60^\circ \quad \therefore \angle AOB=2\angle AOH=120^\circ$ … Ⅱ

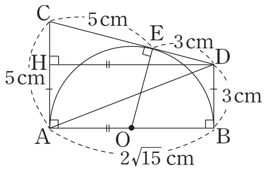
$\therefore \widehat{AB}=2\pi\times6\times\frac{120}{360}=4\pi$(cm) … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	반지름의 길이를 r라 하고 이를 이용하여 $\overline{OA}$, $\overline{OH}$의 길이를 구한다.	20%
Ⅱ	∠AOB의 크기를 구한다.	40%
Ⅲ	$\widehat{AB}$의 길이를 구한다.	40%

138 답 $\sqrt{69}$ cm

그림에서 $\overline{OE}\perp\overline{CD}$이므로 점 E는 반원 O의 접점이고, 두 점 A, B도 마찬가지이므로



$\overline{CE}=\overline{CA}$, $\overline{DE}=\overline{DB}$

$\therefore \overline{CD}=\overline{CE}+\overline{DE}=\overline{CA}+\overline{DB}$

$=5+3=8$(cm) … Ⅰ

이때, 점 D에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=5-3=2$(cm)이고, △CDH는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{CH}^2}$

$=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$ (cm) … Ⅱ

따라서 $\overline{AB}=\overline{DH}=2\sqrt{15}$ cm이므로 직각삼각형 ABD에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{15})^2+3^2}=\sqrt{69}$ (cm) … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\overline{CD}$의 길이를 구한다.	40%
Ⅱ	$\overline{DH}$의 길이를 구한다.	40%
Ⅲ	$\overline{AD}$의 길이를 구한다.	20%

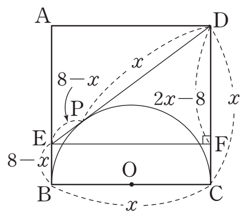
139 답 $\frac{32}{5}$

정사각형의 한 변의 길이를 x로 놓으면

$\overline{DP}=\overline{DC}=x \quad \therefore \overline{EP}=8-x$

$\overline{EB}=\overline{EP}$이므로 $\overline{EB}=8-x$ … Ⅰ

그림과 같이 점 E에서 $\overline{DC}$에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\overline{DF}=\overline{DC}-\overline{CF}$

$=x-(8-x)=2x-8$ … Ⅱ

직각삼각형 DEF에서

$8^2=x^2+(2x-8)^2$

$64=x^2+4x^2-32x+64$

$5x^2-32x=0$

$x(5x-32)=0 \quad \therefore x=\frac{32}{5}\ (\because x>0)$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{32}{5}$이다. … Ⅲ

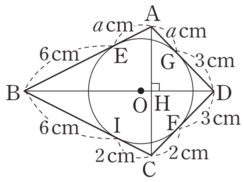
[채점기준표]

Ⅰ	정사각형 한 변의 길이를 x로 놓고 이를 이용하여 $\overline{EB}$의 길이를 나타낸다.	20%
Ⅱ	정사각형 한 변의 길이에 대한 식을 세운다.	20%
Ⅲ	정사각형 한 변의 길이를 구한다.	60%

최고난도 만점 문제

p. 74

140 답 26 cm



1st 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같지?

$\overline{AE}=\overline{AG}=a$ cm라 하면

$\overline{BI}=\overline{BE}=6$ cm, $\overline{CI}=\overline{CF}=2$ cm,

$\overline{DF}=\overline{DG}=3$ cm가 되지?

2nd 두 대각선이 직교하는 사각형의 성질을 이용하자.

□ABCD의 두 대각선이 직교하므로 네 개의 직각삼각형에 대하여

$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{BH}^2$ … ㉠

$\overline{AD}^2=\overline{AH}^2+\overline{DH}^2$ … ㉡

$\overline{BC}^2=\overline{BH}^2+\overline{CH}^2$ … ㉢

$\overline{CD}^2=\overline{CH}^2+\overline{DH}^2$ … ㉣

㉠+㉣=㉡+㉢이므로

$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$

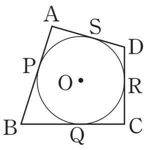
$(a+6)^2+5^2=8^2+(a+3)^2$

$6a=12 \qquad \therefore a=2$

따라서 □ABCD의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=2(\overline{AB}+\overline{CD})=2\times(8+5)=26$(cm)

★ **외접사각형의 성질**



□ABCD가 원 O에 외접하고 접점을 각각 P, Q, R, S라 하면 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이가 같으므로

(1) $\overline{AP}=\overline{AS}$, $\overline{BP}=\overline{BQ}$, $\overline{CQ}=\overline{CR}$, $\overline{DR}=\overline{DS}$

(2) $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

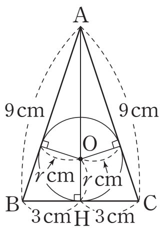
$\therefore \overline{AB}+\overline{CD}=(\overline{AP}+\overline{BP})+(\overline{CR}+\overline{DR})$

$=(\overline{AS}+\overline{BQ})+(\overline{CQ}+\overline{DS})$

$=(\overline{AS}+\overline{DS})+(\overline{BQ}+\overline{CQ})$

$=\overline{AD}+\overline{BC}$

141 답 $9\sqrt{2}\pi$ cm³



1st 주어진 도형을 평면으로 옮겨서 생각해 보자.

원뿔을 축을 포함한 평면으로 자른 단면은 그림과 같아. 점 O는 △ABC의 내심이므로 점 O에서 세 변에 이르는 거리는 같지?

이때, $\overline{AB}=9$ cm, $\overline{BH}=3$ cm이고 △ABH는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{AH}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$ (cm)

2nd △ABC의 넓이를 이용하여 반지름의 길이를 구하자.

원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하자.

△ABC=△OAB+△OBC+△OCA

$=\frac{1}{2}\times9\times r+\frac{1}{2}\times6\times r+\frac{1}{2}\times9\times r$

$=\frac{1}{2}\times r\times(9+6+9)=12r$ (cm²) … ㉠

이때, △ABC의 밑변을 $\overline{BC}$, 높이를 $\overline{AH}$라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{2}$

$=18\sqrt{2}$ (cm²) … ㉡

㉠=㉡이므로 $12r=18\sqrt{2}$

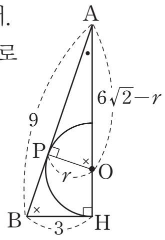
$\therefore r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

3rd 반지름의 길이가 a인 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi a^3$이지?

따라서 구의 반지름의 길이가 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm이므로 구의 부피를 V라 하면

$V=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3=9\sqrt{2}\pi$ (cm³)

[다른 풀이]



구의 반지름의 길이 r를 비례식으로도 구할 수 있어.

$\overline{AB}\perp\overline{OP}$에서 △OAP∽△BAH(AA 닮음)이므로

$\overline{AO}:\overline{OP}=\overline{AB}:\overline{BH}$

$(6\sqrt{2}-r):r=9:3$

$9r=18\sqrt{2}-3r$

$12r=18\sqrt{2}$

$\therefore r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

142 답 30 cm²

1st 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름에 수직이야.

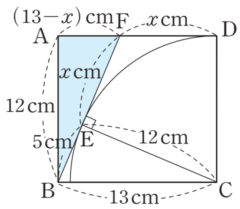
반지름인 $\overline{CE}$를 그으면 $\overline{BE}\perp\overline{CE}$이므로 △BEC는 직각삼각형이야. 이때, $\overline{CE}$는 반지름이므로 $\overline{CE}=12$ cm지?

직각삼각형 BCE에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BE}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CE}^2}$

$=\sqrt{13^2-12^2}=5$ (cm)

2nd 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같아.



$\overline{FE}$, $\overline{FD}$는 점 F에서 사분원에 그은 접선이므로 $\overline{FE}=\overline{FD}=x$ cm라 하면

$\overline{AF}=(13-x)$ cm,

$\overline{BF}=(x+5)$ cm

직각삼각형 ABF에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AF}^2+\overline{AB}^2=\overline{BF}^2$

$(13-x)^2+12^2=(x+5)^2$

$169-26x+x^2+144=x^2+10x+25$

$36x=288 \qquad \therefore x=8$

3rd △ABF의 넓이를 구하자.

$\overline{AF}=13-x=13-8=5$ (cm)이므로

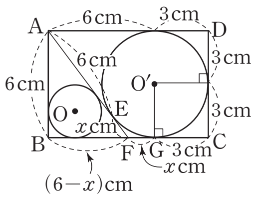
$\triangle ABF=\frac{1}{2}\times5\times12=30$ (cm²)

143 답 3π cm

1st $\overline{AB}$의 길이를 알고 있으므로 원 O'의 반지름의 길이를 구할 수 있지?

원 O'의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{DC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3(\text{cm})$

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로 $\overline{FE}=\overline{FG}=x\,\text{cm}$라 하면 각 변의 길이는 그림과 같아.



$\overline{BF}=\overline{BC}-\overline{CF}=9-(x+3)$

$\quad=6-x(\text{cm})$

$\overline{AF}=\overline{AE}+\overline{EF}=6+x(\text{cm})$

직각삼각형 ABF에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AF}^2=\overline{AB}^2+\overline{BF}^2$

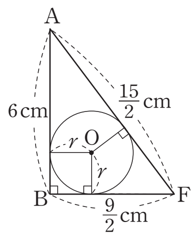
$(6+x)^2=6^2+(6-x)^2$, $36+12x+x^2=36+36-12x+x^2$

$24x=36 \qquad \therefore x=\frac{3}{2}$

$\therefore \overline{BF}=6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}(\text{cm})$, $\overline{AF}=6+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}(\text{cm})$

2nd 원 O의 반지름의 길이를 구하자.

원 O의 반지름의 길이를 r cm로 놓으면 △ABF의 넓이를 이용하여 원 O의 반지름의 길이를 구할 수 있어.



$\triangle ABF=\triangle OAB+\triangle OBF+\triangle OFA$

$\quad=\frac{1}{2}\times r\times\left(6+\frac{9}{2}+\frac{15}{2}\right)$

$\quad=9r(\text{cm}^2)$ ⋯ ㉠

또한, △ABF의 밑변이 $\overline{BF}$이고 높이가 $\overline{AB}$이므로

$\triangle ABF=\frac{1}{2}\times\overline{BF}\times\overline{AB}$

$\quad=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times6=\frac{27}{2}(\text{cm}^2)$ ⋯ ㉡

㉠=㉡이므로 $9r=\frac{27}{2} \qquad \therefore r=\frac{3}{2}$

3rd 두 원 O와 O'의 둘레의 길이를 각각 구하자.

원 O'의 반지름의 길이가 3 cm이므로 둘레의 길이는

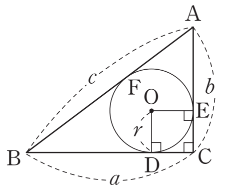
$2\pi\times3=6\pi(\text{cm})$

원 O의 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ cm이므로 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{3}{2}=3\pi(\text{cm})$

∴ (두 원 O, O'의 둘레의 길이의 차)$=6\pi-3\pi=3\pi(\text{cm})$

★ 직각삼각형의 내접원의 성질



(1) □ODCE에서
$\angle DCE=\angle ODC=\angle OEC=90°$
이고 $\overline{OD}=\overline{OE}=r$이므로
□ODCE는 한 변의 길이가 r인 정사각형이야.

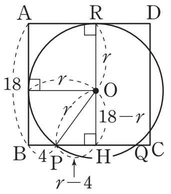
(2) 세 접점 D, E, F에 의해 $\overline{DC}=\overline{EC}$, $\overline{AE}=\overline{AF}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$이므로 $\overline{BF}=\overline{BD}=a-r$, $\overline{AF}=\overline{AE}=b-r$
$\therefore c=(a-r)+(b-r)$

(3) $\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$
$\therefore \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

144 답 12

1st 원의 반지름의 길이를 r로 놓고, $\overline{OP}$, $\overline{OH}$, $\overline{PH}$의 길이를 r에 대한 식으로 각각 나타내자.

원 O의 반지름의 길이를 r라 하고, 점 O에서 $\overline{BC}$, $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 각각 H, R라 하면



$\overline{RH}=\overline{AB}=18$, $\overline{OR}=r$이므로

$\overline{OH}=\overline{RH}-\overline{OR}=18-r$

또한, $\overline{BH}=r$이고 $\overline{BP}=4$이므로

$\overline{PH}=r-4$

2nd $\overline{PH}$의 길이를 구하자.

△OPH는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{OP}^2=\overline{PH}^2+\overline{OH}^2$

$r^2=(r-4)^2+(18-r)^2$, $r^2-44r+340=0$

$(r-10)(r-34)=0 \qquad \therefore r=10\,(\because 0<r<18)$

$\therefore \overline{PH}=10-4=6$

3rd 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하지?

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

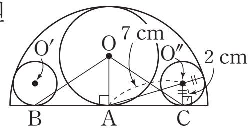
$\overline{QH}=\overline{PH}=6$

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}=2\times6=12$

145 답 $\frac{27\sqrt{5}}{2}$ cm^2

1st $\overline{BC}$의 길이부터 구해.

그림과 같이 선분 AO″의 연장선이 반원과 만나는 점을 I라 하면 $\overline{AI}$는 반원의 반지름이므로 $\overline{AI}=9$ cm



점 O″에서 반원의 지름에 내린 수선의 발은 C이고 원 O''의 반지름의 길이가 2 cm이므로

$\overline{O''C}=\overline{O''I}=2$ cm

$\therefore \overline{AO''}=\overline{AI}-\overline{O''I}=9-2=7(\text{cm})$

따라서 직각삼각형 ACO″에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AO''}^2-\overline{O''C}^2}=\sqrt{7^2-2^2}=3\sqrt{5}(\text{cm})$

이때, 직선 OA에 대하여 주어진 그림은 대칭이므로

$\overline{AB}=\overline{AC}=3\sqrt{5}$ cm $\qquad \therefore \overline{BC}=2\times3\sqrt{5}=6\sqrt{5}(\text{cm})$

2nd 삼각형 OBC의 넓이를 구해.

한편, $\overline{OA}$의 길이는 반원의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$배이므로

$\overline{OA}=\frac{1}{2}\times9=\frac{9}{2}(\text{cm})$

$\therefore \triangle OBC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OA}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{5}\times\frac{9}{2}=\frac{27\sqrt{5}}{2}(\text{cm}^2)$

M 원주각

개념 체크 001~026 정답은 p. 3에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가 p. 80

027 답 65°

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이야. 즉, 그림에서 $\overset{\frown}{AB}$에 대하여 $\angle AOB$는 중심각이고 $\angle APB$는 원주각이지?

$\therefore \angle x=\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 130°=65°$

★ **한 호에 대한 원주각의 크기와 중심각의 크기**

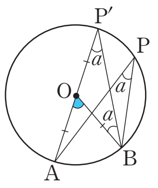
$\overline{AP'}$이 지름일 때, $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각인 $\angle APB=\angle a$라 하면 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각인 $\angle AP'B=\angle APB=\angle a$지?

$\overline{OB}=\overline{OP'}$($\because$ 반지름)이니까 $\triangle BOP'$은 이등변삼각형이야. 즉, $\angle OBP'=\angle BP'O=\angle a$

$\angle AOB$는 $\triangle BOP'$의 한 외각이므로

$\angle AOB=\angle OP'B+\angle OBP'=2\angle a$

$\therefore \angle AOB=2\angle APB \Rightarrow \angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$



028 답 ④

구하고자 하는 각은 $\overset{\frown}{AB}$의 원주각인 $\angle APB$이므로 중심각인 $\angle AOB$의 크기를 먼저 구하자.

$\overline{OA}$, $\overline{OB}$는 반지름이므로 $\triangle AOB$는 이등변삼각형이야.

따라서 이등변삼각형 AOB에서 $\angle OBA=\angle OAB=28°$이고 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

$\angle AOB=180°-(28°+28°)=124°$

$\therefore \angle x=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 124°=62°$

029 답 ④

원주각과 중심각의 크기의 성질에 의해

$\angle AOB=2\angle APB=2\times 36°=72°$

이등변삼각형 AOB에서 $\angle OBA=\angle OAB$

$\triangle AOB$의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

$\angle AOB+\angle OBA+\angle OAB=72°+2\angle OAB=180°$

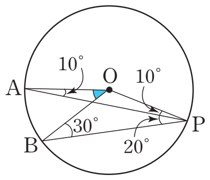
$\therefore \angle OAB=\frac{1}{2}\times(180°-72°)=54°$

030 답 ③

구하고자 하는 $\angle AOB$는 $\overset{\frown}{AB}$의 중심각이지?

$\overset{\frown}{AB}$의 원주각인 $\angle APB$의 크기부터 구하자.

그림과 같이 원의 중심 O와 점 P를 연결하면 $\overline{OA}=\overline{OP}$에서 $\triangle OAP$는 이등변삼각형이므로



$\angle OPA=\angle OAP=10°$

마찬가지로 이등변삼각형 OBP에서

$\angle OPB=\angle OBP=30°$

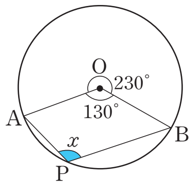
$\therefore \angle APB=\angle OPB-\angle OPA=30°-10°=20°$

$\therefore \angle AOB=2\angle APB=2\times 20°=40°$

031 답 115°

그림과 같이 원 O에서 호의 길이가 짧은 쪽을 $\overset{\frown}{APB}$, 긴 쪽을 $\overset{\frown}{AB}$라 하자.

원 O에서 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각의 크기가 $360°-130°=230°$이고 $\angle x$는 $\overset{\frown}{AB}$의 원주각이므로



$\angle x=\frac{1}{2}\times 230°=115°$

오답피하기

$\overset{\frown}{AB}$는 보통 작은 쪽의 호를 나타내고, 큰 쪽의 호를 나타낼 때는 점 C를 하나 넣어 $\overset{\frown}{ACB}$와 같이 나타내. 이 문제의 경우 점 P가 작은 쪽의 호 위에 있으므로 작은 쪽의 호를 $\overset{\frown}{APB}$라 하고 큰 쪽의 호를 $\overset{\frown}{AB}$라 했으니까 혼동하지 말자. 원주각과 중심각의 크기의 성질은 180°가 넘는 중심각에 대해서도 성립함을 알고 있자.

032 답 (1) 60° (2) 65°

(1) $\angle x=\angle APB$

$=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times(360°-240°)$

$=\frac{1}{2}\times 120°=60°$

(2) $\overset{\frown}{AB}$의 원주각의 크기가 $\angle APB=115°$이므로 이 호에 대한 중심각의 크기는

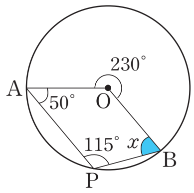
$2\times 115°=230°$

이때, $\angle AOB$의 크기를 구하면

$\angle AOB=360°-230°=130°$

따라서 사각형 OAPB의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로

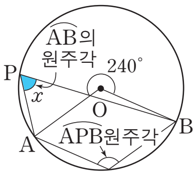
$\angle x=360°-(130°+50°+115°)=360°-295°=65°$



오답피하기

간단하게 원주각과 중심각의 크기의 성질에 의해 구할 수 있지?

그런데 (1)의 경우 $\frac{1}{2}\times 240°=120°$라고 착각하지는 않았겠지?



240°는 $\overset{\frown}{APB}$에 대한 중심각의 크기임을 잊지 말자. 우리가 구하려는 $\angle APB$는 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각이므로 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각의 크기인 $360°-240°=120°$를 가지고 구해야 해. 혼동하지 말자!!

033 답 (1) 180° (2) 156°

원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이지?

(1) $\overset{\frown}{ACB}$에 대한 원주각의 크기는 $\angle x$이고 중심각의 크기는 $360^\circ-100^\circ=260^\circ$이므로

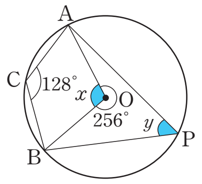
$\angle x=\frac{1}{2}\times260^\circ=130^\circ$

또, $\overset{\frown}{APB}$에 대한 원주각의 크기는 $\angle y$이고 중심각의 크기는 100°이므로

$\angle y=\frac{1}{2}\times100^\circ=50^\circ$

$\therefore\ \angle x+\angle y=130^\circ+50^\circ=180^\circ$

(2) $\overset{\frown}{APB}$에 대한 원주각의 크기가 $\angle ACB=128^\circ$이므로 이 호에 대한 중심각 (큰 쪽 $\angle AOB$)의 크기를 구하면



(큰 쪽 $\angle AOB)=2\angle ACB$

$=2\times128^\circ=256^\circ$

$\therefore\ \angle x=360^\circ-256^\circ=104^\circ$

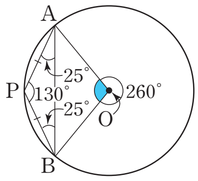
이때, $\overset{\frown}{ACB}$에 대한 중심각의 크기가 $\angle x=104^\circ$이므로 이 호에 대한 원주각의 크기는

$\angle y=\frac{1}{2}\angle x=52^\circ$

$\therefore\ \angle x+\angle y=104^\circ+52^\circ=156^\circ$

034 답 100°

$\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\triangle APB$는 이등변삼각형이지?



$\therefore\ \angle PBA=\angle PAB=25^\circ$

$\triangle PAB$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

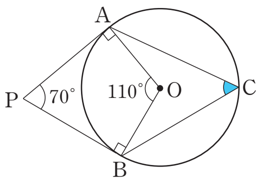
$\angle APB=180^\circ-(25^\circ+25^\circ)=130^\circ$

즉, $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각의 크기가 $\angle APB=130^\circ$이므로 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각의 크기는 260°지?

따라서 $\overset{\frown}{APB}$에 대한 중심각의 크기는 $\angle AOB=360^\circ-260^\circ=100^\circ$

035 답 ③

원의 중심에서 접점에 그은 선분은 접선과 수직이므로 중심 O에서 두 점 A, B에 각각 선을 그으면 $\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$지?



□OAPB의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로

$\angle P+\angle OAP+\angle OBP+\angle AOB=360^\circ$

$\angle P+\angle AOB=180^\circ$ $\quad\therefore\ \angle AOB=180^\circ-70^\circ=110^\circ$

$\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각이 $\angle AOB$이므로 원주각인 $\angle ACB$의 크기는 중심각 $\angle AOB$의 크기의 $\frac{1}{2}$이야.

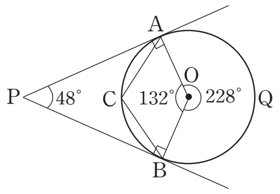
$\therefore\ \angle ACB=\frac{1}{2}\times110^\circ=55^\circ$

036 답 ③

$\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$는 원 O의 접선으로

$\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$

□OAPB의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로



$\angle P+\angle OAP+\angle OBP+\angle AOB=360^\circ$

$\angle APB+\angle AOB=180^\circ$

$\therefore\ \angle AOB=180^\circ-48^\circ=132^\circ$

이때, $\overset{\frown}{AQB}$에 대한 중심각의 크기는 $360^\circ-132^\circ=228^\circ$이고, $\overset{\frown}{AQB}$에 대한 원주각은 $\angle ACB$이므로

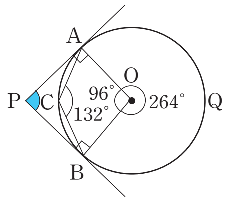
$\angle ACB=\frac{1}{2}\times228^\circ=114^\circ$

037 답 ②

$\angle ACB$는 $\overset{\frown}{AQB}$에 대한 원주각이지?

따라서 $\overset{\frown}{AQB}$에 대한 중심각의 크기는

$2\angle ACB=2\times132^\circ=264^\circ$



$\overset{\frown}{ACB}$에 대한 중심각의 크기를 구하면

$\angle AOB=360^\circ-264^\circ=96^\circ$

$\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$는 원 O의 접선으로

$\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$

□APBO의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로

$\angle APB+\angle OAP+\angle OBP+\angle AOB=360^\circ$

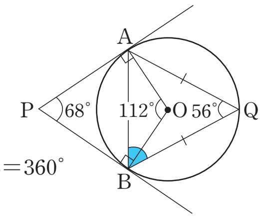
$\angle APB+\angle AOB=180^\circ$ $\quad\therefore\ \angle APB=180^\circ-96^\circ=84^\circ$

038 답 ①

$\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$는 원 O의 접선이므로

$\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$

□APBO의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로



$\angle APB+\angle OAP+\angle OBP+\angle AOB=360^\circ$

$\angle APB+\angle AOB=180^\circ$

$\therefore\ \angle AOB=180^\circ-68^\circ=112^\circ$

이때, $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각인 $\angle AQB$의 크기는 $\angle AOB$의 크기의 $\frac{1}{2}$이니까 $\angle AQB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times112^\circ=56^\circ$

또한, $\overline{AQ}=\overline{BQ}$이므로 $\triangle ABQ$는 이등변삼각형이지?

따라서 $\angle ABQ=\angle BAQ$이므로

$\angle ABQ=\frac{1}{2}\times(180^\circ-\angle AQB)=\frac{1}{2}\times(180^\circ-56^\circ)=62^\circ$

039 답 ③

$\angle x$가 $\overset{\frown}{CDE}(=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE})$에 대한 원주각이고 같은 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

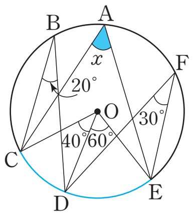
$\angle x=\angle CAD+\angle DAE=\angle CBD+\angle DFE=20^\circ+30^\circ=50^\circ$

[다른 풀이]

$\overset{\frown}{CD}$에 대하여 원주각과 중심각의 크기의 성질을 이용하면

$\angle COD=2\angle CBD=2\times20^\circ=40^\circ$

$\overset{\frown}{DE}$에 대하여 원주각과 중심각의 크기의 성질을 이용하면



$\angle DOE = 2\angle DFE = 2\times 30^\circ = 60^\circ$

$\therefore\ \angle COE = \angle COD + \angle DOE$

$= 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$

따라서 $\overset{\frown}{CDE}$에 대하여

$\angle x = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle COE = \frac{1}{2}\times 100^\circ = 50^\circ$

040 답 60°

$\angle x$가 $\overset{\frown}{BCD}$에 대한 원주각이므로 $\angle x$는 $\overset{\frown}{BC}$와 $\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각의 크기의 합과 같지?

$\therefore\ \angle x = \angle BED = \angle BEC + \angle CED$

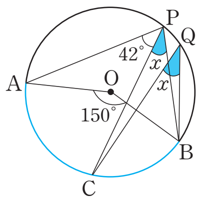
$= \angle BAC + \frac{1}{2}\angle COD$

$= 25^\circ + \frac{1}{2}\times 70^\circ$

$= 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$

041 답 ④

같은 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같지? 즉, $\angle CPB = \angle CQB = \angle x$야.



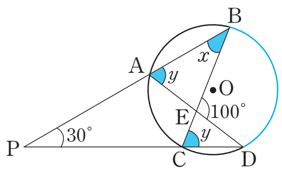
이때, $\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$에서 $\overset{\frown}{ACB}$에 대한 원주각의 크기는 $\overset{\frown}{AC}$와 $\overset{\frown}{CB}$에 대한 원주각의 크기의 합이고, $\overset{\frown}{ACB}$에 대한 원주각의 크기는 중심각인 $\angle AOB$의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

$\angle APB = \frac{1}{2}\times 150^\circ = 75^\circ$

$42^\circ + \angle x = 75^\circ \qquad \therefore\ \angle x = 33^\circ$

042 답 $\angle x = 35^\circ$, $\angle y = 65^\circ$

$\overset{\frown}{BD}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로



$\angle BAD = \angle BCD = \angle y$

$\triangle ABE$에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로

$\angle ABE + \angle BAE = \angle BED$

$\therefore\ \angle x + \angle y = 100^\circ$ ⋯ ㉠

또, $\angle BCD$는 $\triangle PBC$의 한 외각이므로

$\angle BCD = \angle PBC + \angle BPC \qquad \therefore\ \angle y = \angle x + 30^\circ$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\angle x + (\angle x + 30^\circ) = 100^\circ \qquad \therefore\ \angle x = 35^\circ$

$\therefore\ \angle y = 35^\circ + 30^\circ = 65^\circ$ ($\because$ ㉡)

043 답 ④

$\overset{\frown}{AB}$가 반원의 호이고, 반원에 대한 원주각의 크기가 90°이므로

$\angle ADB = 90^\circ$

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로 $\triangle PBD$에서

$\angle APB = \angle PDB + \angle PBD$

$130^\circ = 90^\circ + \angle x \qquad \therefore\ \angle x = 40^\circ$

044 답 28°

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로

$\angle ACB = 90^\circ$

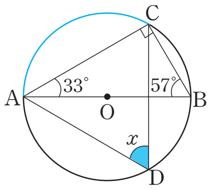
$\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle x + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$

$\therefore\ \angle x = 180^\circ - (90^\circ + 62^\circ) = 28^\circ$

045 답 ④

$\overset{\frown}{ADB}$가 반원의 호이므로



$\angle ACB = 90^\circ$

$\therefore\ \angle ABC = 90^\circ - 33^\circ = 57^\circ$

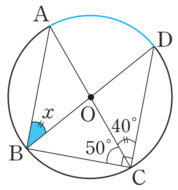
한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같지? 즉, $\overset{\frown}{AC}$에 대하여

$\angle ADC = \angle ABC$이므로

$\angle x = 57^\circ$

046 답 ④

$\overline{BD}$가 지름이므로



$\angle BCD = 90^\circ$

$\therefore\ \angle ACD = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로 $\overset{\frown}{AD}$에 대하여

$\angle ABD = \angle ACD$야.

$\therefore\ \angle x = 40^\circ$

[다른 풀이]

그림에서 $\overline{AC}$는 원 O의 지름이므로

$\angle ABC = 90^\circ$

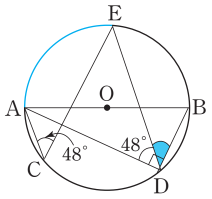
따라서 $\triangle ABC$는 $\angle B = 90^\circ$인 직각삼각형이고 $\angle ACB = 50^\circ$이므로 $\angle BAC = 40^\circ$

이때, $\overline{OA} = \overline{OB}$($\because$ 반지름)이므로 $\triangle OAB$는 이등변삼각형이야.

$\therefore\ \angle x = \angle OBA = \angle OAB = 40^\circ$

047 답 ⑤

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로 $\overset{\frown}{AE}$에 대하여



$\angle ADE = \angle ACE = 48^\circ$

이때, $\overline{AB}$가 지름이므로

$\angle ADB = 90^\circ$

$\therefore\ \angle BDE = \angle ADB - \angle ADE$

$= 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$

M

048 답 $23°$

$\overline{BD}$가 지름이므로 $\angle BCD=90°$

$\therefore \angle x=\angle BCD-\angle ACD$

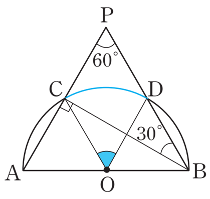
$=90°-26°=64°$

$\angle BDA=\angle BCA=64°$($\because \widehat{AB}$에 대한 원주각)이고, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로

$\angle y=180°-(29°+64°)=87°$

$\therefore \angle y-\angle x=87°-64°=23°$

049 답 ③



그림과 같이 두 점 B, C를 연결하면

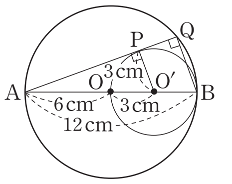
$\angle ACB=90°$이므로

$\triangle PCB$에서 $\angle PBC=90°-60°=30°$

이때, $\angle PBC=\angle DBC$는 $\widehat{CD}$에 대한 원주각이고, $\angle COD$는 이 호에 대한 중심각이지?

$\therefore \angle COD=2\angle DBC=2\times 30°=60°$

050 답 $8\sqrt{2}$ cm



그림과 같이 두 점 O′, P와 두 점 B, Q를 연결하면

$\angle APO'=\angle AQB=90°$이므로

$\triangle APO' \backsim \triangle AQB$ ⋯ (*)

$\triangle APO'$에서 $\overline{AO'}=9$ cm, $\overline{O'P}=3$ cm이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AP}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$ (cm)

닮은 두 도형의 대응변의 길이의 비가 일정하므로

$\overline{AO'}:\overline{AB}=\overline{AP}:\overline{AQ}$

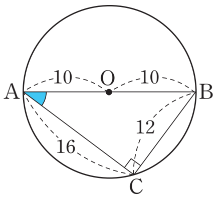
$9:12=6\sqrt{2}:\overline{AQ}$, $3:4=6\sqrt{2}:\overline{AQ}$

$\therefore \overline{AQ}=8\sqrt{2}$ cm

오|답|피|하|기

> 왜 (*)가 될까?
> 두 직각삼각형 APO′과 AQB에서
> $\angle APO'=\angle AQB=90°$, $\angle A$는 공통이므로
> AA 닮음이 되는 거야.

051 답 $\frac{7}{5}$



$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로

$\angle ACB=90°$, $\overline{AB}=20$

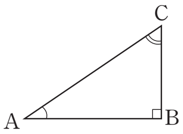
직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16$

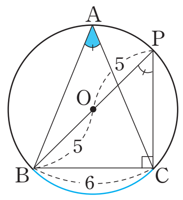
$\therefore \sin A+\cos A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}+\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

$=\dfrac{12}{20}+\dfrac{16}{20}=\dfrac{28}{20}=\dfrac{7}{5}$

오|답|피|하|기

> 삼각비의 값을 구할 때에는 주어진 삼각형이 직각삼각형인가와 어떤 각을 기준으로 했느냐를 눈여겨봐야 해. 일단 삼각비는 직각삼각형에서 정의되는 거니까 당연히 직각삼각형이 있어야 해. 또, 기준이 되는 각이 다를 때는 밑변과 높이가 달라져.
>
> 
>
>
> $\angle A$를 기준으로 보면 밑변은 $\overline{AB}$, 높이는 $\overline{BC}$지? $\angle C$를 기준으로 보면 밑변은 $\overline{BC}$, 높이는 $\overline{AB}$가 되니까 삼각비의 값을 구할 때 기준이 되는 각을 잘 판단하자.

