Xi story 중등 수학 3(상) 해설편

Contents

★ 빠른정답찾기는 p.2~7에서 제공합니다.
★ 개념 체크의 문제는 빠른정답찾기에서 정답만을 제공합니다.

빠른 정답 찾기

A 제곱근과 무리수

문제편 p. 12

[개념 체크]

001 ± 6 **002** $\pm\frac{5}{8}$ **003** ± 0.7 **004** ± 9 **005** ± 0.25

006 $\pm\frac{1}{12}$ **007** $\pm\sqrt{3}$ **008** $\sqrt{2}$ **009** 0.5 **010** $-\sqrt{6}$

011 5 **012** -4 **013** $\frac{2}{7}$ **014** -0.6 **015** 2

016 6 **017** 4 **018** $2a$ **019** $2a$ **020** $1-a$

021 1 **022** $\sqrt{5}<\sqrt{8}$ **023** $0.2<\sqrt{0.2}$

024 $-\sqrt{3}<-\sqrt{2}$ **025** $-0.1>-\sqrt{0.1}$ **026** 무

027 무 **028** 유 **029** 유 **030** 무 **031** 유

032 × **033** ○ **034** ○ **035** ×

036 $2+\sqrt{15}<6$ **037** $-2+\sqrt{3}<1+\sqrt{3}$

038 $5-\sqrt{5}>3-\sqrt{5}$

[유형 다지기]

039 ③ **040** ⑤ **041** ① **042** ③ **043** ④

044 (1) ± 6 (2) 2 (3) 5 **045** ④ **046** ② **047** ③

048 $\sqrt{10}$ cm **049** ③ **050** ④ **051** ② **052** $\sqrt{130}$ cm

053 ② **054** $\sqrt{73}$ cm **055** ④ **056** ③ **057** ④

058 ⑤ **059** ② **060** $3x$ **061** ③ **062** $-a+b$

063 ㄴ, ㄷ **064** ③ **065** ④ **066** $-a-b$ **067** ②

068 $-2x$ **069** 42 **070** ⑤ **071** ② **072** ④

073 ② **074** ③ **075** ① **076** (1) 5개 (2) 18

077 -3 **078** 1 **079** ④ **080** ④ **081** ③

082 ①, ⑤ **083** $1+\sqrt{2}$ **084** ① **085** ④ **086** 7

087 ③, ⑤ **088** ④ **089** $3+\sqrt{2}$ **090** $2+\sqrt{5}$

091 $\mathrm{P}:3-\sqrt{5}$, $\mathrm{Q}:3+\sqrt{5}$

092 $\mathrm{P}:-3+\sqrt{5}$, $\mathrm{Q}:1-\sqrt{10}$ **093** ② **094** ②

095 ⑤ **096** ㄱ, ㄹ **097** ④ **098** ② **099** ②

100 ④ **101** P, Q, R **102** 3 **103** ② **104** ③

[잘 틀리는 유형 훈련]

105 12 **106** -15 **107** 167 **108** 113 **109** $-2a$

110 0 **111** ② **112** ⑤ **113** ⑤ **114** ④

115 31 **116** 50 **117** ② **118** ② **119** ④

120 ② **121** 3 **122** 9 **123** ④ **124** ②

125 ③ **126** ④ **127** ③, ④ **128** ④, ⑤

[서술형 다지기]

129 -6 **130** -2 **131** 96 **132** 75 **133** 1

134 $\frac{1}{a}+1$ **135** 3 **136** 13 **137** $B<A<C$

138 6

[최고난도 만점 문제]

139 4개 **140** ② **141** 8 **142** 11 **143** 625

144 7 **145** ㄴ, ㄷ

B 근호를 포함한 식의 계산

문제편 p. 30

[개념 체크]

001 $\sqrt{6}$ **002** $-6\sqrt{21}$ **003** $\sqrt{5}$ **004** $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ **005** $\sqrt{15}$

006 $\sqrt{\frac{1}{6}}$ **007** $3\sqrt{2}$ **008** $-3\sqrt{3}$ **009** $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **010** $\frac{\sqrt{2}}{10}$

011 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **012** $-\frac{\sqrt{15}}{5}$ **013** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **014** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **015** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

016 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **017** 6 **018** $\frac{8}{3}$ **019** $3\sqrt{3}$ **020** $5\sqrt{5}$

021 $-2\sqrt{3}$ **022** $7\sqrt{2}$ **023** $\sqrt{10}+6$ **024** $\sqrt{5}+\sqrt{2}$

025 $5\sqrt{2}+6\sqrt{3}$ **026** $\frac{15}{2}$ **027** $\sqrt{10}+\sqrt{15}$

028 $3\sqrt{6}$ **029** 1.005 **030** 1.153 **031** 1.257 **032** 1.304

033 46.26 **034** 146.3 **035** 0.1463 **036** 0.04626

[유형 다지기]

037 ② **038** ⑤ **039** ③ **040** 48 **041** ③

042 ⑤ **043** $2\sqrt{7}$, $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{3}$ **044** $\frac{2}{3}$ **045** ①

046 ⑤ **047** ③ **048** ⑤ **049** ⑤ **050** ④

051 ③ **052** ② **053** ④ **054** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **055** ①

056 $-36\sqrt{3}$ **057** ② **058** ①, ⑤ **059** ③ **060** $\sqrt{6}$ cm

061 ④ **062** $\frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm **063** ③ **064** ④

065 $32\sqrt{3}$ cm^2 **066** $2\sqrt{6}$ cm **067** ④ **068** ③

069 $5\sqrt{5}$ cm^2 **070** 12 **071** ⑤ **072** $3\sqrt{2}$ cm^2

073 ② **074** 10 **075** ④ **076** -3 **077** ③

078 ③ **079** $5+\sqrt{3}$ **080** ① **081** ② **082** $8-3\sqrt{6}$

083 ② **084** ③ **085** ② **086** ① **087** ①

088 $\frac{3\sqrt{2}+7\sqrt{5}}{2}$ **089** ④ **090** $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ **091** ④

092 $(8\sqrt{3}+16)$ cm **093** $\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$ **094** 3

095 $\frac{9\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{2}$ **096** $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$ **097** ④

098 (1) 9.763 (2) 485 **099** 0.7355 **100** ④

101 (1) 233 (2) 269 **102** ④ **103** (1) 187.1 (2) 0.05916

104 ④ **105** ④ **106** ⑤ **107** ⑤ **108** $\sqrt{14}+1$

109 $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ **110** ③ **111** $C<A<B$ **112** $1-2\sqrt{2}$

113 ②, ⑤ **114** $2-5\sqrt{5}$ **115** ⑤ **116** ③ **117** ⑤

[잘 틀리는 유형 훈련]

118 ⑤ **119** ④ **120** $20+10\sqrt{2}$ **121** $13\sqrt{10}$

122 ④ **123** ② **124** $\frac{1}{3}$ **125** $\frac{1}{2}$ **126** $2\sqrt{3}$

127 $2+\sqrt{2}$ **128** 12 **129** $\frac{190}{3}$ **130** ③ **131** ①

132 0.1584 **133** 3.8175 **134** $32\sqrt{7}$ **135** $9\sqrt{3}$ **136** $3\sqrt{3}-5$

137 $-\sqrt{2}+\sqrt{5}-1$ **138** $24\sqrt{5}\pi\ \text{cm}^3$

139 $(18+12\sqrt{14})\pi\ \text{cm}^2$ **140** $2\sqrt{10}-6$ **141** $2\sqrt{2}-2$

[서술형 다지기]

142 $7\sqrt{10}$ **143** $5\sqrt{2}$ **144** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **145** $\frac{13\sqrt{6}}{18}$ **146** $\frac{1}{50}$

147 3 **148** $7\sqrt{6}$ **149** $12+15\sqrt{2}+12\sqrt{3}$

150 $A<B<C$ **151** $(40\sqrt{3}+16\sqrt{2})\ \text{cm}^3$

[최고난도 만점 문제]

152 ③ **153** $-\frac{2}{7}$ **154** $8\sqrt{3}$ **155** 6 **156** ④

157 ②

C 곱셈 공식

문제편 p. 50

[개념 체크]

001 $ab+a+3b+3$ **002** $2ab-5a+6b-15$

003 $2x-xy-2+y$ **004** $2xy-4x+3y-6$

005 x^2+4x+4 **006** $4a^2+4ab+b^2$

007 $9a^2-12ab+4b^2$ **008** $4x^2-4xy+y^2$ **009** a^2-4b^2

010 $9a^2-b^2$ **011** x^2+3x+2 **012** $2x^2+3x-2$

013 $\sqrt{6}-2$ **014** $9+4\sqrt{5}$ **015** $3\sqrt{3}-2\sqrt{6}$ **016** $12+8\sqrt{3}$

017 2, 200, 4, 2704 **018** 4, 800, 16, 9216

019 100, 100, 10000, 9996

020 200, 100, 20000, 3, 20497 **021** × **022** ○

023 ○ **024** × **025** 3 **026** $\sqrt{5}$

[유형 다지기]

027 ③ **028** ② **029** ②

030 $4a^2+5ab+12a-6b^2-9b$

031 ④ **032** ③ **033** 4 **034** 2 **035** ③

036 ③ **037** ③ **038** ④ **039** $25a^2-30a+9$

040 ④ **041** a^2-36 **042** ① **043** 33 **044** x^8-256

045 ① **046** ① **047** ⑤ **048** 38 **049** ③

050 ① **051** ① **052** ② **053** ③ **054** ③

055 -1 **056** 5 **057** a^2-b^2 **058** ①

059 $ab-ac-bc+c^2$ **060** $4\ \text{m}^2$ **061** ② **062** ①

063 ① **064** ② **065** ⑤ **066** 5 **067** 6

068 ② **069** ③

070 $A=x-10$, $B=x-2$, $C=x^2-8x$ **071** ⑤

072 ④ **073** $55+2\sqrt{5}$ **074** ⑤ **075** ㄴ, ㄷ

076 ① **077** ② **078** ② **079** ⑤ **080** $9-4\sqrt{5}$

081 ① **082** ② **083** $-18-8\sqrt{6}$ **084** ①

085 8 **086** $9-5\sqrt{2}$ **087** ① **088** ② **089** ⑤

090 ② **091** $12-3\sqrt{13}$ **092** ④ **093** ④

094 ③ **095** ① **096** 9991 **097** 2940 **098** 2

099 ④ **100** ② **101** ④ **102** 100 **103** ④

104 ③ **105** ③ **106** ⑤ **107** ④ **108** ②

109 ④ **110** ⑤ **111** 3 **112** ⑤

[잘 틀리는 유형 훈련]

113 ① **114** ④ **115** -2 **116** 18 **117** ③

118 ① **119** 95 **120** $\frac{22}{7}$ **121** ㄱ, ㄷ **122** ㄱ, ㄴ

123 $-1+3\sqrt{2}$ **124** $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$ **125** 6

126 9 **127** $3\sqrt{2}$ **128** $2\sqrt{2}+1$ **129** $12\sqrt{2}+14\sqrt{3}$

130 $7+2\sqrt{6}$ **131** -4 **132** 208 **133** 820 **134** $\frac{3}{7}$

135 $\frac{5\sqrt{3}+9}{2}$ **136** $6+\sqrt{5}$

[서술형 다지기]

137 63 **138** 321 **139** a^8-a^4+16

140 $x^8+x^4y^4+y^8$ **141** $-\frac{4}{3}$ **142** $\frac{4}{3}$ **143** -10

144 33 **145** $(8-4\sqrt{2})$ cm **146** $9x^2+y^2+x^2y^2+9$

[최고난도 만점 문제]

147 11 **148** ③ **149** 20 **150** $\frac{-10+6\sqrt{2}}{7}$

151 $x=\frac{1}{8}$, $y=-\frac{1}{24}$ **152** 4 **153** $-\frac{1}{k}$ **154** 4

155 $\frac{20}{13}$ cm

D 인수분해

문제편 p. 70

[개념 체크]

001 인수 **002** 인수, 인수분해 **003** ㄴ **004** ㄱ

005 ㄹ **006** ㄷ **007** x **008** xy **009** $2a$

010 $3m^2$ **011** $2b^2(3a-4)$ **012** $-3xy^2(1-3xy)$

013 $x^2(x-y+z)$ **014** $-2a^2b(2ab-6+b)$

015 $(a+2)^2$ **016** $(x-7)^2$ **017** $(3a-1)^2$ **018** $(x-8y)^2$

019 16 **020** 36 **021** 18 **022** 6

023 $(a+8)(a-8)$ **024** $(2x+7y)(2x-7y)$

025 $(6a+b)(6a-b)$ **026** $-(x+5)(x-5)$ **027** 3, 5

028 4, 6 **029** $(x+2y)(x-5y)$ **030** $(a+4b)(a-3b)$

031 2, 2, 1, 2, 2, 1, $6x$ **032** $2x$, $2y$, 2, $-3xy$, $-4xy$

033 $(2a+1)(a+2)$ **034** $(3x-2)(4x+1)$

035 $(2a-3b)(a+2b)$ **036** $2(x-y)(2x-3y)$

[유형 다지기]

037 ③ **038** ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ **039** ⑤ **040** ①, ④

041 $(x-5)(a+2b+c)$ **042** ④ **043** ⑤

044 $\left(\frac{5}{3}a-\frac{9}{2}b\right)^2$ **045** ㄱ, ㄷ **046** ③ **047** ⑤

048 ② **049** 14 **050** ④ **051** 30 **052** ④

053 ② **054** ② **055** $2x$ **056** 5 **057** ⑤

058 ③ **059** $\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)$ **060** ④