052 답 ③



$\overline{BO}$를 연장한 선과 원의 교점을 P라 하면

$\widehat{BC}$에 대한 원주각의 크기가 모두 같으므로

$\angle BPC=\angle BAC$

$\overline{BP}$가 원 O의 지름이므로

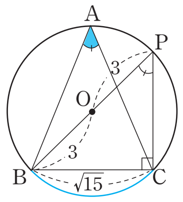
$\angle BCP=90°$, $\overline{BP}=10$

$\therefore \sin A=\sin P=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BP}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

오|답|피|하|기

> $\angle A$의 삼각비를 구해야 하는데 $\triangle ABC$가 직각삼각형이 아니네. 그럼 수선을 그어야겠지?
> 그런데 수선을 그어도 삼각비를 구할 수 없지? 문제의 다른 조건을 따져보자. $\triangle ABC$가 원에 내접하잖아. 반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이고 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기가 모두 같음을 이용하여 $\angle A$와 크기가 같은 각인 $\angle P$를 직각삼각형 BCP에서 찾으면 돼.

053 답 $\frac{\sqrt{35}}{7}$



삼각비를 구하기 위해 직각삼각형을 만들어야겠지?

$\overline{BO}$를 연장한 선과 원의 교점을 P라 하자.

$\widehat{BC}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$\angle BPC=\angle BAC$

$\overline{BP}$가 원 O의 지름이므로

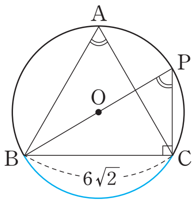
$\angle BCP=90°$, $\overline{BP}=6$

$\triangle BCP$에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{PC}=\sqrt{\overline{BP}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{6^2-(\sqrt{15})^2}=\sqrt{21}$

$\therefore \tan A=\tan P=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{PC}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{35}}{7}$

054 답 9



$\overline{BO}$를 연장한 선과 원의 교점을 P라 하면

$\widehat{BC}$에 대한 원주각의 크기가 모두 같으므로

$\angle BPC=\angle BAC$

$\therefore \sin P=\sin A$

$\overline{BP}$가 원의 지름이므로 $\angle BCP=90°$

$\therefore \sin P=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BP}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\overline{BP}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(\because \sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$\therefore \overline{BP}=9$

따라서 원 O의 지름의 길이는 9야.

055 답 ③

$\overline{AC}$가 원의 지름이므로 $\angle ABC=90^\circ$

직각삼각형 ABC에서

$\sin 30^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{\overline{AC}}$

$\therefore \overline{AC}=12\,\text{cm}$

따라서 원 O는 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}\overline{AC}=6(\text{cm})$이므로

(원 O의 넓이)$=\pi\times 6^2=36\pi(\text{cm}^2)$

056 답 $(6+2\sqrt{3})\,\text{cm}$

$\overline{AB}$가 원의 지름이고 △ABC가 원에 내접하므로

$\angle ACB=90^\circ$

즉, △ABC는 직각삼각형이므로 △ABC에서

(ⅰ) $\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\overline{BC}}{4}$ $\quad\therefore \overline{BC}=2\sqrt{3}\,\text{cm}$

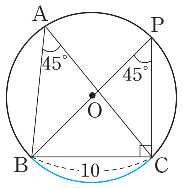
(ⅱ) $\cos 60^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{\overline{AC}}{4}$ $\quad\therefore \overline{AC}=2\,\text{cm}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 △ABC의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=4+2\sqrt{3}+2$

$=6+2\sqrt{3}(\text{cm})$

057 답 ①



점 B와 원의 중심 O를 잇는 선의 연장선이 원과 만나는 점을 P라 하면 $\overline{BP}$가 원의 지름이므로 $\angle BCP=90^\circ$

$\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$\angle P=\angle A=45^\circ$

$\sin P=\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BP}}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{10}{\overline{BP}}$

$\therefore \overline{BP}=10\sqrt{2}$

따라서 △ABC의 외접원 O의 반지름의 길이는 $\dfrac{1}{2}\overline{BP}=5\sqrt{2}$야.

[다른 풀이]

$\overline{BP}$가 원의 중심을 지나므로 $\angle BCP=90^\circ$

$\angle P=\angle A=45^\circ$($\because$ $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각)

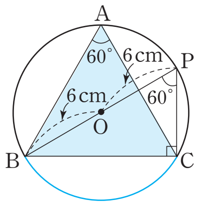
△BCP가 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BP}:\overline{BC}=\sqrt{2}:1$, $\overline{BP}:10=\sqrt{2}:1$

$\therefore \overline{BP}=10\sqrt{2}$

따라서 △ABC의 외접원 O의 반지름의 길이는 $5\sqrt{2}$야.

058 답 $27\sqrt{3}\,\text{cm}^2$



$\overline{OB}$를 연장한 선과 원의 교점을 P라 하면 $\overline{BP}$가 원의 지름이므로

$\angle BCP=90^\circ$, $\overline{BP}=12\,\text{cm}$

이때, △ABC가 정삼각형이고 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$\angle P=\angle A=60^\circ$

직각삼각형 BPC에서

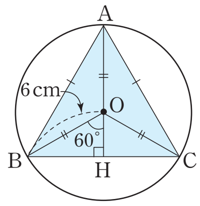
$\sin P=\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BP}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\overline{BC}}{12}$

$\therefore \overline{BC}=6\sqrt{3}\,\text{cm}$

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$이지?

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{3})^2=27\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

[다른 풀이]



△ABC는 정삼각형이고 △OBC는 이등변삼각형이므로 점 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

△AOB≡△AOC≡△BOC(SSS 합동) $\cdots(*)$

$\angle BOC=\dfrac{1}{3}\times 360^\circ=120^\circ$

$\therefore \angle BOH=\dfrac{1}{2}\angle BOC=60^\circ$ $\cdots(**)$

$\overline{BH}=\overline{BO}\times\sin 60^\circ=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}(\text{cm})$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BH}=6\sqrt{3}(\text{cm})$ $\cdots(***)$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}\,\text{cm}$이므로

$\triangle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{3})^2=27\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

오답피하기

[다른 풀이]를 보면 이등변삼각형의 성질과 합동 조건을 가지고도 풀수 있지?

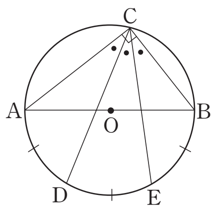
(*)의 경우 $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 세 삼각형은 SSS 합동!!

(**)의 경우 △BOC는 이등변삼각형이므로 수선인 $\overline{OH}$는 ∠BOC를 이등분해. 즉, ∠BOH=∠COH

또한, (***)의 경우 $\overline{OH}$가 $\overline{BC}$를 수직이등분하므로 $\overline{BH}=\overline{CH}$

도형의 성질을 잘 이용하면 나만의 빠른 풀이를 할 수 있어.

059 답 ②



$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로

$\angle ACB=90^\circ$

한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$

$\therefore \angle ACD=\angle DCE=\angle ECB$

$\therefore \angle DCE=\dfrac{1}{3}\angle ACB$

$=\dfrac{1}{3}\times 90^\circ=30^\circ$

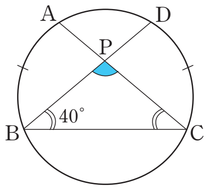
060 답 64°

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$이므로 $\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{AB}$

한 원에서 원주각의 크기와 호의 길이는 정비례하지?

$\therefore \angle x=\angle AQC=2\angle APB=2\times 32^\circ=64^\circ$

061 답 ①



$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$이므로 두 호의 원주각의 크기는 같아.

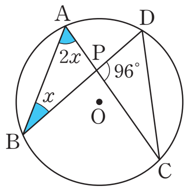
즉, $\angle ACB=\angle DBC=40°$

$\triangle BCP$에서 세 내각의 크기의 합이 $180°$이므로

$\angle BPC+40°+40°=180°$

$\therefore\ \angle BPC=100°$

062 답 28°



$\overset{\frown}{BC}=2\overset{\frown}{AD}$이고, 한 원에서 원주각의 크기와 호의 길이는 정비례하므로

$\angle BAC=2\angle ABD=2\angle x$

$\angle APB=\angle DPC=96°$($\because$ 맞꼭지각)

$\triangle ABP$에서 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로

$2\angle x+\angle x+96°=180°$

$3\angle x=84°\qquad\therefore\ \angle x=28°$

063 답 ∠A=60°, ∠B=80°, ∠C=40°

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=2:3:4$이므로

$\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기는

$\angle A=\dfrac{3}{2+3+4}\times180°=60°$

$\overset{\frown}{CA}$에 대한 원주각의 크기는

$\angle B=\dfrac{4}{2+3+4}\times180°=80°$

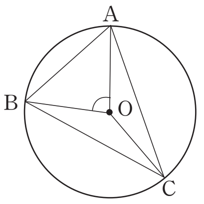
$\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각의 크기는

$\angle C=\dfrac{2}{2+3+4}\times180°=40°$

★ **원 O에 내접하는 삼각형 ABC에서**

$\overset{\frown}{AB}$의 길이가 원주의 $\dfrac{1}{m}$이면

$\angle ACB=\dfrac{1}{m}\times180°$



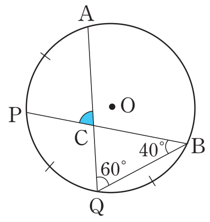
(1) $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$에 대한 원주각은 각각 $\angle C$, $\angle A$, $\angle B$야. 이 세 호에 대한 원주각의 크기의 합은 $180°$이므로 한 호의 길이가 원주의 $\dfrac{1}{m}$일 때, 이 호에 대한 원주각의 크기는 $\dfrac{1}{m}\times180°$가 되는 거야.

(2) 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하지? 원주에 대한 중심각의 크기는 $360°$이고 호의 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로 $\overset{\frown}{AB}$의 길이가 원주의 $\dfrac{1}{m}$이면

$\overset{\frown}{AB}=2\pi r\times\dfrac{1}{m}=2\pi r\times\dfrac{2\angle ACB}{360°}$

$\dfrac{1}{m}=\dfrac{\angle ACB}{180°}\qquad\therefore\ \angle ACB=\dfrac{1}{m}\times180°$

064 답 80°



$\overset{\frown}{AB}$가 원주의 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\angle AQB=\dfrac{1}{3}\times180°=60°$

또, $\overset{\frown}{APB}$가 원주의 $\dfrac{2}{3}$이므로 $\overset{\frown}{APB}$에 대한 원주각의 크기는

$\dfrac{2}{3}\times180°=120°$

근데, $\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{QB}$이므로

$\angle PBQ=\dfrac{1}{3}\times(\overset{\frown}{APB}$에 대한 원주각의 크기$)=\dfrac{1}{3}\times120°=40°$

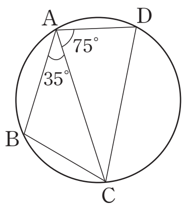
$\triangle BCQ$의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로

$\angle PCA=\angle BCQ$($\because$ 맞꼭지각)

$=180°-(60°+40°)=80°$

065 답 ④

그림에서 두 점 A, C를 연결하는 보조선을 긋자.



$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=3:2:5:2$이므로

$\overset{\frown}{BC}$는 원주의 $\dfrac{2}{3+2+5+2}=\dfrac{2}{12}$

$\therefore\ \angle BAC=\dfrac{2}{12}\times180°=30°$

$\overset{\frown}{CD}$는 원주의 $\dfrac{5}{3+2+5+2}=\dfrac{5}{12}$

$\therefore\ \angle CAD=\dfrac{5}{12}\times180°=75°$

$\therefore\ \angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=30°+75°=105°$

[다른 풀이]

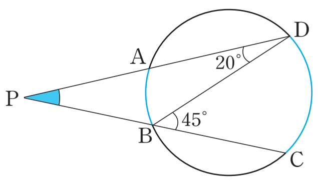
$\angle BAD$는 $\overset{\frown}{BCD}$에 대한 원주각이지?

호의 길이는 원주각의 크기에 정비례하므로 $\overset{\frown}{BCD}$는 원주의

$\dfrac{2+5}{3+2+5+2}=\dfrac{7}{12}$

$\therefore\ \angle BAD=\dfrac{7}{12}\times180°=105°$

066 답 25°



$\overline{DB}$를 그으면 $\overset{\frown}{AB}$가 원주의 $\dfrac{1}{9}$이므로

$\angle ADB=\dfrac{1}{9}\times180°=20°$

$\overset{\frown}{CD}$가 원주의 $\dfrac{1}{4}$이므로

$\angle CBD=\dfrac{1}{4}\times180°=45°$

이때, $\angle DBC$는 $\triangle PBD$의 한 외각이므로

$\angle DPB+\angle PDB=\angle DBC\Rightarrow\angle DPB+20°=45°$

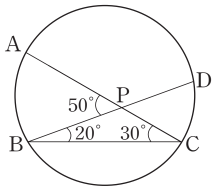
$\therefore\ \angle DPB=25°$

$\therefore\ \angle APB=\angle DPB=25°$

M

067 답 $\frac{1}{9}$배

$\overset{\frown}{AB}$는 원주의 $\frac{1}{6}$이므로



$\angle ACB=\frac{1}{6}\times 180^\circ=30^\circ$

삼각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같고 $\angle APB$는 $\triangle BCP$의 한 외각이므로

$\angle APB=\angle PCB+\angle CBP$

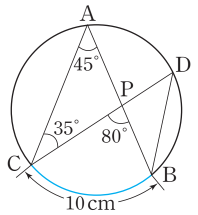
$\qquad=30^\circ+\angle CBP=50^\circ$

$\therefore \angle CBD=\angle CBP=20^\circ$

이때, $\angle CBD$는 $\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각이지?

원주각의 크기는 호의 길이와 정비례하므로 $\overset{\frown}{CD}$의 길이는 원주의 $\frac{20^\circ}{180^\circ}=\frac{1}{9}$(배)야.

068 답 ④



삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같지?

$\triangle ACP$에서

$\angle CPB=\angle CAP+\angle ACP$이므로

$\angle CAP=\angle CPB-\angle ACP$

$\qquad=80^\circ-35^\circ=45^\circ$

즉, $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기가 45°이고, 호의 길이와 원주각의 크기가 정비례하므로 원의 둘레의 길이를 x cm라 하면

$45^\circ : 180^\circ=10 : x$

$\therefore x=40$(cm)

069 답 14π

원의 중심에서 두 현 AB, AC에 이르는 거리가 같으므로

$\overline{AB}=\overline{AC}$

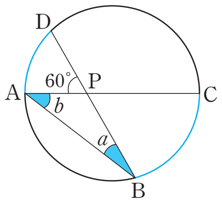
즉, $\angle ACB=\angle ABC=55^\circ$이므로 $\triangle ABC$에서

$\angle BAC=180^\circ-(55^\circ+55^\circ)=70^\circ$

따라서 원주각의 크기와 호의 길이는 정비례하므로

$70^\circ : 55^\circ=\overset{\frown}{BC} : 11\pi \qquad \therefore \overset{\frown}{BC}=14\pi$

070 답 ④



그림과 같이 두 점 A, B를 연결하는 보조선을 긋자.

$\overset{\frown}{AD}$의 원주각의 크기를 $\angle a$, $\overset{\frown}{BC}$의 원주각의 크기를 $\angle b$라 하자.

$\triangle ABP$에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로

$\angle a+\angle b=60^\circ$

즉, $\overset{\frown}{AD}$와 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기의 합이 60°이지?

따라서 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$의 길이는 원의 둘레의 길이의 $\frac{60^\circ}{180^\circ}=\frac{1}{3}$(배)야.

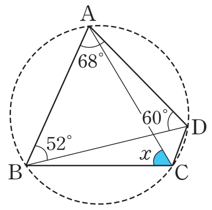
071 답 ③

③ 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있을 조건은

$\angle ABD=\angle ACD=55^\circ$ 또는 $\angle ACB=\angle ADB=55^\circ$

인 경우야.

072 답 ③



$\triangle ABD$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle BAD+\angle ABD+\angle ADB=180^\circ$

$68^\circ+52^\circ+\angle ADB=180^\circ$

$\therefore \angle ADB=60^\circ$

네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로 $\angle x=\angle ACB=\angle ADB=60^\circ$

오답피하기

주어진 각의 크기인 52°, 68°, 60° 때문에 혼동스럽지?

□ABCD의 변 중 하나를 중심으로 같은 쪽에 있는 각의 크기가 같은지 판단해야 해.

한 개의 변을 중심으로 만들어지는 호에서 원주각의 크기가 같은 각을 찾으면 되는 거야.

즉, $\overline{BC}$를 기준으로 $\angle BAC=\angle BDC$,

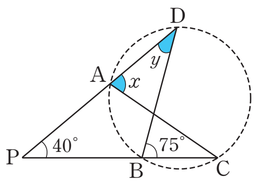
$\overline{CD}$를 기준으로 $\angle CBD=\angle CAD$,

$\overline{DA}$를 기준으로 $\angle ABD=\angle ACD$,

$\overline{AB}$를 기준으로 $\angle ACB=\angle ADB=60^\circ$

이 중 조건을 이용할 수 있는 것을 찾아 어느 각의 크기와 같은지 확실하게 구분해야 해.

073 답 ②



네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로 $\angle DAC=\angle DBC$

$\therefore \angle x=75^\circ$

또한, $\triangle BDP$에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로

$40^\circ+\angle y=75^\circ \qquad \therefore \angle y=35^\circ$

$\therefore \angle x+\angle y=75^\circ+35^\circ=110^\circ$

074 답 ⑤

$\overline{AD}$가 지름이므로 $\angle ACD=90^\circ$

이때, $\triangle ACD$에서 $\angle ADC=90^\circ-20^\circ=70^\circ$

□ABCD가 원에 내접하므로 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°야.

즉, $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$이므로 $\angle x+70^\circ=180^\circ$

$\therefore \angle x=110^\circ$

[다른 풀이]

$\overline{BD}$를 그으면 $\overline{AD}$가 지름이므로 $\angle ABD=90^\circ$

$\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각은 모두 같으므로

$\angle CBD=\angle CAD=20^\circ$

$\therefore \angle x=\angle ABD+\angle CBD=90^\circ+20^\circ=110^\circ$

075 답 $\angle x=112^\circ$, $\angle y=110^\circ$

□ABCD가 원 O에 내접하므로
한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°지?
□ABCD에서 $\angle D+\angle B=180^\circ$이므로
$\angle x=\angle D=180^\circ-\angle B=180^\circ-68^\circ=112^\circ$
또, $\angle A+\angle C=180^\circ$이니까
$\angle y=\angle C=180^\circ-\angle A=180^\circ-70^\circ=110^\circ$

076 답 266°

□ABCD가 원 O에 내접하므로
한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°지?
□ABCD에서
$\angle A+\angle C=180^\circ$
$\therefore \angle x=\angle A=180^\circ-\angle C=180^\circ-86^\circ=94^\circ$
이때, $\overset{\frown}{DAB}$에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로
$\angle y=2\angle DCB=2\times 86^\circ=172^\circ$
$\therefore \angle x+\angle y=94^\circ+172^\circ=266^\circ$

077 답 ③

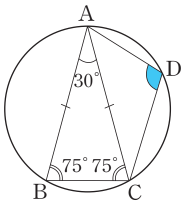
$\triangle$ABC에서 세 내각의 크기의 합은 180°이므로
$\angle ABC=180^\circ-(45^\circ+40^\circ)=95^\circ$
□ABCD가 원에 내접하므로
$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$
$\therefore \angle x=\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-95^\circ=85^\circ$

078 답 ⑤

$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로 $\angle ACB=90^\circ$
$\triangle$ABC에서 $\angle CAB+\angle CBA=90^\circ$
$\therefore \angle CBA=90^\circ-\angle CAB=90^\circ-28^\circ=62^\circ$
□ABCD가 원 O에 내접하므로 $\angle B+\angle D=180^\circ$
$\therefore \angle ADC=\angle D=180^\circ-\angle B=180^\circ-62^\circ=118^\circ$

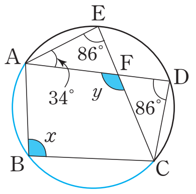
[다른 풀이]
$\overline{BD}$를 그으면 원 O의 지름이 $\overline{AB}$이므로 $\angle ADB=90^\circ$
$\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로
$\angle BDC=\angle BAC=28^\circ$
$\therefore \angle ADC=\angle ADB+\angle BDC$
$=90^\circ+28^\circ=118^\circ$

079 답 ④



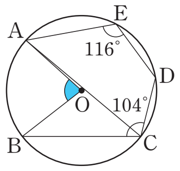
$\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 $\angle ABC$는 이등변삼각형
이므로
$\angle ABC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$
이때, □ABCD가 원에 내접하므로
$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$
$\therefore \angle ADC=180^\circ-\angle ABC$
$=180^\circ-75^\circ=105^\circ$

080 답 ②



□ABCD가 원에 내접하므로
$\angle B+\angle D=180^\circ$
$\therefore \angle x=\angle B=180^\circ-\angle D$
$=180^\circ-86^\circ=94^\circ$
$\overset{\frown}{ABC}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로 $\angle AEC=\angle ADC=86^\circ$
$\triangle$AEF에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로
$\angle y=\angle AFC=\angle FAE+\angle AEF$
$=34^\circ+86^\circ=120^\circ$
$\therefore \angle x+\angle y=94^\circ+120^\circ=214^\circ$

081 답 80°



$\overline{AC}$를 그으면 □ACDE는 원 O에 내접하므로
$\angle ACD=180^\circ-\angle AED$
$=180^\circ-116^\circ=64^\circ$
$\angle ACB=104^\circ-64^\circ=40^\circ$
이때, 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로
$\angle AOB=2\angle ACB=2\times 40^\circ=80^\circ$

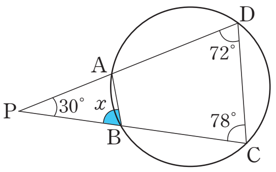
082 답 ②

원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같으므로 $\angle BAD=\angle DCE=85^\circ$
$\therefore \angle CAD=\angle BAD-\angle BAC=85^\circ-50^\circ=35^\circ$
한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로 $\overset{\frown}{CD}$에 대하여
$\angle x=\angle CBD=\angle CAD=35^\circ$

083 답 ③

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로 $\overset{\frown}{BC}$에 대하여 $\angle BAC=\angle BDC=70^\circ$
원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같지?
$\therefore \angle DCE=\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=70^\circ+30^\circ=100^\circ$

084 답 ③



$\triangle$PCD의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로
$\angle PDC=180^\circ-(30^\circ+78^\circ)$
$=72^\circ$
원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같으므로
$\angle PBA=\angle ADC$
$\therefore \angle x=72^\circ$

[다른 풀이]
□ABCD가 원에 내접하므로 $\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$

$\angle BAD=180^\circ-\angle BCD=180^\circ-78^\circ=102^\circ$

$\triangle ABP$에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같아. 즉, $\angle BAD=\angle APB+\angle ABP$

$\therefore\ \angle x=\angle ABP=\angle BAD-\angle APB=102^\circ-30^\circ=72^\circ$

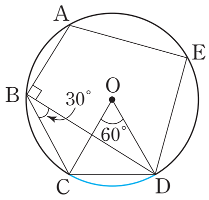
085 답 65°

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로 $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times130^\circ=65^\circ$

원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같으므로

$\angle DCE=\angle BAD=65^\circ$

086 답 ③



두 점 B, D를 연결하는 보조선을 긋자.

□ABDE가 원 O에 내접하므로

$\angle ABD+\angle AED=180^\circ$ ⋯ ㉠

$\overset{\frown}{CD}$에 대한 중심각의 크기가

$\angle COD=60^\circ$이므로 이 호에 대한 원주각의 크기는

$\angle CBD=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$

$\angle ABD=\angle ABC-\angle CBD=120^\circ-30^\circ=90^\circ$

$\therefore\ \angle AED=180^\circ-\angle ABD$ ($\because$ ㉠)

$=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

[다른 풀이]

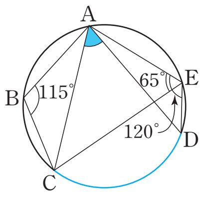
$\overset{\frown}{AEC}$에 대한 원주각의 크기가 120°이므로 $\overset{\frown}{AEC}$에 대한 중심각의 크기를 구하면

$\angle AOC=2\angle ABC=240^\circ$

이때, $\angle COD=60^\circ$이므로 $\angle AOD=240^\circ-60^\circ=180^\circ$

따라서 $\overline{AD}$는 원 O의 지름이므로 $\angle AED=90^\circ$

087 답 ③



두 점 C, E를 연결하는 보조선을 긋자.

□ABCE가 원에 내접하므로

$\angle ABC+\angle AEC=180^\circ$

$\angle ABC=115^\circ$이므로

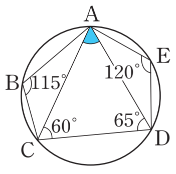
$\angle AEC=180^\circ-\angle ABC$

$=180^\circ-115^\circ=65^\circ$

이때, $\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각인 $\angle CAD$와 $\angle CED$의 크기는 같지?

$\therefore\ \angle CAD=\angle CED=\angle AED-\angle AEC=120^\circ-65^\circ=55^\circ$

[다른 풀이]



두 점 C, D를 연결하는 보조선을 긋자.

원에 내접하는 두 사각형 ABCD, ACDE에서 각각 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°임을 이용하면

$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$

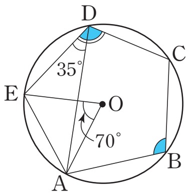
$\Rightarrow\ \angle ADC=65^\circ$

$\angle AED+\angle ACD=180^\circ\ \Rightarrow\ \angle ACD=60^\circ$

$\triangle ACD$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle CAD=180^\circ-(60^\circ+65^\circ)=55^\circ$

088 답 ③



두 점 A, D를 연결하는 보조선을 긋자.

□ABCD가 원 O에 내접하므로

$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$ ⋯ ㉠

$\overset{\frown}{AE}$에 대한 중심각의 크기가

$\angle AOE=70^\circ$이므로 이 호에 대한 원주각의 크기는

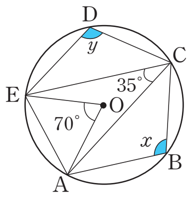
$\angle ADE=\frac{1}{2}\angle AOE=\frac{1}{2}\times70^\circ=35^\circ$ ⋯ ㉡

$\therefore\ \angle ABC+\angle CDE=\angle ABC+(\angle ADC+\angle ADE)$

$=(\angle ABC+\angle ADC)+\angle ADE$

$=180^\circ+35^\circ$($\because$ ㉠, ㉡)$=215^\circ$

[다른 풀이]



두 점 C와 E, A와 C를 연결하는 보조선을 각각 긋자.

한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle AOE=35^\circ$

원에 내접하는 두 사각형 ABCE, CDEA에서 각각 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle ABC+\angle CEA=180^\circ$, $\angle CEA=180^\circ-\angle x$

$\angle CDE+\angle CAE=180^\circ$, $\angle CAE=180^\circ-\angle y$

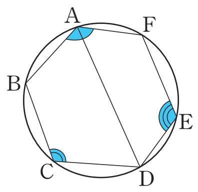
$\triangle ACE$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle ACE+\angle CEA+\angle CAE=180^\circ$

$35^\circ+(180^\circ-\angle x)+(180^\circ-\angle y)=180^\circ$

$\therefore \angle x+\angle y=215^\circ$

089 답 ⑤



두 점 A, D를 연결하는 보조선을 긋자.

□ABCD가 원에 내접하므로

$\angle BAD+\angle C=180^\circ$ ⋯ ㉠

또, □ADEF가 원에 내접하므로

$\angle DAF+\angle E=180^\circ$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

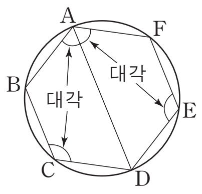
$\angle BAD+\angle C+\angle DAF+\angle E=360^\circ$

$\therefore\ \angle A+\angle C+\angle E=360^\circ$($\because$ $\angle BAD+\angle DAF=\angle A$)

오답피하기

도형에서는 보조선을 긋는 것이 아주 중요해.

원에 내접하는 다각형의 내각의 크기를 구하는 방법을 꼭 기억하자. 089번의 경우는 각의 크기가 주어져 있지 않기 때문에 당황했을 거야.



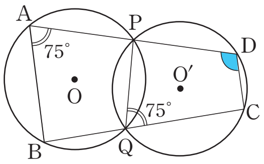
이때는 각의 크기가 아니라 구하고자 하는 각의 합이나 차를 구하는 게 일반적인 유형이야.

즉, 구하려고 하는 것은 $\angle A+\angle C+\angle E$의 크기니까 어떻게 하면 쉽게 구할 수 있느냐가 문제야. 이때는 보조선 $\overline{AD}$를 그으면 단번에 알 수 있어.

090 답 ④

원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같다는 사실을 이용하여 풀자.

두 점 P, Q를 연결하는 보조선을 긋자.



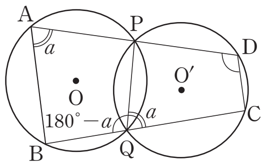
□ABQP가 원 O에 내접하므로

$\angle PQC=\angle A=75^{\circ}$

또, □PQCD가 원 O'에 내접하므로

$\angle PQC+\angle D=180^{\circ}$

$\therefore \angle D=180^{\circ}-\angle PQC=180^{\circ}-75^{\circ}=105^{\circ}$

> ★ **원에 내접하는 사각형의 성질의 응용**
>
> □ABQP, □PQCD가 각각 원에 내접할 때,
>
> $\angle A+\angle D=180^{\circ}$,
>
> $\angle B+\angle C=180^{\circ}$
>
> 
>

091 답 ⑤

□ABQP가 원에 내접하므로 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°지?

$\angle A+\angle x=180^{\circ}$

$\therefore \angle x=180^{\circ}-\angle A$

$=180^{\circ}-95^{\circ}=85^{\circ}$

또, □PQCD가 원에 내접하므로 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같으므로

$\angle y=\angle x=85^{\circ}$

$\therefore \angle x+\angle y=85^{\circ}+85^{\circ}=170^{\circ}$

092 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. □ABFE가 원 O에 내접하므로

$\angle A=\angle EFC$ ⋯ ㉠

□EFCD가 원 O'에 내접하므로

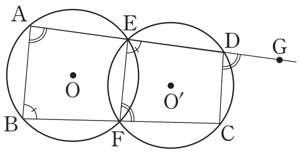
$\angle EFC+\angle CDE=180^{\circ}$

$\therefore \angle CDE=180^{\circ}-\angle EFC$

$\therefore \angle A+\angle CDE=\angle EFC+(180^{\circ}-\angle EFC)$

$=180^{\circ}$ (참)

ㄴ. $\overline{ED}$를 연장하여 그림과 같이 $\overrightarrow{ED}$ 위의 점을 G라 하자.



□EFCD가 원 O'에 내접하므로

$\angle CDG=\angle EFC$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\angle A=\angle CDG$

즉, 동위각의 크기가 같으므로 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$ (참)

ㄷ. □ABFE가 원 O에 내접하므로

$\angle B=\angle DEF$ (참)

ㄹ. $\angle A+\angle D=180^{\circ}$, $\angle B+\angle C=180^{\circ}$이지만 $\angle A=\angle C$임은 알 수 없어. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이야.

093 답 ⑤

$\angle A+\angle D=180^{\circ}$이고, $\angle D=94^{\circ}$이므로

$\angle A=180^{\circ}-94^{\circ}=86^{\circ}$

이때, $\widehat{BQP}$에 대한 중심각인 ∠POB의 크기는 원주각인 ∠A의 크기의 2배지?

$\therefore \angle POB=2\angle A=2\times 86^{\circ}=172^{\circ}$

094 답 (1) 92° (2) 95°

사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°이거나, 한 외각의 크기가 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같으면 그 사각형은 원에 내접하지?

(1) $\angle x+88^{\circ}=180^{\circ}$이므로 $\angle x=92^{\circ}$

(2) $\angle x=\angle BCD$이고, $\angle BCD+\angle DCE=180^{\circ}$이므로

$\angle x=180^{\circ}-\angle DCE=180^{\circ}-85^{\circ}=95^{\circ}$

095 답 ⑤

① △ABD의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

$\angle A+25^{\circ}+35^{\circ}=180^{\circ}$, $\angle A=180^{\circ}-(25^{\circ}+35^{\circ})=120^{\circ}$

따라서 □ABCD에서 한 외각의 크기가 120°일 때, 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기가 ∠A=120°와 같으므로 원에 내접해.

② $\angle A+\angle C=100^{\circ}+80^{\circ}=180^{\circ}$,

$\angle B+\angle D=60^{\circ}+120^{\circ}=180^{\circ}$

따라서 □ABCD에서 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°이므로 원에 내접해.

③ 두 점 A, D가 $\overline{BC}$에 대하여 같은 쪽에 있고

$\angle BAC=\angle BDC=40^{\circ}$로 같지?

따라서 네 점이 한 원 위에 있으므로 □ABCD는 원에 내접해.

④ $\angle ABC=180^{\circ}-110^{\circ}=70^{\circ}$이고, $\angle CDE=70^{\circ}$이므로

□ABCD는 원에 내접해.

⑤ 한 외각의 크기가 98°이고 이 각과 이웃하는 내각의 대각의 크기가 ∠BAD=92°이므로 같지 않아.

즉, □ABCD는 원에 내접하지 않아.

096 답 ㄱ, ㄴ, ㅂ

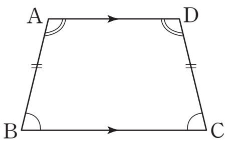
ㄱ, ㄴ. 정사각형, 직각사각형의 네 내각의 크기는 모두 90°이므로 한 쌍의 대각의 크기의 합은 항상 180°야.

즉, 항상 원에 내접해. ←OK!

ㄷ, ㄹ. 평행사변형과 마름모는 대각의 크기가 각각 같을 뿐, 합이 180°가 되는 것은 아니므로 항상 원에 내접하지는 않아.

←NO!

ㅂ. 그림의 등변사다리꼴 ABCD에서



$\angle B=\angle C$, $\angle A=\angle D$가 성립하고

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^{\circ}$

이므로

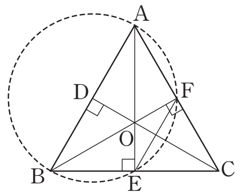
$2(\angle A+\angle C)=360^{\circ}$ $\therefore \angle A+\angle C=180^{\circ}$ ←OK!

따라서 항상 원에 내접하는 사각형은 ㄱ, ㄴ, ㅂ이야.

097 답 ③

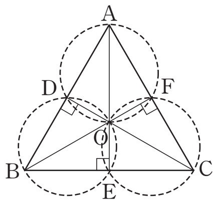
(i) 수선의 발 E, F를 연결하자.

□ABEF에서 $\overline{AB}$에 대하여 같은 방향에 있는 ∠AFB, ∠AEB의 크기가 90°로 같으므로 네 점 A, B, E, F는 한 원 위에 있어. ← ① OK!



마찬가지로 수선의 발을 각각 연결하여 만들어진 □ADEC, □BCFD도 각각 ∠ADC=∠AEC=90°, ∠BDC=∠BFC=90°이므로 네 점 A, D, E, C와 네 점 B, C, F, D도 각각 한 원 위에 있어. ← ⑤ OK!

(ii) □ADOF, □BDOE, □CFOE에서 각각



∠ADO+∠AFO=90°+90°=180°

∠BDO+∠BEO=90°+90°=180°

∠CEO+∠CFO=90°+90°=180°

이므로 세 사각형은 원에 내접해.

← ②, ④ OK!

098 답 ③

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같지?

∴ $\angle x$=∠BAC=70°, $\angle y$=∠ACT=50°

099 답 (1) 50° (2) 50°

(1) 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해 $\overleftrightarrow{AT}$가 원 O의 접선이므로

∠BCA=∠BAT=80°

△ABC에서 세 내각의 크기의 합은 180°지?

∴ $\angle x$=180°−(80°+50°)=50°

(2) $\overline{BC}$가 원 O의 지름이므로 ∠BAC=90°

접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해 $\overleftrightarrow{AT}$가 원 O의 접선이므로

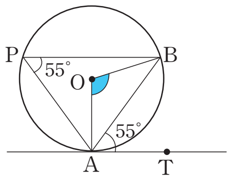
∠ABC=∠CAT=40°

△ABC에서 세 내각의 크기의 합은 180°지?

∴ $\angle x$=180°−(40°+90°)=50°

100 답 ②

접선과 현이 이루는 각의 크기가 주어졌으므로 원 O에 △ABP가 내접하도록 점 P를 잡자.



접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해 $\overleftrightarrow{AT}$가 원 O의 접선이므로

∠APB=∠BAT=55°

이때, $\overset{\frown}{AB}$에서 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

∠AOB=2∠APB=2×55°=110°

101 답 80°

접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해 $\overleftrightarrow{CT}$가 원 O의 접선이므로

∠ACT=∠ABC

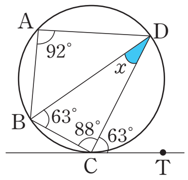
이때, ∠ABC는 $\overset{\frown}{CA}$에 대한 원주각이고,

$\overset{\frown}{AB}$: $\overset{\frown}{BC}$: $\overset{\frown}{CA}$=2 : 3 : 4이므로

∠ABC=$\frac{4}{2+3+4}$×180°=80° ∴ ∠ACT=80°

102 답 29°

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로



∠DBC=∠DCT=63°

이때, □ABCD가 원에 내접하므로

∠BCD+∠BAD=180°

∠BCD=180°−∠BAD

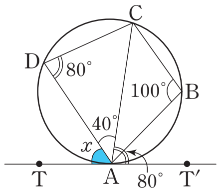
=180°−92°=88°

따라서 △BCD의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle x$=180°−(63°+88°)=29°

103 답 ②

□ABCD가 원에 내접하므로



∠B+∠D=180°

∴ ∠D=180°−∠B

=180°−100°=80°

따라서 그림에서

∠CAT′=∠CDA=80°이므로

$\angle x$=180°−(40°+80°)=60°

[다른 풀이]

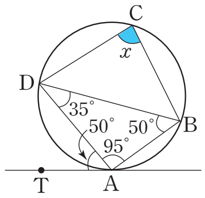
접선과 현이 이루는 각의 성질을 △ABC에서 적용해 보자.

∠CAT=∠ABC이므로

$\angle x$+40°=100° ∴ $\angle x$=60°

104 답 ⑤

△ABD에서 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해



∠DBA=∠DAT=50°

이때, △ABD의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

∠BAD=180°−(35°+50°)=95°

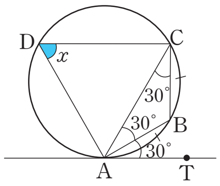
□ABCD는 원에 내접하므로

$\angle x$+∠BAD=180°지?

∴ $\angle x$=180°−∠BAD=180°−95°=85°

105 답 ①

두 점 A, C를 연결하는 보조선을 긋자.



접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

△ABC에서 ∠ACB=∠BAT=30°

$\overline{AB}$=$\overline{BC}$이면 $\overset{\frown}{AB}$=$\overset{\frown}{BC}$이므로

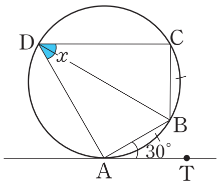
∠CAB=∠ACB=30°

∴ $\angle x$=∠CAT=∠CAB+∠BAT

=30°+30°=60°

[다른 풀이]

두 점 D, B를 연결하는 보조선을 긋자.



접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

$\angle ADB = \angle BAT = 30^\circ$

이때, $\widehat{AB} = \widehat{BC}$이므로 이 두 호에 대한 원주각의 크기는 같아.

$\therefore \angle ADB = \angle BDC$

$\therefore \angle x = \angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$

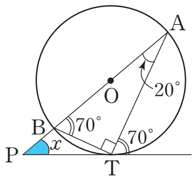
$= 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

106 답 ②

$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로

$\angle ATB = 90^\circ$

접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해



$\angle ABT = 70^\circ$이고 $\triangle ATB$에서

$\angle BAT = 180^\circ - (90^\circ + 70^\circ) = 20^\circ$

$\triangle APT$에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로

$\angle x + \angle BAT = 70^\circ$

$\therefore \angle x = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$

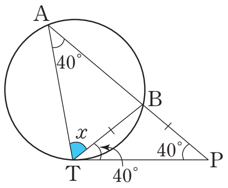
107 답 ④

$\triangle BPT$는 $\overline{BT} = \overline{BP}$이므로 이등변삼각형이야.

$\therefore \angle BTP = \angle BPT = 40^\circ$

$\overline{PT}$는 원의 접선이므로

$\angle BAT = \angle BTP = 40^\circ$



이때, $\triangle APT$의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

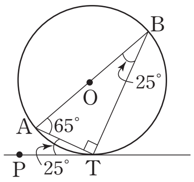
$(\angle x + 40^\circ) + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle x = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

108 답 5 : 13

$\overleftrightarrow{PT}$는 원 O의 접선이므로

$\angle ABT = \angle ATP = 25^\circ$



$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로

$\angle ATB = 90^\circ$

$\triangle ABT$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로 $\angle BAT = 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ) = 65^\circ$

한 원에서 호의 길이와 원주각의 크기는 정비례하지?

$\therefore \widehat{AT} : \widehat{BT} = \angle ABT : \angle BAT$

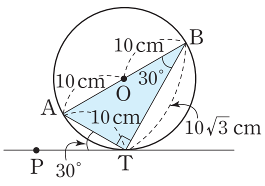
$= 25^\circ : 65^\circ$

$= 5 : 13$

109 답 ⑤

$\overleftrightarrow{PT}$는 원 O의 접선이므로

$\angle ABT = \angle ATP = 30^\circ$



$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로

$\angle ATB = 90^\circ$

이때, 직각삼각형 ABT에서 삼각비를 이용하면

(i) $\overline{AT} = \overline{AB}\sin B = 20 \times \sin 30^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10\,(\text{cm})$

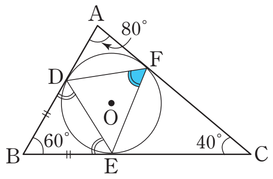
(ii) $\overline{BT} = \overline{AB}\cos B = 20 \times \cos 30^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\therefore \triangle ABT = \frac{1}{2} \times \overline{AT} \times \overline{BT}$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} = 50\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

110 답 ③

$\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로



$\angle B = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ$

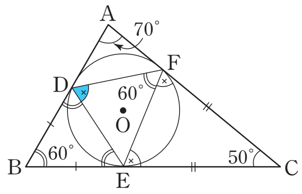
두 점 D, E는 원 O에 접하는 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 접점이므로

$\angle BDE = \angle BED = \angle DFE$야.

$\therefore \angle DFE = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$

111 답 65°

$\angle DFE = 60^\circ$이고 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$가 각각 두 점 D, E에서의 원 O의 접선이므로



$\angle BDE = \angle BED$

$= \angle DFE = 60^\circ$

$\therefore \angle B = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ)$

$= 60^\circ$

$\triangle ABC$에서 $\angle C = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$이고 $\overline{BC}$와 $\overline{AC}$가 각각 두 점 E, F에서의 원 O의 접선이므로

$\angle EDF = \angle CEF = \angle CFE$

$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - 50^\circ)$

$= 65^\circ$

[다른 풀이]

$\triangle ABC$는 원 O의 외접삼각형이므로 $\overline{AD} = \overline{AF}$

$\therefore \angle ADF = \angle AFD = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 70^\circ)$

$= \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ$

이때, 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

$\angle DEF = \angle ADF = 55^\circ$

따라서 $\triangle DEF$의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

$\angle EDF = 180^\circ - (60^\circ + 55^\circ) = 65^\circ$

112 답 63°

$\overline{PA}$, $\overline{PB}$는 원의 접선이므로 $\overline{PA} = \overline{PB}$

$\therefore \angle PAB = \angle PBA$

$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$

접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

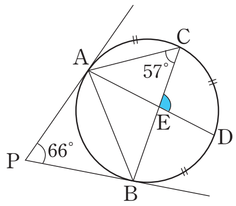
$\angle AQB = \angle PAB = \angle PBA = 75^\circ$

$\widehat{AQ}:\widehat{QB}=2:3$이고 $\triangle AQB$에서 $\widehat{AQ}$와 $\widehat{QB}$에 대한 원주각의 크기의 합은

$180^\circ-75^\circ=105^\circ$

$\therefore \angle BAQ=\dfrac{3}{2+3}\times 105^\circ=63^\circ$

113 답 ④



$\overline{PA}$, $\overline{PB}$는 원의 접선이므로

$\overline{PA}=\overline{PB}$

$\therefore \angle PAB=\angle PBA$

$=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-66^\circ)$

$=57^\circ$

접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

$\angle ACB=\angle PAB=\angle PBA=57^\circ$

$\widehat{AC}=\widehat{CD}=\widehat{DB}$이므로 $\angle ABC=\angle DAC=\angle BAD=\angle a$라 하면

$\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$

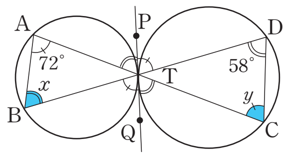
$2\angle a+\angle a+57^\circ=180^\circ$

$3\angle a=123^\circ \quad \therefore \angle a=41^\circ$

이때, $\triangle ABE$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle CED=\angle AEB=180^\circ-(41^\circ+41^\circ)=98^\circ$

114 답 ①



$\overleftrightarrow{PQ}$는 두 원의 공통으로 접하는 직선이므로 왼쪽 원에서

$\angle x=\angle ATP$, 오른쪽 원에서

$\angle CTQ=\angle CDT=58^\circ$이고

$\angle ATP=\angle CTQ$($\because$ 맞꼭지각)

이므로 $\angle x=58^\circ$

또, 왼쪽 원에서 $\angle BTQ=\angle BAT=72^\circ$이고 오른쪽 원에서

$\angle y=\angle DTP$

이때, $\angle DTP=\angle BTQ$($\because$ 맞꼭지각)이므로 $\angle y=72^\circ$

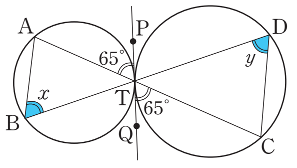
[다른 풀이]

외접하는 두 원의 접점이 T이고 공통으로 접하는 직선이 $\overleftrightarrow{PQ}$이면 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$야.

$\therefore \angle x=\angle ABD=\angle BDC=58^\circ$($\because$ 엇각)

$\angle y=\angle DCA=\angle BAC=72^\circ$($\because$ 엇각)

115 답 $\angle x=65^\circ$, $\angle y=65^\circ$



$\overleftrightarrow{PQ}$가 두 원에 공통으로 접하는 직선이므로 왼쪽 원에서

$\angle ABT=\angle ATP$

$\therefore \angle x=65^\circ$

마찬가지로 오른쪽 원에서

$\angle y=\angle CTQ$이고 $\angle CTQ=\angle ATP=65^\circ$($\because$ 맞꼭지각)

$\therefore \angle y=65^\circ$

[다른 풀이]

외접하는 두 원이 점 T에서 접하고 $\overleftrightarrow{PQ}$가 공통으로 접하는 직선이면 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$이므로

$\angle ABD=\angle CDB$($\because$ 엇각)

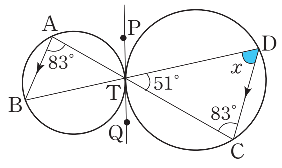
$\therefore \angle x=\angle y$

접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

$\angle x=\angle ATP=65^\circ$

$\therefore \angle x=\angle y=65^\circ$

116 답 ②



외접하는 두 원이 점 T에서 접하고 $\overleftrightarrow{PQ}$가 공통으로 접하는 직선이므로

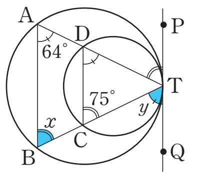
$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$

$\angle DCA=\angle BAC=83^\circ$($\because$ 엇각)

$\triangle DCT$의 세 내각의 크기의 총합은 180°지?

$\therefore \angle x=180^\circ-(83^\circ+51^\circ)=46^\circ$

117 답 ③



두 원에 공통으로 접하는 직선이 $\overleftrightarrow{PQ}$이므로 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

$\angle ABT=\angle ATP=\angle DTP=\angle DCT$

$\therefore \angle x=75^\circ$

마찬가지로

$\angle BAT=\angle BTQ=\angle CTQ$

$\therefore \angle y=64^\circ$

[다른 풀이]

내접하는 두 원의 접점이 T이고 공통으로 접하는 직선이 $\overleftrightarrow{PQ}$이면 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$야.

$\therefore \angle x=\angle DCT=75^\circ$($\because$ 동위각)

또한, $\overleftrightarrow{PQ}$가 바깥쪽 원의 접선이므로

$\angle y=\angle BAT=64^\circ$

118 답 $\angle x=62^\circ$, $\angle y=62^\circ$

두 원에 공통으로 접하는 직선이 $\overleftrightarrow{PQ}$이므로 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해 안쪽 원에서

$\angle x=\angle CDT=\angle CTQ=62^\circ$

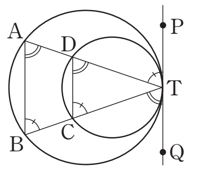
바깥쪽 원에서

$\angle y=\angle BAT=\angle BTQ=62^\circ$

[다른 풀이]

내접하는 두 원이 점 T에서 접하고 $\overleftrightarrow{PQ}$가 공통으로 접하는 직선이면 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$이므로 $\angle x=\angle y=\angle BTQ=62^\circ$

119 답 ②



$\overleftrightarrow{PQ}$가 두 원에 공통으로 접하는 직선이므로

안쪽 원에서 $\angle DCT=\angle DTP$ ←④ OK!

바깥쪽 원에서 $\angle ABT=\angle ATP$ ←③ OK!

따라서 $\angle ABT=\angle DCT$이므로

동위각의 크기가 같지?

$\therefore \overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$ ←① OK!

마찬가지로 $\angle BAT=\angle BTQ=\angle CTQ=\angle CDT$ ←⑤ OK!

잘 틀리는 유형 훈련+1up

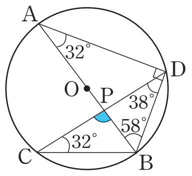
p. 92

120 답 ④

1st 원의 중심을 지나면서 내접하는 삼각형은 직각삼각형임을 이용하자!

$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로 $\angle ADB=90^\circ$

$\overset{\frown}{BD}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로 $\angle BAD=\angle BCD=32^\circ$



직각삼각형 ABD에서

$\angle ABD+\angle BAD=90^\circ$

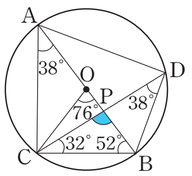
$\therefore\ \angle ABD=90^\circ-32^\circ=58^\circ$

이때, $\triangle PBD$의 한 외각인 $\angle BPC$의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같지?

$\therefore\ \angle BPC=\angle PBD+\angle PDB=58^\circ+38^\circ=96^\circ$

[다른 풀이]

그림에서 두 점 A와 C, 두 점 O와 C를 각각 잇자.



$\overset{\frown}{CB}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$\angle CAB=\angle CDB=38^\circ$

이때, $\angle COB$는 $\overset{\frown}{CB}$에 대한 중심각이므로

$\angle COB=2\angle CAB=2\times38^\circ=76^\circ$

$\therefore\ \angle AOC=180^\circ-76^\circ=104^\circ$

$\angle AOC$는 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 중심각이므로 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 원주각의 크기는

$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\times104^\circ=52^\circ$

따라서 $\triangle CBP$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle BPC=180^\circ-(32^\circ+52^\circ)=96^\circ$

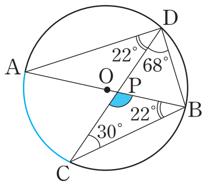
121 답 ⑤

1st 원에 내접하는 삼각형에서 그 삼각형의 한 변이 원의 중심을 지나면 직각삼각형이 되지?

$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로

$\angle ADB=90^\circ$

$\therefore\ \angle ADC=90^\circ-68^\circ=22^\circ$



$\overset{\frown}{AC}$에 대한 원주각의 크기가 모두 같으므로

$\angle ABC=\angle ADC=22^\circ$

따라서 $\triangle BPC$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle BPC=180^\circ-(22^\circ+30^\circ)=128^\circ$

122 답 ②

1st 원주각과 중심각을 혼동하지 않도록 주의하자.

$\triangle ACP$에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같지? 즉, $\angle BPC=\angle CAP+\angle ACP$

$\angle CAP=\angle BPC-\angle ACP=75^\circ-30^\circ=45^\circ$

즉, $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기가 45°야.

2nd 원주각의 크기와 호의 길이는 정비례해.

이때, 원주각의 크기와 호의 길이는 정비례하고 원주에 대한 원주각의 크기는 180°이므로 원의 둘레의 길이를 $x$cm라 하면

$45^\circ : 180^\circ=\overset{\frown}{BC} : x$, $1:4=8:x$

$\therefore\ x=32$

따라서 이 원의 둘레의 길이는 32cm야.

오답피하기

$\angle BPC$가 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 중심각이라고 착각하면 안되겠지? 문제에서 점 P가 원의 중심이라는 언급이 없었는데 그렇게 푼다면 문제를 제대로 읽지 않은 거지!! 따라서 삼각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같음을 이용하여 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기를 구해야 해. 원의 둘레, 즉 원주의 중심각의 크기가 360°이므로 원주각의 크기는 180°임을 혼동하지 말자. 그럼, 호의 길이와 원주각의 크기의 관계를 이용하여 적절한 비례식을 세우면 돼.

123 답 ②

1st 원주에 대한 원주각의 크기가 180°임을 생각하고 풀자.

$\overline{OA}=8$cm이므로 원 O의 반지름의 길이는 8cm야.

이때, 원의 둘레의 길이는 $2\pi\times8=16\pi$(cm)

$\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$에 대한 원주각의 크기가 각각 $\angle ADC=44^\circ$, $\angle BCD=46^\circ$이고, 원주에 대한 원주각의 크기가 180°이므로

$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=16\pi\times\frac{44+46}{180}=8\pi$(cm)

[다른 풀이]

$\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$에 대한 원주각의 크기가 각각

$\angle ADC=44^\circ$, $\angle BCD=46^\circ$이므로 중심각의 크기는 각각

$\angle AOC=2\angle ADC=88^\circ$, $\angle BOD=2\angle BCD=92^\circ$

$\overset{\frown}{AC}=2\pi\times8\times\frac{88}{360}$, $\overset{\frown}{BD}=2\pi\times8\times\frac{92}{360}$

$$\therefore\ \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=2\pi\times8\times\left(\frac{88}{360}+\frac{92}{360}\right)$$

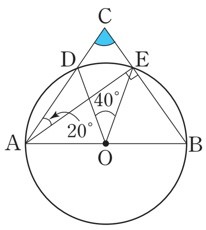
$$=2\pi\times8\times\frac{88+92}{360}$$

$$=2\pi\times8\times\frac{180}{360}=8\pi\ (\text{cm})$$

124 답 ③

1st 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이지?

그림과 같이 두 점 A, E를 연결하는 보조선을 긋자.



$\overline{AB}$가 지름이므로 $\angle AEB=90^\circ$

$\overset{\frown}{DE}$에 대한 원주각의 크기는 중심각인 $\angle DOE$의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

$\angle DAE=\frac{1}{2}\angle DOE=\frac{1}{2}\times40^\circ=20^\circ$

직각삼각형 ACE에서 외각의 성질을 이용하면

$\angle ACE+\angle CAE=90^\circ$

$\therefore\ \angle ACE=90^\circ-\angle CAE=90^\circ-20^\circ=70^\circ$

오|답|피|하|기

도형에서 보조선을 어떻게 긋는지에 따라 풀이 과정이 크게 차이가 나고, 심지어 문제가 풀리지 않을 수도 있어. $\overset{\frown}{DE}$에 대한 원주각을 나타낼 수 있는 선을 그으면 $\angle DAE=\frac{1}{2}\angle DOE=20°$야. 이 문제에서는 $\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로 $\angle AEB=90°$임을 이용했지? 원의 지름이 빗변이 되는 삼각형에서 빗변의 대각의 크기가 항상 $90°$라는 것은 자주 이용되니까 기억하자. 그리고 구하고자 하는 각의 크기가 직각삼각형 ACE의 한 내각임을 알아야 해.

125 답 ③

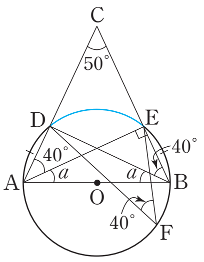
1st 지름이 빗변인 삼각형은 직각삼각형이지?

그림과 같이 두 점 A, E를 연결하는 보조선을 긋자.

$\overline{AB}$는 원 O의 중심을 지나므로

$\angle AEB=90°$

2nd 같은 호에 대한 원주각의 크기는 항상 같아.



직각삼각형 ACE에서

$\angle CAE+\angle ACE=90°$

$\angle CAE=90°-\angle ACE$

$=90°-50°=40°$

$\overset{\frown}{DE}$에 대한 원주각의 크기가 모두 같으므로

$\angle DFE=\angle DAE=40°$

3rd 보조선을 하나 더 그어 직각삼각형을 하나 더 만들자.

이번엔 두 점 D, B를 연결하는 보조선을 긋자.

$\angle DBE=\angle DFE=40°$($\because$ $\overset{\frown}{DE}$에 대한 원주각)

이때, $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BE}$이므로 $\angle DBA=\angle BAE=\angle a$라 하자.

$\triangle ABE$의 세 내각의 크기의 합이 $180°$이므로

$\angle BAE+\angle ABE+\angle AEB=180°$

$\angle a+(\angle a+40°)=90°$ $\quad\therefore \angle a=25°$

$\angle ABE=25°+40°=65°$

$\therefore \angle DFE+\angle ABE=40°+65°=105°$

126 답 ③

1st 원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 $180°$지?

원에 내접하는 사각형은 한 쌍의 대각의 크기의 합이 $180°$이므로

$\square ABCD$에서 $\angle B+\angle D=180°$

$\therefore \angle x=\angle B=180°-\angle D=180°-110°=70°$

또한, 원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같으므로

$\angle y=\angle A=80°$

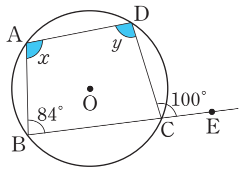
$\therefore \angle x+\angle y=70°+80°=150°$

오|답|피|하|기

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각 사이의 관계와 외각과 그와 이웃하는 내각의 대각의 관계를 혼동해서는 안 돼. 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 $180°$이고 외각과 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기가 같음을 꼭! 정확히! 기억하자. 그리고 이것은 사각형의 네 꼭짓점이 한 원 위에 있을 조건이니까 개념을 연결해서 기억하면 좋겠지?

127 답 ④

1st 원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같지?



$\square ABCD$가 원 O에 내접하므로

$\angle BAD=\angle DCE$

$\therefore \angle x=100°$

2nd 원에 내접하는 사각형은 한 쌍의 대각의 크기의 합이 $180°$지?

$\angle ABC+\angle ADC=84°+\angle y=180°$

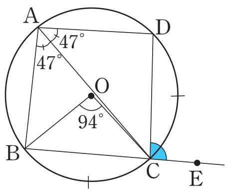
$\therefore \angle y=180°-84°=96°$

$\therefore \angle x+\angle y=100°+96°=196°$

128 답 ③

1st 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이지?

두 점 A, C를 연결하는 보조선을 긋자.



한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$

$=\frac{1}{2}\times 94°=47°$

2nd 한 원에서 호의 길이가 같으면 원주각의 크기도 같아.

한 원에서 원주각의 크기는 호의 길이에 정비례하고 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$이므로

$\angle CAD=\angle BAC=47°$

$\therefore \angle BAD=47°+47°=94°$

3rd 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같지?

$\therefore \angle DCE=\angle BAD=94°$

[다른 풀이]

$\angle DBC$, $\angle BDC$는 각각 $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각이지?

$\angle BOC=94°$가 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 중심각이고

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$이므로 $\overset{\frown}{CD}$에 대한 중심각의 크기도 $\angle COD=94°$야.

$\therefore \angle DBC=\angle BDC$

$=\frac{1}{2}\angle BOC$

$=\frac{1}{2}\times 94°=47°$

이때, $\angle DCE$는 $\triangle BDC$의 한 외각이므로

$\angle DCE=\angle DBC+\angle BDC=47°+47°=94°$

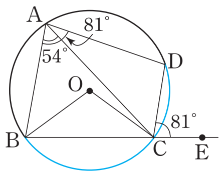
오|답|피|하|기

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$와 $\angle BOC=94°$를 이용할 수 있게 보조선을 그을 수 있어야 해. $\angle BOC=94°$가 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 중심각의 크기이므로 원주각의 크기를 구하면 내접하는 사각형의 한 내각의 크기를 구할 수 있겠지? 보조선을 왜 그렇게 연결해야 하는지 생각하면서 풀어 가자.

129 답 ⑤

1st 원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같아.

$\angle BAD=\angle DCE=81^\circ$ ⋯ ㉠



2nd 원주각의 크기는 호의 길이와 정비례하지?

이때, $\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}=2:1$이므로

$\angle BAC:\angle CAD=2:1$이고 ㉠에서

$\overset{\frown}{BD}$에 대한 원주각의 크기가 81°이므로

$\angle BAC=\dfrac{2}{2+1}\times 81^\circ=54^\circ$

3rd 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배야.

$\overset{\frown}{BC}$에 대한 중심각인 $\angle BOC$의 크기는 원주각인 $\angle BAC$의 크기의 2배야.

$\therefore \angle BOC=2\angle BAC=2\times 54^\circ=108^\circ$

130 답 85°

1st 네 점이 한 원 위에 있을 조건에 주목하자.

네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로 $\overline{BC}$를 기준으로 같은 방향에 있는 $\angle BAC$, $\angle BDC$의 크기가 같아.

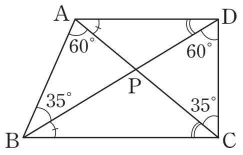
$\therefore \angle BAC=\angle BDC=60^\circ$

$\triangle ABP$의 세 내각의 크기의 합은 180°지?

$\therefore \angle APB=180^\circ-(60^\circ+35^\circ)=85^\circ$

오|답|피|하|기

네 점이 한 원 위에 있기 위해서는 다음 중 하나만 성립하면 돼.



(i) $\overline{AB}$를 기준으로
$\angle ADB=\angle ACB$

(ii) $\overline{BC}$를 기준으로
$\angle BAC=\angle BDC$

(iii) $\overline{DC}$를 기준으로 $\angle CAD=\angle CBD$

(iv) $\overline{AD}$를 기준으로 $\angle ABD=\angle ACD$

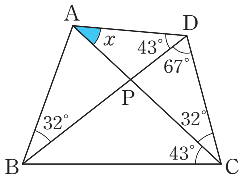
131 답 38°

1st 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 이용하자.

네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로

$\angle ACD=\angle ABD=32^\circ$,

$\angle ADB=\angle ACB=43^\circ$



2nd 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°야.

$\triangle ACD$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

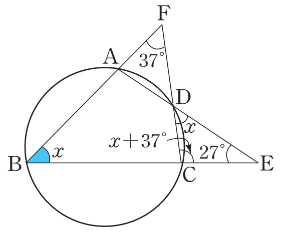
$\angle DAC+\angle DCA+\angle ADC=180^\circ$

$\angle x+32^\circ+(43^\circ+67^\circ)=180^\circ$ $\therefore \angle x=38^\circ$

132 답 ④

1st $\square ABCD$는 원에 내접하므로 외각의 크기와 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기는 같지.

$\angle CDE=\angle ABC=\angle x$



2nd 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같아.

$\triangle BCF$에서 한 외각인 $\angle FCE$의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기 합과 같으므로

$\angle DCE=\angle FCE=\angle BFC+\angle FBC=\angle x+37^\circ$

3rd 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°임을 이용하여 $\angle x$의 크기를 구하자.

$\triangle DCE$의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

$\angle x+(\angle x+37^\circ)+27^\circ=180^\circ$

$2\angle x=116^\circ$

$\therefore \angle x=58^\circ$

오|답|피|하|기

도형이 앞에 언급했던 유형들처럼 단순하고 정형화되어 나온다면 개념이나 원리를 좀 더 쉽게 적용할 수 있을 거야.

하지만 132번처럼 변형이 되면 바로 앞에서 배웠던 유형들을 어떻게 이용할지 난감하지?

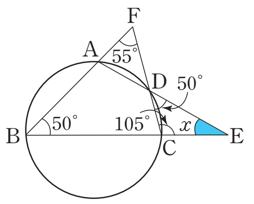
우선 $\square ABCD$가 원에 내접해 있다는 것을 이용하고 $\triangle BFC$, $\triangle ABE$, $\triangle ADF$, $\triangle CED$를 각각 나누거나 또는 전체적으로 살펴서 그림에 조건들을 적절하게 표시하면서 해법에 접근해야 해.

133 답 ③

1st 원에 내접하는 사각형의 성질을 이용하자.

$\square ABCD$가 원에 내접하므로

$\angle CDE=\angle ABC=50^\circ$



2nd 삼각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같아.

$\triangle BCF$에서

$\angle DCE=\angle FBC+\angle BFC=50^\circ+55^\circ=105^\circ$

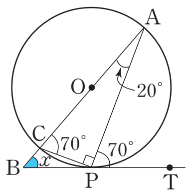
3rd 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°임을 이용하여 $\angle x$의 크기를 구하자.

$\triangle DCE$에서 $\angle x=180^\circ-(105^\circ+50^\circ)=25^\circ$

134 답 ④

1st 보조선을 적절히 그어서 풀어야 해.

원 O의 중심이 $\overline{AB}$ 위에 있으므로 $\overline{AB}$와 원 O의 교점을 C라 하고 두 점 C, P를 연결하는 보조선을 그으면 $\angle APC=90^\circ$



2nd 접선과 현이 이루는 각의 크기를 이용해 보자.

이때, $\overleftrightarrow{PT}$는 원 O의 접선이므로

$\angle ACP=\angle APT=70^\circ$

$\triangle ACP$의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

$\angle CAP+\angle ACP+\angle APC=180^\circ$

$\angle CAP+\angle ACP=90^\circ$

$\therefore \angle CAP=90^\circ-\angle ACP=90^\circ-70^\circ=20^\circ$

3rd 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같지?

$\triangle ABP$에서

$\angle APT=\angle BAP+\angle ABP$

$70^\circ=20^\circ+\angle x \qquad \therefore \angle x=50^\circ$

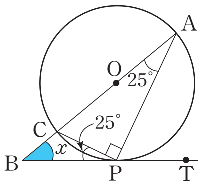
오답피하기

문제에서 주어진 각의 크기는 한 개이므로 다른 조건들을 이용해야겠지?
$\overline{AB}$ 위에 원 O의 중심이 존재하므로 반원의 원주각의 크기가 90°임을 이용해야 해!
지름이 나오면 우선 그것부터 기억하고 그림에 표시하자. 이 문제 역시 삼각형의 한 외각의 크기가 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합임을 이용해야 해. 자주 이용되는 개념이니까 꼭 기억하여 좀 더 쉽게 답에 접근하자.

135 답 ④

1st 적절하게 보조선을 그어 보자.

$\overline{AB}$와 원 O의 교점을 C라 하고, 두 점 C, P를 연결하는 보조선을 그으면 $\angle APC=90^\circ$($\because$ $\overline{AC}$는 지름)



그림과 같이 $\overleftrightarrow{PT}$는 원의 접선이므로

$\angle BPC=\angle CAP=25^\circ$

2nd 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°임을 이용하여 $\angle x$의 크기를 구하자.