061 ③ **062** ④ **063** ⑤ **064** 24 **065** ⑤

066 $(a+b-2)(a-b)$ **067** ④ **068** ③ **069** ③

070 ② **071** ② **072** ③ **073** ⑤ **074** ②

075 0 **076** ② **077** ④ **078** $\frac{1}{4}(x+2)(3x-4)$

079 ① **080** ① **081** ③ **082** ②, ④ **083** ⑤

084 11 **085** ⑤ **086** ① **087** ③ **088** $x-2$

089 ① **090** -1 **091** ③ **092** ④

093 $(x-2)(x-3)$ **094** ② **095** 16 **096** 0

097 ③ **098** $4a+12$ **099** $(x+1)(x+3)$ **100** ⑤

101 $3a+2b$ **102** $(4x-5)$ m **103** ⑤ **104** $2a-1$

105 24 cm **106** $x(x+10)\pi$ **107** ① **108** ⑤

109 $12x+8$

[잘 틀리는 유형 훈련]

110 ③ **111** ③ **112** ③ **113** ④ **114** ③

115 ⑤ **116** $2x-5$ **117** ② **118** ①

119 최댓값 : 49, 최솟값 : 14 **120** ② **121** ②

122 ④ **123** 7 **124** ① **125** ① **126** ⑤

127 18 **128** ⑤ **129** ⑤ **130** $(x+2)(3x+8)$

131 $(x^2+1)(y^2+1)(x+1)(x-1)$ **132** 5 **133** 11

[서술형 다지기]

134 $-2x$ **135** $-a+5$ **136** $2x-3$ **137** $6x-8$ **138** 2

139 5 **140** -7 **141** 35 **142** 29

143 $4x+10y$

[최고난도 만점 문제]

144 ④ **145** $5a$ **146** -3 **147** ④

148 $(6x+1)(x-1)$ **149** $2(a-b-3)$ **150** ③

151 20개

E 인수분해의 활용

문제편 p. 88

[개념 체크]

001 $(a+3b)(x+y)$ **002** $(2x+3)(y-1)$

003 $(x+z)(y+z)$ **004** $ab(2a-1)^2$

005 $x(x-1)$ **006** $(x+4)^2$

007 $(a+b-2)^2$ **008** $x(x-6)$

009 $(x+2)(x-1)$ **010** $(2a-2b-1)(a-b+3)$

011 $y+1$, $y+1$, $y+1$, $y+1$ **012** $y-b$, $y-b$, $y-b$

013 $x+y$, $x+y$, $x+y$ **014** $(2a-1)(2a+b-1)$

015 $(x-3)(x-y-3)$ **016** 750 **017** 9600 **018** 900

019 7 **020** 6000 **021** -3 **022** 400 **023** $8\sqrt{3}$

024 100

[유형 다지기]

025 ⑤ **026** $(a-b)(x-y)$ **027** ②, ④ **028** ④

029 ① **030** ① **031** -2 **032** ② **033** -3

034 ③ **035** ③ **036** -5 **037** ②

038 $-2(2x+3)(x+9)$ **039** ②, ③ **040** ④

041 $(x+1)(x+3)(x-1)(x-3)$ **042** ①

043 $\left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2$ **044** 4 **045** ③

046 $2x^2-4x-11$ **047** 13 **048** -3 **049** ①

050 ③ **051** $a+1$ **052** ② **053** ⑤ **054** -2

055 ② **056** ④ **057** ② **058** ① **059** 4

060 ④ **061** $(x-3y+1)^2$ **062** ⑤ **063** ②

064 ① **065** $a(a-b)(a-c)$ **066** ②

067 $(a+1)(b+1)(c+1)$ **068** ③ **069** ③

070 ④ **071** 5417 **072** ③ **073** -128 **074** ②

075 9100 **076** ③ **077** 2651 **078** ① **079** ②

080 ④ **081** ⑤ **082** ② **083** ② **084** ④

085 ⑤ **086** 165 **087** ③ **088** ③ **089** 6

090 ② **091** ⑤ **092** ③ **093** ③ **094** ④

095 $2y+1$ **096** 8 **097** $x+y$ **098** ③

[잘 틀리는 유형 훈련]

099 ③ **100** $(x-2y)(2x-1)$ **101** ③ **102** ②

103 ④ **104** ④ **105** ②, ④ **106** ⑤

107 $(x+y+1)(x-y+1)$ **108** ④ **109** ④

110 ④ **111** ③ **112** ④ **113** ③ **114** ①

115 ⑤ **116** ⑤ **117** ③ **118** ① **119** ⑤

120 ⑤ **121** ① **122** ④

[서술형 다지기]

123 $(x^2-2x+2)(x+1)(x-3)$

124 $(a-b+6)(a-b-3)$ **125** 100 **126** $24\sqrt{5}$

127 $(x+2)(x-1)(x^2-x-8)$

128 $(2, 4)$, $(0, -2)$, $(4, 2)$, $(-2, 0)$ **129** -10

130 $(a-b)(b-c)(a-c)$ **131** -210 **132** $245\pi\ \mathrm{cm}^3$

[최고난도 만점 문제]

133 7 **134** ① **135** ② **136** ⑤ **137** $-6\sqrt{2}$

138 128 **139** 2700 **140** $x-1$

F 이차방정식의 풀이

문제편 p. 106

[개념 체크]

001 ○ **002** ○ **003** × **004** ○ **005** ×

006 × **007** × **008** ○ **009** × **010** ○

011 $x=3$ **012** $x=-1$ 또는 $x=0$ **013** $x=1$ 또는 $x=2$

014 $x=1$ **015** 9 **016** -2 **017** 7

018 $x=0$ 또는 $x=7$ **019** $x=-5$ 또는 $x=2$

020 $x=-2$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ **021** $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

022 $x=-5$ 또는 $x=-3$ **023** $x=-4$ 또는 $x=2$

024 $x=-2$ 또는 $x=7$ **025** $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

026 $x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$ **027** $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

028 $x=4$ (중근) **029** $x=-7$ (중근)

030 $x=\frac{3}{2}$ (중근) **031** ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ **032** $x=\pm 2$

033 $x=\pm\sqrt{7}$ **034** $x=\pm\frac{5}{2}$ **035** $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

036 $x=-2$ 또는 $x=8$ **037** $x=-1\pm 2\sqrt{2}$

038 $x=-6$ 또는 $x=0$ **039** $x=5\pm 2\sqrt{3}$ **040** 16, 4

041 32, 4 **042** p^2, p **043** $\frac{q^2}{4}$, $\frac{q}{2}$ **044** 1, 3

045 5, 24 **046** ㉠ : 4, ㉡ : 2, ㉢ : 3, ㉣ : $\sqrt{3}$

047 ㉠ : 9, ㉡ : 3, ㉢ : 13, ㉣ : $\sqrt{13}$

[유형 다지기]

048 ② **049** ⑤ **050** 12 **051** $a\neq -1$ **052** ③

053 ③, ⑤ **054** ④ **055** 4개 **056** ② **057** $x=-2$

058 ④ **059** ④ **060** ⑤ **061** ② **062** 8

063 ④ **064** ① **065** ② **066** 96 **067** 4

068 ⑤ **069** ③ **070** ② **071** ② **072** ①

073 ④ **074** ⑤ **075** ③ **076** ⑤ **077** ③

078 ① **079** ② **080** ③ **081** 18 **082** $x=-\frac{3}{5}$

083 ③ **084** ⑤ **085** ② **086** ③ **087** ②

088 ② **089** 6 **090** $-\frac{7}{2}$ **091** $\frac{1}{18}$ **092** ②

093 ④ **094** ⑤ **095** ④ **096** ② **097** ③

098 ① **099** $k=0$, $x=2$ (중근) **100** ⑤ **101** ④

102 ③ **103** ① **104** ④ **105** ① **106** ②

107 ③ **108** ③ **109** ④ **110** ③ **111** 2

112 3 **113** ④ **114** ① **115** ④ **116** ⑤

117 ⑤ **118** ① **119** ② **120** ④

[잘 틀리는 유형 훈련]

121 ⑤ **122** $a\neq -1$이고 $a\neq 4$ **123** ① **124** ③

125 ② **126** ⑤ **127** -2 **128** ④ **129** 91

130 7개 **131** $\frac{12}{17}$ **132** ② **133** 9 **134** -2

135 ⑤ **136** ④ **137** ⑤ **138** ⑤ **139** ②

140 ③ **141** $2\sqrt{2}$ **142** 28 **143** ② **144** ⑤

[서술형 다지기]

145 $-\frac{11}{3}$ **146** 3 **147** 13 **148** 33 **149** $-\frac{5}{2}$

150 $2p^2-4$ **151** 41 **152** 2 **153** 4개

154 $k=\frac{4}{3}$일 때 $x=-12$ (중근), $k=-\frac{4}{3}$일 때 $x=12$ (중근)

[최고난도 만점 문제]

155 ③ **156** $\frac{5}{2}$ **157** ③ **158** ① **159** ①

160 1 **161** $\frac{7}{2}$ **162** ④

G 이차방정식의 활용

문제편 p. 126

[개념 체크]

001 $\frac{b}{2a}$, $\frac{b}{2a}$, $\frac{b}{2a}$, b^2-4ac, $\frac{b}{2a}$, b^2-4ac, $-b$, b^2-4ac

002 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ **003** $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

004 $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$ **005** $x=\frac{1\pm\sqrt{11}}{5}$

006 $A=-7$, $B=69$ **007** $x=-3$ 또는 $x=1$

008 $x=5$ (중근) **009** $x=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$

010 $x=2$ 또는 $x=3$ **011** $x=1\pm\sqrt{2}$

012 $x=-6$ 또는 $x=7$ **013** $x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=0$

014 $x=1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

015

$ax^2+bx+c=0$	a	b	c	b^2-4ac 의 값	근의 개수
$x^2+x-1=0$	1	1	-1	5	2개
$-x^2+6x-9=0$	-1	6	-9	0	1개
$2x^2-2x+1=0$	2	-2	1	-4	0개

016 0개　017 2개　018 2개　019 1개

020 $x^2-7x+10=0$　021 $x^2-3x-28=0$

022 $x^2-12x+36=0$　023 $x^2+4x+3=0$

024 $2x^2-20x+48=0$　025 $3x^2-18x-21=0$

026 $-x^2+10x-25=0$　027 $4x^2+x-\frac{1}{2}=0$

028 $2+\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$, 4, -4　029 2　030 -4

031 8

032 $x+1$, $x+1$, x^2+x-42, $(x+7)(x-6)$, -7, 6, 6, 6, 7, 13

033 (1) $x^2+9x-10=0$　(2) $x=-10$ 또는 $x=1$　(3) 1 m

034 (1) 12초 후　(2) 5초 후

[유형 다지기]

035 ④　036 ⑤　037 ④　038 ④　039 ⑤

040 ①　041 ④　042 $x=0$　043 ⑤　044 ③

045 $x=2$　046 ①　047 ③　048 ②　049 ②

050 3　051 ①　052 ⑤　053 ③, ⑤　054 ⑤

055 ①　056 ㄴ, ㄹ　057 ②　058 ②　059 3

060 ①　061 7　062 ②　063 ⑤　064 ④

065 7　066 6개　067 ②　068 ①　069 ④

070 ⑤　071 $x=2$ 또는 $x=3$　072 ①

073 $2x^2-5x+2=0$　074 $4x^2+8x+4=0$　075 ⑤

076 ②　077 ⑤　078 -36　079 ①　080 ③

081 ③　082 ③　083 $\frac{41}{20}$　084 ①　085 48

086 ④　087 ③　088 ①　089 ③　090 ⑤

091 ①　092 ④　093 39　094 8　095 ⑤

096 ④　097 9명　098 12번째　099 ⑤　100 ①

101 10개　102 ④　103 30　104 7개　105 ②

106 21개　107 ③　108 5초 후　109 ①, ③　110 8초

111 (2, 4)　112 (3, 3), (9, 9)　113 (2, 6), (3, 4)

114 17　115 5 cm　116 2 m　117 8 cm　118 10 cm

119 $(1+\sqrt{5})$ cm　120 ⑤　121 $(-5+5\sqrt{5})$ cm

122 2 cm　123 14초 후　124 2 cm　125 $(3+3\sqrt{2})$ cm

126 ④　127 1　128 4 cm 또는 8 cm　129 2 m

130 4 cm

[잘 틀리는 유형 훈련]

131 ②　132 ④　133 ①　134 -1　135 -17

136 7　137 ⑤　138 ①　139 ①　140 93

141 ⑤　142 ④　143 ④　144 ②

145 $x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$　146 4개　147 ②

148 ④　149 6초　150 ③　151 ④　152 ③

153 ④　154 ⑤

[서술형 다지기]

155 6　156 7　157 7　158 $\frac{7}{3}$　159 2

160 2　161 -1　162 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$　163 -1

164 9분 후

[최고난도 만점 문제]

165 $x=\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$　166 4

167 ⑤　168 8　169 3분　170 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

171 ④　172 $(8-4\sqrt{3})$ cm

H 이차함수와 그래프(1)

문제편 p. 150

[개념 체크]

001 ×　002 ×　003 ○　004 ○　005 $y=x^2+x$

006 $y=-x^2+10x$　007 3　008 $\frac{5}{2}$　009 -15

010 -4　011 0, 0, y축　012 아래　013 x축

014 감소　015 0, 0, y축　016 위　017 $y=4x^2$

018 -1　019 감소　020 (0, 0)　021 $x=0$

022 $y=-\frac{3}{8}x^2$　023 ㄱ, ㄷ, ㅁ　024 ㄱ, ㄹ

025 ㄹ　026 $y=x^2+5$, (0, 5)　027 $y=-2x^2-9$, (0, -9)