$\triangle ABP$에서

$\angle APB+\angle BAP+\angle ABP=180^\circ$

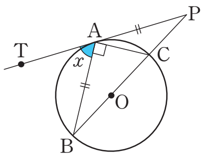
$(90^\circ+25^\circ)+25^\circ+\angle x=180^\circ$

$\therefore \angle x=180^\circ-140^\circ=40^\circ$

136 답 ②

1st 두 점 A, C를 잇는 보조선을 긋고 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이용하자.

두 점 A, C를 잇는 보조선을 긋자.



$\angle TAB=\angle x$라 하면 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해 $\angle ACB=\angle x$야.

2nd 반원에 대한 원주각의 크기는 90°지?

이때, $\overline{BC}$가 원 O의 지름이므로

$\angle BAC=90^\circ$

$\therefore \angle ABC=90^\circ-\angle x$

또한, $\overline{AB}=\overline{AP}$이므로 $\angle APB=\angle ABP=90^\circ-\angle x$

따라서 삼각형의 한 외각은 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로 $\triangle ABP$에서

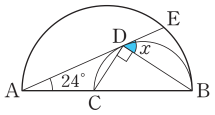
$\angle x=(90^\circ-\angle x)+(90^\circ-\angle x)$

$3\angle x=180^\circ \qquad \therefore \angle x=60^\circ$

137 답 ②

1st 두 점 C, D를 잇는 보조선을 긋고 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이용하자.

두 점 C, D를 잇는 보조선을 그으면 $\overleftrightarrow{AE}$가 작은 반원의 접선이므로 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해 $\angle DCB=\angle x$



2nd 반원에 대한 원주각의 크기는 90°야.

이때, $\overline{CB}$가 작은 반원의 지름이므로 $\angle CDB=90^\circ$지?

즉, $\triangle DCB$에서 $\angle DBC=90^\circ-\angle x$

삼각형의 한 외각은 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같지?

$\triangle DAB$에서 $\angle x=24^\circ+(90^\circ-\angle x)$, $2\angle x=114^\circ$

$\therefore \angle x=57^\circ$

138 답 $\frac{32}{5}$

$\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle ACB=90^\circ$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

직선 TC가 원 O의 접선이므로 $\angle BAC=\angle BCD$이고,

$\angle ACB=\angle CDB=90^\circ$이므로

$\triangle ACB\backsim\triangle CDB$(AA 닮음)

$\overline{AB}:\overline{CB}=\overline{BC}:\overline{BD}$에서

$10:8=8:\overline{BD}$, $10\overline{BD}=64 \qquad \therefore \overline{BD}=\frac{32}{5}$

139 답 $\frac{75}{2}$

$\triangle BCD$에서 $\angle BDC=90^\circ$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

직선 TC가 원의 접선이므로 $\angle BAC=\angle BCD$이고,

$\angle BCA=\angle BDC=90^\circ$이므로

$\triangle ACB\backsim\triangle CDB$(AA 닮음)

$\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{BC}:\overline{BD}$에서 $\overline{AC}:6=10:8$

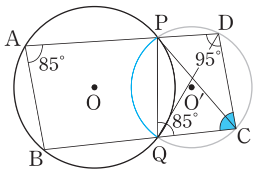
$\therefore \overline{AC}=\frac{15}{2}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\frac{15}{2}\times10=\frac{75}{2}$

140 답 ⑤

1st 적절한 보조선을 그어서 원에 내접하는 사각형을 만들자.

두 점 P, Q를 연결하는 보조선을 그어 두 원 O, O'에 각각 접하는 □ABQP, □PQCD를 만들자.



2nd 원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같지?

우선 □ABQP가 원 O에 내접하므로

$\angle PQC=\angle BAP=85^\circ$

또, □PQCD가 원 O'에 내접하므로

$\angle PQC+\angle D=180^\circ$

$\therefore \angle D=180^\circ-\angle PQC=180^\circ-85^\circ=95^\circ$

3rd 원주각의 크기는 호의 길이에 정비례해.

$\angle D=\angle PDQ+\angle CDQ$는 $\overset{\frown}{PQ}$, $\overset{\frown}{QC}$에 대한 원주각의 크기의 합이지?

$\overset{\frown}{PQ}:\overset{\frown}{QC}=3:2$이므로

$\angle PDQ=\dfrac{3}{3+2}\times 95^\circ=57^\circ$

$\overset{\frown}{PQ}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같지?

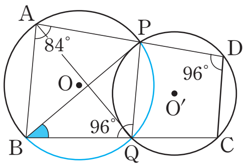
$\therefore\ \angle PCQ=\angle PDQ=57^\circ$

오|답|피|하|기

문제에서 $\overline{PQ}$가 그어져 있다면 좀 더 쉽게 문제에 접근할 수 있었겠지만 그렇지 않으므로 보조선을 그어서 생각해야 해. 즉, 두 원이 두 점에서 만나고 두 원에 걸쳐서 접하고 있는 사각형의 문제가 주어졌다면 각각의 원에 내접하는 사각형을 만들고 내접하는 사각형의 성질을 이용해야 해.

141 답 ①

1st 원에 내접하는 사각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같지?



두 점 P, Q를 연결하는 보조선을 긋자.

□PQCD가 원 O'에 내접하므로

$\angle BQP=\angle CDP=96^\circ$

$\therefore\ \angle BAP=180^\circ-96^\circ=84^\circ$

2nd 호의 길이와 원주각의 크기는 정비례하지?

$\overset{\frown}{BQ}$와 $\overset{\frown}{QP}$에 대한 원주각이 각각 $\angle BAQ$, $\angle PAQ$이고,

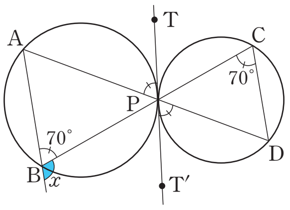
$\overset{\frown}{BQ}:\overset{\frown}{QP}=4:3$이지?

$\angle PAQ=\dfrac{3}{4+3}\times 84^\circ=36^\circ$

$\therefore\ \angle PBQ=\angle PAQ=36^\circ$

142 답 ⑤

1st 접선과 현이 이루는 각의 성질을 먼저 생각해 보자.



$\overleftrightarrow{TT'}$은 외접하는 두 원에 공통으로 접하는 직선이므로

$\angle DPT'=\angle DCP=70^\circ$,

$\angle APT=\angle DPT'=70^\circ$

(∵ 맞꼭지각)

따라서 $\angle ABP=\angle APT=70^\circ$

2nd 평각의 크기가 180°임을 이용하자.

$\therefore\ \angle x=180^\circ-\angle ABP=180^\circ-70^\circ$

$=110^\circ$

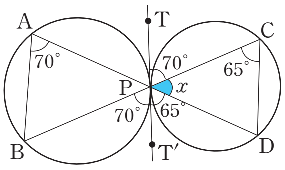
오|답|피|하|기

외접한 두 원에 공통으로 접하는 직선에서 접선과 현이 이루는 각과 그 각의 성질을 찾지 못한다면 틀릴 수밖에 없을 거야.

위의 풀이를 꼭 기억하고 빠른 풀이를 위해 외접하는 두 원에서 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 $\angle PCD=\angle ABP=70^\circ$가 됨을 알고 있자!

143 답 ②

1st 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이용하여 크기가 같은 각부터 찾자.



원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로

$\angle BPT'=\angle BAP=70^\circ$,

$\angle CPT=\angle BPT'=70^\circ$(∵ 맞꼭지각)

또, $\angle DPT'=\angle DCP=65^\circ$

2nd 평각의 크기는 180°지?

$\angle CPD+\angle CPT+\angle DPT'=\angle TPT'$

$\angle x+70^\circ+65^\circ=180^\circ$

$\therefore\ \angle x=180^\circ-135^\circ=45^\circ$

서술형 다지기

문제편 p. 96

[144-145 채점기준표]

Ⅰ	반원에 대한 원주각의 크기를 구한다.	40%
Ⅱ	$\angle x$의 크기를 구한다.	40%
Ⅲ	$\angle y$의 크기를 구한다.	20%

144 답 $\angle x=54^\circ$, $\angle y=38^\circ$

먼저, 반원에 대한 원주각의 크기를 구하자.

$\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$ … Ⅰ

그다음, $\angle x$의 크기를 구하자.

$\angle CAB+\angle CBA=90^\circ$이므로

$\angle x=90^\circ-36^\circ=54^\circ$ … Ⅱ

그래서, $\angle y$의 크기를 구하자.

$\angle ABD=\angle ACD=52^\circ$이고 $\angle DAB+\angle ABD=90^\circ$이므로

$\angle y=90^\circ-52^\circ=38^\circ$ … Ⅲ

145 답 $\angle x=50^\circ$, $\angle y=25^\circ$

먼저, 반원에 대한 원주각의 크기를 구하자.

$\overline{AB}$가 반원의 지름이므로 $\angle ACB=90^\circ$ … Ⅰ

그다음, $\angle x$의 크기를 구하자.

$\angle x=90^\circ-40^\circ=50^\circ$ … Ⅱ

그래서. $\angle y$의 크기를 구하자.

$\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{PC}$이므로 $\overset{\frown}{PC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

원주각의 크기는 호의 길이에 정비례하므로

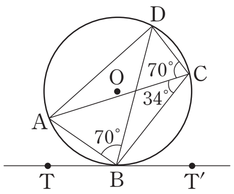
$\angle y=\frac{1}{2}\angle x=\frac{1}{2}\times 50^\circ=25^\circ$ … Ⅲ

[146-147 채점기준표]

Ⅰ	$\angle$ACD의 크기를 구한다.	30%
Ⅱ	$\angle$ACB의 크기를 구한다.	30%
Ⅲ	구하고자 하는 각의 크기를 구한다.	40%

146 답 34°

먼저. $\angle$ACD의 크기를 구하자.



그림과 같이 두 점 A, C를 연결하면 $\overset{\frown}{AD}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로 $\angle ACD=\angle ABD=70^\circ$ … Ⅰ

그다음. $\angle$ACB의 크기를 구하자.

$\angle BCD=104^\circ$이므로

$\angle ACB=104^\circ-70^\circ=34^\circ$ … Ⅱ

그래서. $\angle$ABT의 크기를 구하자.

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로

$\angle ABT=\angle ACB=34^\circ$ … Ⅲ

[다른 풀이]

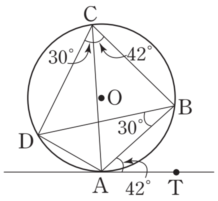
원의 접선과 그 접선을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로

$\angle DBT=\angle BCD=104^\circ$

$\therefore \angle ABT=\angle DBT-\angle DBA=104^\circ-70^\circ=34^\circ$

147 답 72°

먼저. $\angle$ACD의 크기를 구하자.



그림과 같이 두 점 A, C를 연결하면 $\overset{\frown}{AD}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$\angle ACD=\angle ABD=30^\circ$ … Ⅰ

그다음. $\angle$ACB의 크기를 구하자.

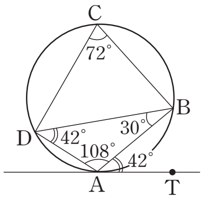
원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로

$\angle ACB=\angle BAT=42^\circ$ … Ⅱ

그래서. $\angle$BCD의 크기를 구하자.

$\therefore \angle BCD=\angle ACD+\angle ACB=30^\circ+42^\circ=72^\circ$ … Ⅲ

[다른 풀이]



원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로

$\angle ADB=\angle BAT=42^\circ$

$\triangle$ABD의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

$\angle BAD=180^\circ-(42^\circ+30^\circ)=108^\circ$

원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle BCD=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-108^\circ=72^\circ$

148 답 25°

삼각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로 $\triangle$PBC에서

$\angle BCD=\angle BPC+\angle PBC=30^\circ+\angle PBC$ … ㉠ … Ⅰ

마찬가지로 $\triangle$CQD에서

$\angle BQD=\angle QCD+\angle CDQ$

$=\angle QCD+\angle ABC$ ($\because$ $\overset{\frown}{AC}$에 대한 원주각의 크기) … Ⅱ

$=30^\circ+\angle ABC+\angle ABC$ ($\because$ ㉠)

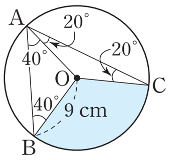
$=80^\circ$

$2\angle ABC=50^\circ$ $\quad\therefore \angle ABC=25^\circ$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\angle BCD=\angle PBC+30^\circ$임을 구한다.	30%
Ⅱ	원주각의 성질에 의해 $\angle ABC=\angle CDA$임을 구한다.	40%
Ⅲ	$\angle$ABC의 크기를 구한다.	30%

149 답 27π cm²



그림에서 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ ($\because$ 원의 반지름)이므로

$\angle OAB=\angle OBA=40^\circ$,

$\angle OAC=\angle OCA=20^\circ$

$\therefore \angle BAC=40^\circ+20^\circ=60^\circ$ … Ⅰ

중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle BOC=2\angle BAC=2\times 60^\circ=120^\circ$ … Ⅱ

$\therefore$ (부채꼴 OBC의 넓이)$=\pi\times 9^2\times\frac{120}{360}$

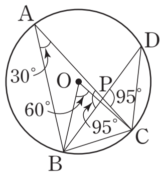
$=27\pi(\text{cm}^2)$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\angle$AOB, $\angle$AOC의 크기를 각각 구한다.	40%
Ⅱ	$\angle$BOC의 크기를 구한다.	40%
Ⅲ	부채꼴 OBC의 넓이를 구한다.	20%

150 답 $55°$

원의 중심 O와 두 점 B, C를 각각 연결하자.
$\overline{\mathrm{BC}}$의 길이가 원 O의 반지름의 길이와 같으므로 △OBC는 정삼각형이다.



∴ $\angle\mathrm{BOC}=60°$ … Ⅰ

원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

$\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}$

$=\frac{1}{2}\times60°=30°$ … Ⅱ

$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{CPD}=95°$(∵ 맞꼭지각)이고 △ABP의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로

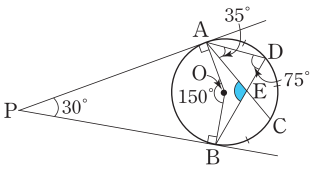
$\angle\mathrm{ABD}=180°-(30°+95°)=55°$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	∠BOC의 크기를 구한다.	40%
Ⅱ	∠BAC의 크기를 구한다.	30%
Ⅲ	∠ABD의 크기를 구한다.	30%

151 답 $110°$

그림에서



$\angle\mathrm{AOB}=180°-\angle\mathrm{APB}$

$=180°-30°$

$=150°$

이고, 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로 … ㉠

$\angle\mathrm{ADB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}$

$=\frac{1}{2}\times150°=75°$ … Ⅰ

$\widehat{\mathrm{AD}}=\widehat{\mathrm{DC}}=\widehat{\mathrm{CB}}$이므로

$\angle\mathrm{AOD}=\angle\mathrm{DOC}=\angle\mathrm{COB}=\frac{1}{3}\times(360°-150°)=70°$

$\angle\mathrm{CAD}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{COD}=\frac{1}{2}\times70°=35°$(∵ ㉠) … Ⅱ

△ADE에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로

$\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{EDA}+\angle\mathrm{EAD}=75°+35°=110°$ … Ⅲ

[다른 풀이]

$\overline{\mathrm{AB}}$를 그으면 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로

$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PBA}=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°$

접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{PAB}=75°$

$\widehat{\mathrm{AD}}=\widehat{\mathrm{DC}}=\widehat{\mathrm{CB}}$이므로

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{BAC}=\angle a$라 하면

△ABC에서 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로

$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{BCA}+\angle\mathrm{CAB}=180°$

$(\angle a+\angle a)+75°+\angle a=180°$

$3\angle a=105°$

∴ $\angle a=35°$

따라서 △ABE의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로

$\angle\mathrm{AEB}=180°-(35°+35°)=110°$

[채점기준표]

Ⅰ	∠ADB의 크기를 구한다.	40%
Ⅱ	∠CAD의 크기를 구한다.	30%
Ⅲ	∠AEB의 크기를 구한다.	30%

152 답 $39°$

한 원에서 원주각의 크기와 호의 길이는 정비례하므로

$\angle\mathrm{ACD}:\angle\mathrm{BAC}=\widehat{\mathrm{AD}}:\widehat{\mathrm{BC}}$ … Ⅰ

$65°:\angle\mathrm{BAC}=5:2$

∴ $\angle\mathrm{BAC}=26°$ … Ⅱ

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로 △ACP에서

$\angle x=65°-26°=39°$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	원주각의 성질을 이용하여 $\angle\mathrm{ACD}:\angle\mathrm{BAC}=\widehat{\mathrm{AD}}:\widehat{\mathrm{BC}}$을 세운다.	40%
Ⅱ	∠BAC의 크기를 구한다.	40%
Ⅲ	$\angle x$의 크기를 구한다.	20%

153 답 7

접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{ACB}$ … ㉠ … Ⅰ

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로

△ADP에서 $\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{APD}+\angle\mathrm{DAP}$ … ㉡

△ECP에서

$\angle\mathrm{AED}=\angle\mathrm{EPC}+\angle\mathrm{ECP}$

$=\angle\mathrm{APD}+\angle\mathrm{ECP}$(∵ 이등분선)

$=\angle\mathrm{APD}+\angle\mathrm{DAP}$(∵ ㉠)

$=\angle\mathrm{ADE}$(∵ ㉡) … Ⅱ

따라서 △ADE는 $\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{AED}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AD}}=7$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	∠BAP=∠ACB임을 구한다.	40%
Ⅱ	∠AED=∠ADE임을 구한다.	40%
Ⅲ	$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}$임을 이용하여 $\overline{\mathrm{AE}}$의 길이를 구한다.	20%

최고난도 만점 문제

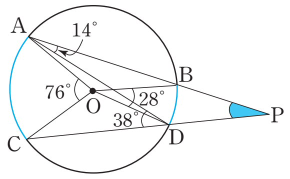
p. 98

M

154 답 ①

1st 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이지?

두 점 A와 D를 이으면 $\overset{\frown}{AC}$에 대하여 ∠AOC는 중심각이고 ∠ADC는 원주각이므로



$\angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC$

$=\frac{1}{2}\times 76^\circ=38^\circ$

또한, $\overset{\frown}{BD}$에 대하여 ∠BOD는 중심각이고 ∠BAD는 원주각이므로

$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times 28^\circ=14^\circ$

2nd 삼각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같아.

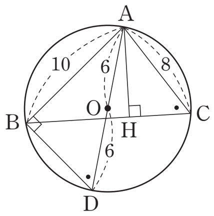
△ADP에서

$\angle BPD=\angle APD=\angle ADC-\angle PAD=38^\circ-14^\circ=24^\circ$

155 답 ②

1st 크기가 같은 두 원주각을 찾자.

그림과 같이 $\overline{AO}$를 연장하여 원 O와 만나는 점을 D라 하고, $\overline{BD}$를 그으면 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로



∠ADB=∠ACB ⋯ ㉠

2nd 닮음이 되는 두 삼각형을 찾자.

$\overline{AD}$는 원 O의 지름이므로 ∠ABD=90°

∠ABD=∠AHC=90° ⋯ ㉡

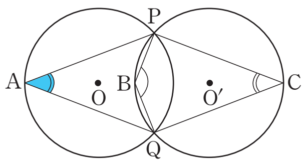
㉠, ㉡에 의해 △ADB∽△ACH(AA 닮음)

$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AC}:\overline{AH}$

$12:10=8:\overline{AH}$ $\quad\therefore \overline{AH}=\frac{20}{3}$

156 답 ④

1st 합동인 두 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기가 같지?



두 원의 반지름의 길이가 같으므로 두 원은 합동이야.

이때, $\overset{\frown}{PBQ}=\overset{\frown}{PQ}$이므로 $\overset{\frown}{PQ}$에 대한 원주각인 ∠PAQ와 $\overset{\frown}{PBQ}$에 대한 원주각인 ∠PCQ의 크기가 같아.

∴ ∠PAQ=∠PCQ ⋯ ㉠

2nd 원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°지?

□BQCP는 원 O'에 내접하므로

∠PBQ+∠PCQ=180° ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

∠PBQ+∠PAQ=180°

따라서 ∠PAQ : ∠PBQ=1 : 3이므로

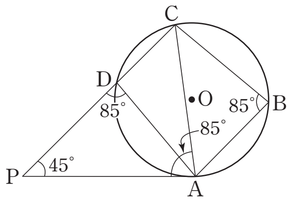
$\angle PAQ=\frac{1}{1+3}\times 180^\circ=45^\circ$

157 답 ②

1st 원에 내접하는 삼각형과 사각형의 성질을 이용해 보자.

$\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각은 원 O에 무수히 많지? 문제의 조건을 이용하기 위해 두 점 A, C를 연결하는 보조선을 그어 $\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각인 ∠CAD의 크기를 구해 보자.

접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해



∠PAC=∠CBA=85°

또, □ABCD가 원에 내접하므로

∠PDA=∠CBA=85°

2nd 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°지?

△ADP에서

∠PAD=180°−(45°+85°)=50°

∴ ∠CAD=∠PAC−∠PAD

=85°−50°=35°

[다른 풀이]

원에 내접하는 △ABC의 $\overline{AC}$와 접선 PA의 성질에 의해

∠PAC=∠CBA=85°

△ACP에서 ∠ACP=180°−(45°+85°)=50°

또, 원에 내접하는 △ACD의 $\overline{AD}$와 접선 PA의 성질에 의해

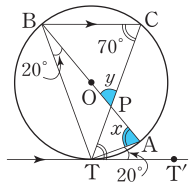
∠DAP=∠ACP=50°

∴ ∠CAD=85°−50°=35°

158 답 ⑤

1st 적절하게 보조선을 그어 ∠ATT′과 크기가 같은 각을 찾아 보자.

그림과 같이 두 점 B와 T를 연결하는 보조선을 긋자. 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해



∠ABT=∠ATT′=20°

2nd 한 원에서 같은 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같아.

$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로

∠ATB=90°

△ATB의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle x=90^\circ-20^\circ=70^\circ$

$\overset{\frown}{BT}$에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

∠BCT=∠BAT=70°

$\overline{BC}$ // $\overline{TT'}$에서

∠CTT′=∠BCT=70°(∵ 엇각)

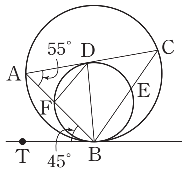
∴ ∠ATC=∠CTT′−∠ATT′

=70°−20°=50°

3rd 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°야.
$\overline{AB}$와 $\overline{CT}$의 교점을 P라 하면 △APT에서
$\angle y=\angle APT$(∵ 맞꼭지각)
$=180^\circ-(\angle PTA+\angle PAT)$
$=180^\circ-(50^\circ+70^\circ)$
$=60^\circ$
∴ $\angle x+\angle y=70^\circ+60^\circ=130^\circ$

159 답 40°

1st 적당한 보조선을 그어 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이용하자.



$\overleftrightarrow{TB}$가 두 원에 공통으로 접하는 접선이므로
$\angle ACB=\angle ABT=45^\circ$
$\angle FDB=\angle FBT=45^\circ$
△ABC에서
$\angle ABC=180^\circ-(55^\circ+45^\circ)=80^\circ$이므로
$\angle ABD=\angle x$라 하면
$\angle DBC=80^\circ-\angle x$
두 점 D, F를 잇는 보조선을 그으면 $\overline{AC}$가 작은 원의 접선이므로
$\angle ADF=\angle FBD=\angle x$
2nd 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같아.
삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로 △DBC에서
$\angle ADB=\angle DBC+\angle DCB$
이때, $\angle ADB=\angle ADF+\angle FDB=\angle x+45^\circ$이므로
$\angle x+45^\circ=(80^\circ-\angle x)+45^\circ$
$2\angle x=80^\circ$ ∴ $\angle x=40^\circ$

N 대푯값과 산포도

개념 체크 001~019 정답은 p. 4에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가 p. 102

020 답 (1) 84점 (2) 89점

(1) (네 과목 점수의 평균)$=\dfrac{88+92+76+80}{4}=\dfrac{336}{4}=84$(점)
(2) 주어진 네 과목의 점수와 영어 점수의 평균이 85점이므로 영어 점수를 x점이라 하면
$\dfrac{88+92+76+80+x}{5}=\dfrac{336+x}{5}=85$
$336+x=425$ ∴ $x=89$
따라서 윤주의 영어 점수는 89점이야.

021 답 5

A 분단의 평균이 80점이므로
$\dfrac{70+90+x+85+90+65}{6}=80$, $\dfrac{400+x}{6}=80$
$400+x=480$ ∴ $x=80$
또, A, B 두 분단의 전체 평균이 75점이므로
$\dfrac{(\text{A 분단의 점수의 총합})+(\text{B 분단의 점수의 총합})}{(\text{전체 도수})}$
$=\dfrac{480+(70+70+85+70+y+50)}{12}$
$=\dfrac{480+345+y}{12}=75$
$825+y=900$ ∴ $y=75$
∴ $x-y=80-75=5$

022 답 83점

3번의 시험에서 얻은 수학 점수의 평균이 79점이므로
(3번의 시험의 총 점수)$=3\times79=237$(점)
4번째 시험까지 수학 점수의 평균이 80점 이상이 되어야 하므로
4번째 시험에서 얻는 수학 점수를 x점이라 하면
(4번의 시험의 평균)$=\dfrac{(\text{3번의 시험의 총 점수})+x}{4}=\dfrac{237+x}{4}\ge80$
$237+x\ge320$
∴ $x\ge83$
따라서 4번째 시험에서 수학 점수를 최소 83점 받아야 해.

★ (총점)=(도수)×(평균)인지 알아보자.
n명의 점수가 각각 $a_1, a_2, \cdots, a_n$이라 하자.
그리고 평균을 m이라 하면
$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=m$
∴ (총점)$=a_1+a_2+\cdots+a_n=n\times m=$(도수)×(평균)

023 답 75.8점

상위 20명의 평균이 91점이므로

(상위 20명의 총점)$=20\times91=1820$(점)

나머지 학생들인 80명의 평균이 72점이므로

(나머지 학생들의 총점)$=80\times72=5760$(점)

∴ (전체 학생의 수학 성적의 평균)

$=\dfrac{(\text{상위 20명의 총점})+(\text{나머지 학생들의 총점})}{(\text{전체 학생 수})}$

$=\dfrac{1820+5760}{20+80}=\dfrac{7580}{100}=75.8$(점)

오|답|피|하|기

어떤 전체 집단이 있을 때 그 집단의 일부분의 평균과 나머지 부분의 평균이 주어지고 전체 집단의 평균을 구하는 문제는 통계 문제에서 빠지지 않고 등장해. 이럴 때 항상 생각하고 있어야 하는 부분이 전체 평균은 총 변량의 합에서 그 변량의 개수로 나눠준다는 평균의 정의야. 이 내용만 제대로 기억하고 응용할 수 있다면 이 문제는 어렵지 않아. 여기서는 상위 20명의 평균이 주어졌으니 상위 20명의 총점을 구할 수 있고, 또 나머지 80명의 평균이 주어졌으니 그 80명의 총점을 구할 수 있어. 이렇게 해서 전체 100명의 총점을 알아냈으니 전체 평균을 구하는 것은 어렵지 않겠지?

024 답 ③

중앙값을 구하기 위해 크기 순서대로 나열해 보자.

76, 77, 79, 79, 81, 81, 83

따라서 7개의 숫자 중 가운데 수는 왼쪽에서 네 번째 수인 79이고 이것이 중앙값이야.

025 답 51 kg

중앙값을 구하기 위해 크기 순서대로 나열해 보자.

42, 44, 45, 47, 49, 53, 55, 57, 57, 59

이때, 자료의 개수가 10개로 짝수이므로 중앙값은 49와 53의 평균이지?

따라서 중앙값은 $\dfrac{49+53}{2}=51$(kg)이야.

026 답 2편

주어진 수를 크기 순서대로 나열하면

0, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4

이때, 자료의 개수가 10개로 짝수이므로 중앙값은 2와 2의 평균이야.

따라서 중앙값은 $\dfrac{2+2}{2}=2$(편)야.

027 답 ③

주어진 수를 크기 순서대로 나열하면

174, 219, 249, 273, 320, 334, 480

이때, 자료의 개수가 7개로 홀수이므로 왼쪽에서 네 번째 값인 273 쪽이 중앙값이야.

028 답 평균 8.4점, 중앙값 8.5점

먼저, 중앙값을 구하자.

6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10

자료의 개수가 10개로 짝수이므로 중앙값은 8과 9의 평균이지?

따라서 중앙값은 $\dfrac{8+9}{2}=\dfrac{17}{2}=8.5$(점)야.

이제, 평균을 구하자.

(평균)$=\dfrac{6+7\times2+8\times2+9\times2+10\times3}{10}=\dfrac{84}{10}=8.4$(점)

따라서 평균은 8.4점, 중앙값은 8.5점이야.

029 답 78점

○, ○, 70, x, ○, ○

6명의 수학 점수를 크기 순서대로 나열하면 중앙값은 3번째 학생의 점수와 4번째 학생의 점수의 평균이야. 이때, 3번째 학생의 점수가 70점이고 중앙값이 74점이므로 4번째 학생의 점수를 x점이라 하면

(중앙값)$=\dfrac{70+x}{2}=74$ $\quad$ ∴ $x=78$

또한, 이 집단에 수학 점수가 80점인 학생이 들어 오면 80점은 78점의 우측에 배치돼. 따라서 이때의 중앙값은 7개의 자료를 크기 순서대로 나열하였을 때 4번째 학생의 점수이므로 78점이야.

030 답 7시간

주어진 자료가 다음과 같지?

5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9

따라서 가장 자주 나오는 값이 최빈값이므로 7시간이야.

031 답 200만 원

100만 원의 도수는 2, 150만 원의 도수는 1,

200만 원의 도수는 3, 300만 원의 도수는 1,

500만 원의 도수는 2, 1000만 원의 도수는 1

따라서 이 회사 직원의 월급의 최빈값은 200만 원이야.

032 답 ⑤

주어진 표에서 도수(인원)가 가장 큰 진로가 최빈값이지? 최빈값

진로	판사	교사	의사	회사원	공무원
인원(명)	5	6	8	7	9

따라서 이 자료의 최빈값은 공무원이야.

033 답 ①

먼저, 중앙값을 구하기 위해 값을 크기 순서대로 나열하자.

24, 25, 34, 34, 38, 54, 56, 80, 128, 131

자료의 개수가 10개이므로 왼쪽에서 5번째 수와 6번째 수의 평균이 중앙값이지? 즉, 중앙값은 38과 54를 합한 값을 2로 나누면 되니까

(중앙값)$=\dfrac{38+54}{2}=46$(kcal)

최빈값은 가장 많이 나타나는 값이므로 2개가 나온 34 kcal가 되겠지?

따라서 중앙값, 최빈값은 각각 46 kcal, 34 kcal야.

034 답 ③

중앙값을 구하기 위해 크기 순서대로 나열하자.

79, 82, 82, 84, 84, 84, 85, 86, 87

자료의 개수가 9개이므로 왼쪽에서 5번째 수인 84가 중앙값이야.

$\therefore a=84$(개)

또한, 최빈값은 가장 많이 나타나는 값이므로 84가 최빈값이야.

$\therefore b=84$(개)

$\therefore a-b=84-84=0$

035 답 (1) 11 (2) 10

(1) 네 수 6, 12, 15, a의 평균이 11이므로

$(\text{평균})=\dfrac{6+12+15+a}{4}=11$

$33+a=44 \quad \therefore a=11$

(2) a의 값을 모르므로 가능한 경우를 다음과 같이 나누어 순서대로 나열하여 보자.

(i) a, 6, 12, 15인 경우

(ii) 6, a, 12, 15인 경우

(iii) 6, 12, a, 15인 경우

(iv) 6, 12, 15, a인 경우

(i), (iv)의 경우는 중앙값이 11이 아니야.

(ii), (iii)의 경우에는

$(\text{중앙값})=\dfrac{a+12}{2}=11,\ a+12=22$

$\therefore a=10$ ($\because$ (iii)의 경우에는 크기 순서에 맞지 않아.)

036 답 46

7개의 자료의 평균이 65이므로

$(\text{평균})=\dfrac{37+x+65+55+77+93+82}{7}=\dfrac{x+409}{7}=65$

$x+409=455 \quad \therefore x=46$

037 답 16

5개의 자료를 크기 순서대로 나열했더니 다음과 같다지?

11, 13, 14, 16, x

자료의 개수가 5개로 홀수이므로 중앙값은 14가 돼.

한편, $(\text{평균})=\dfrac{11+13+14+16+x}{5}=\dfrac{54+x}{5}$이고 평균과 중앙값이 같으므로

$\dfrac{54+x}{5}=14,\ 54+x=70 \quad \therefore x=16$

038 답 $a=1$, $b=2$

7개의 수 -5, 4, 0, a, 2, b, 3의 평균이 1이므로

$\dfrac{-5+4+0+a+2+b+3}{7}=1,\ 4+a+b=7$

$\therefore a+b=3$ ⋯ ㉠

한편, 최빈값이 2이므로 a, b 중 적어도 하나는 2여야 해.

(i) $a=2$이면 ㉠에 의해 $b=1$

이것은 $a<b$에 모순이지?

(ii) $b=2$이면 ㉠에 의해 $a=1$ ← OK!

(iii) $a=2$, $b=2$이면 ㉠에 모순이야.

$\therefore a=1$, $b=2$

039 답 평균 86점, 중앙값 88점

5명의 수학 점수의 중앙값을 구하기 위해 점수를 크기 순서대로 나열하면 다음과 같아.

74점, 85점, 88점, 90점, 93점

자료의 개수가 5개로 홀수이므로 중앙값은 88점이야.

이제 평균을 구하자.

$(\text{평균})=\dfrac{74+85+88+90+93}{5}=\dfrac{430}{5}=86(\text{점})$

040 답 72

주어진 자료는 크기 순으로 나열되어 있고, 전체 자료의 중앙에 있는 값은 36이므로 이 자료의 중앙값은 36 m야.

$\therefore x=36$

또, 36의 도수가 3으로 가장 크므로 이 자료의 최빈값도 36 m야.