028 $y=\frac{1}{2}x^2-7$, (0, -7)　029 $y=-\frac{1}{4}x^2+5$, (0, 5)

030 꼭짓점의 좌표 : (0, -2), 축의 방정식 : $x=0$

031 꼭짓점의 좌표 : (0, 3), 축의 방정식 : $x=0$

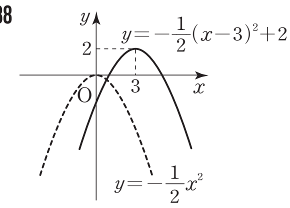
032

	$y=x^2$ [5]	$y=-2x^2$ [-3]
함수식	$y=(x-5)^2$	$y=-2(x+3)^2$
꼭짓점의 좌표	(5, 0)	(-3, 0)
축의 방정식	$x=5$	$x=-3$

033 $a=\frac{1}{2}$, $b=-6$　034 $a=-5$, $b=-7$

035 $a=\frac{3}{4}$, $b=5$　036 $a=-\frac{1}{3}$, $b=8$

037 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$

038


039 $(3,\ 2)$

040 $x=3$

041 $y=3(x-2)^2+4$

042 $y=-2(x+1)^2-3$

043 꼭짓점의 좌표 : $(2,\ 1)$, 축의 방정식 : $x=2$

044 꼭짓점의 좌표 : $\left(5,\ -\frac{3}{2}\right)$, 축의 방정식 : $x=5$

045 1

[유형 다지기]

046 ② 047 ③ 048 ⑤ 049 ④ 050 ⑤
051 ② 052 ④ 053 ① 054 ③ 055 ㅁ과 ㅂ
056 ③ 057 ② 058 ① 059 ⑤ 060 ⑤
061 ② 062 $\frac{25}{4}$ 063 ② 064 ③ 065 -24
066 -4 067 ④ 068 ③ 069 $(0,\ 4)$ 070 ①
071 ④ 072 ② 073 ③ 074 -4 075 ③
076 ⑤ 077 3 078 ㄴ, ㄹ 079 ② 080 ⑤
081 $a>0$, $p<0$ 082 12 083 ① 084 ③
085 ③ 086 ② 087 ④ 088 10 089 ⑤
090 -3 091 ④ 092 ⑤ 093 ② 094 ③
095 ⑤ 096 ③ 097 ② 098 ④ 099 4
100 ③ 101 ② 102 ③ 103 ④ 104 ①
105 $(1,\ -3)$ 106 50 107 18 108 6
109 ④ 110 제1, 2사분면 111 ④ 112 -1
113 ③ 114 ㄱ, ㄴ 115 ②, ⑤ 116 $a>0$, $p<0$, $q<0$
117 ③, ⑤ 118 $a-p-q>0$ 119 ②

[잘 틀리는 유형 훈련]

120 -3 121 -6 122 $\frac{1}{4}$ 123 $\frac{1}{2}$ 124 ②
125 ① 126 ⑤ 127 ③ 128 $y=\frac{1}{2}x-2$
129 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 130 ① 131 ③

[서술형 다지기]

132 $\frac{50}{9}$ 133 -6 134 -1 135 1 136 1
137 28 138 2 139 -18, -4 140 -3
141 제3사분면

[최고난도 만점 문제]

142 ① 143 $(2,\ 0)$ 144 ③ 145 4 146 ⑤
147 -4 148 $2\sqrt{3}-2$

I 이차함수와 그래프(2)

문제편 p. 170

[개념 체크]

001 1, 1, 1, 3 002 4, 4, 2, 7
003 $y=2(x+1)^2-3$ 004 $y=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$
005 $(4,\ -6)$, $x=4$ 006 $(-2,\ 3)$, $x=-2$
007 >, 다르다, >, <, < 008 $y=-(x-1)^2+2$
009 $y=-2(x+2)^2+4$ 010 $y=(x-2)^2-6$
011 $y=-3x^2-3x+2$ 012 $y=-x^2+4x+1$
013 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ 014 -2, 8, 64, 72 015 45 m

[유형 다지기]

016 ③ 017 18 018 1 019 1 020 ④
021 -5 022 ④ 023 ㄷ, ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㄹ 024 ②
025 ④ 026 2 027 ③ 028 ③ 029 -4
030 $y=-x^2-4x-3$ 031 ② 032 -3 033 -2
034 ② 035 $x>6$ 036 $x<-\frac{1}{2}$ 037 ⑤ 038 ⑤
039 ④ 040 $k<-1$ 041 ④ 042 3 043 ②
044 ③ 045 제1, 3, 4사분면 046 ③ 047 ④
048 ②, ④ 049 8 050 10 051 5 052 12
053 $\frac{9}{8}$ 054 $(6,\ 6)$ 055 64 056 $\frac{81}{2}$ 057 ②, ⑤
058 $a>0$, $b>0$, $c<0$ 059 ④ 060 제3사분면
061 ② 062 ③ 063 1 064 ② 065 ③
066 ④ 067 ② 068 ① 069 4 070 $(0,\ 6)$
071 ④ 072 ① 073 ③ 074 $y=-x^2+5x-2$
075 6 076 ② 077 $(1,\ 5)$ 078 -30
079 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{25}{4}\right)$ 080 ③ 081 3 082 3초 후
083 ③ 084 3초 085 50개 086 ② 087 ④
088 10 089 8 090 ④ 091 ②, ④

[잘 틀리는 유형 훈련]

092 $\frac{1}{3}$ 093 $-\frac{1}{2}$ 094 제2사분면 095 ①
096 $2\sqrt{6}$ 097 -1 098 ④ 099 ⑤ 100 $a\le-\frac{4}{9}$
101 1 102 ⑤ 103 ⑤

[서술형 다지기]

104 -4 105 -16 106 2 107 -2 108 $-\frac{49}{9}$
109 20 110 130원 111 -9 112 1 113 18

[최고난도 만점 문제]

114 $\frac{1}{3}$ 115 $\frac{125}{8}$ 116 15 cm 117 $-\frac{3}{2}$
118 $y=x^2+4x+3$ 119 24 120 ③

A 제곱근과 무리수

개념 체크 001~038 정답은 p. 2에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

문제편 p. 14

039 답 ③

① 144의 제곱근은 $\pm\sqrt{144}=\pm\sqrt{12^2}=\pm12$야. ← NO!
② -2의 제곱근은 없어. ← NO!
③ 제곱근 25는 $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$야. ← OK!
④ 0의 제곱근은 0이야. ← NO!
⑤ 9의 음의 제곱근은 $-\sqrt{9}=-\sqrt{3^2}=-3$이야. ← NO!

040 답 ⑤

x가 a의 제곱근이면 $x^2=a$ 또는 $x=\pm\sqrt{a}$야.

041 답 ①

$x^2=81$이면 $x=\pm\sqrt{81}=\pm\sqrt{9^2}=\pm9$
① $x=9$이면 x의 제곱근은 $\pm\sqrt{9}=\pm\sqrt{3^2}=\pm3$
$x=-9$이면 x는 음수이므로 x의 제곱근은 없어.

042 답 ③

ㄱ. 11의 제곱근은 $\pm\sqrt{11}$이므로 $-\sqrt{11}$은 11의 음의 제곱근이야. (참)
ㄴ. $4^2=16$의 제곱근은 ±4야. (거짓)
ㄷ. 제곱하여 0.3이 되는 수는 $\sqrt{0.3}$, $-\sqrt{0.3}$으로 2개가 있어. (거짓)
ㄹ. $1.\dot{7}=\frac{17-1}{9}=\frac{16}{9}$의 제곱근은 $\pm\frac{4}{3}$, 즉 $\pm1.\dot{3}$이야. (참)
따라서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㄷ이야.

043 답 ④

$(-7)^2=49$의 양의 제곱근은 7이므로 $A=7$
$\sqrt{625}=\sqrt{25^2}=25$의 음의 제곱근은 -5이므로 $B=-5$
$\therefore A+B=7+(-5)=2$

044 답 (1) ±6 (2) 2 (3) 5

(1) 36의 제곱근은 $\pm\sqrt{36}=\pm\sqrt{6^2}=\pm6$이야.
(2) $\sqrt{16}=4$이므로 4의 양의 제곱근은 $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$야.
(3) $\sqrt{(-25)^2}=\sqrt{25^2}=25$이므로 제곱근 25는 $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$야.

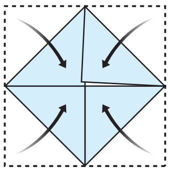
오답피하기

a의 제곱근과 제곱근 a를 혼동하는 사람이 많아. 둘 다 $\sqrt{a}$가 나오는 건 알겠는데, ± 부호가 어느 쪽에 붙는지 헷갈려서 잘 틀릴 수 있어. 이럴 때는 하나만 알고 있자. 제곱근 a를 말하는 순서대로 기호로 나타내면 제곱근 a, 즉 $\sqrt{a}$가 되어 ± 부호가 필요 없게 되지? 그러면 a의 제곱근에 부호가 붙는 건 헷갈리지 않을 거야.

045 답 ④

64의 제곱근은 ±8이므로 $a=8$, $b=-8$
$\sqrt{a-b}=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$이므로
4의 제곱근은 $\pm\sqrt{4}=\pm\sqrt{2^2}=\pm2$야.

046 답 ②



처음의 정사각형 모양의 색종이를 그림과 같이 접으면 새로 만들어진 정사각형의 넓이는 처음 정사각형 모양의 색종이의 넓이의 $\frac{1}{2}$이 되지?
따라서 새로 만들어진 정사각형의 넓이가 $50\ cm^2$일 때, 처음의 정사각형 모양의 색종이의 넓이는 2배이므로 $100\ cm^2$야.
(정사각형의 넓이)=(한 변의 길이)^{2}이므로 구하는 색종이의 한 변의 길이를 x cm라 하면 $x^2=100$
$\therefore x=\pm\sqrt{100}=\pm\sqrt{10^2}=\pm10$
이때, 길이는 양수이므로 접기 전 색종이의 한 변의 길이는 10 cm야.

047 답 ③

삼각형 BCD는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{4^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{16+5}=\sqrt{21}(cm)$$

048 답 $\sqrt{10}$ cm

삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{4+6}=\sqrt{10}(cm)$$

049 답 ③

삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

삼각형 ACD는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$$

삼각형 ADE는 $\angle D=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

050 답 ④

사각형 ABCD는 한 변의 길이가 9 cm인 정사각형이므로
$\overline{BE}=\overline{AB}-\overline{AE}=9-4=5(cm)$
$\overline{BF}=\overline{AE}=4(cm)$
삼각형 EBF는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{EF}=\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{BF}^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}(cm)$$

051 답 ②

삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$
$=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

삼각형 ACD는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2}$
$=\sqrt{(\sqrt{29})^2+2^2}=\sqrt{29+4}=\sqrt{33}$

052 답 $\sqrt{130}$ cm

마름모 ABCD의 두 대각선 AC와 BD는 각각 서로를 수직이등분해.

즉, $\angle AOB=90^\circ$이고, $\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times14=7$(cm),

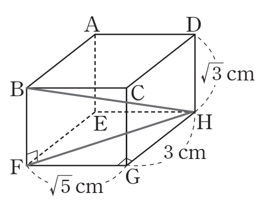
$\overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times18=9$(cm)야.

이때, 삼각형 ABO는 $\angle AOB=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{BO}^2}$
$=\sqrt{7^2+9^2}=\sqrt{49+81}=\sqrt{130}$(cm)

따라서 마름모 ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{130}$ cm야.

053 답 ②



그림에서 삼각형 FGH는 $\angle G=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{FH}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+3^2}$
$=\sqrt{5+9}=\sqrt{14}$(cm)

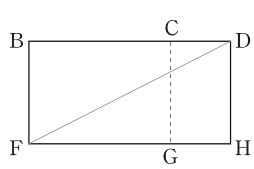
또, 삼각형 BFH는 $\angle F=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{FH}^2+\overline{BF}^2}=\sqrt{(\sqrt{14})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{14+3}=\sqrt{17}$(cm)

따라서 주어진 직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{17}$ cm야.

054 답 $\sqrt{73}$ cm

주어진 직육면체의 전개도는 그림과 같아.



즉, 점 F와 점 D를 잇는 최단 거리는 선분 FD의 길이와 같으므로

$\overline{FD}=\sqrt{\overline{FH}^2+\overline{HD}^2}$
$=\sqrt{(\overline{FG}+\overline{GH})^2+\overline{HD}^2}$
$=\sqrt{(6+2)^2+3^2}$
$=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{64+9}=\sqrt{73}$(cm)

055 답 ④

① $\sqrt{2^2}=2$ ← NO!
② $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$ ← NO!
③ $(-\sqrt{2})^2=(-\sqrt{2})\times(-\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$ ← NO!
④ $-(\sqrt{3})^2=-(\sqrt{3}\times\sqrt{3})=-3$ ← OK!
⑤ $-\sqrt{(-2)^2}=-\sqrt{4}=-\sqrt{2^2}=-2$ ← NO!

오답피하기

③과 ④가 헷갈리지? 똑같이 제곱을 한 것이니까 답도 비슷하게 나와야 하는데 ③은 양수, ④는 음수가 나왔어.
그 차이는 제곱의 범위가 다르기 때문이야. 제곱의 범위는 괄호로 묶인 부분이야. ③의 경우 괄호가 $-\sqrt{2}$를 싸고 있으니까 제곱하면 $-$가 두 번 곱해져서 양수가 나오지만, ④의 경우 괄호가 $-$를 제외한 $\sqrt{3}$만을 싸고 있어서 $-$와 상관없기 때문에 음수가 나오는 거야.

056 답 ③

① $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$ ← OK!
② $(\sqrt{0.5})^2=0.5$ ← OK!
③ $(-\sqrt{6})^2=(\sqrt{6})^2=6$ ← NO!
④ $-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}$ ← OK!
⑤ $-\sqrt{(-7)^2}=-\sqrt{7^2}=-7$ ← OK!

057 답 ④

① $\sqrt{10^2}=10$
② $\sqrt{(-10)^2}=\sqrt{100}=\sqrt{10^2}=10$
③ $(-\sqrt{10})^2=(\sqrt{10})^2=10$
④ $-(\sqrt{10})^2=-10$
⑤ $(\sqrt{10})^2=10$

따라서 그 값이 나머지 넷과 다른 것은 ④야.

058 답 ⑤

$A=\sqrt{169}-3\sqrt{(-2)^4}+\sqrt{(-3)^2\times5^2}-\sqrt{(-6)^2}$
$=\sqrt{13^2}-3\times\sqrt{4^2}+3\times5-6$
$=13-12+15-6$
$=10$

$B=\sqrt{(-24)^2}\times\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2-(-\sqrt{10})^2\div(-\sqrt{2})^2$
$=24\times\frac{1}{6}-10\div2$
$=4-5=-1$

$\therefore A-B=10-(-1)=11$

059 답 ②

$a<0$이므로 $-a>0$이지?

① $(-\sqrt{-a})^2=\sqrt{(-a)^2}=-a$ ← OK!
② $\sqrt{a^2}=-a$ ← NO!
③ $-\sqrt{(-a)^2}=-(-a)=a$ ← OK!
④ $\sqrt{(-a)^2}=-a$ ← OK!
⑤ $-\sqrt{a^2}=-(-a)=a$ ← OK!

따라서 옳지 않은 것은 ②야.

060 답 $3x$

$x>0$에서 $-x<0$이므로
$\sqrt{(-x)^2}=-(-x)=x$
$x>0$에서 $2x>0$이므로
$\sqrt{(2x)^2}=2x$
$\therefore \sqrt{(-x)^2}+\sqrt{(2x)^2}=x+2x=3x$

061 답 ③

① $\sqrt{a^2}=a$

② $\sqrt{9a^2}=\sqrt{(3a)^2}=3a$

③ $-4a<0$이므로 $\sqrt{(-4a)^2}=-(-4a)=4a$

④ $-6a<0$이므로 $\dfrac{\sqrt{(-6a)^2}}{2}=\dfrac{-(-6a)}{2}=\dfrac{6a}{2}=3a$

⑤ $-5a<0$이므로 $-\sqrt{(-5a)^2}=-\{-(-5a)\}=-5a$

따라서 $a>0$이므로 그 값이 가장 큰 것은 ③이야.

062 답 $-a+b$

$ab<0$이므로 a, b의 부호는 서로 반대야. 그런데 $a<b$이므로 $a<0$, $b>0$이 되겠지?

$\therefore$ (주어진 식)$=-\sqrt{(-3b)^2}+\sqrt{(9a)^2}-\sqrt{(-8a)^2}+\sqrt{(4b)^2}$

$=-\{-(-3b)\}+(-9a)-(-8a)+4b$

$=-3b-9a+8a+4b$

$=-a+b$

063 답 ㄴ, ㄷ

'제곱' 나무에 a^2이 피었으므로 뿌리에서 흡수한 영양분은 a^2의 제곱근, 즉 $\pm\sqrt{a^2}=\pm a$지? 양수 a에 대하여

ㄱ. $\dfrac{\sqrt{(-2a)^2}}{4}=\dfrac{-(-2a)}{4}=\dfrac{2a}{4}=\dfrac{a}{2}$

ㄴ. $-\dfrac{\sqrt{4a^2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{(2a)^2}}{2}=-\dfrac{2a}{2}=-a$

ㄷ. $2\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=2\times\dfrac{a}{2}=a$

ㄹ. $-\dfrac{\sqrt{16a^2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{(4a)^2}}{2}=-\dfrac{4a}{2}=-2a$

따라서 뿌리에서 흡수한 영양분인 것은 ㄴ, ㄷ이야.

064 답 ③

$-2<a<3$에서 $a+2>0$, $a-3<0$

$\therefore \sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-3)^2}=a+2-(a-3)$

$=a+2-a+3=5$

065 답 ④

$0<x<2$에서 $x+2>0$, $x-2<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=x+2-\{-(x-2)\}$

$=x+2+x-2$

$=2x$

066 답 $-a-b$

$a>b>0$에서 $a-b>0$, $a+b>0$, $b-a<0$이지?

$\therefore$ (주어진 식)$=(a-b)-(a+b)-\{-(b-a)\}$

$=a-b-a-b+b-a$

$=-a-b$

067 답 ②

$x<-1$에서 $x+1<0$, $x-3<0$이므로

$\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=-(x+1)-(x-3)$

$=-x-1-x+3$

$=-2x+2$

따라서 $-2x+2=12$이므로

$-2x=10$ $\therefore x=-5$

068 답 $-2x$

$xy<0$에서 x, y의 부호는 서로 반대이고, $x-y<0$에서 $x<y$이므로 $x<0$이고 $y>0$이지?

즉, $-x>0$, $x-2<0$, $x-y<0$,

$2-x+y=2+(-x)+y>0$이므로

$(\sqrt{-x})^2+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-y)^2}-\sqrt{(2-x+y)^2}$

$=-x-(x-2)-(x-y)-(2-x+y)$

$=-x-x+2-x+y-2+x-y=-2x$

오답피하기

근호 안의 수가 양수인지 음수인지 찾아서 계산하기가 까다롭지? 이럴 땐, 절댓값을 이용하는 것이 편리해.

예를 들어, $\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$ (단, $1<x<2$)은 $|x-1|-|x-2|$와 같은 식이야.

이때, $1<x<2$이므로 $x-1>0$이고 $x-2<0$에서 주어진 식은 $x-1-(2-x)=2x-3$이 되지.

069 답 42

$168=2^3\times3\times7$이므로 $\sqrt{168x}=\sqrt{2^3\times3\times7\times x}$

여기서 $2^3\times3\times7\times x$가 제곱인 수가 되기 위해서는 소인수의 지수가 모두 짝수가 되어야 하므로 가장 작은 자연수 x는

$x=2\times3\times7=42$

070 답 ⑤

$12=2^2\times3$이므로 $\sqrt{12a}=\sqrt{2^2\times3\times a}$

즉, $a=3\times$(제곱인 수)이면 근호가 없어지고 $\sqrt{12a}$는 자연수가 되겠지?

그런데 $10<a<50$이므로 a의 값은 3×2^2, 3×3^2, 3×4^2에서 12, 27, 48이야.

따라서 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은 $12+27+48=87$

071 답 ②

$90=2\times3^2\times5$이므로 $\sqrt{\dfrac{90}{x}}=\sqrt{\dfrac{2\times3^2\times5}{x}}$

여기서 자연수 k에 대하여 $x=2\times5\times k^2$이면 근호가 없어지지?

즉, $\sqrt{\dfrac{90}{x}}=\sqrt{\dfrac{2\times3^2\times5}{2\times5\times k^2}}=\dfrac{3}{k}$

그런데 $\sqrt{\dfrac{90}{x}}$, 즉 $\dfrac{3}{k}$이 자연수가 되어야 하므로 k는 3의 약수이어야 해.

따라서 3의 약수는 1, 3의 2개, 즉 k의 개수가 2개이므로 구하는 자연수 x의 개수도 2개야.

072 답 ④

$\sqrt{13+x}$가 자연수가 되려면 $13+x$는 13보다 큰 제곱인 수가 되어야 하므로

$13+x=16, 25, 36, 49, 64, \cdots$

$\therefore x=3, 12, 23, 36, 51, \cdots$

073 답 ②

$\sqrt{18-a}$가 자연수가 되려면 $18-a$가 제곱인 수가 되어야 해.

$18-a$는 18보다 작은 수이고, 18보다 작은 제곱인 수는

16, 9, 4, 1이므로 $a=2, 9, 14, 17$이 돼.

따라서 가장 작은 자연수 $a=2$일 때, $\sqrt{18-a}=\sqrt{16}=4$가 되어 자연수가 돼.

074 답 ③

① $\sqrt{4}>\sqrt{3}$이므로 $2>\sqrt{3}$ ← NO!
② $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}$ ← NO!
③ $\sqrt{8}>\sqrt{7}$이므로 $-\sqrt{8}<-\sqrt{7}$ ← OK!
④ $\sqrt{15}<\sqrt{16}$이므로 $\sqrt{15}<4$ $\quad\therefore -\sqrt{15}>-4$ ← NO!
⑤ $\sqrt{0.6}>\sqrt{0.36}$이므로 $\sqrt{0.6}>0.6$ ← NO!

075 답 ①

① $\sqrt{9}<\sqrt{10}$이므로 $3<\sqrt{10}$ ← NO!
② $\sqrt{\frac{1}{5}}<\sqrt{\frac{1}{4}}$이므로 $\sqrt{\frac{1}{5}}<\frac{1}{2}$ ← OK!
③ $\sqrt{7}>\sqrt{6}$이므로 $-\sqrt{7}<-\sqrt{6}$ ← OK!
④ $\sqrt{14}<\sqrt{16}$이므로 $\sqrt{14}<4$ ← OK!
⑤ $\sqrt{0.3}>\sqrt{0.04}$이므로 $\sqrt{0.3}>0.2$ ← OK!

076 답 (1) 5개 (2) 18

(1) $2\le\sqrt{x}<3$의 각 변을 제곱하면 $4\le x<9$
x는 자연수이므로 4, 5, 6, 7, 8의 5개야.
(2) $3<\sqrt{2x+1}<4$의 각 변을 제곱하면 $9<2x+1<16$
각 변에서 1을 빼면 $8<2x<15$
각 변을 2로 나누면 $4<x<\frac{15}{2}=7.5$
따라서 자연수 x는 5, 6, 7이므로 구하는 모든 x의 값의 합은
$5+6+7=18$이야.

077 답 -3

$(-\sqrt{2})^2=2$, $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$
2와 $\sqrt{6}$에서 $2=\sqrt{4}<\sqrt{6}$
$-\sqrt{7}$과 -3에서 $\sqrt{7}<\sqrt{9}=3$이므로 $-\sqrt{7}>-3$
$\therefore -3<-\sqrt{7}<0<\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}<(-\sqrt{2})^2=2<\sqrt{6}$
따라서 가장 큰 수 $a=\sqrt{6}$, 가장 작은 수 $b=-3$이므로
$a^2-b^2=(\sqrt{6})^2-(-3)^2=6-9=-3$

078 답 1

$0<x<1$이므로 각 변에 x를 곱하면 $0<x^2<x$ ⋯ ㉠
또, $0<x<1$이므로 각 변을 $\sqrt{x}$로 나누면 $0<\sqrt{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$ ⋯ ㉡
그리고 $0<x<1$이므로 $x<\sqrt{x}$에서 $\frac{1}{x}>\frac{1}{\sqrt{x}}$ ⋯ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의해 $\frac{1}{x}>\frac{1}{\sqrt{x}}>\sqrt{x}>x>x^2$
따라서 큰 수부터 차례로 나열하였을 때, 왼쪽에서 두 번째에 오는 수 $\frac{1}{\sqrt{x}}$과 세 번째에 오는 수 $\sqrt{x}$를 곱하면 $\frac{1}{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}=1$이야.

[다른 풀이]

$0<x<1$을 만족하는 특정한 수 $x=\frac{1}{4}$을 대입해서 대소를 비교하는 게 훨씬 빨라.
$\sqrt{x}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, $x^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$, $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$
즉, $4>2>\frac{1}{2}>\frac{1}{4}>\frac{1}{16}$이므로 $\frac{1}{x}>\frac{1}{\sqrt{x}}>\sqrt{x}>x>x^2$
(이하 동일)

079 답 ④

순환하지 않는 무한소수는 무리수이므로 무리수를 찾아보자.
① $-\sqrt{(-2)^2}=-2$ ← 유리수
② $\sqrt{0.16}=\sqrt{0.4^2}=0.4$ ← 유리수
③ $\sqrt{\frac{25}{4}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$ ← 유리수
④ $\sqrt{15}$는 $\sqrt{9}<\sqrt{15}<\sqrt{16}$, 즉 $3<\sqrt{15}<4$인 무리수야.
⑤ $\sqrt{0.\dot{1}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$ ← 유리수

080 답 ④

① 【반례】 $0.\dot{1}=\frac{1}{9}$은 무한소수이지만 유리수야. ← NO!
② 【반례】 $\frac{1}{9}=0.1111\cdots$은 유리수이지만 무한소수야. ← NO!
③ 유리수이면서 동시에 무리수인 수는 존재하지 않아. ← NO!
④ 순환소수는 모두 분수 꼴로 나타낼 수 있지? ← OK!
⑤ 【반례】 $\sqrt{4}=2$와 같이 근호를 사용하여 나타내어진 수라도 유리수일 수 있어. ← NO!

081 답 ③

$\sqrt{0.\dot{4}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$, $0.\dot{5}=\frac{5}{9}$, $\sqrt{0.25}=\sqrt{0.5^2}=0.5$, $(-\sqrt{5})^2=5$는 유리수야.
나머지 $-\sqrt{0.1}$, $5-\sqrt{5}$, $\sqrt{(-\pi)^2}=\pi$는 무리수이므로 유리수가 아닌 것은 모두 3개야.