$\therefore y=36$

$\therefore x+y=36+36=72$

041 답 평균 10.4개, 중앙값 10개, 최빈값 5개

먼저, 주어진 자료를 크기 순서대로 나열하자.

2, 5, 5, 7, 8, 12, 13, 14, 16, 22

자료의 개수가 10개로 짝수이므로 중앙값은 8과 12의 합을 2로 나눈 것이므로

$(\text{중앙값})=\dfrac{8+12}{2}=\dfrac{20}{2}=10(\text{개})$

자료 5만 도수가 2이고 나머지는 도수가 1이므로 최빈값은 5개야.

이제 평균을 구해 보자.

$(\text{평균})=\dfrac{2+5+5+7+8+12+13+14+16+22}{10}$

$=\dfrac{104}{10}=10.4(\text{개})$

042 답 ②

A, B 두 모둠의 평균, 중앙값, 최빈값을 각각 구해 보자.

먼저 A 모둠의 자료를 크기 순서대로 나열하면

70, 78, 80, 80, 80, 82, 82, 84, 84

총 개수가 9개로 홀수이므로 중앙값은 80점이야.

최빈값은 자료의 개수가 가장 많은 80점이고,

$(\text{평균})=\dfrac{70+78+80+80+80+82+82+84+84}{9}$

$=\dfrac{720}{9}=80(\text{점})$

이제 B 모둠의 자료를 크기 순서대로 나열하면

60, 60, 75, 75, 80, 80, 85, 90, 95

총 개수가 9개로 홀수이므로 중앙값은 80점이야.

최빈값은 60점 또는 75점 또는 80점이야.

$(\text{평균})=\dfrac{60+60+75+75+80+80+85+90+95}{9}$

$=\dfrac{700}{9}=77.777\cdots$ (점)

① A 모둠의 평균은 80점, B 모둠의 평균은 77.777⋯점으로 다르지? (거짓)

② A 모둠은 평균, 중앙값, 최빈값이 80점으로 모두 같아. (참)
③ B 모둠의 평균은 77.777…점이고, 중앙값은 80점으로 달라. (거짓)
④ B 모둠의 중앙값은 80점, 평균 77.777…점이므로 중앙값이 평균보다 크지? (거짓)
⑤ B 모둠의 중앙값은 80점, 최빈값은 60점 또는 75점 또는 80점으로 최빈값은 중앙값보다 작거나 같아. (거짓)

043 답 (1) 중앙값 6.5시간, 최빈값 6시간

(2) 중앙값 6시간, 최빈값 6시간

a, b를 제외한 8개의 자료를 크기 순서대로 나열하면
2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, 10
(1) $6<b<a$라 하므로 a와 b를 포함해서 10개의 자료를 크기 순서대로 나열하게 되면 a와 b는 6의 오른쪽에 위치하게 되지? 즉,
2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, 10
(a, b)
자료의 개수가 10개로 짝수이므로 중앙값은 6과 7의 합을 2로 나눈 것인
$\frac{6+7}{2}=\frac{13}{2}=6.5$(시간)
또한, $6<b<a$에서 $a\neq b$이므로 최빈값은 7, 8, 10이 될 수 없지?
따라서 최빈값은 자료의 개수가 3개로 가장 많은 6시간이야.
(2) $a<b<6$이라 하므로 a와 b를 포함해서 10개의 자료를 크기 순서대로 나열하게 되면 a와 b는 6의 왼쪽에 위치하게 되지? 즉,
2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, 10
(a, b)
자료의 개수가 10개로 짝수이므로 중앙값은 6과 6의 합을 2로 나눈 것인
$\frac{6+6}{2}=\frac{12}{2}=6$(시간)
또한, $a<b<6$에서 $a\neq b$이므로 최빈값은 2, 3이 될 수 없지?
따라서 최빈값은 자료의 개수가 3개로 가장 많은 6시간이야.

044 답 25.15

주어진 표를 보면 학생 수가 가장 많은 점수가 최빈값이므로
$b=9$
중앙값은 20개의 자료에서 작은 쪽에서 10번째 수 8과 큰 쪽에서 10번째 수 8의 합을 2로 나눈 것이므로
$\frac{8+8}{2}=\frac{16}{2}=8$(점)
$\therefore c=8$
이제 평균을 구해 보자.
$$(\text{평균})=\frac{6\times2+7\times3+8\times6+9\times8+10\times1}{20}$$
$$=\frac{163}{20}=8.15(\text{점})$$
$\therefore a=8.15$
$\therefore a+b+c=8.15+9+8=25.15$

045 답 ②

평균을 대푯값으로 하기에 적절하지 않은 경우는 극단적인 값이 있을 때야.
따라서 선택지 중 평균을 대푯값으로 하기에 적절하지 않은 것은 ②야.

046 답 ①

① 【반례】 네 개의 자료 2, 4, 6, 8의 중앙값은 4와 6의 합을 2로 나눈 것이므로 $\frac{4+6}{2}=5$
5는 자료 중에 존재하지 않아. (거짓)

오답피하기

중앙값은 주어진 자료의 개수에 따라 자료 안에 존재할 수도 있고 아닐 수도 있어. 즉, 자료의 개수가 홀수일 때는 자료 안에 존재하고 짝수일 때는 중앙에 위치한 두 수의 평균이므로 자료 안에 존재하지 않을 수 있어. 기억해!

N

047 답 ②, ④

① 평균, 중앙값, 최빈값이 모두 같은 경우가 있어. (참)
② 자료를 크기 순서대로 나열하였을 때, 자료의 개수 n이 홀수이면 $\frac{n+1}{2}$번째 수가 중앙값이야.
자료의 개수 n이 짝수인 경우에는 $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}+1$번째 수의 합을 2로 나눈 수가 중앙값이야.
따라서 중앙값은 항상 정해지지. (거짓)
③ 최빈값은 도수가 가장 큰 값을 의미해. 만약 변량이 각각 다르다면 최빈값은 존재하지 않아.
또, 자료가 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5라면 최빈값이 3과 4로 2개일 수도 있어. (참)
④ 평균을 대푯값으로 하기에 적절하지 않은 경우는 극단적인 값이 있을 때야. (거짓)
⑤ 자료의 개수가 짝수이고, 이 자료를 크기 순서대로 나열하였을 때, 가운데 값 2개의 합을 2로 나눈 값이 중앙값이지. (참)

048 답 평균 6.6시간, 중앙값 2.5시간, 중앙값이 대푯값으로 적절하다.

주어진 자료를 크기 순서대로 나열하면 다음과 같아.
1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 46
자료의 개수가 10개로 짝수이므로 중앙값은 2와 3의 평균인
$\frac{2+3}{2}=2.5$(시간)
평균을 구해 보자.
$$(\text{평균})=\frac{1+1+2+2+2+3+3+3+3+46}{10}$$
$$=\frac{66}{10}=6.6(\text{시간})$$
한편, 자료에서 46은 다른 값들에 비해 매우 큰 숫자야.
그래서 전체 변량을 합하여 전체 도수로 나누는 평균은 영향을 많이 받기 때문에 대푯값으로 적절하지 않아.
따라서 이 자료의 특성을 잘 나타내는 대푯값으로 적절한 것은 중앙값이야.

049 답 ②

편차의 성질에 의해 편차의 총합은 0이지?

$(-3)+4+(-1)+x+3=0 \qquad \therefore x=-3$

오답피하기

왜 편차의 합은 항상 0일까?

n개의 자료 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$의 평균을 m으로 놓으면

$\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=m$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=m\times n \cdots$ ㉠

편차의 합을 구하자.

$(a_1-m)+(a_2-m)+(a_3-m)+\cdots+(a_n-m)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-(\underbrace{m+m+\cdots+m}_{n\text{개}})$

$=m\times n-m\times n(\because$ ㉠$)=0$

이해가 되지?

050 답 ④

편차의 합은 항상 0이므로 주어진 기록의 편차의 합은 0초야.

051 답 ①

편차의 합은 0이므로

$(-4)+3+x+(-2)+4+2=0$

$\therefore x=-3$

052 답 ④

편차의 합은 0이므로

$(-5)+1+a+3+b=0$

$\therefore a+b=1$

053 답 ④

편차의 합은 (편차)×(도수)의 합이지?

표에서 보면 편차가 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$일 때, 도수가 각각 $7, 8, 3, x, 3, 4$이므로

$(-2)\times7+(-1)\times8+0\times3+1\times x+2\times3+3\times4=0$

$(-14)+(-8)+x+6+12=0,\ x-4=0$

$\therefore x=4$

054 답 ①

(평균)=(기준이 되는 점수)+(기준이 되는 점수와의 차의 평균)으로 구할 수 있지? ⋯ (*)

평균이 70점이므로 C의 점수를 기준으로 하면

$70=(\text{C의 점수})+\dfrac{7+4+0+4+5}{5}=(\text{C의 점수})+4$

$\therefore$ (C의 점수)=66점

D의 점수는 C의 점수보다 4점이 높으니까

(D의 점수)=(C의 점수)+4=66+4=70(점)

[다른 풀이]

C의 점수를 x라 하면 A, B, D, E의 점수는 각각 $x+7$, $x+4$, $x+4$, $x+5$야.

이때, A, B, C, D, E의 평균이 70점이므로

$\dfrac{(x+7)+(x+4)+x+(x+4)+(x+5)}{5}=70$

$\dfrac{5x+20}{5}=70,\ x+4=70 \qquad \therefore x=66$

즉, C의 점수는 66점이야.

$\therefore$ (D의 점수)=(C의 점수)+4=70(점)

오답피하기

(*)이 이해가 안 된다구?

n개의 자료 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$의 평균을 m으로 놓으면

$\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=m \cdots$ ㉠

이때, k를 기준이 되는 수라고 놓고 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$의 값에서 k를 뺀 값을 각각 구하면

$a_1-k, a_2-k, a_3-k, \cdots, a_n-k$

이것의 평균을 구해 보자.

$\dfrac{(a_1-k)+(a_2-k)+(a_3-k)+\cdots+(a_n-k)}{n}$

$=\dfrac{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-k\times n}{n}$

$=\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}-k$

$=m-k\ (\because$ ㉠$)$

$\therefore m=k+\dfrac{(a_1-k)+(a_2-k)+(a_3-k)+\cdots+(a_n-k)}{n}$

이제 이해가 되지?

055 답 70점

편차의 합은 0이므로

$(-2)+6+x+8+(-4)+(-3)=0$

$x+5=0 \qquad \therefore x=-5$

$\therefore$ (구하는 학생의 과학 성적)=(평균)+(편차)

=75+(−5)=70(점)

056 답 63 kg

(편차)=(변량)−(평균)이지?

윤석이네 반 학생들의 몸무게의 평균이 58 kg이고 윤석이의 몸무게의 편차가 5 kg이므로 윤석이의 몸무게를 x kg이라 하면

$5=x-58 \Rightarrow x=63$

따라서 윤석이의 몸무게는 63 kg야.

057 답 ③

편차를 구하기 위해서는 평균을 먼저 알아야겠지?

$(\text{평균})=\dfrac{15+12+17+15+13+18}{6}=\dfrac{90}{6}=15(\text{점})$

변량 15, 12, 17, 15, 13, 18에 대한 편차를 각각 구해 보면 $0, -3, 2, 0, -2, 3$이야.

따라서 선택지 중 편차가 될 수 없는 것은 ③ 1점이야.

058 답 87점

네 학생 A, B, C, D의 점수를 각각 a, b, c, d라 하자. A의 점수가 78점이므로 $a=78$

A의 점수는 B의 점수보다 5점이 낮으므로

$a=b-5 \Rightarrow b=a+5=83$ ($\because a=78$) ⋯ ㉠

또, A의 점수는 C의 점수보다 2점이 높으므로

$a=c+2 \quad \therefore c=a-2=76$ ($\because a=78$) ⋯ ㉡

그리고 A의 점수는 A, B, C, D의 평균보다 3점이 낮으므로

$a=\dfrac{a+b+c+d}{4}-3$

$4a=a+b+c+d-12$

$\therefore d=3a-b-c+12=3\times78-83-76+12$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=234-83-76+12=87$(점)

059 답 80점

편차의 합은 0이므로

$(-2)+x+(-6)+4=0 \qquad \therefore x=4$

(편차)=(변량)−(평균)이므로

(편차)=(2회의 점수)−(평균)에서

(2회의 점수)=(편차)+(평균)=$4+76=80$(점)

060 답 87

자료의 총 개수가 28개이므로 총 도수는 28이지?

$8+7+a+1+5+4=28$

$25+a=28 \qquad \therefore a=3$

편차의 합은 (편차)×(도수)의 합이고, 그 합은 0이므로

$(-2)\times8+(-1)\times7+0\times3+1\times1+b\times5+3\times4=0$

$(-16)+(-7)+1+5b+12=0$

$5b-10=0 \qquad \therefore b=2$

구하려는 것은 편차가 b, 즉 2인 자료의 변량을 구하는 거잖아.

그런데 편차가 −2인 자료의 변량이 83이므로

(편차)=(변량)−(평균)에서

$-2=83-$(평균) $\qquad \therefore$ (평균)$=85$

따라서 편차가 2인 자료의 변량은 (평균)+(편차)이므로

$85+2=87$이야.

061 답 ⑤

편차의 합은 항상 0이므로

$(-5)+(x+1)+x+(-2)+(x+3)=0$

$3x-3=0 \qquad \therefore x=1$

따라서 B의 편차는 $x+1=2$이고, 평균이 80점이므로

(B의 점수)=(평균)+(편차)=$80+2=82$(점)

오|답|피|하|기

편차에 대해 확실히 알아둘 필요가 있어. 편차는 변량에서 평균을 뺀 값이야. 그건 모두들 알겠지? 그런데 시간이 지나면 변량에서 평균을 빼는지 평균에서 변량을 빼는지 헷갈릴 때가 있어. 그때는 편차의 값이 양수인지 음수인지 보고 판단해 주면 돼. 편차가 양수면 값이 평균보다 크겠구나라고 생각하면 헷갈리지 않을 거야. 그리고 편차의 합이 0이라는 것도 꼭 기억해 두자.

062 답 ①

편차의 합이 항상 0이라는 것을 이용하여 a의 값을 구하자.

$2+(-3)+(-1)+a+(-2)=0$

$\therefore a=4$

(분산)$=\dfrac{(\text{편차})^2\text{의 총합}}{(\text{변량})\text{의 개수}}$을 이용하여 분산을 구하자.

(분산)$=\dfrac{2^2+(-3)^2+(-1)^2+4^2+(-2)^2}{5}$

$=\dfrac{4+9+1+16+4}{5}=\dfrac{34}{5}=6.8$

따라서 D의 편차 $a=4$, 분산은 6.8이야.

오|답|피|하|기

(분산)$=\dfrac{(\text{편차})^2\text{의 총합}}{(\text{변량})\text{의 개수}}$에서 왜 (편차)^{2}의 총합일까?

분산이란 평균에서 얼마만큼 떨어져 있느냐라는 것이므로 '편차의 합의 평균을 구하면 되지 않을까' 라는 생각은 안 해봤어?

일리 있는 말이지만 편차의 합은 항상 0이잖아. 그래서 편차의 합의 평균은 항상 0이 되니까 쓸모가 없는 거야.

편차의 합이 0이 되는 이유는 편차가 양수와 음수 모든 값이 나올 수 있기 때문이지?

그래서 쓸모있는 값이 나오려면 음수가 나오지 않게 하면 되니까 각 편차에 대해 제곱을 하는 거라구.

063 답 3.6

분산을 구하기 위해 평균을 구하자.

$\therefore$ (평균)$=\dfrac{1+3+1+4+6}{5}=\dfrac{15}{5}=3$

이때, 나온 눈의 수 1, 3, 1, 4, 6에 대한 편차를 구하면 각각 −2, 0, −2, 1, 3이지?

(분산)$=\dfrac{(\text{편차})^2\text{의 총합}}{(\text{변량의 개수})}$

$=\dfrac{(-2)^2+0^2+(-2)^2+1^2+3^2}{5}$

$=\dfrac{4+0+4+1+9}{5}=\dfrac{18}{5}=3.6$

064 답 ④

편차의 합은 0이므로

$(-6)+5+(-3)+x+3=0$

$x-1=0$

$\therefore x=1$

$\therefore$ (분산)$=\dfrac{(\text{편차})^2\text{의 총합}}{(\text{변량})\text{의 개수}}$

$=\dfrac{(-6)^2+5^2+(-3)^2+1^2+3^2}{5}$

$=\dfrac{36+25+9+1+9}{5}=\dfrac{80}{5}=16$

N

065 답 216

5개의 자료 20, 10, 50, 20, 40의 평균을 구하면

(평균)$=\dfrac{20+10+50+20+40}{5}=\dfrac{140}{5}=28$(분)

주어진 자료에 대한 편차를 각각 구하면 -8, -18, 22, -8, 12이므로 분산을 구하면

(분산)$=\dfrac{(-8)^2+(-18)^2+22^2+(-8)^2+12^2}{5}$

$=\dfrac{64+324+484+64+144}{5}=\dfrac{1080}{5}=216$

066 답 ②

5개의 변량 7, 6, x, 10, 3의 평균이 7이므로

$\dfrac{7+6+x+10+3}{5}=7$, $x+26=35$ $\quad\therefore x=9$

그럼, 5개의 변량 7, 6, 9, 10, 3에 대한 편차를 각각 구하면 0, -1, 2, 3, -4이므로 분산을 구하면

(분산)$=\dfrac{0^2+(-1)^2+2^2+3^2+(-4)^2}{5}$

$=\dfrac{1+4+9+16}{5}=\dfrac{30}{5}=6$

067 답 2

연속한 5개의 자연수를 $a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+2$ (단, $a\geq 3$인 자연수)라 하자.

이때, 5개의 자연수의 평균을 구하면

(평균)$=\dfrac{(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)}{5}=\dfrac{5a}{5}=a$

연속한 5개의 자연수 $a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+2$에 대한 편차를 각각 구하면 -2, -1, 0, 1, 2지?

$\therefore$ (분산)$=\dfrac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5}$

$=\dfrac{4+1+1+4}{5}=\dfrac{10}{5}=2$

068 답 평균 20, 분산 20

5개의 자료 a, b, c, d, e의 평균이 10, 분산이 5이므로

$\dfrac{a+b+c+d+e}{5}=10$ ⋯ ㉠

$\dfrac{(a-10)^2+(b-10)^2+(c-10)^2+(d-10)^2+(e-10)^2}{5}=5$ ⋯ ㉡

이제 자료 $2a$, $2b$, $2c$, $2d$, $2e$의 평균과 분산을 각각 구하자.

(평균)$=\dfrac{2a+2b+2c+2d+2e}{5}=\dfrac{2(a+b+c+d+e)}{5}$

$=2\times\dfrac{a+b+c+d+e}{5}=2\times 10$ ($\because$ ㉠)$=20$

(분산)$=\dfrac{(2a-20)^2+(2b-20)^2+(2c-20)^2+(2d-20)^2+(2e-20)^2}{5}$

$=\dfrac{\{2(a-10)\}^2+\{2(b-10)\}^2+\{2(c-10)\}^2+\{2(d-10)\}^2+\{2(e-10)\}^2}{5}$

$=\dfrac{4(a-10)^2+4(b-10)^2+4(c-10)^2+4(d-10)^2+4(e-10)^2}{5}$

$=4\times\dfrac{(a-10)^2+(b-10)^2+(c-10)^2+(d-10)^2+(e-10)^2}{5}$

$=4\times 5$ ($\because$ ㉡)$=20$

오|답|피|하|기

각 변량에 a배 하고 b만큼 더한 자료의 평균과 분산을 알아보자!

n개의 자료 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n의 평균을 m, 분산을 V라 하면

$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=m$ ⋯ ㉠′

$\dfrac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2}{n}=V$ ⋯ ㉡′

그럼, 각 변량에 a배하고 b만큼 더한 n개의 자료 ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b, $\cdots$, ax_n+b의 평균과 분산은 어떻게 바뀔까? 먼저, 평균부터 구하자.

(평균)$=\dfrac{(ax_1+b)+(ax_2+b)+\cdots+(ax_n+b)}{n}$

$=\dfrac{a(x_1+x_2+\cdots+x_n)+n\times b}{n}$

$=a\times\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+b$

$=am+b$ ($\because$ ㉠′)

(분산)$=\dfrac{(ax_1+b-am-b)^2+(ax_2+b-am-b)^2+\cdots+(ax_n+b-am-b)^2}{n}$

$=\dfrac{a^2(x_1-m)^2+a^2(x_2-m)^2+\cdots+a^2(x_n-m)^2}{n}$

$=a^2\times\dfrac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2}{n}$

$=a^2V$ ($\because$ ㉡′)

결국, 평균은 a배하고 b만큼 더해지는 것이고, 분산은 a^2배가 되는 것을 알 수 있지? 따라서 이 문제에서 구하고자 하는 자료의 변량은 원래 변량에 2배한 거니까 평균은 $2\times 10=20$, 분산은 $2^2\times 5=20$이 되는 거야. 실전에서도 자주 나오는 유형이니까 원리와 결과를 기억해 놓고 잘 활용하면 좋겠지?

069 답 ①

5개의 수 x, -1, 3, y, -1의 평균이 1이므로

$\dfrac{x+(-1)+3+y+(-1)}{5}=1$ $\quad\therefore x+y+1=5$

$\therefore x+y=4$ ⋯ ㉠

또, 분산이 5이므로

$\dfrac{(x-1)^2+(-1-1)^2+(3-1)^2+(y-1)^2+(-1-1)^2}{5}=5$

$(x-1)^2+4+4+(y-1)^2+4=25$

$(x-1)^2+(y-1)^2=13$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1=13$

$\therefore x^2+y^2=11+2(x+y)$

$=11+2\times 4$ ($\because$ ㉠)

$=11+8=19$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$x^2+2xy+y^2=16$에서

$2xy=16-(x^2+y^2)=16-19$ ($\because$ ㉡)$=-3$

$\therefore xy=-\dfrac{3}{2}$

[다른 풀이]

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

㉠, ㉡을 대입하면

$19=4^2-2xy$

$\therefore xy=-\frac{3}{2}$

오|답|피|하|기

$x+y=4$와 $(x-1)^2+(y-1)^2=13$을 잘 정리해서 x와 y를 각각 구해서 풀겠다구?

$x+y=4 \qquad \therefore y=4-x$

이를 $(x-1)^2+(y-1)^2=13$에 대입하면

$(x-1)^2+(4-x-1)^2=13$

$(x-1)^2+(3-x)^2=13$

$x^2-2x+1+9-6x+x^2=13$

$2x^2-8x-3=0$

인수분해가 안 되지?

구하려는 것은 xy니까 여기에 집중하면 돼.

070 답 1

먼저 평균을 구하자.

$(\text{평균})=\frac{1\times6+2\times7+3\times8+4\times9}{10}=\frac{80}{10}=8$

이제 분산을 구하자.

$(\text{분산})=\frac{1\times(6-8)^2+2\times(7-8)^2+3\times(8-8)^2+4\times(9-8)^2}{10}$

$=\frac{(-2)^2+2\times(-1)^2+3\times0+4\times1^2}{10}$

$=\frac{4+2+4}{10}=\frac{10}{10}=1$

$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{1}=1$

071 답 분산 6, 표준편차 $\sqrt{6}$

이 문제에서는 편차를 구하기 위해 평균을 구할 필요는 없지? $(\text{편차})^2$이 이미 주어졌기 때문이야. 따라서 바로 분산을 구할 수 있어.

$(\text{분산})=\frac{\{(\text{편차})^2\text{의 총합}\}}{(\text{변량})\text{의 개수}}=\frac{16+1+0+4+9}{5}=\frac{30}{5}=6$

$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{6}$

072 답 $2\sqrt{3}$개

편차의 합은 항상 0임을 이용하여 x의 값을 구해야겠지?

$2+(-1)+3+x+(-2)+1+4=0,\ x+7=0 \qquad \therefore x=-7$

이제 편차의 제곱의 합을 변량의 개수로 나누면 분산을 구할 수 있지?

$(\text{분산})=\frac{2^2+(-1)^2+3^2+(-7)^2+(-2)^2+1^2+4^2}{7}$

$=\frac{84}{7}=12$

$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\,(\text{개})$

073 답 $\sqrt{10}$

4개의 자료 $a-4,\ a-2,\ a+2,\ a+4$의 평균부터 구하자.

$(\text{평균})=\frac{(a-4)+(a-2)+(a+2)+(a+4)}{4}=\frac{4a}{4}=a$

평균이 a이므로 4개의 자료의 편차를 각각 구하면

$-4,\ -2,\ 2,\ 4$지?

$(\text{분산})=\frac{(-4)^2+(-2)^2+2^2+4^2}{4}=\frac{16+4+4+16}{4}$

$=\frac{40}{4}=10$

$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{10}$

074 답 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$개

6개의 자료 $a,\ 9,\ 6,\ 10,\ 8,\ 12$에 대하여 평균이 8개이므로 편차를 구하면 각각 $a-8,\ 1,\ -2,\ 2,\ 0,\ 4$지?

편차의 합은 항상 0이므로

$(a-8)+1+(-2)+2+0+4=0 \qquad \therefore a=3$

따라서 편차는 $-5,\ 1,\ -2,\ 2,\ 0,\ 4$이므로 분산을 구할 수 있지?

$(\text{분산})=\frac{(-5)^2+1^2+(-2)^2+2^2+0^2+4^2}{6}$

$=\frac{25+1+4+4+0+16}{6}=\frac{50}{6}=\frac{25}{3}$

$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{\frac{25}{3}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\,(\text{개})$

075 답 $\sqrt{6.8}$점

1회부터 5회까지의 성적의 편차가 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$이므로 분산을 구하면

$(\text{분산})=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5}$ … ㉠

그런데 1회부터 3회까지의 분산이 7이므로

$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=7 \qquad \therefore a^2+b^2+c^2=21$ … ㉡

또, 4회부터 5회까지의 분산이 $\frac{13}{2}$이므로

$\frac{d^2+e^2}{2}=\frac{13}{2} \qquad \therefore d^2+e^2=13$ … ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$(\text{분산})=\frac{21+13}{5}=\frac{34}{5}=6.8$

$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{6.8}\,(\text{점})$

076 답 $-\frac{117}{2}$

5개의 변량의 편차가 $-2,\ -2,\ a,\ 3,\ b$이고, 편차의 합은 항상 0이므로 $(-2)+(-2)+a+3+b=0$

$\therefore a+b=1$ … ㉠

또, 표준편차가 $3\sqrt{3}$이므로 분산은 $(3\sqrt{3})^2=27$이지?

$\frac{(-2)^2+(-2)^2+a^2+3^2+b^2}{5}=27$

$4+4+a^2+9+b^2=135$

$\therefore a^2+b^2=118$ … ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$(a+b)^2=1,\ a^2+2ab+b^2=1$

$118+2ab=1\ (\because ㉡),\ 2ab=-117$

$\therefore ab=-\frac{117}{2}$

N

077 답 ⑤

총 횟수가 10회이므로 $a+2+b+4=10$

$\therefore a+b=4$ … ㉠

또, 평균이 9점이므로

(평균)$=\dfrac{7\times a+8\times 2+9\times b+10\times 4}{10}=\dfrac{7a+9b+56}{10}=9$

$7a+9b+56=90$

$\therefore 7a+9b=34$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=1$, $b=3$

표를 다시 정리하고 편차를 구하자.

점수(점)	7	8	9	10
횟수(회)	1	2	3	4
편차(점)	-2	-1	0	1

표준편차를 구하기 위해 분산을 먼저 구해야지?

(분산)$=\dfrac{(-2)^2\times 1+(-1)^2\times 2+0^2\times 3+1^2\times 4}{10}$

$=\dfrac{10}{10}=1$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{1}=1$(점)

오|답|피|하|기

이 문제에서 a, b의 값을 구하는 식이 하나 더 존재해.
편차의 합은 0이라는 성질을 이용해 구할 수 있어.
각 편차가 -2, -1, 0, 1이므로
$-2\times a-1\times 2+0\times b+1\times 4=0$에서 $a=1$
이것이 더 쉽지? 문제 푸는 방법이 꼭 하나만 있는 게 아니니까
정석인 풀이만 고집하지 말고 다각도로 생각하는 연습이 필요해.

078 답 ④

5개의 변량의 편차가 각각 -3, -1, a, 1, b이고, 편차의 합이 항상 0임을 잊지 않고 있지? 이를 이용하여 a에 대한 식을 찾으면

$(-3)+(-1)+a+1+b=0$

$\therefore a=3-b$ … ㉠

그런데 표준편차가 $\sqrt{6}$이므로 분산이 6이지?

(분산)$=\dfrac{(-3)^2+(-1)^2+a^2+1^2+b^2}{5}$

$=\dfrac{9+1+a^2+1+b^2}{5}=6$

$a^2+b^2+11=30 \qquad \therefore a^2+b^2=19$ … ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(3-b)^2+b^2=19$, $b^2-6b+9+b^2=19$

$2b^2-6b-10=0$, $2(b^2-3b-5)=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 가능한 모든 b의 값의 합은 3이야.

079 답 ④

평균이 5회이므로 편차를 구하면 다음과 같아.

월	1	2	3	4	5
횟수(회)	8	4	a	b	5
편차	3	-1	$a-5$	$b-5$	0

이때, 평균이 5회이므로

$\dfrac{8+4+a+b+5}{5}=5$

$a+b+17=25$

$\therefore a+b=8$ … ㉠

또, 편차를 이용하여 분산을 구하면

(분산)$=\dfrac{3^2+(-1)^2+(a-5)^2+(b-5)^2+0^2}{5}$

$=\dfrac{9+1+(a-5)^2+(b-5)^2}{5}$

$=\dfrac{(a-5)^2+(b-5)^2+10}{5}$

그런데 분산이 4이므로

$\dfrac{(a-5)^2+(b-5)^2+10}{5}=4 \qquad \therefore (a-5)^2+(b-5)^2=10$ … ㉡

㉠에서 $b=8-a$를 ㉡에 대입하면

$(a-5)^2+(8-a-5)^2=10$, $(a-5)^2+(3-a)^2=10$

$a^2-10a+25+9-6a+a^2=10$

$2a^2-16a+24=0$, $a^2-8a+12=0$, $(a-2)(a-6)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=6$

㉠에 의해 $\begin{cases}a=2\\b=6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}$

$\therefore ab=12$

[다른 풀이]

㉡을 정리해 보자.

$(a-5)^2+(b-5)^2=10$

$a^2-10a+25+b^2-10b+25=10$

$a^2+b^2-10(a+b)=-40$

$a^2+b^2-10\times 8=-40$ ($\because$㉠)

$a^2+b^2=40$ … ㉢

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로 ㉠, ㉢에서

$40=8^2-2ab \qquad \therefore ab=12$

080 답 ③

3개의 변량 6, $a+5$, $2a+1$에 대한 평균을 구하면

(평균)$=\dfrac{6+(a+5)+(2a+1)}{3}=\dfrac{3a+12}{3}=a+4$

각 변량에 대한 편차를 각각 구하면 $2-a$, 1, $a-3$이므로 분산을 구하면

(분산)$=\dfrac{(2-a)^2+1^2+(a-3)^2}{3}=\dfrac{a^2-4a+4+1+a^2-6a+9}{3}$

$=\dfrac{2a^2-10a+14}{3}$

그런데 표준편차가 $\sqrt{2}$이므로 분산은 $(\sqrt{2})^2=2$지?

따라서 $\dfrac{2a^2-10a+14}{3}=2$에서

$2a^2-10a+14=6$, $2a^2-10a+8=0$

$2(a^2-5a+4)=0$, $2(a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=4$

따라서 모든 a의 값의 곱은 $1\times 4=4$야.

081 답 $a=0$, $b=10$

주어진 10개의 자료의 평균이 5이므로

$\dfrac{4+8+5+a+7+8+3+3+2+b}{10}=5$

$\dfrac{40+a+b}{10}=5$, $40+a+b=50$

$\therefore a+b=10$ ⋯ ㉠

그리고 분산이 9이므로

$\dfrac{(4-5)^2+(8-5)^2+(5-5)^2+(a-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(2-5)^2+(b-5)^2}{10}$

$=\dfrac{1+9+0+(a-5)^2+4+9+4+4+9+(b-5)^2}{10}$

$=\dfrac{40+(a-5)^2+(b-5)^2}{10}=9$

$(a-5)^2+(b-5)^2=50$ ⋯ ㉡

㉠에서 $b=10-a$를 ㉡에 대입하면

$(a-5)^2+(10-a-5)^2=50$, $(a-5)^2+(5-a)^2=50$

$2(a-5)^2=50$, $(a-5)^2=25$, $a-5=\pm\sqrt{25}=\pm5$

$\therefore a=0$ 또는 $a=10$

㉠에 의해 $\begin{cases} a=0 \\ b=10 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=10 \\ b=0 \end{cases}$

그런데 $a<b$이므로 $a=0$, $b=10$

082 답 $\sqrt{82}$ 점

A, B 두 그룹의 평균이 같지? A, B의 도수가 각각 20명이고, 표준편차가 각각 10점, 8점이므로

그룹	평균(점)	표준편차(점)
A	80	10
B	80	8

(A, B 두 그룹 전체의 표준편차)

$=\sqrt{\dfrac{20\times10^2+20\times8^2}{20+20}}=\sqrt{\dfrac{3280}{40}}$

$=\sqrt{82}$ (점)

083 답 평균 75점, 분산 108

두 반 A, B의 평균이 75점으로 같지? 그럼, 두 반 A, B를 합한 전체 평균도 75점으로 같아.

반	학생 수(명)	평균(점)	분산
A	30	75	100
B	20	75	120

(표준편차)$=\sqrt{\dfrac{30\times100+20\times120}{30+20}}$

$=\sqrt{\dfrac{3000+2400}{50}}=\sqrt{\dfrac{5400}{50}}$

$=\sqrt{108}$ (점)

$\therefore$ (분산)$=$(표준편차)$^2=108$

084 답 19.8

남, 여 두 그룹의 평균이 70점으로 같지? 그럼, 남, 여 두 그룹의 전체 평균도 70점으로 같아.