082 답 ①, ⑤

① (0.016의 음의 제곱근)$=-\sqrt{0.016}$ ← 무리수
② $\sqrt{\frac{4}{49}}=\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{2}{7}$ ← 유리수
③ $144=12^2$이므로
(넓이가 144인 정사각형의 한 변의 길이)$=12$ ← 유리수
④ $9\pi=3^2\times\pi$이므로
(넓이가 9π인 원의 반지름의 길이)$=3$ ← 유리수
⑤ (반지름의 길이가 1인 원의 둘레의 길이)$=2\pi\times1=2\pi$ ← 무리수

083 답 $1+\sqrt{2}$

$\triangle$DBC는 $\overline{BC}=\overline{CD}=1$인 직각이등변삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
즉, $\overline{BP}=\overline{BD}=\sqrt{2}$이므로 점 P에 대응하는 수는 점 B에 대응하는 수에 $\sqrt{2}$를 더한 것과 같지?
따라서 점 B에 대응하는 수는 1이므로 점 P에 대응하는 수는 $1+\sqrt{2}$야.

084 답 ①

$\triangle$ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{CA}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
즉, $\overline{CP}=\overline{CA}=\sqrt{2}$이므로 점 P에 대응하는 수는 점 C에 대응하는 수에서 $\sqrt{2}$를 뺀 것과 같지?
따라서 점 C에 대응하는 수는 -1이므로 점 P에 대응하는 수는 $-1-\sqrt{2}$야.

085 답 ④

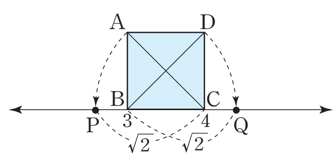
$\triangle$ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

이때, 점 A에 대응하는 수가 1이고, $\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{AC}=\sqrt{2}$에서 점 P에 대응하는 수는 점 A에 대응하는 수에서 $\sqrt{2}$를 뺀 것이므로 $1-\sqrt{2}$이고 점 Q에 대응하는 수는 점 A에 대응하는 수에 $\sqrt{2}$를 더한 것이므로 $1+\sqrt{2}$야.

$\therefore\ a=1-\sqrt{2},\ b=1+\sqrt{2}$

086 답 7



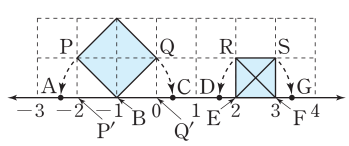
$\overline{AC}$, $\overline{BD}$는 각각 두 직각삼각형 ABC와 BCD의 빗변이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{CA}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\quad\therefore\ \overline{CP}=\overline{CA}=\sqrt{2}$

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\quad\therefore\ \overline{BQ}=\overline{BD}=\sqrt{2}$

따라서 점 P에 대응하는 수는 $4-\sqrt{2}$, 점 Q에 대응하는 수는 $3+\sqrt{2}$이므로 $(4-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=7$

087 답 ③, ⑤



① 그림에서 $\overline{BP}$, $\overline{BQ}$는 각각 두 직각삼각형 PP′B와 QBQ′의 빗변이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{BP}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\overline{BQ}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
따라서 $\overline{BA}=\overline{BP}=\sqrt{2}$이고, $\overline{BC}=\overline{BQ}=\sqrt{2}$이므로
$\overline{AB}=\overline{BC}$야. (참)

② 그림에서 $\overline{FR}$, $\overline{ES}$는 각각 두 직각삼각형 REF와 SEF의 빗변이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{FR}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\overline{ES}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
따라서 $\overline{FD}=\overline{FR}=\sqrt{2}$이고, $\overline{EG}=\overline{ES}=\sqrt{2}$이므로
$\overline{FD}=\overline{EG}$야. (참)

③ $\overline{BC}=\sqrt{2}$, $\overline{EF}=3-2=1$이므로 $\overline{BC}\neq\overline{EF}$야. (거짓)

④ 점 A에 대응하는 수는 -1에서 $\sqrt{2}$를 뺀 것이므로 $-1-\sqrt{2}$ (참)

⑤ 점 G에 대응하는 수는 2에서 $\sqrt{2}$를 더한 것이므로 $2+\sqrt{2}$ (거짓)

088 답 ④

한 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이는 피타고라스 정리에 의해 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

즉, 수직선에서 $-1+\sqrt{2}$에 대응하는 점은 -1에 대응하는 점에서 $\sqrt{2}$만큼 오른쪽으로 이동한 것이므로 점 D야.

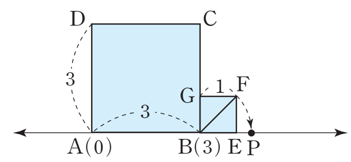
089 답 $3+\sqrt{2}$

닮음비가 3 : 1이므로 양수 a에 대하여 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $3a$, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a로 놓을 수 있지?

두 정사각형의 넓이의 합이 10이므로 $(3a)^2+a^2=10$

$10a^2=10$ $\quad\therefore\ a^2=1$

즉, a는 1의 양의 제곱근이므로 $a=1$이야.

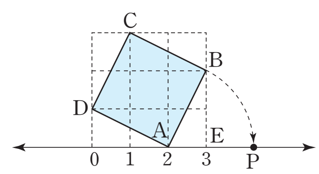


$\triangle$FBE는 $\overline{BE}=\overline{EF}=1$인 직각이등변삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{BF}=\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{EF}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

따라서 $\overline{BP}=\overline{BF}=\sqrt{2}$이므로 점 P에 대응하는 수는 점 B에 대응하는 수 3에 $\sqrt{2}$를 더한 수인 $3+\sqrt{2}$야.

090 답 $2+\sqrt{5}$

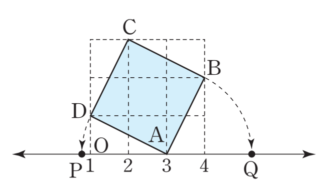


그림에서 삼각형 BAE는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{BE}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

따라서 점 P에 대응하는 수는 점 A에 대응하는 수 2에 $\sqrt{5}$를 더한 것이므로 $2+\sqrt{5}$야.

091 답 P : $3-\sqrt{5}$, Q : $3+\sqrt{5}$



그림의 정사각형 ABCD에서 두 변 AB와 AD의 길이는 각각 직각을 낀 두 변의 길이가 1, 2인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같아.

따라서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

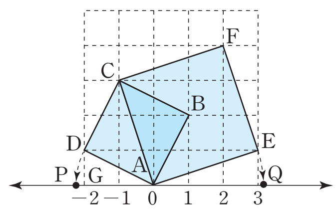
따라서 점 P에 대응하는 수는 점 A에 대응하는 수 3에서 $\sqrt{5}$를 뺀 것이므로 $3-\sqrt{5}$이고, 점 Q에 대응하는 수는 점 A에 대응하는 수 3에 $\sqrt{5}$를 더한 것이므로 $3+\sqrt{5}$야.

092 답 P : $-3+\sqrt{5}$, Q : $1-\sqrt{10}$

(i) 점 P에 대응하는 수를 구하자.
정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 1, 2인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같으므로
$\overline{CD}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$
따라서 $\overline{CP}=\overline{CD}=\sqrt{5}$이므로 수직선 위의 점 P에 대응하는 수는 -3에서 $\sqrt{5}$를 더한 $-3+\sqrt{5}$야.

(ii) 점 Q에 대응하는 수를 구하자.
정사각형 EFGH의 한 변의 길이는 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 1, 3인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같으므로
$\overline{EF}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$
따라서 수직선 위의 점 Q에 대응하는 수는 1에서 $\sqrt{10}$을 뺀 $1-\sqrt{10}$이야.

093 답 ②



$\overline{AD}$는 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 1, 2인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같으므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AD}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\overline{AE}$는 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 1, 3인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같으므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AE}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

① $\overline{AP}=\overline{AD}=\sqrt{5}$, $\overline{AC}=\overline{AE}=\sqrt{10}$ ← NO!

② $\overline{AQ}=\overline{AE}=\overline{AC}=\sqrt{10}$ ← OK!

③ 점 P에 대응하는 수는 0에서 $\sqrt{5}$를 뺀 것이므로 $-\sqrt{5}$ ← NO!

④ 점 Q에 대응하는 수는 0에서 $\sqrt{10}$을 더한 것이므로 $\sqrt{10}$ ← NO!

⑤ (□ABCD의 넓이)$=(\sqrt{5})^2=5$

(□AEFC의 넓이)$=(\sqrt{10})^2=10$

따라서 □AEFC의 넓이는 □ABCD의 넓이의 2배야. ← NO!

094 답 ②

① $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, …과 같이 무수히 많은 유리수가 있어. ← OK!

② -100과 100 사이의 정수는 -99, -98, …, 0, …, 98, 99의 199개가 있어. ← NO!

③ 서로 다른 두 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있어. ← OK!

④ 모든 실수는 수직선 위에 빠짐없이 나타낼 수 있지? ← OK!

⑤ 서로 다른 무리수 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+1$에 대하여 $\sqrt{2}+0.1$, $\sqrt{2}+0.11$, $\sqrt{2}+0.2$, …와 같이 무수히 많은 무리수가 존재해. ← OK!

095 답 ⑤

① 서로 다른 두 유리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 존재해. ← NO!

② 【반례】 $\frac{1}{5}=0.2$, $\frac{1}{4}=0.25$이므로 0.23461915…같은 순환하지 않는 무한소수, 즉 무리수가 존재해. ← NO!

③ 【반례】 $2<\frac{9}{4}<3$에서 $\sqrt{2}<\frac{3}{2}<\sqrt{3}$과 같이 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 유리수가 존재해. ← NO!

④ 1에 가장 가까운 무리수는 알 수 없어. ← NO!

⑤ 유리수(무리수)에 대응하는 점만으로는 수직선을 완전히 메울 수 없어. ← OK!

096 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$에서 $3<\sqrt{10}<4$이므로 3과 $\sqrt{10}$ 사이에는 자연수가 없어. (참)

ㄴ. 무리수인 π는 수직선 위에 나타낼 수 있어. (거짓)

ㄷ. $\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{2}<2$이므로 -1과 $\sqrt{2}$ 사이에 있는 정수는 0, 1의 2개야. (거짓)

ㄹ. 서로 다른 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있어. (참)

ㅁ. 【반례】 서로 다른 두 무리수 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$의 합은 0인데 0은 유리수야. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이야.

097 답 ④

① $(\sqrt{10}-1)-2=\sqrt{10}-3=\sqrt{10}-\sqrt{9}>0$

$\therefore \sqrt{10}-1>2$ ← OK!

② $(\sqrt{5}+1)-3=\sqrt{5}-2=\sqrt{5}-\sqrt{4}>0$

$\therefore \sqrt{5}+1>3$ ← OK!

③ $(\sqrt{2}+1)-3=\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-\sqrt{4}<0$

$\therefore \sqrt{2}+1<3$ ← OK!

④ $(3+\sqrt{5})-(\sqrt{5}+\sqrt{8})=3-\sqrt{8}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$

$\therefore 3+\sqrt{5}>\sqrt{5}+\sqrt{8}$ ← NO!

⑤ $(2-\sqrt{7})-(1-\sqrt{7})=1>0$

$\therefore 2-\sqrt{7}>1-\sqrt{7}$ ← OK!

098 답 ②

① $(\sqrt{15}+1)-5=\sqrt{15}-4=\sqrt{15}-\sqrt{16}<0$

$\therefore \sqrt{15}+1<5$ ← OK!

② $(8+\sqrt{2})-9=\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\sqrt{1}>0$

$\therefore 8+\sqrt{2}>9$ ← NO!

③ $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-2\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{5}}-2\right)=\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{5}}>0$

$\therefore \sqrt{\frac{1}{3}}-2>\sqrt{\frac{1}{5}}-2$ ← OK!

④ $(-1+\sqrt{6})-(-3+\sqrt{6})=-1+\sqrt{6}+3-\sqrt{6}=2>0$

$\therefore -1+\sqrt{6}>-3+\sqrt{6}$ ← OK!

⑤ $(-\sqrt{10}-3)-(-\sqrt{10}-\sqrt{7})=-\sqrt{10}-3+\sqrt{10}+\sqrt{7}$

$=\sqrt{7}-3=\sqrt{7}-\sqrt{9}<0$

$\therefore -\sqrt{10}-3<-\sqrt{10}-\sqrt{7}$ ← OK!

099 답 ②

① $(\sqrt{10}+1)-4=\sqrt{10}-3=\sqrt{10}-\sqrt{9}>0$

$\therefore \sqrt{10}+1 > 4$

② $(\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{5}+2)=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$

$\therefore \sqrt{3}+\sqrt{5} < \sqrt{5}+2$

③ $(-\sqrt{17}-\sqrt{12})-(-4-\sqrt{17})=-\sqrt{12}+4=-\sqrt{12}+\sqrt{16}>0$

$\therefore -\sqrt{17}-\sqrt{12} > -4-\sqrt{17}$

④ $(6-\sqrt{8})-3=3-\sqrt{8}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$

$\therefore 6-\sqrt{8} > 3$

⑤ $(\sqrt{6}-\sqrt{(-2)^2})-(-3+\sqrt{6})=\sqrt{6}-2+3-\sqrt{6}=1>0$

$\therefore \sqrt{6}-\sqrt{(-2)^2} > -3+\sqrt{6}$

따라서 ◯ 안에 들어갈 부등호가 나머지 넷과 다른 것은 ②야.

100 답 ④

$a-b=(\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{5}+1)=\sqrt{3}-1>0 \quad \therefore a>b$

$c-a=(3+\sqrt{3})-(\sqrt{3}+\sqrt{5})=3-\sqrt{5}=\sqrt{9}-\sqrt{5}>0 \quad \therefore c>a$

$\therefore c>a>b$

101 답 P, Q, R

우선 세 반지름의 길이의 대소 관계를 알아 보자.

$(3+\sqrt{2})-4=-1+\sqrt{2}>0$이므로 $3+\sqrt{2}>4$

$4-(5-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}>0$이므로 $4>5-\sqrt{2}$

$\therefore 3+\sqrt{2}>4>5-\sqrt{2}$

따라서 원의 넓이는 반지름의 길이가 클수록 커지므로 넓이가 가장 큰 원부터 차례로 P, Q, R야.

102 답 3

주어진 수 중 음수는 $-\sqrt{6}$, $-\sqrt{7}-1$이지?
이때, $-\sqrt{7}<-\sqrt{6}$이므로 $-\sqrt{7}-1<-\sqrt{6}$이야.
이제 세 양수 $3+\sqrt{6}$, $\sqrt{6}+\sqrt{7}$, $\sqrt{7}+2$의 대소를 비교해 보자.
$(3+\sqrt{6})-(\sqrt{6}+\sqrt{7})=3-\sqrt{7}=\sqrt{9}-\sqrt{7}>0$
$\therefore 3+\sqrt{6}>\sqrt{6}+\sqrt{7}$
$(\sqrt{6}+\sqrt{7})-(\sqrt{7}+2)=\sqrt{6}-2=\sqrt{6}-\sqrt{4}>0$
$\therefore \sqrt{6}+\sqrt{7}>\sqrt{7}+2$
즉, $-\sqrt{7}-1<-\sqrt{6}<\sqrt{7}+2<\sqrt{6}+\sqrt{7}<3+\sqrt{6}$이야.
따라서 주어진 수들을 수직선 위에 나타낼 때, 가장 오른쪽에 있는 수는 $3+\sqrt{6}$이고, 왼쪽에서 두 번째에 있는 수는 $-\sqrt{6}$이므로 두 수의 합은 $(3+\sqrt{6})+(-\sqrt{6})=3$이야.

103 답 ②

① $\sqrt{5}<\sqrt{6}<\sqrt{7}$ ← OK!

② $\dfrac{\sqrt{7}}{4}=0.6615$이므로

$\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{7}}{4}=2.236+0.6615=2.8975>\sqrt{7}$ ← NO!

③ $\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}<\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{2}<\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$ ← OK!

④ $\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}<\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{7}}{2}<\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$ ← OK!

⑤ $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}=\dfrac{2.236+2.646}{2}=2.441$이므로

$\sqrt{5}<\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}<\sqrt{7}$ ← OK!

104 답 ③

자연수 10과 11 사이에 있는 무리수 $\sqrt{n}$을 찾기 위해 10과 11을 근호를 사용하여 나타내 보자.
$10=\sqrt{10^2}=\sqrt{100}$, $11=\sqrt{11^2}=\sqrt{121}$
따라서 자연수 10과 11 사이에 있는 무리수 $\sqrt{n}$은
$\sqrt{101}$, $\sqrt{102}$, $\sqrt{103}$, $\cdots$, $\sqrt{120}$의 20개가 있어.

잘 틀리는 유형 훈련+1up

p. 22

105 답 12

1st 양수 a의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$지?
25의 제곱근은 $\pm\sqrt{25}=\pm5$이므로
$A=\pm5$
또, 7^2의 제곱근은 $\pm\sqrt{7^2}=\pm7$이므로
$B=\pm7$
2nd 구하는 것은 $A-B$의 값 중 가장 큰 값이야.
다음과 같이 $A-B$를 표로 나타내어 가장 큰 값을 찾자.

A	5	5	-5	-5
B	7	-7	7	-7
$A-B$	-2	12	-12	2

따라서 $A-B$의 값 중 가장 큰 값은 12야.

오답피하기

문제를 신중하게 읽지 않고 풀어서 꼭 하나씩 틀리는 친구들이 있어. 25의 제곱근을 그냥 5라 하고, 7^2의 제곱근을 7이라고 하여 답을 -2로 한 사람은 반성해야 해. 양의 실수에 대하여 제곱근은 양, 음 두 개가 나오지?
이런 실수를 줄이기 위해서는 제곱근을 계산하기 전에 복잡한 식을 간단히 하고 나서 문제를 다시 읽어보는 습관을 가져야 해.

106 답 -15

1st 양수 a의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$지?
81의 제곱근은 $\pm\sqrt{81}=\pm9$이므로
$A=\pm9$
또, $(-6)^2=6^2$의 제곱근은 $\pm\sqrt{6^2}=\pm6$이므로
$B=\pm6$
2nd 구하는 것은 $B-A$의 값 중 가장 작은 값이야.
다음과 같이 $B-A$를 표로 나타내어 가장 작은 값을 찾자.

B	6	-6	6	-6
A	9	9	-9	-9
$B-A$	-3	-15	15	3

따라서 $B-A$의 값 중 가장 작은 값은 -15야.

오답피하기

$a(a>0)$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$이고, 제곱근 a는 순서대로 $\sqrt{\ }$ (제곱근) a(에이), 즉 $\sqrt{a}$라는 것에 주의해야 해.

107 답 167

1st 순환소수를 분수로 고치자.
$1.0\dot{2}=\dfrac{102-10}{90}=\dfrac{92}{90}=\dfrac{46}{45}$, $0.\dot{4}=\dfrac{4}{9}$
이므로 주어진 식에 대입하면
$\sqrt{\dfrac{46}{45}\times\dfrac{b}{a}}=\dfrac{4}{9}$ $\cdots$ ㉠
2nd 양변을 제곱하여 근호를 없애자.
㉠의 양변을 제곱하면 $\left(\sqrt{\dfrac{46}{45}\times\dfrac{b}{a}}\right)^2=\left(\dfrac{4}{9}\right)^2$
$\dfrac{46}{45}\times\dfrac{b}{a}=\dfrac{16}{81}$ $\quad\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{16}{81}\times\dfrac{45}{46}=\dfrac{40}{207}$
따라서 $a=207$, $b=40$이므로
$a-b=207-40=167$

108 답 113

1st 순환소수를 분수로 고치자.
$1.0\dot{6}=\dfrac{106-10}{90}=\dfrac{96}{90}=\dfrac{16}{15}$, $0.\dot{2}=\dfrac{2}{9}$
이므로 주어진 식에 대입하면
$\sqrt{\dfrac{16}{15}\times\dfrac{b}{a}}=\dfrac{2}{9}$ $\cdots$ ㉠
2nd 양변을 제곱하여 근호를 없애자.
㉠의 양변을 제곱하면 $\left(\sqrt{\dfrac{16}{15}\times\dfrac{b}{a}}\right)^2=\left(\dfrac{2}{9}\right)^2$
$\dfrac{16}{15}\times\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{81}$ $\quad\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{81}\times\dfrac{15}{16}=\dfrac{5}{108}$
따라서 $a=108$, $b=5$이므로
$a+b=108+5=113$

109 답 $-2a$

1st $0<a<1$이면 $\frac{1}{a}>1$이지?

$0<a<1<\frac{1}{a}$이므로

$a-\frac{1}{a}<0$, $a+\frac{1}{a}>0$

2nd $\sqrt{x^2}$은 $x\geq0$인 경우에는 x이고, $x<0$인 경우에는 $-x$야.

$$\therefore \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}=-\left(a-\frac{1}{a}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)$$
$$=-a+\frac{1}{a}-a-\frac{1}{a}=-2a$$

오|답|피|하|기

$0<a<1$에서 a가 양수이므로 $a-\frac{1}{a}$, $a+\frac{1}{a}$이 둘 다 양수라고 착각하고 문제를 풀면 안 돼. $a>1$일 때 $a-\frac{1}{a}$, $a+\frac{1}{a}$은 둘 다 양수이지만 $0<a<1$일 때 $a-\frac{1}{a}$은 음수야.

그리고 $\sqrt{a^2}=a$라 하면 안 돼. 왜냐하면 a가 양수이면 이것이 가능한데, a가 음수이면 앞에 음의 부호 $-$를 꼭 붙여주어야 해. 예를 들어, a가 2라면 $\sqrt{2^2}=2$라서 $\sqrt{a^2}=a$라고 표현할 수 있어. 그런데 a가 -2라면 $\sqrt{(-2)^2}=2$라서 $\sqrt{a^2}=-a$로 표현해야 하는 거야. $-a$와 같이 음의 부호 $-$가 붙었다고 해서 음수라고 생각하면 크게 잘못 알고 있는 거니까 주의하자.

110 답 0

1st $0<a<1$이면 $\frac{1}{a}>1$이지?

$0<a<1<\frac{1}{a}$이므로

$a-\frac{1}{a}<0$, $a+\frac{1}{a}>0$

2nd $\sqrt{x^2}$은 $x\geq0$인 경우에는 x이고, $x<0$인 경우에는 $-x$야.

$\sqrt{\left(-a-\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{\left\{-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}^2}=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}$이므로

$$(\text{주어진 식})=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{(2a)^2}$$
$$=-\left(a-\frac{1}{a}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)+2a$$
$$=-a+\frac{1}{a}-a-\frac{1}{a}+2a=0$$

오|답|피|하|기

$0<a<1$일 때 $a-\frac{1}{a}$의 부호를 결정하기 어렵다면 $a=\frac{1}{2}$로 놓으면 쉬워.

즉, $a-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$이니까 음수가 되지?

따라서 $0<a<1$일 때, $a-\frac{1}{a}<0$이야.

111 답 ②

1st $a\geq0$인 경우는 $\sqrt{a^2}=a$, $a<0$인 경우는 $\sqrt{a^2}=-a$지?

ㄱ. $x<0$인 경우 $x-2<0$이므로

$A=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{x^2}=-(x-2)-(-x)$
$=-x+2+x=2$ (거짓)

ㄴ. $0\leq x<2$인 경우 $x-2<0$이므로

$A=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{x^2}=-(x-2)-x$
$=-x+2-x=-2x+2$ (거짓)

ㄷ. $x\geq2$인 경우 $x-2\geq0$이므로

$A=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{x^2}=(x-2)-x$
$=x-2-x=-2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이야.

112 답 ⑤

1st $a\geq0$인 경우는 $\sqrt{a^2}=a$, $a<0$인 경우는 $\sqrt{a^2}=-a$야.

ㄱ. $x<-1$인 경우 $x+1<0$, $x-1<0$이므로

$A=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$
$=-(x+1)-\{-(x-1)\}$
$=-x-1+x-1=-2$ (참)

ㄴ. $-1\leq x<1$인 경우 $x+1\geq0$, $x-1<0$이므로

$A=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$
$=(x+1)-\{-(x-1)\}$
$=x+1+x-1=2x$ (참)

ㄷ. $x\geq1$인 경우 $x+1>0$, $x-1\geq0$이므로

$A=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$
$=(x+1)-(x-1)$
$=x+1-x+1=2$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳아.

113 답 ⑤

1st $\sqrt{3n}$이 자연수가 되려면 $3n$이 제곱인 수가 되어야 해.

$\sqrt{3n}$이 자연수가 되어야 하므로 근호 안의 $3n$에서
$n=3\times a^2$ (a의 자연수)의 꼴이면 되지?
$1\leq n\leq100$이므로 $1\leq3\times a^2\leq100$을 만족하는 a의 값은
$a=1, 2, 3, 4, 5$야.
따라서 자연수 n의 개수는 $3(=3\times1^2)$, $12(=3\times2^2)$, $27(=3\times3^2)$, $48(=3\times4^2)$, $75(=3\times5^2)$로 5개야.

[다른 풀이]

n은 100 이하의 자연수이므로 $1\leq n\leq100$
각 변에 3을 곱하면 $3\leq3n\leq300$
$\therefore \sqrt{3}\leq\sqrt{3n}\leq\sqrt{300}$
이때, $17^2=289$, $18^2=324$이므로
$17^2<300<18^2$, $17<\sqrt{300}<18$
$\therefore 2\leq\sqrt{3n}\leq17$
$\sqrt{3n}$이 자연수가 되어야 하므로
$\sqrt{3n}=2, 3, 4, 5, \cdots, 17$
$3n=4, 9, 16, 25, \cdots, 289$
여기서 3의 배수만 구하면 9, 36, 81, 144, 225
따라서 자연수 n의 개수는 3, 12, 27, 48, 75로 5개야.

114 답 ④

1st $\sqrt{2n}$이 자연수가 되려면 $2n$이 제곱인 수가 되어야 해.

$\sqrt{2n}$이 자연수가 되어야 하므로 근호 안의 $2n$에서
$n=2\times a^2$ (a는 자연수)의 꼴이면 되지?
$1\leq n\leq100$이므로 $1\leq2\times a^2\leq100$을 만족하는 a의 값은
$a=1, 2, 3, \cdots, 7$이야.
따라서 자연수 n은 $2(=2\times1^2)$, $8(=2\times2^2)$, $18(=2\times3^2)$, $32(=2\times4^2)$, $50(=2\times5^2)$, $72(=2\times6^2)$, $98(=2\times7^2)$로 7개야.

[다른 풀이]
n은 100 이하의 자연수이므로 $1 \le n \le 100$
각 변에 2를 곱하면 $2 \le 2n \le 200$
$\therefore \sqrt{2} \le \sqrt{2n} \le \sqrt{200}$
이때, $14^2=196$, $15^2=225$이므로
$14^2 < 200 < 15^2$, $14 < \sqrt{200} < 15$
$\therefore 2 \le \sqrt{2n} \le 14$
$\sqrt{2n}$이 자연수가 되어야 하므로
$\sqrt{2n}=2, 3, 4, 5, \cdots, 14$
$2n=4, 9, 16, 25, \cdots, 196$
여기서 2의 배수만 구하면 4, 16, 36, 64, 100, 144, 196
따라서 자연수 n의 개수는 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98로 7개야.