그룹	도수(명)	평균(점)	표준편차(점)
남	24	70	3
여	16	70	6

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{\dfrac{24\times3^2+16\times6^2}{24+16}}$

$=\sqrt{\dfrac{216+576}{40}}=\sqrt{\dfrac{792}{40}}$

$=\sqrt{19.8}$ (점)

$\therefore$ (분산)$=$(표준편차)$^2=19.8$

085 답 $\sqrt{26}$ kg

세 분단 A, B, C의 몸무게에 대한 평균이 모두 같으므로 세 분단 전체의 몸무게에 대한 평균은 각 분단의 평균과 같겠지?

분단	학생 수(명)	표준편차(kg)
A	10	5
B	10	7
C	10	2

A 분단의 편차의 총합 : 10×5^2

B 분단의 편차의 총합 : 10×7^2

C 분단의 편차의 총합 : 10×2^2

$\therefore$ (A, B, C 세 분단의 표준편차)

$=\sqrt{\dfrac{10\times5^2+10\times7^2+10\times2^2}{10+10+10}}$

$=\sqrt{\dfrac{250+490+40}{30}}=\sqrt{\dfrac{780}{30}}$

$=\sqrt{26}$ (kg)

오|답|피|하|기

두 집단뿐만 아니라 세 집단 이상이 있어도 평균이 같다면 그 집단 전체의 표준편차를 구할 수 있어. 그 이유는 집단이 하나씩 생길 때마다 분자에는 새로 생긴 집단의 편차의 제곱의 총합을 더 넣기만 하면 되고 분모에는 증가한 도수만큼 더해 주면 되기 때문이야. 즉, 평균이 같은 세 집단 A, B, C의 도수가 각각 a, b, c이고, 표준편차가 각각 s, t, v라 하면

(세 집단 전체의 표준편차)$=\sqrt{\dfrac{as^2+bt^2+cv^2}{a+b+c}}$

어때, 이해가 되지?

086 답 ②

표준편차가 크다는 것은 변량간의 격차가 크다는 거니까 주어진 자료들 중에서 표준편차가 가장 큰 것은 ②야.

087 답 ①

087번과 마찬가지로 찾아보면 표준편차가 가장 큰 것은 ①이야.

088 답 ⑤

표준편차가 작다는 것은 변량들이 평균 가까이에 밀집되어 있다는 거지? 따라서 주어진 자료 중 표준편차가 가장 작은 것은 ⑤야.

089 답 ①

표준편차가 크면 변량들이 평균에서 멀리 떨어져야 해. 따라서 주어진 자료들 중 표준편차가 가장 큰 것은 ①이야.

090 답 ㄱ, ㄷ

10명이 A, B 두 조로 나누어 치른 수학 시험 결과를 정리하면 다음과 같지?

A조(점)	8	7	7	6	7
B조(점)	7	5	8	9	6

ㄱ. (A조의 평균)$=\frac{8+7+7+6+7}{5}=\frac{35}{5}=7$(점)

(B조의 평균)$=\frac{7+5+8+9+6}{5}=\frac{35}{5}=7$(점)

따라서 A조와 B조의 시험 점수의 평균은 같아. (참)

ㄴ. A조의 평균이 7이므로 (편차)^{2}의 총합을 이용하여 분산과 표준편차를 구하자.

(A조의 분산)$=\frac{(8-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2}{5}$

$=\frac{2}{5}$

(A조의 표준편차)$=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$(점) (거짓)

ㄷ. A조와 B조 중 어느 조가 성적이 더 고른지는 표준편차를 구해야 알 수 있겠지?

ㄴ에서 A조의 표준편차는 $\frac{\sqrt{10}}{5}$점이므로 B조의 표준편차만 구하면 되겠지?

(B조의 분산)$=\frac{(7-7)^2+(5-7)^2+(8-7)^2+(9-7)^2+(6-7)^2}{5}$

$=\frac{10}{5}=2$

∴ (B조의 표준편차)$=\sqrt{2}$점

따라서 A조의 표준편차는 B조의 표준편차보다 작으니까 A조가 B조보다 수학 점수가 더 고르다고 할 수 있어. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이야.

091 답 ④

과목	국어	영어	수학	사회	과학
표준편차(점)	4.3	3.8	8.0	3.4	5.7

점수가 고를수록 표준편차가 작지?

따라서 점수가 가장 고른 과목은 사회야.

092 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. (편차)=(변량)−(평균)이므로 평균보다 큰 변량의 편차는 양수지? (거짓)

ㄴ. (편차의 평균)$=\frac{(\text{편차})\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}}$에서 편차의 합은 항상 0이므로

(편차의 평균)$=\frac{0}{(\text{도수})\text{의 총합}}=0$ (참)

ㄷ. 분포 상태가 고르면 변량들이 평균 근방에 모여 있으므로 표준편차가 작지? (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이야.

093 답 영훈

이름	민재	창민	영훈	세진	연준
평균(시간)	12	15	11	20	7
표준편차(시간)	1	0.5	1.6	0.8	1.4

독서를 가장 불규칙하게 한 학생을 구하는 것이므로 독서 시간이 가장 고르지 못한 학생을 구하면 되지?

즉, 표준편차가 가장 큰 학생을 찾으면 돼.

따라서 독서 시간이 가장 불규칙한 학생은 표준편차가 가장 큰 학생인 영훈이야.

094 답 A, C

A, B, C의 점수가 모두 42점이므로 평균은 $\frac{42}{6}=7$(점)이야.

표준편차를 구하기 위해 각각의 분산을 구하자.

(A의 분산)

$=\frac{(9-7)^2+(9-7)^2+(9-7)^2+(3-7)^2+(9-7)^2+(3-7)^2}{6}$

$=\frac{48}{6}=8$

(B의 분산)

$=\frac{(7-7)^2+(6-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2}{6}$

$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(C의 분산)

$=\frac{(7-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2}{6}$

$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

∴ (A의 표준편차)$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$(점),

(B의 표준편차)$=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$(점),

(C의 표준편차)$=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$(점)

∴ (A의 표준편차)>(B의 표준편차)>(C의 표준편차)

[다른 풀이]

점수 폭의 차이가 가장 큰 사람은 A이고, 가장 작은 사람은 값이 모여 있는 C가 되지?

따라서 표준편차가 가장 큰 사람과 가장 작은 사람을 차례로 나타낸 것은 A, C야.

095 답 영어

영어 점수의 평균을 구하면

(평균)$=\frac{75+85+85+90+90}{5}=\frac{425}{5}=85$(점)

즉, 수학 점수의 평균도 85점이므로 5회째 수학 점수를 x점이라 하면

$\frac{75+80+85+90+x}{5}=85$, $330+x=425$

∴ $x=95$

따라서 5회째 수학 점수는 95점이다.

(영어 점수의 분산)$=\frac{(-10)^2+0^2+0^2+5^2+5^2}{5}=\frac{150}{5}=30$

(수학 점수의 분산)$=\dfrac{(-10)^2+(-5^2)+0^2+5^2+10^2}{5}=\dfrac{250}{5}=50$

이때, 분산이나 표준편차가 작을수록 변량이 평균에서 흩어진 정도가 더 작으므로 구하는 과목은 영어이다.

096 답 ②

반	A	B	C	D
평균(cm)	161	164.5	163	162
표준편차(cm)	5	9	2	3

① A, B, C, D 네 반 모두 평균이 160 cm 이상이지만 주어진 자료만으로는 160 cm 이상인 학생 수를 알 수 없어. (거짓)

② 키 차이가 많이 나는 반이란 표준편차가 큰 반을 의미하는 거지? 따라서 키 차이가 가장 많이 나는 반은 표준편차가 가장 큰 반을 의미하므로 B반이야. (참)

③ 주어진 자료만으로는 B반이 A반보다 학생 수가 많은지 적은지는 알 수 없어. (거짓)

④ 평균이 가장 큰 반은 C반이 아니라 B반이지? 따라서 B반 학생들의 키가 다른 반에 비해 크다고 할 수 있어. (거짓)

⑤ 주어진 자료만으로는 D반에 160 cm 이하의 학생이 있는지 없는지 알 수 없어. (거짓)

097 답 D

오존 농도 \ 도시	A	B	C	D	E
평균(ppm)	17	25	23	21	19
표준편차(ppm)	1.2	2.2	1.7	1.1	1.8

오존 농도의 변화가 작다는 의미는 평균 주위에 값이 모여있다는 것이므로 결국 표준편차가 작다는 것을 의미해.
따라서 오존 농도의 변화가 가장 작은 도시는 표준편차가 가장 작은 D야.

잘 틀리는 유형 훈련 +1up

p. 112

098 답 13

1st 자료의 개수가 홀수인 경우에는 중앙값은 자료 속에 존재하지?

$a<b$인 두 자연수 a, b에 대하여 변량 2, 3, 7, a, b의 중앙값이 5이고 자료의 개수가 5개로 홀수이므로 중앙값 5는 자료 속에 존재해. 그런데 a와 b를 제외한 수에서 5는 없으니까 a나 b 둘 중 하나가 5가 되어야 해. 이때, $a<b$이므로 $a=5$야.

2nd 자료의 개수가 짝수인 경우 중앙값을 구할 때 주의하자.

변량 6, 10, a, b에 $a=5$를 대입하고 미지수 b를 제외한 나머지를 크기 순서대로 나열하면 5, 6, 10이지?
b의 크기에 따라 중앙값이 달라지므로 중앙값이 7이 될 수 있는 b를 찾자. 이때, $b>a=5$이므로 변량 5, 6, 10, b를 크기 순서대로 나열하면 다음과 같이 3가지 경우가 존재해.

(i) 5, b, 6, 10인 경우 중앙값은 $\dfrac{b+6}{2}=7$ $\quad\therefore b=8$

$b<6$이므로 이것은 모순이야. ← NO!

(ii) 5, 6, b, 10인 경우 중앙값은 $\dfrac{6+b}{2}=7$ $\quad\therefore b=8$ ← OK!

(iii) 5, 6, 10, b인 경우 중앙값은 $\dfrac{6+10}{2}=8$ ← NO!

(i)~(iii)에 의하여 $b=8$

$\therefore a+b=5+8=13$

오답피하기

변량에 문자가 있으면 크기 순서대로 나열할 수 없기 때문에 중앙값을 구하기 쉽지 않아.
이 문제도 그런 경우인데 주어진 조건 중 $a<b$가 a, b의 크기 순서를 정하는 데 역할을 하고 있지?
그리고 자료의 개수가 홀수라는 것으로 중앙값이 자료 속에 존재하게 된다는 것도 숨겨진 조건이지만 중요해!
모르는 변량이 주어지고 중앙값이 주어질 때 그 변량의 값을 구하는 게 쉽진 않지만 먼저 아는 변량을 배열하고 그 안에서 모르는 변량을 끼어 넣어서 중앙값을 추정해 보는 사고를 통해 모르는 변량의 값을 알 수 있어.
결국 이런 유형의 문제는 주어진 조건에 주의를 해야 하고, 경우를 잘 나누어 풀면 되는 거야.

099 답 $a=15$, $b=17$

1st 자료 A에서 a 또는 b의 값을 구해 보자.

자료 A의 자료의 개수가 5개로 홀수이므로 중앙값은 자료에 있지?
그런데 a와 b를 제외한 수에서 15는 없으므로 a나 b 둘 중 하나가 15가 되어야겠지?
여기서 $a<b$이므로 $a=15$가 되어야 해.
$b=15$라고 하면 $b<a$가 되어 모순이 되기 때문이야.

2nd 두 자료 A, B를 섞은 전체 자료에서 $b-1$과 b를 제외하여 크기 순서대로 나열하여 중앙값이 16이 되도록 b를 구해 보자.

두 자료 A, B를 섞은 전체 자료에서 $b-1$과 b를 제외하여 크기 순서대로 나열하자.
11, 13, 15, 15, 16, 18, 19, 20
여기에 $b-1$과 b를 넣으면 자료의 개수가 10개로 짝수이므로 중앙값이 16이 되려면 중앙의 2개의 값이 16으로 같아야 하지?
11, 13, 15, 15, 16, $b-1$, b, 18, 19, 20

$\dfrac{(b-1)+16}{2}=16$, $b=17$

100 답 40

1st 변량 3, 6, a의 중앙값이 6이 되기 위한 a의 조건을 구해 보자.

변량 3, 6, a의 중앙값이 6이 되기 위해서는 $a\geq 6$ ⋯ ㉠이어야 해.

2nd 변량 10, 15, a의 중앙값이 10이 되기 위한 a의 조건을 구해 보자.

변량 10, 15, a의 중앙값이 10이 되게 크기 순서대로 나열하면 a, 10, 15가 되어야 해. $\quad\therefore a\leq 10$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡에 의해 $6\leq a\leq 10$
따라서 자연수 a가 될 수 있는 것은 6, 7, 8, 9, 10이고, 이들의 합은 $6+7+8+9+10=40$

오답피하기

여기서 변량의 개수가 3개로 홀수니까 중앙값이 자료에 꼭 존재한다구. 그래서 변량을 크기 순서대로 나열할 때, 중앙값을 정중앙에 놓고 생각해 보면 풀 수 있어.
특히, 이 문제에서는 3, 6, 6일 때와 같이 같은 수가 2개라도 6이 중앙값이 됨을 꼭 기억하자. 즉, 중앙값은 모든 변량을 크기 순서대로 쭈욱 나열하고 중앙에 위치한 것을 찾는 거니까 같은 수가 여러 개 있을 수도 있어. 먼저 변량 3, 6, a에서 중앙값이 6이라는 뜻은 6이 크기순으로 가운데에 있다는 뜻이므로 $a\geq6$이 되어야 해. 마찬가지로 변량 10, 15, a의 중앙값이 10이니깐 같은 논리로 $a\leq10$임을 알 수 있겠지?

101 답 47

1st 자료의 개수가 홀수인 경우에는 중앙값이 자료에 존재하지?

조건 (가)의 다섯 개의 수 22, 15, 28, a, 12에서 a를 제외한 자료를 크기 순서대로 나열하면 12, 15, 22, 28이야.
그런데 여기에 a를 포함한 자료의 중앙값이 22이므로 a는 다음과 같이 22의 오른쪽에 위치해야겠지?
12, 15, 22, a, 28
$\therefore a\geq22$ … ㉠

2nd 자료의 개수가 짝수인 경우에는 중앙의 2개의 값의 합을 2로 나눈 값이 중앙값이야.

조건 (나)의 네 개의 수 40, 25, a, 25에 a를 제외한 자료를 크기 순서대로 나열하면 25, 25, 40이야.
그런데 여기에 a를 포함한 자료의 중앙값이 25이므로 a는 25의 왼쪽에 위치해야겠지?
a, 25, 25, 40
$\therefore a\leq25$ … ㉡
두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 a의 범위는 $22\leq a\leq25$야.
따라서 a의 최솟값, 최댓값은 각각 22, 25이므로
(구하는 합)$=22+25=47$

오답피하기

줄기와 잎 그림은 크기순으로 배열된 형상을 보이기 때문에 중앙값을 구하기 편한 이점이 있어. 보통 무작위로 주어진 자료의 변량들의 중앙값을 구할 때는 그 변량들을 크기순으로 나열해야 되지만 여기서는 줄기와 잎 그림에서 이미 숫자들이 크기순으로 나열되어 있기 때문에 중앙값을 바로 구할 수 있어. 조금 더 나아가서 단순히 이 문제에서 요구하는 것 이외에도 평균이나 최빈값을 구해보는 연습도 해본다면 더욱 좋겠지?

102 답 3, 8

1st 먼저 평균을 구하자.

변량 5, 3, 8, 6, x의 평균을 구하면

(평균)$=\dfrac{5+3+8+6+x}{5}=\dfrac{22+x}{5}$

2nd 주어진 변량을 크기 순서대로 나열하여 중앙값을 구하자.

변량 5, 3, 8, 6, x에서 x의 크기에 따른 중앙값을 구하면 다음과 같아.

x, 3, 5, 6, 8/3, x, 5, 6, 8/3, 5, x, 6, 8/3, 5, 6, x, 8/3, 5, 6, 8, x
즉, 중앙값이 될 수 있는 것은 5, 6, x야.

3rd 평균과 중앙값이 같다는 것을 이용하여 자연수 x를 구하자.

(i) 중앙값이 5라 하면

$\dfrac{22+x}{5}=5$, $22+x=25$ $\quad\therefore x=3$ ←OK!

(ii) 중앙값이 6이라고 하면

$\dfrac{22+x}{5}=6$, $22+x=30$ $\quad\therefore x=8$ ←OK!

(iii) 중앙값이 x라고 하면

$\dfrac{22+x}{5}=x$, $22+x=5x$ $\quad\therefore 4x=22$

$\therefore x=\dfrac{11}{2}$ ←NO! (자연수가 아니지)

따라서 자연수 x는 3, 8이야.

오답피하기

변량의 개수가 홀수일 때는 중앙값은 변량을 크기 순서대로 나열하여 중앙에 있는 값이잖아. 그런데 변량의 크기를 알 수 없는 경우에는 중앙값을 구하기 어려워.
이 문제에서는 그 부분을 극복해야 문제를 풀 수 있어.
그래서 x가 위치할 수 있는 모든 경우를 다 따져 줘야 해.
그럼, 중앙값이 될 수 있는 경우는 5, 6, x밖에 없다는 것을 추론할 수 있어.
생각보다 경우의 수가 많지 않으므로 당황하지 말고 모든 경우의 수를 나눠서 생각하는 게 핵심이야.

103 답 7

1st 최빈값은 도수가 가장 큰 값임을 이용하자.

주어진 자료가 10, 11, 13, 10, x, 10, 9이므로 x가 어떤 값이든지 도수가 가장 큰 값은 10이지?
$\therefore$ (최빈값)$=10$회

2nd 최빈값과 평균이 같음을 이용하여 x를 구하자.

(평균)$=\dfrac{10+11+13+10+x+10+9}{7}=\dfrac{63+x}{7}$(회)

이때, 평균과 최빈값이 같으므로

$\dfrac{63+x}{7}=10$

$63+x=70$
$\therefore x=7$

104 답 28

1st 먼저 주어진 자료를 크기 순서대로 나열하자.

주어진 자료를 크기 순서대로 나열하면
3, 3, 4, 5, 6, 7, 8

2nd 크기 순서대로 나열된 자료의 중앙값을 구하자.

7개의 자료의 중앙값은 4번째 수인 5가 돼.
$\therefore$ (중앙값)$=b=5$

3rd 최빈값은 도수가 가장 큰 값을 찾으면 돼. 또한 평균은 전체 변량의 총합을 전체 도수로 나눈 거지?

주어진 자료에서 도수가 가장 큰 값은 3이지?

$\therefore$ (최빈값)$=c=3$

이제 평균을 구하자.

$$(\text{평균})=a=\frac{3+3+4+5+6+7+8}{7}=\frac{36}{7}$$

$$\therefore 7a-b-c=7\times\frac{36}{7}-5-3$$
$$=36-5-3=28$$

105 답 16.9

1st 중앙값을 구하기 위해 자료를 크기 순서대로 나열해 보자.

주어진 자료를 크기 순서대로 나열하면 다음과 같지?

2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 9

자료의 개수가 10개로 짝수이므로 중앙값은

$\frac{5+6}{2}=\frac{11}{2}=5.5$ $\quad\therefore b=5.5$

2nd 최빈값은 도수가 가장 큰 수지?

주어진 자료 중 6은 도수가 3개로 가장 크므로 최빈값은 6

$\therefore c=6$

3rd 평균은 변량의 총합을 전체 도수로 나눈 거지?

$$(\text{평균})=\frac{2+3+4+5+5+6+6+6+8+9}{10}$$
$$=\frac{54}{10}=5.4$$

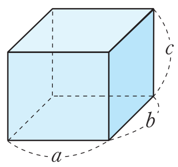
$\therefore a=5.4$

$\therefore a+b+c=5.4+5.5+6=16.9$

106 답 142

1st 먼저 무엇을 구해야 하는지 알아보자.

구하는 것은 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 a, b, c인 직육면체의 6개의 면의 넓이의 평균이야.



$$\therefore (\text{평균})=\frac{ab+ab+bc+bc+ca+ca}{6}$$
$$=\frac{2(ab+bc+ca)}{6}=\frac{ab+bc+ca}{3}\ \cdots\ ㉠$$

2nd 직육면체의 모서리의 길이의 평균과 분산을 이용하여 식을 세우자.

직육면체는 길이가 a, b, c인 모서리가 각각 4개씩 총 12개의 모서리가 있고 평균이 12이므로

$\frac{4a+4b+4c}{12}=12$, $\frac{a+b+c}{3}=12$ $\quad\therefore a+b+c=36\ \cdots\ ㉡$

또, 직육면체의 모서리의 길이의 분산이 4이므로

$$\frac{4(a-12)^2+4(b-12)^2+4(c-12)^2}{12}=4$$

$$\frac{(a-12)^2+(b-12)^2+(c-12)^2}{3}=4$$

$a^2-24a+144+b^2-24b+144+c^2-24c+144=12$

$a^2+b^2+c^2-24(a+b+c)+432=12$

$a^2+b^2+c^2=24(a+b+c)-420$

$\quad=24\times36-420$ ($\because$ ㉡)$=444\ \cdots\ ㉢$

3rd $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$임을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 유도하자.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에 ㉡, ㉢을 대입하면

$36^2=444+2(ab+bc+ca)$, $2(ab+bc+ca)=852$

$\therefore ab+bc+ca=426$

$\therefore$ (구하는 평균)$=\frac{ab+bc+ca}{3}$ ($\because$ ㉠)$=\frac{426}{3}=142$

오답피하기

이 문제는 식을 제대로 세웠어도 곱셈 공식을 제대로 적용하지 못하면 풀 수 없는 난이도 있는 문제야.

이런 유형의 문제는 풀이처럼 무엇을 구해야하는지 식을 세우고, 조건을 어떻게 적절히 이용하여 구하려는 식으로 유도할지 생각해 보아야 해.

$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$

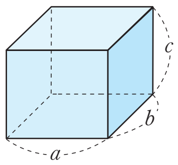
$\quad=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

복잡한 것 같지만 알아 두면 고등학교에서도 유용한 공식이야.

107 답 99

1st 먼저 무엇을 구해야 하는지 알아보자.

구하는 것은 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 a, b, c인 직육면체의 6개의 면의 넓이의 평균이므로



$$\frac{2(ab+bc+ca)}{6}=\frac{ab+bc+ca}{3}\ \cdots\ ㉠$$

2nd 직육면체의 모서리의 길이의 평균과 분산을 이용하여 식을 세우자.

직육면체는 길이가 a, b, c인 모서리가 각각 4개씩 총 12개의 모서리가 있고, 평균이 10이므로

$\frac{4a+4b+4c}{12}=10$, $\frac{a+b+c}{3}=10$

$\therefore a+b+c=30\ \cdots\ ㉡$

또, 직육면체의 모서리의 길이의 분산이 2이므로

$$\frac{4(a-10)^2+4(b-10)^2+4(c-10)^2}{12}=2$$

$$\frac{(a-10)^2+(b-10)^2+(c-10)^2}{3}=2$$

$a^2-20a+100+b^2-20b+100+c^2-20c+100=6$

$a^2+b^2+c^2-20(a+b+c)+300=6$

$\therefore a^2+b^2+c^2=20(a+b+c)-294$

$\quad=20\times30-294$ ($\because$ ㉡)

$\quad=306\ \cdots\ ㉢$

3rd $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$임을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구하자.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에 ㉡, ㉢을 대입하면

$900=306+2(ab+bc+ca)$, $2(ab+bc+ca)=594$

$\therefore ab+bc+ca=297$

$\therefore$ (구하는 평균)$=\frac{ab+bc+ca}{3}$ ($\because$ ㉠)$=\frac{297}{3}=99$

N

108 답 2, 10

1st 분산을 구하기 위해 평균을 먼저 구해야지?

5개의 변량 3, x, 5, $12-x$, 10의 평균을 구하면

$$(\text{평균})=\frac{3+x+5+(12-x)+10}{5}=\frac{30}{5}=6$$

2nd 이제 분산을 구하자.

5개의 변량 3, x, 5, $12-x$, 10의 편차를 각각 구하면

-3, $x-6$, -1, $6-x$, 4지?

그런데 분산이 11.6이므로

$$\frac{(-3)^2+(x-6)^2+(-1)^2+(6-x)^2+4^2}{5}=11.6$$

$9+(x-6)^2+1+(6-x)^2+16=58$

$x^2-12x+36+36-12x+x^2-32=0$

$2x^2-24x+40=0$

$x^2-12x+20=0$

$(x-2)(x-10)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=10$

오|답|피|하|기

> 변량 속에 문자 x가 나와서 평균을 구하기 힘들다고 생각했을 거야. 하지만 그것은 그냥 걱정일 뿐이야. 이런 유형의 문제들은 보통 평균을 구할 때 x가 없어지거든.
> 문자가 들어있는 식에 대해 어렵게 생각하지 말고 일단 펜을 들고 풀어보기 시작하면 방법이 보일 거야.

109 답 4, 6

1st 분산을 구하기 위해 평균을 먼저 구해야지?

5개의 변량 7, 8, $10-x$, 9, x의 평균을 구하면

$$(\text{평균})=\frac{7+8+(10-x)+9+x}{5}=\frac{34}{5}=6.8$$

2nd 이제 분산이 2.96임을 이용하여 x의 값을 구하자.

5개의 변량 7, 8, $10-x$, 9, x의 편차를 각각 구하면 0.2, 1.2, $3.2-x$, 2.2, $x-6.8$이지?

그런데 분산이 2.96이므로

$$\frac{0.2^2+1.2^2+(3.2-x)^2+2.2^2+(x-6.8)^2}{5}=2.96$$

$0.04+1.44+10.24-6.4x+x^2+4.84+x^2-13.6x+46.24=14.8$

$2x^2-20x+48=0$

$x^2-10x+24=0$

$(x-4)(x-6)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=6$

110 답 ②

1st A, B, C의 각 변량 사이의 관계를 따져 보자.

A : 1부터 20까지의 자연수, B : 21부터 40까지의 자연수

C : 1부터 40까지의 짝수

라고 주어졌지?

$$\begin{array}{llllll} \text{A}: & 1, & 2, & 3, & 4,\ \cdots, & 20 \\ & \downarrow{+20} & \downarrow{+20} & \downarrow{+20} & \downarrow{+20} & \downarrow{+20} \\ \text{B}: & 21, & 22, & 23, & 24,\ \cdots, & 40 \end{array}$$

즉, A의 모든 변량에 대하여 20씩 더한 것이 B의 변량이 되는 거야.

$$\begin{array}{llllll} \text{A}: & 1, & 2, & 3, & 4,\ \cdots, & 20 \\ & \downarrow{\times 2} & \downarrow{\times 2} & \downarrow{\times 2} & \downarrow{\times 2} & \downarrow{\times 2} \\ \text{C}: & 2, & 4, & 6, & 8,\ \cdots, & 40 \end{array}$$

즉, A의 모든 변량에 대하여 2배씩 한 것이 C의 변량이 되는 거야.

2nd 분산이 S^2인 어떤 변량의 각각에 a배하고 b를 더한 것의 분산은 a^2S^2이지?

B는 A의 각 변량에 20을 더한 것이니까 분산은 변함이 없겠지? 즉, $a=b$

C는 A의 각 변량에 2배를 한 것이므로 A의 분산의 $2^2=4$(배)가 될 것이야. 즉, $c=4a$

$\therefore a=b<c$

111 답 $a=b<c$

1st A, B, C의 각 변량 사이의 관계를 따져보자.

A : 1부터 n까지의 자연수

B : $n+1$부터 $2n$까지의 자연수

C : 1부터 $2n$까지의 홀수

라고 주어졌지?

$$\begin{array}{llllll} \text{A}: & 1, & 2, & 3, & 4,\ \cdots, & n \\ & \downarrow{+n} & \downarrow{+n} & \downarrow{+n} & \downarrow{+n} & \downarrow{+n} \\ \text{B}: & n+1, & n+2, & n+3, & n+4,\ \cdots, & 2n \end{array}$$

즉, A의 모든 변량에 대하여 n씩 더한 것이 B의 변량이 되지?

$$\begin{array}{llllll} \text{A}: & 1, & 2, & 3, & 4,\ \cdots, & n \\ & \downarrow{\times 2,\,-1} & \downarrow{\times 2,\,-1} & \downarrow{\times 2,\,-1} & \downarrow{\times 2,\,-1} & \downarrow{\times 2,\,-1} \\ \text{C}: & 1, & 3, & 5, & 7,\ \cdots, & 2n-1 \end{array}$$

즉, A의 모든 변량에 대하여 2배를 하고 1을 뺀 것이 C의 변량이 되는 거야.

2nd 표준편차가 S인 어떤 변량의 각각에 a배하고 b를 더한 것의 표준편차는 $|a|S$지?

B는 A의 각 변량에 n을 더한 거니까 분산은 변함이 없고 표준편차도 마찬가지지. 즉, $a=b$

C는 A의 각 변량에 2배를 하고 1을 뺀 것이므로 A의 표준편차의 $|2|$배, 즉 2배가 되지? 즉, $c=2a$

$\therefore a=b<c$

112 답 ①

1st 성적의 고르기만 따지는 것이므로 표준편차의 대소만 따지면 되겠지?

학급	A	B	C	D	E
평균(점)	70	70	70	70	70
표준편차(점)	$\sqrt{10}$	$\sqrt{15}$	$5\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$

a, b가 양수일 때, $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\times b}$임을 이용하자.

$5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\times 2}=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{50}$

$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times3}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{12}$

$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times2}=\sqrt{9\times2}=\sqrt{18}$

따라서 $\sqrt{10}<\sqrt{12}<\sqrt{15}<\sqrt{18}<\sqrt{50}$이므로 표준편차의 값이 작은 학급부터 나열하면 A → D → B → E → C

2nd 1st 에서 구한 표준편차의 대소 관계에 따라 문제에서 물어보는 것을 해석하자.

따라서 표준편차가 가장 작은 A학급의 성적이 가장 고르다고 할 수 있어.

113 답 E, B

1st 성적의 고르기만 따지는 것이므로 표준편차의 대소만 따지면 되겠지?

학급	A	B	C	D	E
평균(점)	72	73	74	75	76
표준편차(점)	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{15}$	$5\sqrt{3}$	$3\sqrt{5}$
	$\sqrt{18}$	$\sqrt{12}$		$\sqrt{75}$	$\sqrt{45}$

주어진 표에서 평균이 가장 높은 학급과 표준편차가 가장 작은 학급에 주목하자.

우선 성적이 가장 좋은 학급을 고르자. 성적이 좋을수록 평균이 더 높겠지? 그래서 A~E 중에서 성적이 가장 좋은 학급은 E가 되겠지.

표준편차의 대소 관계를 따지면

$2\sqrt{3}<\sqrt{15}<3\sqrt{2}<3\sqrt{5}<5\sqrt{3}$

따라서 표준편차의 값이 작은 학급부터 나열하면

B → C → A → E → D

2nd 1st 에서 구한 표준편차의 대소 관계에 따라 문제에서 물어보는 것을 해석하자.

따라서 A~E 중에서 성적이 가장 고르게 분포된 학급은 B야.

서술형 다지기

문제편 p. 116

[114-115 채점기준표]

Ⅰ	주어진 자료를 크기 순서대로 나열한다.	20%
Ⅱ	평균을 구한다.	40%
Ⅲ	중앙값과 최빈값을 각각 구한다.	40%

114 답 평균 5.7, 중앙값 6, 최빈값 9

먼저, 주어진 자료를 크기 순으로 나열하자.

주어진 자료를 크기 순서대로 나열하면

1, 2, 4, 4, 5, 7, 7, 9, 9, 9 … Ⅰ

그다음, 주어진 자료의 평균을 구하자.

$(\text{평균})=\frac{1+2+4+4+5+7+7+9+9+9}{10}=\frac{57}{10}=5.7$ … Ⅱ

그래서, 중앙값, 최빈값을 구하자.

$(\text{중앙값})=\frac{5+7}{2}=6$, $(\text{최빈값})=9$ … Ⅲ

115 답 평균 23.9, 중앙값 23.5, 최빈값 23

먼저, 주어진 자료를 크기 순으로 나열하자.

주어진 자료를 크기 순으로 나열하면

12, 20, 21, 23, 23, 24, 25, 26, 29, 36 … Ⅰ

그다음, 주어진 자료의 평균을 구하자.

주어진 자료를 모두 더하면

$12+20+21+23+23+24+25+26+29+36=239$ … Ⅱ

$(\text{평균})=\frac{239}{10}=23.9$

그래서, 평균, 중앙값, 최빈값을 구하자.

$(\text{중앙값})=\frac{23+24}{2}=23.5$, $(\text{최빈값})=23$ … Ⅲ

[116-117 채점기준표]

Ⅰ	평균을 이용하여 식을 세운다.	40%
Ⅱ	분산 또는 표준편차를 이용하여 식을 세운다.	40%
Ⅲ	구하고자 하는 값을 구한다.	20%

116 답 9

먼저, 평균을 이용하여 $a+b$의 값을 구하자.

$(\text{평균})=\frac{1+3+a+b}{4}=3$

$\therefore a+b=8$ … ㉠ … Ⅰ

그다음, 분산을 이용하여 a, b에 대한 식을 세우자.

$(\text{분산})=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2+(a-3)^2+(b-3)^2}{4}=5$이므로

$4+(a-3)^2+(b-3)^2=20$

$a^2-6a+9+b^2-6b+9=16$

$a^2+b^2-6(a+b)=-2$

$(a+b)^2-2ab-6(a+b)=-2$ ($\because (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$) … Ⅱ

그래서, ab의 값을 구하자.

$8^2-2ab-6\times8=-2$ ($\because$ ㉠)

$2ab=18$

$\therefore ab=9$ … Ⅲ

117 답 $2\sqrt{29}$

먼저, 평균을 이용하여 $a+b$의 값을 구하자.