115 답 31

1st 15보다 작은 제곱인 수를 구하자.
$\sqrt{15-x}$가 자연수이기 위해서는 $15-x$가 제곱인 수이어야 해.
x가 자연수이므로 $15-x$는 15보다 작은 자연수이고, 15보다 작은 제곱인 수는 1, 4, 9야.
2nd $15-x$가 제곱인 수가 되는 자연수 x를 구하자.
$15-x$가 1, 4, 9가 되는 x는 $x=14, 11, 6$
따라서 모든 자연수 x의 값의 합은
$14+11+6=31$

116 답 50

1st 20보다 작은 제곱인 수를 구하자.
$\sqrt{20-x}$가 자연수이기 위해서는 $20-x$가 제곱인 수이어야 해.
x가 자연수이므로 $20-x$는 20보다 작은 자연수이고, 20보다 작은 제곱인 수는 1, 4, 9, 16이야.
2nd $20-x$가 제곱인 수가 되는 자연수 x를 구하자.
$20-x$가 1, 4, 9, 16이 되는 x는 $x=19, 16, 11, 4$
따라서 모든 자연수 x의 값의 합은
$19+16+11+4=50$

117 답 ②

1st 15가 어떤 두 제곱인 수 사이에 있는지 생각해 보자.
$3.5^2=12.25$, $4^2=16$이므로 $3.5^2 < 15 < 4^2$
$3.5 < \sqrt{15} < 4 \qquad \therefore -4 < -\sqrt{15} < -3.5$
즉, $-\sqrt{15}$는 정수 -4에 가장 가깝지?
$\therefore a=-4$
2nd 54가 어떤 두 제곱인 수 사이에 있는지 생각해 보자.
$7^2=49$, $7.5^2=56.25$이므로 $7^2 < 54 < 7.5^2$
$\therefore 7 < \sqrt{54} < 7.5$
즉, $\sqrt{54}$는 정수 7에 가장 가깝지?
$\therefore b=7$
$\therefore a+b=-4+7=3$

118 답 ②

1st 23이 어떤 두 제곱인 수 사이에 있는지 생각해 보자.
$4.5^2=20.25$, $5^2=25$이므로 $4.5^2 < 23 < 5^2$
$4.5 < \sqrt{23} < 5 \qquad \therefore -5 < -\sqrt{23} < -4.5$
즉, $-\sqrt{23}$은 정수 -5에 가장 가깝지?
$\therefore a=-5$
2nd 61이 어떤 두 제곱인 수 사이에 있는지 생각해 보자.
$7.5^2=56.25$, $8^2=64$이므로 $7.5^2 < 61 < 8^2$
$\therefore 7.5 < \sqrt{61} < 8$
즉, $\sqrt{61}$은 정수 8에 가장 가깝지?
$\therefore b=8$
$\therefore b-a=8-(-5)=13$

119 답 ④

1st 주어진 부등식의 각 변을 제곱하여 근호를 없애자.
$5 \le \sqrt{3x+1} < 8$의 각 변을 제곱하여 정리하면
$5^2 \le (\sqrt{3x+1})^2 < 8^2$
$25 \le 3x+1 < 64$
각 변에서 1을 빼면 $24 \le 3x < 63$
각 변을 3으로 나누면 $8 \le x < 21$
즉, 부등식을 만족하는 자연수 x는 8, 9, 10, $\cdots$, 20이므로
가장 큰 값은 $a=20$이고 가장 작은 값은 $b=8$이야.
2nd ab의 값을 소인수분해해 보자.
$\sqrt{abc}=\sqrt{20 \times 8 \times c}=\sqrt{160c}$이고 $160=2^5 \times 5$이므로 $\sqrt{2^5 \times 5 \times c}$가 자연수가 되려면 근호 안의 소인수의 지수가 모두 짝수여야 하지?
따라서 가장 작은 자연수 $c=2 \times 5=10$

120 답 ②

1st 주어진 부등식의 각 변을 제곱하여 근호를 없애자.
$4 < \sqrt{3x} \le \sqrt{80}$의 각 변을 제곱하여 정리하면
$4^2 < (\sqrt{3x})^2 \le (\sqrt{80})^2$
$16 < 3x \le 80$
각 변을 3으로 나누면 $\frac{16}{3} < x \le \frac{80}{3}$
즉, 부등식을 만족하는 자연수 x는 6, 7, 8, $\cdots$, 26이야.
2nd $\sqrt{2x}$가 자연수가 되도록 하는 x의 조건을 알아야 해.
$\sqrt{2x}$가 자연수가 되려면 $x=2 \times (\text{자연수})^2$이어야 하지?
따라서 자연수 x는 $2 \times 2^2=8$, $2 \times 3^2=18$이므로 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은 $8+18=26$

121 답 3

1st $\sqrt{123}$이 어떤 연속하는 두 자연수 사이에 있는지 생각해 보자.
$\sqrt{121} < \sqrt{123} < \sqrt{144}$이고 $\sqrt{121}=11$, $\sqrt{144}=12$이므로
$11 < \sqrt{123} < 12$야.
즉, $\sqrt{123}$ 이하의 자연수는 1, 2, 3, $\cdots$, 11이므로
$f(123)=11$
2nd $\sqrt{68}$이 어떤 연속하는 두 자연수 사이에 있는지 생각해 보자.
$\sqrt{64} < \sqrt{68} < \sqrt{81}$이고 $\sqrt{64}=8$, $\sqrt{81}=9$이므로
$8 < \sqrt{68} < 9$지?
즉, $\sqrt{68}$ 이하의 자연수는 1, 2, 3, $\cdots$, 8이므로
$f(68)=8$
$\therefore f(123)-f(68)=11-8=3$

오답피하기
$\sqrt{x}$ 이하의 자연수를 구할 때는 x와 가장 가까운 제곱인 수를 2개 찾아 x의 값의 범위를 나타내면 돼.
예를 들어, $\sqrt{10}$ 이하의 자연수를 구하려면 $9 < 10 < 16$, 즉 $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$이므로 $3 < \sqrt{10} < 4$가 되는 거야.
따라서 $\sqrt{10}$ 이하의 자연수는 1, 2, 3이라는 것을 알 수 있어.

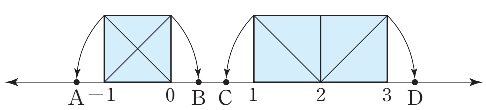
122 답 9

1st $\sqrt{40}$이 어떤 연속하는 두 자연수 사이에 있는지 생각해 보자.
$\sqrt{36}<\sqrt{40}<\sqrt{49}$이고 $\sqrt{36}=6$, $\sqrt{49}=7$이므로
$6<\sqrt{40}<7$이야.
즉, $\sqrt{40}$ 이하의 소수는 2, 3, 5이므로
$f(40)=3$

2nd $\sqrt{180}$이 어떤 연속하는 두 자연수 사이에 있는지 생각해 보자.
마찬가지로 $\sqrt{169}<\sqrt{180}<\sqrt{196}$이고
$\sqrt{169}=13$, $\sqrt{196}=14$이므로 $13<\sqrt{180}<14$지?
즉, $\sqrt{180}$ 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13이므로
$f(180)=6$
$\therefore f(40)+f(180)=3+6=9$

123 답 ④

1st 직각삼각형의 빗변의 길이는 피타고라스 정리를 이용해서 구할 수 있어.



직각을 끼고 있는 두 변의 길이가 각각 1, 1인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이는 피타고라스 정리에 의해 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$야.
ㄱ. 점 A에 대응하는 수는 0에서 직각이등변삼각형의 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 뺀 수이므로 $-\sqrt{2}$야. (참)
ㄴ. 점 B에 대응하는 수는 -1에서 직각이등변삼각형의 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 더한 수이므로 $-1+\sqrt{2}$, 즉 $\sqrt{2}-1$이야. (참)

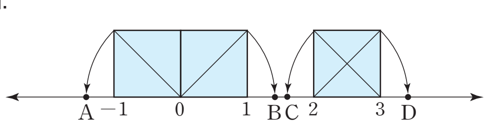
2nd 길이를 구하기 위해서 각 점에 대응하는 수를 구해야겠지?
ㄷ. $\overline{AC}$의 길이는 점 C에 대응하는 수에서 점 A에 대응하는 수를 빼면 되지?
점 C에 대응하는 수는 2에서 직각이등변삼각형의 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 뺀 것이므로 $2-\sqrt{2}$야.
$\therefore \overline{AC}=(2-\sqrt{2})-(-\sqrt{2})=2$ (참)
ㄹ. $\overline{BD}$의 길이는 점 D에 대응하는 수에서 점 B에 대응하는 수를 빼면 되지?
점 D에 대응하는 수는 2에서 직각이등변삼각형의 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 더한 것이므로 $2+\sqrt{2}$야.
$\therefore \overline{BD}=(2+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)=3$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이야.

오답피하기

이런 유형의 문제를 잘 틀리는 이유는 점에 대응하는 수를 구하는 과정에서 실수를 하기 때문이야. 점에 대응하는 수를 잘 구하기 위해서는 기준이 되는 수를 정확히 정해야 해.
또, 수직선 위에서 두 점 사이의 거리, 즉 선분의 길이를 구할 때는 대응하는 두 수를 비교하여 큰 수에서 작은 수를 빼면 구할 수 있어.

124 답 ②

1st 직각삼각형의 빗변의 길이는 피타고라스 정리를 이용해서 구할 수 있어.



직각을 끼고 있는 두 변의 길이가 각각 1, 1인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이는 피타고라스 정리에 의해 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$야.
ㄱ. 점 A에 대응하는 수는 0에서 직각이등변삼각형의 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 뺀 수이므로 $-\sqrt{2}$야. (참)
ㄴ. 점 B에 대응하는 수는 0에서 직각이등변삼각형의 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 더한 수이므로 $\sqrt{2}$이야. (거짓)

2nd 길이를 구하기 위해서 각 점에 대응하는 수를 구해야겠지?
ㄷ. $\overline{BD}$의 길이는 점 D에 대응하는 수에서 점 B에 대응하는 수를 빼면 되지?
점 D에 대응하는 수는 2에서 직각이등변삼각형의 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 더한 수이므로 $2+\sqrt{2}$야.
$\therefore \overline{BD}=(2+\sqrt{2})-\sqrt{2}=2$ (거짓)
ㄹ. $\overline{AC}$의 길이는 점 C에 대응하는 수에서 점 A에 대응하는 수를 빼면 되지?
점 C에 대응하는 수는 3에서 직각이등변삼각형의 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 뺀 수이므로 $3-\sqrt{2}$야.
$\therefore \overline{AC}=(3-\sqrt{2})-(-\sqrt{2})=3$ (참)
따라서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㄷ이야.

125 답 ③

1st $\sqrt{5}$와 $\sqrt{10}$의 값이 주어졌으니까 각 선택지의 값들을 차근차근 구해 보자.
① $\sqrt{10}-0.4=3.162-0.4=2.762$ ← OK!
② $\sqrt{5}+0.1=2.236+0.1=2.336$ ← OK!
③ $\sqrt{5}+1=2.236+1=3.236>3.162=\sqrt{10}$ ← NO!
④ $\sqrt{5}<\sqrt{8}<\sqrt{10}$ ← OK!
⑤ $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2}<\dfrac{2.236+3.162}{2}=2.699$ ← OK!

126 답 ④

1st 두 양수 a, b에 대하여 $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$임을 이용하자.
① $2=\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}=3$ ← OK!
② $2=\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}=3$ ← OK!
③ $2=\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}=3$ ← OK!
④ $2=\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$에서 $1<\sqrt{8}-1<2$이므로
$\sqrt{8}-1$은 1과 2 사이의 수야. ← NO!
⑤ $2<\sqrt{6}<3$, $2<\sqrt{8}<3$이므로
$4<\sqrt{6}+\sqrt{8}<6$
$\therefore 2<\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{8}}{2}<3$ ← OK!

127 답 ③, ④

1st 선택지에 주어진 수들이 조건을 모두 만족시키는지 확인해.
① $0.85+\sqrt{10}=0.85+3.162=4.012>4$ ← NO!
② $4-\dfrac{\sqrt{10}}{2}=4-\dfrac{3.162}{2}=4-1.581=2.419<\sqrt{10}$ ← NO!
③ $\dfrac{4+\sqrt{10}}{2}=\dfrac{4+3.162}{2}=\dfrac{7.162}{2}=3.581$이므로
$\sqrt{10}<\dfrac{4+\sqrt{10}}{2}<4$ ← OK!
④ $\sqrt{10}<\sqrt{15}<\sqrt{16}=4$ ← OK!
⑤ $\dfrac{5+\sqrt{10}}{2}=\dfrac{5+3.162}{2}=\dfrac{8.162}{2}=4.081>4$ ← NO!

128 답 ④, ⑤

1st 선택지에 주어진 수들이 조건을 모두 만족시키는지 확인해.

① $\sqrt{10}>\sqrt{9}=3$ ← NO!

② $\frac{\sqrt{3}+3}{2}=\frac{1.732+3}{2}=\frac{4.732}{2}=2.366<\sqrt{6}$ ← NO!

③ $3-\frac{\sqrt{3}}{2}=3-\frac{1.732}{2}=3-0.866=2.134<\sqrt{6}$ ← NO!

④ $\sqrt{6}+\frac{1}{2}=2.449+0.5=2.949$이므로

$\sqrt{6}<\sqrt{6}+\frac{1}{2}<3$ ← OK!

⑤ $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}+1}{2}=\frac{1.732+2.449+1}{2}=\frac{5.181}{2}=2.5905$이므로

$\sqrt{6}<\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}+1}{2}<3$ ← OK!

서술형 다지기

p. 26

[129-130 채점기준표]

Ⅰ	A의 값을 구한다.	40%
Ⅱ	B의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	$A-B$ 또는 $A+B$의 값을 구한다.	20%

129 답 -6

먼저, A의 값을 구하자.