$(\text{평균})=\frac{8+4+10+a+b}{5}=8$

$\therefore a+b=18$ … ㉠ … Ⅰ

그다음, 표준편차를 이용하여 ab의 값을 구하자.

표준편차가 4이므로 분산은 16

$\frac{0+16+4+(a-8)^2+(b-8)^2}{5}=16$

$a^2-16a+64+b^2-16b+64=60$

$a^2+b^2-16(a+b)=-68$

$(a+b)^2-2ab-16(a+b)=-68$

$324-2ab-288=-68$ ($\because$ ㉠)

$2ab=104$

$\therefore ab=52$ ⋯ ㉡ ⋯ Ⅱ

그래서, $a-b$의 값을 구하자.

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=324-208$ ($\because$ ㉠, ㉡)$=116$

$\therefore a-b=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$ ($\because a>b$) ⋯ Ⅲ

118 답 9개

조건 (가)에서 중앙값이 22이므로 $a\le16$ ⋯ ㉠ ⋯ Ⅰ

조건 (나)에서 중앙값이 8이므로 $a\ge8$ ⋯ ㉡ ⋯ Ⅱ

㉠, ㉡에서 $8\le a\le16$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a의 개수는 8, 9, 10, ⋯, 16으로 9개이다. ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	a에 대한 첫 번째 부등식을 세운다.	40%
Ⅱ	a에 대한 두 번째 부등식을 세운다.	40%
Ⅲ	자연수 a의 개수를 구한다.	20%

119 답 (1) 평균 9.8권, 중앙값 6권, 최빈값 7권 (2) 풀이 참조

(1) (평균)$=\dfrac{2+3+5\times3+7\times4+50}{10}=9.8$(권) ⋯ Ⅰ

7권을 읽은 학생 수가 4명으로 가장 많으므로 (최빈값)=7권

주어진 자료는 크기 순으로 나열되어 있으므로 5번째 자료 5와 6번째 자료 7의 평균이 중앙값이다.

$\therefore$ (중앙값)$=\dfrac{5+7}{2}=6$(권) ⋯ Ⅱ

(2) 자료 50은 나머지 9개의 자료보다 더 큰 값으로 대푯값 중 평균이 자료의 중심경향을 잘 나타내지 못한다. ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	평균, 중앙값, 최빈값을 각각 구한다.	40%
Ⅱ	중심경향을 잘 나타내지 못하는 대푯값을 찾는다.	40%
Ⅲ	중심경향을 잘 나타내지 못하는 이유를 설명한다.	20%

120 답 52

표에서 잎의 개수는 $1+3+5+6+4=19$

즉, 이 자료의 전체 도수는 19이다. ⋯ Ⅰ

자료의 개수가 19개로 홀수이므로 자료를 크기 순서대로 나열하면

중앙값은 $\dfrac{19+1}{2}=10$번째 수가 된다. ⋯ Ⅱ

주어진 줄기와 잎 그림에서 10번째 수는 줄기 5, 잎 2인 52가 돼.

따라서 이 자료의 중앙값은 52이다. ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	자료 전체의 도수를 구한다.	40%
Ⅱ	자료를 크기 순서대로 나열한다.	40%
Ⅲ	중앙값을 구한다.	20%

121 답 2

세 수 a, b, c의 최빈값이 10이므로 세 수 중 적어도 두 수는 10이므로 $a=10$, $b=10$이라 하자. ⋯ Ⅰ

이때, 세 수의 평균이 9이므로 $\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{10+10+c}{3}=9$에서

$20+c=27 \quad \therefore c=7$

따라서 세 수는 10, 10, 7이다. ⋯ Ⅱ

$\therefore$ (분산)$=\dfrac{(10-9)^2+(10-9)^2+(7-9)^2}{3}$

$=\dfrac{1+1+4}{3}=\dfrac{6}{3}=2$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	평균을 이용하여 식을 세운다.	40%
Ⅱ	최빈값과 평균을 이용하여 세 수를 각각 구한다.	40%
Ⅲ	분산을 구한다.	20%

122 답 평균 80점, 분산 65

(전체 평균)$=\dfrac{25\times80+15\times80}{40}=80$(점) ⋯ Ⅰ

남학생의 평균은 80점이고 {(편차)^{2}의 총합}은

$25\times50=1250$

여학생의 평균은 80점이고 {(편차)^{2}의 총합}은

$15\times90=1350$ ⋯ Ⅱ

이때, 남학생의 평균, 여학생의 평균과 전체 학생의 평균은 모두 80점으로 같으므로 이 반의 전체 학생의 분산은

$\dfrac{1250+1350}{40}=65$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	전체 평균을 구한다.	40%
Ⅱ	남학생, 여학생 각각의 편차^{2}의 총합을 구한다.	40%
Ⅲ	전체 학생의 분산을 구한다.	20%

123 답 15

(평균)$=\dfrac{4+(12-x)+x+14+10}{5}=8$ ⋯ Ⅰ

따라서 각 변량의 편차는 순서대로 -4, $4-x$, $x-8$, 6, 2이므로

(분산)$=\dfrac{(-4)^2+(4-x)^2+(x-8)^2+6^2+2^2}{5}=45.2$ ⋯ Ⅱ

$2x^2-24x-90=0$, $x^2-12x-45=0$, $(x-15)(x+3)=0$

$\therefore x=15$ 또는 $x=-3$

이때, x는 양수이므로 구하는 x의 값은 15이다. ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	평균을 구한다.	40%
Ⅱ	분산을 이용하여 x에 대한 식을 세운다.	40%
Ⅲ	x의 값을 구한다.	20%

최고난도 만점 문제

p. 118

124 답 ⑤

1st 자료의 개수가 홀수일 때, 자료가 어떻게 배치가 되는지 파악하고, 자료가 추가될 때 중앙값의 변화를 살펴보자.

하늘이네 반 학생 중 두 사람을 제외하고, 점수를 크기 순서대로 나열할 때, 중앙값이 60점인 경우는 다음과 같이 나열할 수 있지?

두 사람을 제외한 학생 수를 홀수 N이라 하면

$$\underbrace{\bigcirc,\ \bigcirc,\ \cdots,\ \bigcirc}_{\frac{N-1}{2}\text{개}},\ \underset{\uparrow\atop\text{중앙값}}{60},\ \underbrace{\bigcirc,\ \cdots,\ \bigcirc,\ \bigcirc}_{\frac{N-1}{2}\text{개}}$$

그런데 추가되는 두 사람의 점수가 68점, 83점으로 중앙값 60점보다 크므로 추가하기 전의 중앙값이었던 60점은 왼쪽으로 옮겨져. 이때, 각 자료의 도수가 모두 1이므로 추가한 후의 중앙값은 60점보다 커져.

2nd 평균의 정의를 이용하여 평균의 변화를 살펴보자.

두 사람을 제외한 평균이 70점이므로 총 점수를 구하면 $70N$이지?

두 사람의 점수 68점과 83점을 반영한 평균을 구하자.

$$(\text{전체 평균})=\frac{70N+68+83}{N+2}=\frac{70N+151}{N+2}=\frac{70N+140+11}{N+2}$$

$$=\frac{70(N+2)+11}{N+2}=70+\frac{11}{N+2}>70$$

따라서 평균과 중앙값은 모두 커졌지?

125 답 22.8

1st 서로 다른 6개의 변량을 문자로 정하여 식을 세워보자.

서로 다른 6개의 변량을 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6

$(a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6)$이라고 놓자.

가장 작은 것을 제외한 5개의 변량 a_2, a_3, a_4, a_5, a_6의 평균이

27이므로 $\frac{a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{5}=27$에서

$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=135$ ⋯ ㉠

또, 가장 큰 것을 제외한 5개의 변량 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 평균이

23이므로 $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}=23$에서

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=115$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면

$(\cancel{a_2}+\cancel{a_3}+\cancel{a_4}+\cancel{a_5}+a_6)-(a_1+\cancel{a_2}+\cancel{a_3}+\cancel{a_4}+\cancel{a_5})=135-115$

$-a_1+a_6=20$ ⋯ ㉢

2nd 주어진 조건을 이용하여 a_1 또는 a_6의 값을 구하여 6개의 평균을 구해 보자.

주어진 조건에서 가장 작은 변량과 가장 큰 변량의 합이 24이므로

$a_1+a_6=24$ ⋯ ㉣

㉢+㉣을 하면 $(-\cancel{a_1}+a_6)+(\cancel{a_1}+a_6)=20+24$

$2a_6=44$ $\quad\therefore a_6=22$ ⋯ ㉤

이제 평균을 구하자.

$$(\text{평균})=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6}=\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+a_6}{6}$$

$$=\frac{115+22}{6}\ (\because ㉡, ㉤)=\frac{137}{6}=22.8333\cdots$$

따라서 소수점 아래 둘째자리에서 반올림하면 구하는 평균은 22.8이야.

126 답 40

1st 중앙값을 구하기 위해 자료를 크기 순서대로 나열해 보자.

주어진 자료가 다음과 같이 크기 순서대로 나열되어 있지 않지?

21, a, 50, 20, 48, 22, 50, 30

여기서 a를 제외하고, 나머지 변량을 크기 순서대로 나열해 보자.

20, 21, 22, 30, 48, 50, 50

2nd a의 값에 따라 중앙값이 어떻게 변하는지 추론해 보고, 중앙값이 35가 되는 a의 값을 구하자.

a가 제외된 나머지 변량의 중앙값은 30이지?

(ⅰ) $a<30$인 경우

자료의 개수가 8개로 짝수이므로 중앙의 2개의 값의 합을 2로 나눈 값이 중앙값이지?

그럼, 22와 30의 합을 2로 나눈 값인 26이 중앙값이거나 a와 30의 합을 2로 나눈 값인 $\frac{a+30}{2}$이 중앙값이 되어야 하는데 a가 30보다 작기 때문에 $\frac{a+30}{2}$은 35가 될 수 없지?

(ⅱ) $a>30$인 경우

(ⅰ)과 마찬가지 방법으로 생각하자.

30과 48의 합을 2로 나눈 값인 39가 중앙값이거나 30과 a의 합을 2로 나눈 값인 $\frac{30+a}{2}$가 중앙값이 되어야 해?

중앙값이 35이므로

$\frac{30+a}{2}=35$, $30+a=70$ $\qquad\therefore a=40$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=40$

127 답 42

1st $(\text{평균})=\frac{(\text{변량})\text{의 총합}}{(\text{변량})\text{의 개수}}$을 이용하여 식을 세우자.

구하려는 것은 세 자연수 x, y, z의 제곱의 평균이므로

$\frac{x^2+y^2+z^2}{3}$ ⋯ ㉠이지?

따라서 $x^2+y^2+z^2$의 값만 구하면 되겠지?

주어진 조건에서 세 자연수 x, y, z의 평균이 6이므로

$\frac{x+y+z}{3}=6$

$\therefore x+y+z=18$ ⋯ ㉡

또, xy, yz, zx의 평균이 33이므로 $\frac{xy+yz+zx}{3}=33$

$\therefore xy+yz+zx=99$ ⋯ ㉢

2nd $(x+y+z)(x+y+z)$를 전개해 보자.

$(x+y+z)(x+y+z)=x^2+xy+xz+yx+y^2+yz+zx+zy+z^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

㉡과 ㉢에 의해

$18\times18=x^2+y^2+z^2+2\times99$

$324=x^2+y^2+z^2+198$

$\therefore x^2+y^2+z^2=126$

따라서 ㉠에 의해 구하는 평균은 $\frac{126}{3}=42$야.

128 답 $\sqrt{3}$

1st 10개의 자료의 평균을 구하자.

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_5=2\times5=10$ … ㉠이므로

$x_1+x_2+\cdots+x_5+\cdots+x_{10}=10+2+5+3+4+6=30$ … ㉡

따라서 10개의 자료의 평균은 $\frac{30}{10}=3$이야.

2nd 5개의 자료의 변량 각각의 제곱의 총합을 구하자.

5개의 자료 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 표준편차가 $\sqrt{2}$이므로 분산은 2야. 즉,

$\frac{(x_1-2)^2+(x_2-2)^2+\cdots+(x_5-2)^2}{5}=2$

$\therefore (x_1-2)^2+(x_2-2)^2+\cdots+(x_5-2)^2=10$

$x_1^2-4x_1+4+x_2^2-4x_2+4+\cdots+x_5^2-4x_5+4$

$=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2)-4(x_1+x_2+\cdots+x_5)+5\times4=10$

㉠에 의해

$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2)-4\times10+20=10$

$\therefore x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2=30$ … ㉢

3rd 10개의 자료의 분산을 구하자.

$(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+\cdots+(x_{10}-3)^2$

$=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2-6(x_1+x_2+\cdots+x_{10})+9\times10$

$=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2)+(x_6^2+x_7^2+\cdots+x_{10}^2)-6\times30+90$ ($\because$ ㉡)

$=30+(2^2+5^2+3^2+4^2+6^2)-180+90$ ($\because$ ㉢)

$=30$

따라서 10개의 자료 x_1, x_2, $\cdots$, x_{10}의 분산은 $\frac{30}{10}=3$이므로

(표준편차)$=\sqrt{(분산)}=\sqrt{3}$

129 답 평균 8점, 분산 17

1st 전체 평균을 먼저 구해 보자.

6명의 점수를 각각 a_1, a_2, $\cdots$, a_6이라 하자.

이 6명의 점수의 평균이 6점이므로

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_6}{6}=6$　　$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_6=36$ … ㉠

또, 나머지 4명의 점수를 각각 a_7, a_8, a_9, a_{10}이라 하고, 이 4명의 점수의 평균이 11점이므로 $\frac{a_7+a_8+a_9+a_{10}}{4}=11$

$\therefore a_7+a_8+a_9+a_{10}=44$ … ㉡

㉠과 ㉡에 의해 전체 평균을 구하면

(전체 평균)$=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_6)+(a_7+a_8+a_9+a_{10})}{6+4}$

$=\frac{36+44}{10}=\frac{80}{10}=8$(점)

2nd 전체 분산을 구해.

10명의 점수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}의 평균이 8점이므로 분산을 구하면

(전체 분산)$=\frac{(a_1-8)^2+(a_2-8)^2+(a_3-8)^2+\cdots+(a_{10}-8)^2}{6+4}$

$=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{10}^2-16(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+64\times10}{10}$

$=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{10}^2-16\times80+64\times10}{10}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{10}^2-640}{10}$ … ㉢

6명의 점수 a_1, a_2, $\cdots$, a_6의 평균이 6점, 분산이 9이므로

$\frac{(a_1-6)^2+(a_2-6)^2+\cdots+(a_6-6)^2}{6}=9$

$(a_1-6)^2+(a_2-6)^2+\cdots+(a_6-6)^2=54$

$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_6^2-12(a_1+a_2+\cdots+a_6)+6\times36=54$

$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_6^2-12\times36+216=54$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a_1^2+a_2^2+\cdots+a_6^2=270$ … ㉣

또, 4명의 점수 a_7, a_8, a_9, a_{10}의 평균이 11점, 분산이 14이므로

$\frac{(a_7-11)^2+(a_8-11)^2+(a_9-11)^2+(a_{10}-11)^2}{4}=14$

$(a_7-11)^2+(a_8-11)^2+(a_9-11)^2+(a_{10}-11)^2=56$

$a_7^2+a_8^2+a_9^2+a_{10}^2-22(a_7+a_8+a_9+a_{10})+4\times121=56$

$a_7^2+a_8^2+a_9^2+a_{10}^2-22\times44+484=56$ ($\because$ ㉡)

$\therefore a_7^2+a_8^2+a_9^2+a_{10}^2=540$ … ㉤

㉣, ㉤을 ㉢에 대입하면

(전체 분산)$=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{10}^2-640}{10}$

$=\frac{270+540-640}{10}$ ($\because$ ㉣, ㉤)

$=\frac{170}{10}=17$

오답피하기

이 문제를 유형 N14를 이용하여 풀었다면 개념을 잘못 적용한 거야.
그 개념은 두 집단의 평균이 같을 경우에 적용하는 거야.
두 집단의 평균이 다르면 주어진 조건을 이용하여 적절히 변형해서 풀어가자.

130 답 10.5

1st 구하려는 실제 자료의 평균을 구하자.

4개의 자료 중 제대로 쓴 2개의 자료의 값을 a, b라 하자.

2개의 잘못된 자료가 있는 4개의 자료 2, 6, a, b의 평균이 2이므로

$\frac{2+6+a+b}{4}=2$　　$\therefore \frac{a+b+8}{4}=2$ … ㉠

그런데 제대로 된 자료 5, 3, a, b의 평균을 구하면

$\frac{5+3+a+b}{4}=\frac{a+b+8}{4}=2$ ($\because$ ㉠)

따라서 잘못된 자료가 2개 들어간 평균과 제대로 된 자료가 들어간 평균은 2로 같지?

2nd 제대로 된 자료의 분산을 구해 보자.

이제 제대로 된 자료 5, 3, a, b의 분산을 구하자.

(분산)$=\frac{(5-2)^2+(3-2)^2+(a-2)^2+(b-2)^2}{4}$

$=\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+10}{4}$ … ㉡

여기서 $(a-2)^2+(b-2)^2$의 값만 알면 분산을 구할 수 있지?

그런데 잘못된 자료가 있는 4개의 자료 2, 6, a, b의 분산이 12이므로

$\frac{(2-2)^2+(6-2)^2+(a-2)^2+(b-2)^2}{4}=12$

$16+(a-2)^2+(b-2)^2=48$

$\therefore (a-2)^2+(b-2)^2=32$

따라서 ㉡에서 제대로 된 자료의 분산을 구하면

$\dfrac{(a-2)^2+(b-2)^2+10}{4}=\dfrac{32+10}{4}=\dfrac{42}{4}=10.5$

오|답|피|하|기

a, b의 값을 각각 구해서 풀기는 쉽지 않아. 잘못된 2개의 자료의 평균이 2라는 것에서

$\dfrac{a+b+2+6}{4}=2 \qquad \therefore a+b=0 \cdots$ ㉠′

또, 잘못된 2개의 자료의 분산이 12라는 것에서

$\dfrac{(a-2)^2+(b-2)^2+(2-2)^2+(6-2)^2}{4}=12$

$(a-2)^2+(b-2)^2=32 \cdots$ ㉡′

㉠′, ㉡′을 연립하여 풀면

$a=2\sqrt{3}$, $b=-2\sqrt{3}$ 또는 $a=-2\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$

그럼, 실제 자료는 5, 3, $-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$이고 평균이 2이므로 분산을 구할 수 있겠지만 변량의 제곱근 때문에 복잡하겠지?

어떤 방법으로 풀어도 상관없지만 좀 더 쉽고 빠르게 풀 수 있는 방법을 연구해 봐.

131 답 평균 2.5, 표준편차 $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

1st a, b, c, d의 평균을 구해보자.

a, b의 평균이 2지?

$\dfrac{a+b}{2}=2 \qquad \therefore a+b=4 \cdots$ ㉠

또한, c, d의 평균이 3이지?

$\dfrac{c+d}{2}=3 \qquad \therefore c+d=6 \cdots$ ㉡

따라서 a, b, c, d의 평균을 구하면

$\dfrac{a+b+c+d}{4}=\dfrac{4+6}{4}$ (∵ ㉠, ㉡)$=\dfrac{10}{4}=2.5 \cdots$ ㉢

2nd a, b, c, d의 표준편차를 구할 때, 필요한 식이 무엇인지 알아보자.

a, b, c, d의 평균이 2.5이므로 표준편차를 구하면

(표준편차)

$=\sqrt{\dfrac{(a-2.5)^2+(b-2.5)^2+(c-2.5)^2+(d-2.5)^2}{4}}$

$=\sqrt{\dfrac{a^2-5a+6.25+b^2-5b+6.25+c^2-5c+6.25+d^2-5d+6.25}{4}}$

$=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2-5(a+b+c+d)+4\times6.25}{4}}$

$=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2-5\times10+25}{4}}$ (∵ ㉠, ㉡)

$=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2-25}{4}} \cdots$ ㉣

따라서 $a^2+b^2+c^2+d^2$의 값만 구하면 표준편차를 구할 수 있지?

3rd a, b와 c, d의 분산을 이용하여 $a^2+b^2+c^2+d^2$의 값을 구하고 표준편차를 구하자.

a, b의 평균이 2, 표준편차가 2이므로

(분산)$=\dfrac{(a-2)^2+(b-2)^2}{2}=4$

$a^2-4a+4+b^2-4b+4=8$

$\therefore a^2+b^2=4(a+b)=4\times4$ (∵ ㉠)$=16 \cdots$ ㉤

또, c, d의 평균이 3, 표준편차가 $\sqrt{3}$이므로

(분산)$=\dfrac{(c-3)^2+(d-3)^2}{2}=3$

$c^2-6c+9+d^2-6d+9=6$

$\therefore c^2+d^2=6(c+d)-12=6\times6-12$ (∵ ㉡)$=24 \cdots$ ㉥

㉤, ㉥에서 $a^2+b^2+c^2+d^2=16+24=40$

따라서 ㉣에서

(표준편차)$=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2-25}{4}}=\sqrt{\dfrac{40-25}{4}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

N

★ **분산을 구하는 또 다른 방법!**

(분산)$=\{$(변량)^{2}의 평균$\}-$(평균)^2

이것은 분산의 정의에 의해 구하는 것보다 더 자주 쓰이니까 반드시 알아 두자.

왜 그런지도 알고 있어야겠지?

변량 x_1, x_2, $\cdots$, x_n의 평균을 m이라 하면

(분산)$=\dfrac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2}{n}$

$=\dfrac{(x_1^2-2mx_1+m^2)+(x_2^2-2mx_2+m^2)+\cdots+(x_n^2-2mx_n+m^2)}{n}$

$=\dfrac{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-2m(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nm^2}{n}$

$=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-2m\times\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+m^2$

$=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-2m\times m+m^2$

$=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-m^2$

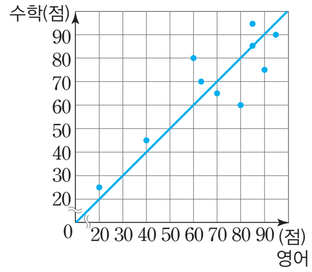
$=\{$(변량)^{2}의 평균$\}-$(평균)^2

0 산점도와 상관관계

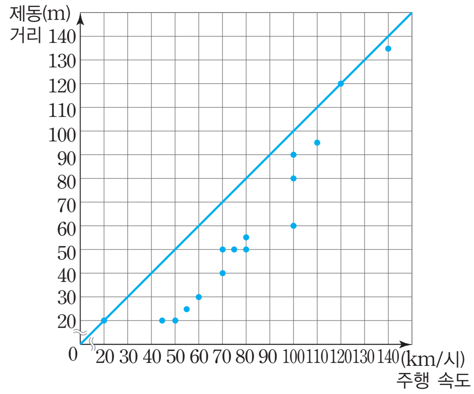
개념 체크 001~012 정답은 p. 5에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가 p. 122

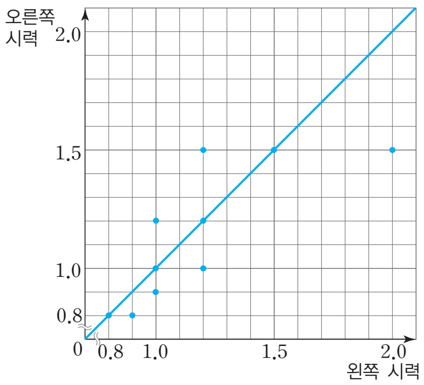
013 답 해설 참조



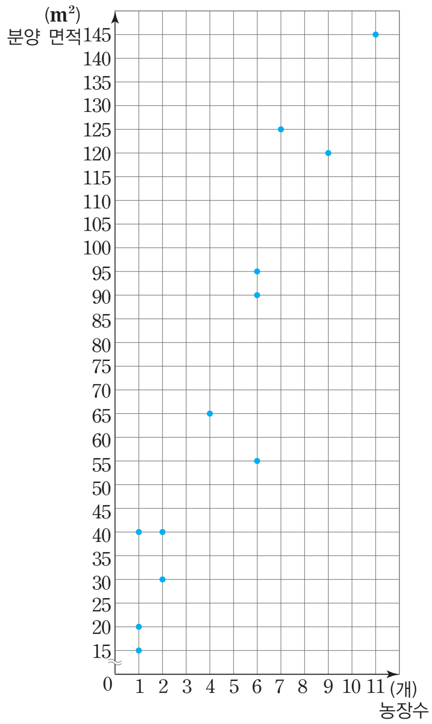
014 답 해설 참조



015 답 해설 참조



016 답 해설 참조



017 답 ③

기준선을 그었을 때, 그 기준선 위에 있는 점의 개수가 국어 성적과 수학 성적이 같은 학생 수이므로 5명이야.

018 답 ④

기준선을 그었을 때, 그 기준선 위에 있는 점의 개수가 수학 성적과 과학 성적이 같은 학생 수이므로 5명이야.

★ **산점도에서 기준선의 의미 파악하기**

산점도에서 x, y의 값이 같을 점들을 이어 직선으로 나타내고 이 직선을 기준선으로 할 때,

㉠ 기준선 위의 점 : $x=y$

㉡ 기준선보다 위쪽에 있는 점 : $y>x$

㉢ 기준선보다 아래쪽에 있는 점 : $x>y$

019 답 ④

기준선을 그었을 때, 기준선보다 아래쪽에 있는 점의 개수가 수학 성적이 과학 성적보다 높은 학생 수이므로 8명이야.

020 답 ②

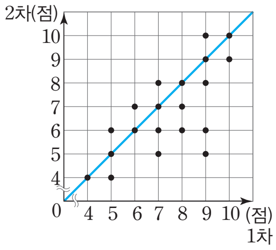
기준선을 그었을 때, 기준선보다 위쪽에 있는 점의 개수가 과학 성적보다 수학 성적이 낮은 학생 수이므로 7명이야.

따라서 전체 학생수가 20명이므로 과학 성적보다 수학 성적이 낮은 학생은 전체의 $\frac{7}{20}\times 100=35$ (%)

021 답 ③

기준선을 그었을 때, 기준선보다 위쪽에 있는 점의 개수가 1차 때보다 성적이 향상된 학생 수이므로 4명이야.

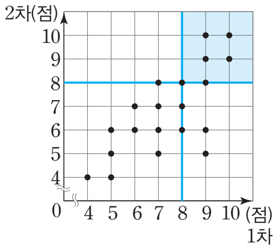
022 답 ②



기준선을 그었을 때, 기준선 위에 있는 점의 개수가 1차와 2차 성적이 같은 즉, 성적이 변함없는 학생 수이므로 7명이야.

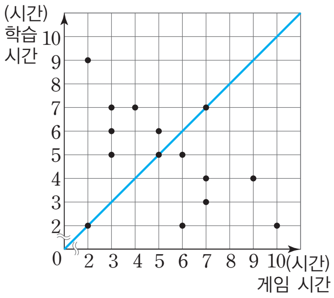
따라서 전체 학생 수가 20명이므로 1차 성적과 2차 성적이 변함없는 학생은 전체의 $\frac{7}{20}\times100=35\ (\%)$

023 답 ⑤



1차, 2차 성적이 모두 8점 이상인 학생 수는 산점도에서 색칠된 부분에 있는 점의 개수와 같으므로 6명이야.

024 답 ④

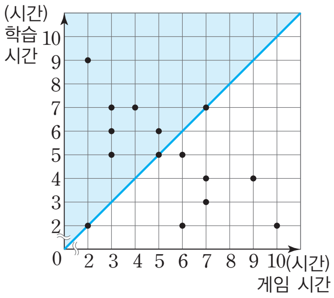


기준선을 그었을 때, 기준선 위에 있는 점의 개수가 학습 시간과 게임 시간이 같은 학생 수이므로 3명이야.

따라서 학습 시간과 게임 시간이 같은 학생은 전체의

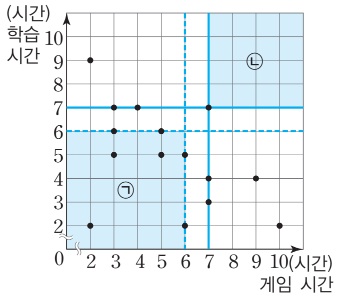
$\frac{3}{15}\times100=20\ (\%)$

025 답 ②



학습 시간보다 게임 시간이 더 적다는 것은 학습 시간이 게임 시간보다 더 많다는 뜻이므로 기준선보다 위쪽에 있는 점의 개수를 묻는 거지? 따라서 6명이야.

026 답 ③



'모두'는 동시에 만족함을 뜻하는 것이지?

a의 값은 그림에서 ㉠ 부분에 해당하는 점의 개수와 같아. 즉, 경계를 포함하지 않는 사각형 안에 있는 점의 개수와 같으므로 $a=3$

b의 값은 그림에서 ㉡ 부분에 해당하는 점의 개수와 같아. 즉, 경계를 포함하는 사각형 안에 있는 점의 개수와 같으므로 $b=1$

따라서 $a+b=4$야.

027 답 ⑤

③ 기준선 위의 점은 듣기와 말하기 성적이 같음을 뜻하니까 학생 D가 듣기 점수와 말하기 점수가 같아. (참)

⑤ 말하기 점수가 제일 낮은 학생은 B가 아니라 C야. (거짓)

028 답 ⑤

기준선보다 아래쪽에 있는 점은 키보다 몸무게가 많이 나가는 편으로 비만도가 가장 높은 사람은 B, C, E 중 하나야. 셋 중에서 C의 키가 B, E보다 크고, B, E의 키는 같지만 E의 몸무게가 더 많이 나가지?

따라서 몸무게보다 키가 제일 작은 학생은 E이므로 비만도가 가장 높은 학생은 E학생이야.

★ 산점도에서 기준선보다 위쪽, 아래쪽에 있는 점에 대한 의미 파악하기

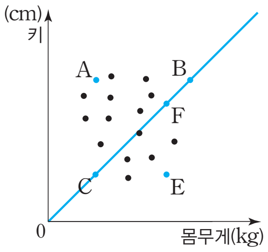
산점도에서 기준선에 대하여 x, y의 변량을 비교할 때,

㉠ $x=y$, 즉 x의 값과 y의 값이 같다, 점수가 같다, 성적이 같다, 적당하다 등

㉡ $y>x$, 즉 y의 값이 x의 값보다 크다, y에 대한 정보가 x에 대한 정보보다 더 높다, 많다, 좋다 등
(x에 대한 정보가 y에 대한 정보보다 더 낮다, 적다, 좋지 않다 등)

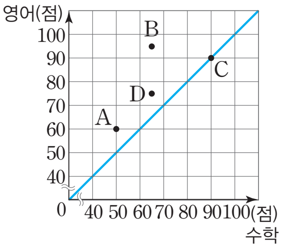
㉢ $x>y$, 즉 x의 값이 y의 값보다 크다, x에 대한 정보가 y에 대한 정보보다 더 높다, 많다, 좋다 등
(y에 대한 정보가 x에 대한 정보보다 더 낮다, 적다, 좋지 않다 등)

029 답 ①



기준선 위의 점은 키와 비교하여 몸무게가 적당한 편인 학생들이지? 기준선 윗 부분의 학생들에 대해 생각하자.
기준선을 그었을 때, 기준선보다 위쪽에 있는 A학생이 마른 편이야.

030 답 B



기준선을 그었을 때, 점 C를 제외하고 모두 기준선보다 위쪽에 위치하므로 수학보다 영어 성적이 좋은 편이야. 이 중 A와 D는 영어 성적이 수학 성적보다 10점 높지만 B는 30점이 높으므로 수학 성적에 비해 영어 성적이 가장 높은 학생은 B!

031 답 ③

ㄷ. 기준선 위에 있는 점은 C이므로 수학과 영어 점수가 같은 학생은 C야. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이야.

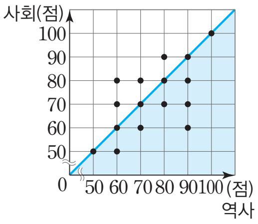
032 답 ③, ⑤

기준선보다 위쪽에 있는지, 아래쪽에 있는지를 구분하여 성적을 파악하자.
① A는 독서량과 비교하여 국어 성적이 좋은 편이야. (거짓)
② B는 독서량과 비교하여 국어 성적이 좋은 편이라고 말할 수 없어. (거짓)
④ C는 국어 성적과 비교하여 독서량이 적은 편이야. (거짓)

033 답 ⑤

⑤ E의 노동 시간은 70시간, C의 노동 시간은 40시간이므로 E와 C의 노동 시간은 같지 않아. (거짓)

034 답 ④



기준선을 그었을 때, 기준선보다 아래쪽에 있는 점들이 역사 성적이 사회 성적보다 높은 학생들이야.

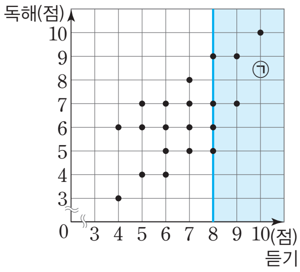
이들에 대한 사회 성적을 표로 만들면 다음과 같지?

사회 성적(점)	50	60	70	80
인원수(명)	1	2	2	1

따라서 이 학생들의 평균을 구하면

$\dfrac{50+60\times2+70\times2+80}{6}=\dfrac{390}{6}=65$(점)

035 답 ③



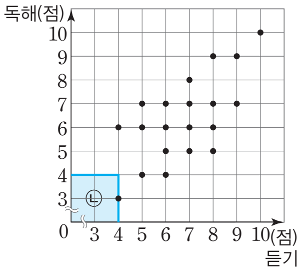
듣기 성적이 8점 이상인 학생들을 찾기 위해 세로축과 평행한 직선을 그어 볼까? 듣기 성적이 8점 이상인 학생들은 색칠된 ㉠ 부분의 학생들이야. 이들의 독해 점수에 대한 표를 만들면 다음과 같아.

독해 점수(점)	5	6	7	9	10
인원수(명)	1	1	2	2	1

따라서 이 학생들의 평균을 구하면

$\dfrac{5+6+7\times2+9\times2+10}{7}=\dfrac{53}{7}\fallingdotseq7.6$(점)

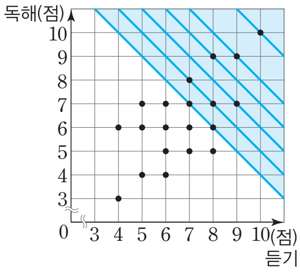
036 답 3.5점



가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 동시에 만족시키는 부분에서 생각해볼까?
듣기 성적과 독해 성적이 모두 4점 이하인 학생은 그림에서 ㉡ 부분에 위치하는 학생이야.
이 학생의 듣기와 독해 성적이 각각 4점, 3점이므로 평균은

$\dfrac{4+3}{2}=\dfrac{7}{2}=3.5$(점)이야.

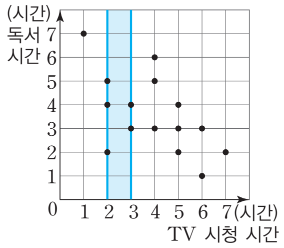
037 답 ②



점 (10, 10)을 지나고 기울기가 -1인 직선 위의 점의 평균은 10

점, 점 (9, 9)를 지나고 기울기가 -1인 직선 위의 점의 평균은 9점이겠지?
그림과 같이 기울기가 -1인 직선을 그었을 때, 각 직선 위에 있는 점의 평균이 오른쪽 위에서부터 각각 10점, 9점, 8.5점, …이므로 상위 석차가 7등인 학생을 나타내는 점은 (7, 7) 또는 (8, 6)인 학생이야.
이들의 평균을 각각 구하면
$\frac{7+7}{2}=\frac{14}{2}=7$(점) 또는 $\frac{8+6}{2}=\frac{14}{2}=7$(점)
따라서 상위 석차가 7등인 학생의 두 영역 평균은 7점이야.

038 답 ④

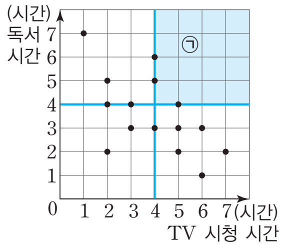


세로축과 평행한 직선을 그어볼까?
TV 시청 시간이 2시간 이상 3시간 이하인 학생들은 색칠된 부분의 학생들이므로 이들의 독서 시간의 평균을 구하기 위해 표를 만들면 다음과 같아. 이때, 2 이상 3 이하이면 직선 위의 점도 포함하겠지?

독서 시간(시간)	2	3	4	5
인원수(명)	1	1	2	1

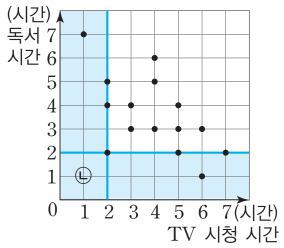
따라서 평균 독서 시간을 구하면
$\frac{2+3+4\times2+5}{5}=\frac{18}{5}=3.6$(시간)

039 답 4.3시간



가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 동시에 만족시키는 부분에서 생각해볼까?
조건을 만족시키는 학생은 ㉠ 부분에 위치하는 학생들이야.
이들 3명의 TV 시청 시간이 각각 4, 4, 5시간이므로 평균을 구하면
$\frac{4+4+5}{3}=\frac{13}{3}\fallingdotseq4.3$(시간)이야.

040 답 ④



가로축과 세로축에 평행한 직선을 그어볼까?
TV 시청 시간과 독서 시간 중 적어도 하나가 2시간 이하인 학생들은 ㉡ 부분에 위치하는 학생 7명이야.
이들의 독서 시간의 평균을 구하기 위해 표를 만들면 다음과 같아.

독서 시간(시간)	1	2	4	5	7
인원수(명)	1	3	1	1	1

따라서 구하는 평균은
$\frac{1+2\times3+4+5+7}{7}=\frac{23}{7}\fallingdotseq3.3$(시간)

041 답 ②

② 산의 높이가 높아질수록 온도는 낮아지므로 음의 상관관계야.

042 답 ③, ④

점들이 있는 방향으로 선을 그었을 때 양 또는 음의 기울기를 갖는 직선일 때만 상관관계가 존재해.
x가 증가할 때, y가 증가하는지 감소하는지 분명하지 않을 때, 상관관계가 없다고 말하지? 즉, 산점도에서 ④의 산점도처럼 점들이 한 직선에 있다고 말하기 어려운 경우와 ③의 산점도처럼 점들이 가로축에 평행한 직선에 가까이 있는 경우에 상관관계가 없어.

043 답 ③

주어진 그림의 상관관계가 양인지, 음인지부터 파악해보자.
기준선이 오른쪽 아래에 향하므로 음의 상관관계를 가지지?
② 수학 성적과 식사량은 상관관계가 없어.
③ 대류권에서는 높이가 높아질수록 기온은 내려가므로 음의 상관관계야.

044 답 ②

② 점 A는 기준선보다 위쪽에 분포해 있으므로 키와 비교하여 몸무게가 많이 나가는 편이야. (거짓)

045 답 ⑤

지능지수와 머리 크기는 상관관계가 없으므로 ⑤야.

O

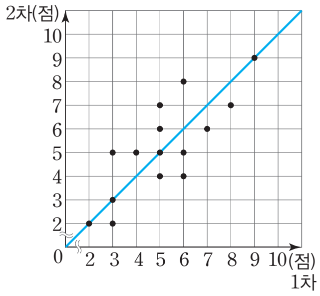
잘 틀리는 유형 훈련+1up

p. 128

046 답 4.7점

1st 실력이 떨어졌다는 것은 1차 성적이 더 높다는 뜻임을 기억하고 기준선을 기준으로 생각하자.

1차와 비교하여 2차에 영어 쓰기 실력이 떨어졌다는 것은 2차 성적보다 1차 성적이 더 높다는 거지? 기준선을 그었을 때, 기준선보다 아래쪽에 분포하는 학생들이 실력이 떨어진 학생들이야. 모두 6명이지?



2nd (평균)$=\dfrac{(\text{변량의 총합})}{(\text{인원수})}$임을 이용하자.

이들의 표를 그리면 다음과 같아.

2차 점수(점)	2	4	5	6	7
인원수(명)	1	2	1	1	1

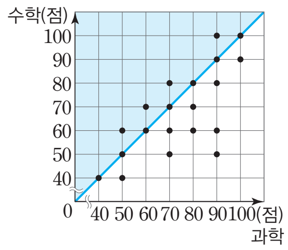
따라서 구하는 평균은

$$\frac{2+4\times2+5+6+7}{6}=\frac{28}{6}\fallingdotseq4.7(\text{점})$$

047 답 ③

1st 성적이 높거나 같은 경우는 기준선 위쪽에 있는 점과 기준선 위의 점도 포함됨을 뜻해.

수학 성적이 과학 성적보다 높거나 같은 경우는 기준선 위쪽에 있는 점이거나 기준선 위의 점을 뜻해. 기준선을 그었을 때, 조건을 만족시키는 학생들은 기준선을 포함하여 색칠한 부분에 위치하지?



2nd (평균)$=\dfrac{(\text{변량의 총합})}{(\text{인원수})}$임을 이용하자.

이들의 표를 만들면

수학 점수(점)	80	90	100
인원수(명)	2	1	2

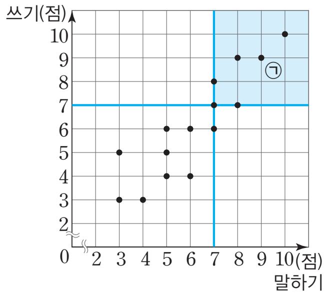
따라서 평균은 $\dfrac{80\times2+90+100\times2}{5}=\dfrac{450}{5}=90(\text{점})$

048 답 ④

1st 가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 학생 수를 구하자.

가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 동시에 만족시키는 부분에서 생각해볼까?

두 영역에서 모두 7점 이상인 학생은 ㉠ 부분에 위치하는 학생들로 6명이야.



2nd 백분율을 계산하자.

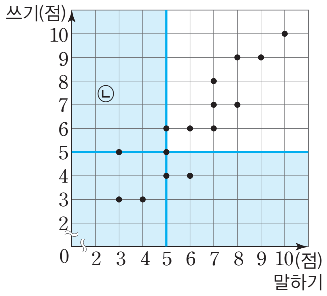
따라서 전체의 $\dfrac{6}{15}\times100=40\ (\%)$야.

049 답 46.7 %

1st 가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 학생 수를 구하자.

가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 조건을 만족시키는 전체 부분을 생각해볼까?

적어도 한 영역이 5점 이하인 학생은 직선을 포함하여 색칠한 ㉡ 부분에 위치하지? 여기에 포함되는 학생은 7명이야.



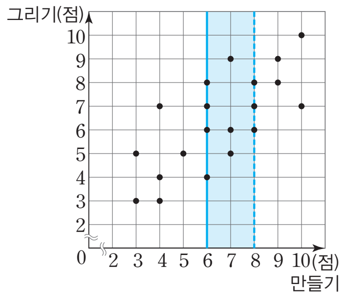
2nd 백분율을 계산하자.

따라서 전체의 $\dfrac{7}{15}\times100=\dfrac{140}{3}\fallingdotseq46.7\ (\%)$야.

050 답 ①

1st 세로축과 평행한 직선을 긋고 8점 미만임에 주의하자.

세로축과 평행한 직선을 그어 보면 만들기 성적이 6점 이상 8점 미만인 학생이니까 색칠한 부분에 속해. 이때, 8점 미만이니까 점선 위에 있는 3개의 점은 속하지 않겠지? 따라서 이 부분에 속하는 학생은 모두 7명이야.



2nd (평균)$=\dfrac{(\text{변량의 총합})}{(\text{인원수})}$임을 이용하자.

이들의 그리기 성적의 표를 만들면 다음과 같아.

점수(점)	4	5	6	7	8	9
인원수(명)	1	1	2	1	1	1

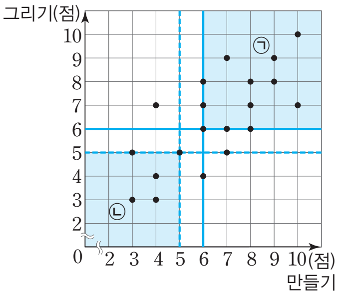
따라서 평균은

$\dfrac{4+5+6\times2+7+8+9}{7}=\dfrac{45}{7}\fallingdotseq6.4$(점)이야.

051 답 45 %

1st 가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 학생 수를 구하자.

가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 동시에 만족시키는 부분에서 생각해볼까? 두 영역 모두 6점 이상인 학생은 ㉠ 부분에 속한 학생으로 12명이야. 한편, 두 영역 모두 5점 미만인 학생은 ㉡ 부분에 속한 학생으로 점선 위의 점은 포함되지 않으니까 3명이지?



2nd 백분율을 계산하자.

이들 각각의 비율을 구하면

㉠ 부분 : $\dfrac{12}{20}\times100=60\,(\%)$

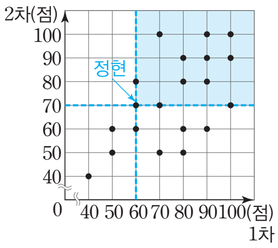
㉡ 부분 : $\dfrac{3}{20}\times100=15\,(\%)$

따라서 비율의 차는 $60-15=45\,(\%)$

052 답 8명

1st 정현이의 위치를 산점도에서 찾아보자.

정현이의 도덕 1차 성적은 60점이고, 2차 성적은 70점이므로 산점도에서 정현이를 나타내는 점은 그림과 같아.

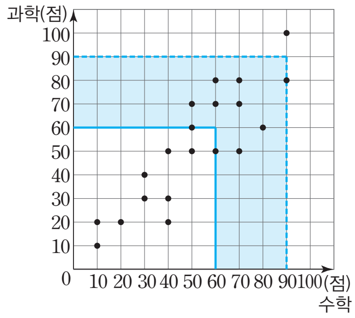


2nd 가로축과 세로축과 평행한 직선을 그어 학생 수를 구하자.

정현이의 점수를 기준으로 가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 동시에 만족시키는 부분을 생각해 보면 정현이보다 1차 성적도 높고, 2차 성적도 높은 학생은 점선 위의 점을 포함하지 않는 색칠한 부분에 속하는 학생으로 8명이야.

053 답 ②

1st 가로축과 세로축에 평행한 직선을 그어 조건을 만족시키는 전체 부분을 생각하자.



가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 조건을 만족시키는 전체 부분을 생각해볼까? 적어도 한 과목이 60점 이상이고, 두 과목 모두 90점 미만인 학생들은 색칠한 부분과 같고, 이때의 학생 수는 9명이야.

2nd 백분율을 계산하자.

따라서 적어도 한 과목이 60점 이상이고, 두 과목 모두 90점 미만인 학생은 전체의 $\dfrac{9}{20}\times100=45\,(\%)$

054 답 ⑤

1st 학생 4명의 산점도를 가지고는 지능지수와 수학 성적 사이의 관계를 파악할 수는 없지만, 각 학생의 특징을 파악할 수는 있지?

① A는 지능지수는 높으나 수학 성적은 낮아. (거짓)

② B는 지능지수도 낮고 수학 성적도 낮은 편이야. (거짓)

③ C는 지능지수는 낮고 수학 성적은 높아. (거짓)

④ D는 지능지수도 높고 수학 성적도 높은 편이지만 두 값이 같다고 말할 수는 없어. (거짓)

⑤ 주어진 바로는 지능지수와 수학 성적은 강한 양의 상관관계가 있다고 판단할 수는 없어. (참)

055 답 ②

1st 소득과 비교하여 저축을 많이 하면 기준선 위쪽에 있겠지?

기준선을 그었을 때, 점 B, E는 기준선 위쪽에 있고, 이때 B가 소득은 낮은 편이나 저축액이 매우 높으므로 소득과 비교하여 저축을 가장 많이 했다고 할 수 있어.

[056-057 채점기준표]

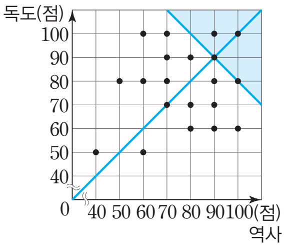
Ⅰ	문제에서 제시한 조건에 속하는 학생을 산점도에서 나타낸다.	50%
Ⅱ	이 학생들에 대하여 원하는 변량을 확인한다.	30%
Ⅲ	(평균)$=\dfrac{(\text{변량의 총합})}{(\text{인원수})}$임을 이용하여 평균을 구한다.	20%

056 답 92.5점

먼저, 문제에서 제시한 조건에 속하는 학생 수를 구하자.

15명 중 상위 20 %에 드는 학생 수는 $20\times0.2=4$(명)

이를 산점도에 나타내면 상위 20 % 안에 드는 학생은 색칠된 부분과 같다.



… Ⅰ

그다음, 이 학생들에 대하여 원하는 변량을 확인하고 나열해 보자.

이들의 독도글쓰기 대회 점수는 80, 90, 100, 100점이다. … Ⅱ

그래서, 이들의 평균을 구하자.

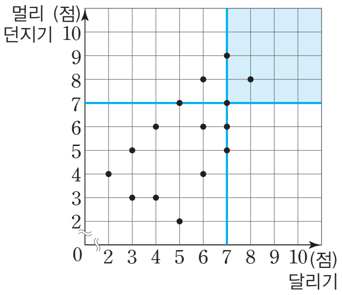
따라서 독도글쓰기 대회 점수의 평균은

$\dfrac{80+90+100+100}{4}=\dfrac{370}{4}=92.5$(점)이다. … Ⅲ

057 답 8점

먼저, 문제에서 제시한 조건에 속하는 학생 수를 구하자.

달리기 점수와 멀리 던지기 점수가 모두 7점 이상인 학생들은 가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어 동시에 만족시키는 부분은 색칠한 부분으로 3명이다.



… Ⅰ

그다음, 이 학생들에 대하여 원하는 변량을 확인하고 나열해 보자.

이들의 멀리 던지기 점수는 각각 7, 8, 9점이다. … Ⅱ

그래서, 이들의 평균을 구하자.

따라서 평균은 $\dfrac{7+8+9}{3}=\dfrac{24}{3}=8$(점)이다. … Ⅲ

[058-059 채점기준표]

Ⅰ	기준선을 긋는다.	10%
Ⅱ	기준선을 기준으로 문제에서 제시한 성적 차이가 나는 점을 찾는다.	60%
Ⅲ	구하고자 하는 값을 계산한다.	30%

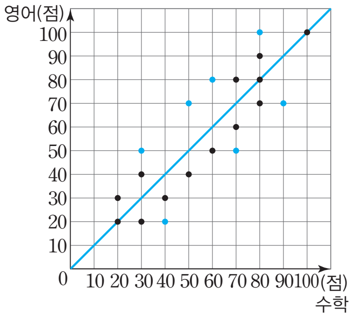
058 답 35 %

먼저, 기준선을 긋자.

성적의 차이가 20점이면 어느 과목이 더 좋은지를 알 수 없으므로 기준선을 그어보자. … Ⅰ

그다음, 기준선을 기준으로 제시한 성적 차이가 나는 점을 찾자.

기준선보다 위 또는 아래로 각각 20점 이상 차이가 나는 경우를 생각해 보면 기준선 위에 있는 학생들은 두 과목의 성적이 같은 학생들이므로 기준선 위 또는 아래로 각각 20점 이상 차이가 나는 점을 표시하면 아래와 같다.



… Ⅱ

그래서, 백분율 %를 구하자.

따라서 조건에 맞는 학생 수는 7명이므로

$\dfrac{7}{20}\times100=35$ (%) … Ⅲ

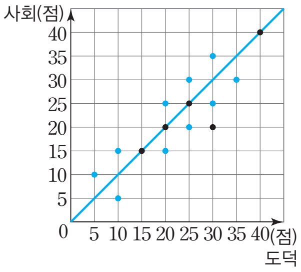
059 답 14

먼저, 기준선을 긋자.

기준선을 그어보자. … Ⅰ

그다음, 기준선을 기준으로 제시한 성적 차이가 나는 학생 수를 구하자.

한 칸이 5점이므로 두 성적의 차가 5점 이상 10점 미만이면 한 칸 차이가 나는 것만 세면 됨에 주의하자.



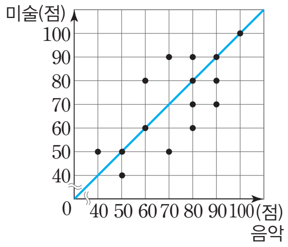
기준선을 그었을 때, 기준선 위에 있는 학생의 도덕과 사회 점수가 같으므로 $a=4$이다.

또, 두 성적의 차가 5점 이상 10점 미만인 학생을 표시하면 위와 같이 10명이므로 $b=10$이다. … Ⅱ

그래서, $a+b$의 값을 구하자.

따라서 $a=4$, $b=10$이므로 $a+b=14$이다. … Ⅲ

060 답 6명, 61.7점



기준선을 그었을 때, 직선 위의 점들이 음악과 미술 성적이 같은 학생들이다. … Ⅰ

기준선보다 아래쪽에 분포하는 학생들이 음악 성적이 더 좋은 학생이므로 이들의 표를 만들면 다음과 같다.

미술 성적(점)	40	50	60	70	80
인원(명)	1	1	1	2	1

… Ⅱ

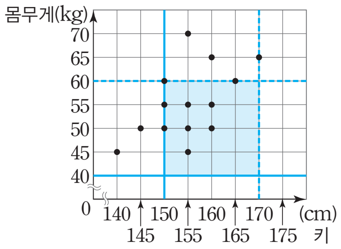
따라서 구하는 학생 수는 6(명)이므로 이들의 평균은

$\dfrac{40+50+60+70\times2+80}{6}=\dfrac{370}{6}\fallingdotseq61.7$(점) … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	기준선을 긋는다.	10%
Ⅱ	표를 작성한다	50%
Ⅲ	평균을 구한다.	40%

061 답 50 %



몸무게가 40 kg 이상 60 kg 미만이고, 키가 150 cm 이상 170 cm 미만인 학생들을 찾기 위해 가로축과 세로축에 평행한 직선을 각각 그어보자. … Ⅰ

이 학생들은 색칠된 부분에 포함되고, 미만은 경계를 포함하지 않으므로 몸무게가 60 kg이거나 키가 170 cm인 학생을 제외하면 7명이다. … Ⅱ

따라서 전체의 $\dfrac{7}{14}\times100=50$ (%)이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	기준선을 긋는다.	10%
Ⅱ	몸무게와 키에서 미만인 경우는 제외하여 학생 수를 구한다.	50%
Ⅲ	백분율을 구한다.	40%

062 답 해설 참조

기준선보다 위쪽에 있으면 차량 수와 비교하여 대기 오염도가 심하다는 뜻이다. … Ⅰ

A지역은 차량 수와 비교하여 대기 오염도가 높은 편이다. … Ⅱ

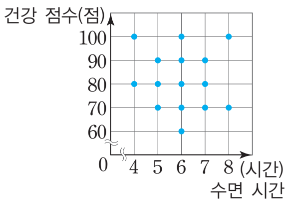
B지역은 차량 수와 비교하여 대기 오염도가 낮은 편이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	기준선을 기준으로 묻는 바를 파악한다.	20%
Ⅱ	A지역의 특징을 말한다.	40%
Ⅲ	B지역의 특징을 말한다.	40%

063 답 해설 참조

순서쌍 (수면 시간, 건강 점수)를 좌표평면에 나타내어 산점도를 완성하면 다음과 같다.



… Ⅰ

위 산점도를 보면 잠을 많이 잔다고 해서 건강 점수가 높은 것은 아니고 잠을 적게 잔다고 해서 건강 점수가 낮은 것은 아님을 알 수 있다.

따라서 수면 시간과 건강 점수는 상관관계가 없다. … Ⅱ

[채점기준표]

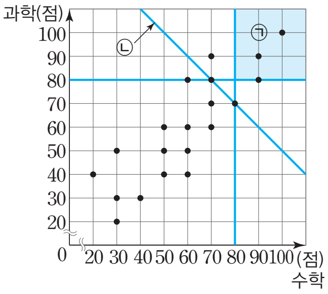
Ⅰ	산점도를 완성한다.	50%
Ⅱ	완성한 산점도를 보고 상관관계를 파악한다.	50%

최고난도 만점 문제

p. 132

064 답 ㄷ

1st 먼저 필요한 직선들을 그어보자.



ㄱ. 수학과 과학 성적이 모두 80점 이상인 학생은 그림의 ㉠ 부분에 있으므로 3명이야. (거짓)

ㄴ. 수학 성적이 90점인 학생의 과학 성적이 80점, 90점이므로 과학 성적의 평균은 $\dfrac{80+90}{2}=\dfrac{170}{2}=85$(점)이야. (거짓)

2nd (평균)$=\dfrac{(\text{변량의 총합})}{(\text{인원수})}$임을 이용하고,

(석차)$=$(전체 인원수)$\times$(상위 백분율)임을 적용하자.

ㄷ. 과학 성적이 40점인 학생의 수학 성적은 각각 20, 50, 60점이므로 이들의 평균은 $\dfrac{20+50+60}{3}=\dfrac{130}{3}\fallingdotseq43.3$(점) (참)

O

ㄹ. 두 과목 성적의 평균이 상위 20 % 안에 들려면 석차가 $20\times0.2=4$(등)이어야 하는데, 직선 ㉡을 그어보면 수학 성적이 80점 이상인 학생은 상위 6명 안에 들게 되므로 상위 $\frac{6}{20}\times100=30$ (%) 안에 들어. (거짓)

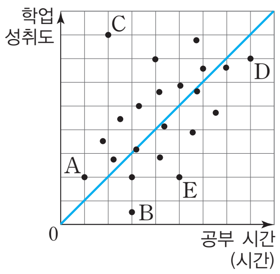
따라서 옳은 것은 ㄷ이야.

065 답 ③, ⑤

1st 기준선 위쪽에 있으면 학업 성취도가 높은 편이고, 아래쪽에 있으면 공부 시간이 많은 편임을 이용하자.

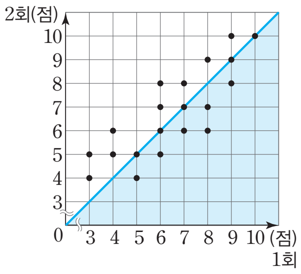
③ B는 공부 시간과 비교하여 학업성취도가 낮은 편이야. (거짓)

⑤ C는 A와 비교하여 학업 성취도가 높아. (거짓)



066 답 ③

1st 기준선 아래쪽에 있는 학생이 2회 실험 점수가 1회 실험 점수보다 낮은 학생이지?



2회 실험 점수가 더 낮은 학생들은 기준선보다 아래쪽에 있는 6명이야.

이들의 1회, 2회 점수의 평균을 각각 구하기 위해 표를 만들면 다음과 같아.

1회 점수(점)	5	6	7	8	9
인원수(명)	1	1	1	2	1

2회 점수(점)	4	5	6	7	8
인원수(명)	1	1	2	1	1

2nd $(\text{평균})=\dfrac{(\text{변량의 총합})}{(\text{인원수})}$임을 이용하자.

1차 점수의 평균은

$$\frac{5+6+7+8\times2+9}{6}=\frac{43}{6}\fallingdotseq7.2(\text{점})$$

2차 점수의 평균은

$$\frac{4+5+6\times2+7+8}{6}=\frac{36}{6}=6(\text{점})$$

따라서 1회 점수의 평균과 2회 점수의 평균의 차는 $7.2-6=1.2$(점)이야.

067 답 ④

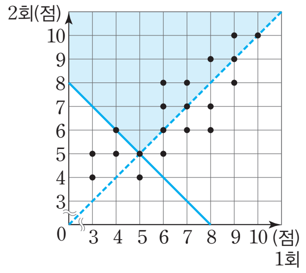
1st 기준선 위쪽에 있으면 1회보다 2회 실험 점수가 높아.

기준선을 그었을 때, 2회 실험 점수가 1회 실험 점수보다 높으면 기준선보다 위쪽에 있으면 되지?

2nd 평균이 5점인 학생들은 점 (5, 5)를 지나는 기울기가 -1인 직선 위에 존재함을 이용하자.

또한, 평균이 5점 이상인 학생들은 점 (5, 5)를 기준으로 기울기가 -1인 직선을 그으면 그 직선 위에 있거나 그 직선보다 위쪽에 있으면 되겠지? 둘의 공통인 부분, 즉 그림에 색칠된 부분에 있는 학생은 2회 실험 점수가 1회 실험 점수보다 높고, 1, 2회의 실험 점수의 평균이 5점 이상으로 6명이야.

따라서 전체의 $\frac{6}{20}\times100=30$ (%)



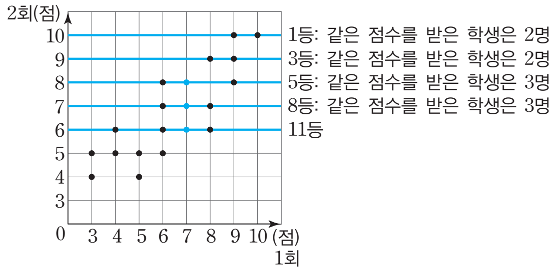
068 답 ③

1st 1회의 실험 점수로 매기는 등수는 세로축에 평행한 직선 위의 점들에서 생각하자.

1회의 실험 점수로 8등인 학생이 받는 점수는 7점이야. 이때, 7점인 학생은 3명이고, 이들의 1, 2회 점수를 순서대로 각각 순서쌍으로 나타내면 (7, 6), (7, 7), (7, 8)이야.

2nd 2회의 실험 점수로 매기는 등수는 가로축에 평행한 직선 위의 점들에서 생각하자.

이들이 2회 때 모두 다른 성적을 받았으므로 등수가 모두 다르겠지?



2회 점수가 10점인 학생이 2명, 9점인 학생이 2명이니까 점 (7, 8)을 나타내는 학생은 5등이 될 수 있어.

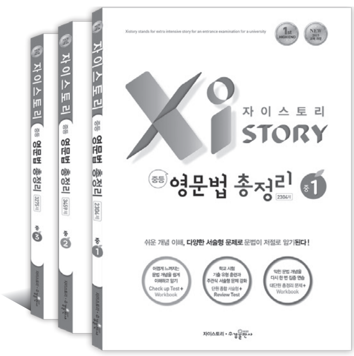
한편, 8점인 학생이 3명이니까 점 (7, 7)을 나타내는 학생은 8등이 될 수 있고, 7점인 학생이 3명이므로 점 (7, 6)을 나타내는 학생은 11등을 할 수 있어.

즉, 2회의 실험 점수로 매기는 등수로 5등, 8등, 11등을 할 수 있어.

따라서 구하는 등수가 될 수 있는 것은 8등이야.

재미있는 공부, 야무진 실력 향상

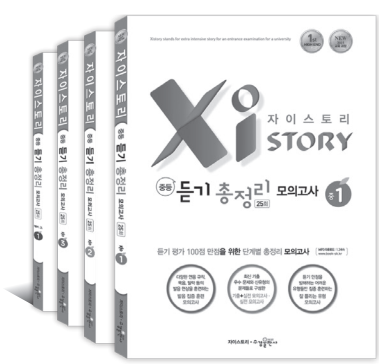
자이스토리 중등 영어



[중1 / 중2 / 중3]

영문법 총정리

- 쉬운 개념 이해, 다양한 서술형 문제로 문법이 저절로 암기!
- 어렵게 느껴지는 문법 개념을 쉽게 이해시키고 확인하는 Check-up Test
- Review Test와 단원 종합 문제를 통한 학교 시험 기출 유형과 주관식 서술형 문제 훈련
- 익힌 문법 개념을 다시 한 번 집중 연습하는 대단원 총정리 문제와 Workbook



[중1 / 중2 / 중3 / 예비 고1]

듣기 총정리 모의고사

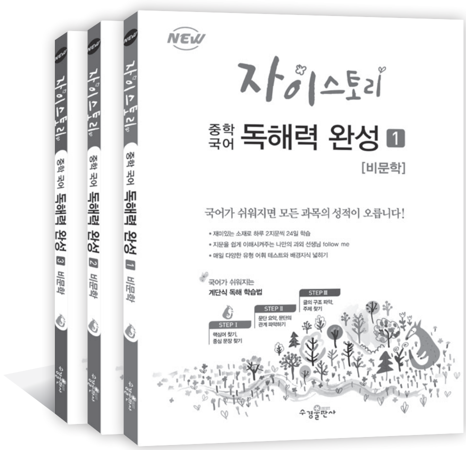
- 영어 발음에 대한 집중 학습 – 발음 집중 훈련 모의고사
- 출제 유형의 철저한 분석과 반복적 집중 훈련 – 유형 집중 훈련 모의고사
- 최신 기출 문제와 고품격 예상 문제로 유형과 난이도 연습 – 기출+실전 모의고사, 실전 모의고사
- 듣기 100점을 방해하는 잘 틀리는 유형 집중 훈련 – 잘 틀리는 유형 모의고사
- 어려운 표현과 긴 대본, 빠른 속도 문제 집중 훈련 – 고난도 모의고사
- 예비 고1을 위한 수능 맛보기 – 수능 유형 훈련 모의고사

[Level 1 / Level 2 / Level 3 / Level 4]

포인트 리딩

- 교과서와 기출 문제 분석을 통해 선정한 30개의 핵심 구문을 활용한 독해 훈련
- 모든 독해 문제의 가장 기본이 되는 15개 핵심 문제 유형을 활용한 독해 훈련
- 핵심 구문과 유형 해법을 차근차근 자세히 알려주는 Follow Me 선생님
- 내신 서술형까지 완벽 대비하는 미니 모의고사와 어휘 Review
- 필수 어휘 총정리 – 휴대용 단어장 (+ 그림 연상 어휘 문제)

국어가 쉬워지면 모든 과목의 성적이 오릅니다!



자이스토리
중학 국어 독해력 완성 시리즈
[비문학]

○ 재미있는 소재로 하루 2지문씩 24일 완성

- '추석 연휴가 고작 하루였다고?', '슈퍼 히어로를 좋아하는 이유' 등 흥미로운 소재의 지문으로 지루함 없이 독해 연습을 할 수 있습니다.
- 인문, 사회, 과학, 기술, 예술 지문은 물론 복합 지문까지 다양한 영역의 지문을 수준별 난이도에 따라 수록했습니다.

○ 지문을 쉽게 이해하게 도와주는 나만의 과외 선생님 Follow me

- STEP Ⅰ~Ⅲ 과정을 통해 혼자 공부하더라도 지문을 쉽게 이해할 수 있도록 친절하고 자세하게 설명합니다.
- 핵심어를 파악하는 방법, 문단 요약하는 방법, 주제를 찾는 방법 등을 구체적으로 알려줍니다.

○ 매일 다양한 유형의 어휘 문제와 배경지식 넓히기

- 독해의 기초가 되는 어휘를 매일 여러 유형의 문제로 테스트해 익힐 수 있습니다.
- 지문에 나온 내용과 관련된 배경지식은 SNS, 만화, 그림 등으로 표현하여 오래도록 기억하게 합니다.

국어가 쉬워지는 계단식 독해 학습법

STEP Ⅰ
핵심어 찾기, 중심 문장 찾기

STEP Ⅱ
문단 요약하기, 문단 간의 관계 파악하기

STEP Ⅲ
글의 구조 파악하기, 주제 찾기

자이스토리 중학 국어 독해력 완성 [비문학] 시리즈

교재 단계	지문 구성	문제 유형	학습 대상
독해력 완성 1 (비문학)	흥미로운 소재 + 기본 어휘로 구성된 지문	내용 이해 문제 + 어휘 문제	중2~예비 중1
독해력 완성 2 (비문학)	흥미로운 소재 + 실전 어휘로 구성된 지문	내용 이해 문제 + 내용 추론 문제 + 어휘 문제	중3~중1
독해력 완성 3 (비문학)	흥미로운 소재 + 실전 어휘 + 고1 기출 변형 지문	내용 이해 문제 + 내용 추론 문제 + 수능형 문제(구체적 사례 및 반응의 적절성) + 어휘 문제	예비 고1~중3

memo

memo

memo

memo