4^2의 음의 제곱근은 $-\sqrt{4^2}=-4$ $\therefore A=-4$ … Ⅰ

그다음, B의 값을 구하자.

$\sqrt{(-4)^2}=4$이므로 4의 양의 제곱근은 $\sqrt{4}=2$

$\therefore B=2$ … Ⅱ

그래서, $A-B$의 값을 구하자.

$\therefore A-B=(-4)-2=-6$ … Ⅲ

130 답 -2

먼저, A의 값을 구하자.

$(-3)^2$의 양의 제곱근은 $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{3^2}=3$ $\therefore A=3$ … Ⅰ

그다음, B의 값을 구하자.

$\sqrt{(-25)^2}=25$이므로 25의 음의 제곱근은 $-\sqrt{25}=-5$

$\therefore B=-5$ … Ⅱ

그래서, $A+B$의 값을 구하자.

$\therefore A+B=3+(-5)=-2$ … Ⅲ

[131-132 채점기준표]

Ⅰ	근호 안이 제곱인 수가 되도록 하는 n의 조건을 찾는다.	40%
Ⅱ	n의 값의 범위를 적용한다.	20%
Ⅲ	조건을 만족시키는 n의 값을 구한다.	40%

131 답 96

먼저, 근호 안이 제곱인 수가 되게 하는 n의 조건을 찾자.

$54=2\times3^3$이므로 $\sqrt{54n}=\sqrt{2\times3^3\times n}$이고 자연수가 되기 위해서는 근호 안의 수가 제곱인 수가 되어야 한다.

$\therefore n=2\times3\times m^2=6\times m^2$ (단, m은 자연수) … Ⅰ

그다음, n의 값의 범위를 구하자.

$n\le100$이므로 $n=6\times m^2\le100$ … Ⅱ

그래서, 답을 구하자.

이를 계산하면 $m^2\le\frac{100}{6}=16.66\cdots$이므로 최대가 되는 $m=4$이다.

$\therefore n=6\times m^2=6\times4^2=96\le100$

따라서 구하는 가장 큰 자연수 n의 값은 96이다. … Ⅲ

132 답 75

먼저, 근호 안이 제곱인 수가 되게 하는 n의 조건을 찾자.

$48=2^4\times3$이므로 $\sqrt{48n}=\sqrt{2^4\times3\times n}$이고 자연수가 되기 위해서는 근호 안의 수가 제곱인 수가 되어야 한다.

$\therefore n=3\times m^2$ (단, m은 자연수) … Ⅰ

그다음, n의 값의 범위를 구하자.

$n\le100$이므로 $n=3\times m^2\le100$ … Ⅱ

그래서, 답을 구하자.

이를 계산하면 $m^2\le\frac{100}{3}=33.33\cdots$이고 최대가 되는 $m=5$이다.

$\therefore n=3\times m^2=3\times5^2=75\le100$

따라서 구하는 가장 큰 자연수 n의 값은 75이다. … Ⅲ

133 답 1

$1<x<2$이므로 $x-1>0$이다.

$\therefore \sqrt{(x-1)^2}=x-1$ … Ⅰ

$1<x<2$이므로 $x-2<0$이다.

$\therefore \sqrt{(x-2)^2}=-(x-2)=-x+2$ … Ⅱ

$\therefore \sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=(x-1)+(-x+2)=1$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\sqrt{(x-1)^2}$을 간단히 한다.	40%
Ⅱ	$\sqrt{(x-2)^2}$을 간단히 한다.	40%
Ⅲ	주어진 식을 간단히 한다.	20%

134 답 $\frac{1}{a}+1$

$0<a<1$에서 $\frac{1}{a}>1$이므로 … Ⅰ

$a-\frac{1}{a}<0,\ a+\frac{1}{a}>0,\ 1-\frac{1}{a}<0$ … Ⅱ

$\therefore$ (주어진 식)$=-\left(a-\frac{1}{a}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left\{-\left(1-\frac{1}{a}\right)\right\}$

$=-a+\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a}+1-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+1$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\frac{1}{a}$의 값의 범위를 구한다.	30%
Ⅱ	$a-\frac{1}{a},\ a+\frac{1}{a},\ 1-\frac{1}{a}$의 값의 범위를 구한다.	40%
Ⅲ	주어진 식을 간단히 한다.	30%

135 답 3

$9<\sqrt{10x^2}<10$의 각 변을 제곱하면

$81<10x^2<100$ … Ⅰ

각 변을 10으로 나누면

$8.1<x^2<10$ … Ⅱ

8.1과 10 사이의 제곱인 수는 9이므로

$x^2=9$ $\therefore x=3$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 부등식의 각 변을 제곱한다.	30%
Ⅱ	부등식의 성질을 이용하여 x^2의 값의 범위를 구한다.	30%
Ⅲ	조건을 만족시키는 자연수 x의 값을 구한다.	40%

136 답 13

$\sqrt{59+x}=y$에서 y가 자연수이므로 $59+x$는 제곱인 수이다.
이때, 59보다 큰 제곱수는 64, 81, 100, ⋯이므로
$59+x=64,\ 81,\ 100,\ \cdots$
$\therefore x=5,\ 22,\ 41,\ \cdots$ ⋯ Ⅰ
즉, 가장 작은 x의 값은 $a=5$이고, 그때의 y의 값은
$\sqrt{59+5}=\sqrt{64}=8=b$ ⋯ Ⅱ
$\therefore a+b=5+8=13$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$59+x$가 제곱인 수가 되게 하는 x의 값을 찾는다.	50%
Ⅱ	a, b의 값을 구한다.	30%
Ⅲ	$a+b$의 값을 구한다.	20%

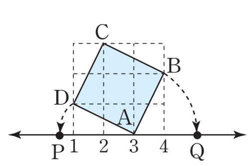
137 답 $B<A<C$

$A-B=(\sqrt{7}+\sqrt{5})-(2+\sqrt{7})$
$\quad=\sqrt{5}-2=\sqrt{5}-\sqrt{4}>0$
$\therefore A>B$ ⋯ Ⅰ
$A-C=(\sqrt{7}+\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})$
$\quad=\sqrt{7}-3=\sqrt{7}-\sqrt{9}<0$
$\therefore A<C$ ⋯ Ⅱ
$\therefore B<A<C$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	A와 B의 대소 관계를 따져본다.	40%
Ⅱ	A와 C의 대소 관계를 따져본다.	40%
Ⅲ	A, B, C의 대소 관계를 구한다.	20%

138 답 6



두 변 AB와 AD의 길이는 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 1, 2인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같다.
따라서 피타고라스 정리에 의해
$\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ⋯ Ⅰ
$\overline{AQ}=\overline{AB}$, $\overline{AP}=\overline{AD}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $3-\sqrt{5}$이고, 점 Q에 대응하는 수는 $3+\sqrt{5}$이다.
$\therefore p=3-\sqrt{5},\ q=3+\sqrt{5}$ ⋯ Ⅱ
$\therefore p+q=(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=6$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\overline{AB}$, $\overline{AD}$의 길이를 구한다.	40%
Ⅱ	p, q의 값을 각각 구한다.	40%
Ⅲ	$p+q$의 값을 구한다.	20%

최고난도 만점 문제 p. 28

139 답 4개

1st 먼저 486을 소인수분해해 보자.
486을 소인수분해하면 $486=2\times3^5$
$486\times a\times b=2\times3^5\times a\times b$가 제곱인 수가 되어야 하므로 가장 작은 자연수 $a\times b=2\times3$이지?
2nd $a\times b=6$이 되는 a, b의 값을 찾아보자.
따라서 $a\times b=6$이 될 수 있는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$로 4개야.

140 답 ②

1st 주어진 부등식을 이용해서 각 선택지의 근호 안의 식의 값의 범위를 찾아야 해.
$-2<a<b<0$ ⋯ (*)에서
(*)의 각 변에 2를 더하면 $0<a+2<b+2<2$ ⋯ ㉠
(*)의 각 변에 -2를 더하면 $-4<a-2<b-2<-2<0$ ⋯ ㉡
㉡의 각 변에 -1을 곱하면 부등호의 방향이 바뀌므로
$0<2<2-b<2-a<4$ ⋯ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의해
$a-2<b-2<0<a+2<b+2<2-b<2-a$ ⋯ ㉣
2nd 선택지의 식들의 근호를 없애 보자.
① $-\sqrt{(a-2)^2}=-\{-(a-2)\}=a-2$ ($\because$ ㉡)
② $\sqrt{(2-a)^2}=2-a$ ($\because$ ㉢)
③ $\sqrt{(a+2)^2}=a+2$ ($\because$ ㉠)
④ $-\sqrt{(b-2)^2}=-\{-(b-2)\}=b-2$ ($\because$ ㉡)
⑤ $\sqrt{(b+2)^2}=b+2$ ($\because$ ㉠)
따라서 ㉣에 의해 그 값이 가장 큰 것은 ②야.

141 답 8

1st 먼저 세 정사각형의 한 변의 길이를 각각 구하자.
$S_1=2$이고, $S_1:S_2:S_3=1:2:4$이므로
$S_1:S_2:S_3=1:2:4=2:4:8$에 의해 $S_2=4$, $S_3=8$이야.
넓이가 m인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{m}$이므로
□ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$
□ECFG의 한 변의 길이는 $\sqrt{4}=2$
□HFIJ의 한 변의 길이는 $\sqrt{8}$
2nd $\overline{AC}$와 $\overline{FJ}$의 길이를 구하자.
□ABCD는 정사각형이므로 마름모라 할 수 있지?
$\overline{AC}=a$라 하면
(□ABCD의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times$(두 대각선의 길이의 곱)이므로
$\dfrac{1}{2}\times a\times a=2,\ a^2=4$
즉, a는 4의 양의 제곱근이므로 $a=2$
같은 방법으로 $\overline{FJ}=b$라 하면
$\dfrac{1}{2}\times b\times b=8,\ b^2=16$
즉, b는 16의 양의 제곱근이므로 $b=4$
3rd 선분들의 길이의 합을 구하자.
따라서 $\overline{AC}=2$, $\overline{CF}=2$, $\overline{FJ}=4$이므로
$\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FJ}=2+2+4=8$

142 답 11

1st 주어진 수가 어떤 경우에 가장 큰 정수가 될 수 있는지 알아 보자.
$\sqrt{78-2x}-\sqrt{37+3y}$가 가장 큰 정수가 되기 위해서는 $\sqrt{78-2x}$는 최대의 정수이어야 하고, 빼는 수인 $\sqrt{37+3y}$는 최소의 정수이어야 해.

2nd 근호가 포함된 수가 정수가 되기 위해서는 근호 안의 수가 제곱인 수가 되어야 하지?
먼저 $\sqrt{78-2x}$가 정수가 되는 자연수 x를 구하자.
$78-2x$는 78보다 작은 제곱인 수가 되어야 하므로
가장 큰 제곱인 수는 64에서
$78-2x=64$, $2x=14$
$\therefore x=7$
이번엔 $\sqrt{37+3y}$가 정수가 되는 자연수 y를 구하자.
$37+3y$는 37보다 큰 제곱인 수가 되어야 하므로
가장 작은 제곱인 수는 49에서
$37+3y=49$, $3y=12$
$\therefore y=4$
$\therefore x+y=7+4=11$

오|답|피|하|기

이 문제는 나오는 결과가 정수여야 하니까 근호 안이 제곱인 수이어야 하는 것까지는 알고 있지만 구하는 것이 두 근호의 차가 가장 큰 정수가 되어야 하는 것에서 감 잡기 힘들지?
각 근호가 가지는 정수들을 하나하나 나열해 보는 게 중요해.

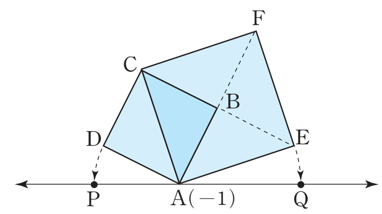
143 답 625

1st $\sqrt{x}$에 x 대신 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …를 하나씩 넣어서 $I(x)$의 값을 구해 보자.
$I(x)=(\sqrt{x}$보다 크지 않은 최대의 정수$)$라 하므로
$I(1)=(\sqrt{1}$보다 크지 않은 최대의 정수$)=1$
$I(2)=(\sqrt{2}$보다 크지 않은 최대의 정수$)=1$
$I(3)=(\sqrt{3}$보다 크지 않은 최대의 정수$)=1$
$I(4)=(\sqrt{4}=2$보다 크지 않은 최대의 정수$)=2$
$I(5)=(\sqrt{5}$보다 크지 않은 최대의 정수$)=2$
$I(6)=(\sqrt{6}$보다 크지 않은 최대의 정수$)=2$
⋮
$I(9)=(\sqrt{9}=3$보다 크지 않은 최대의 정수$)=3$
⋮

2nd $I(x)$의 값의 규칙을 찾아 보자.
$I(1)=I(2)=I(3)=1$ ← 3개!
$I(4)=I(5)=\cdots=I(8)=2$ ← 5개!
$I(9)=I(10)=\cdots=I(15)=3$ ← 7개!
$I(16)=I(17)=\cdots=I(24)=4$ ← 9개!
$I(25)=I(26)=\cdots=I(35)=5$ ← 11개!
$I(36)=I(37)=\cdots=I(48)=6$ ← 13개!
$I(49)=I(50)=\cdots=I(63)=7$ ← 15개!
$I(64)=I(65)=\cdots=I(80)=8$ ← 17개!
$I(81)=I(82)=\cdots=I(99)=9$ ← 19개!
$I(100)=10$
$\therefore I(1)+I(2)+I(3)+\cdots+I(100)$
$=1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+5\times11$
$+6\times13+7\times15+8\times17+9\times19+10$
$=625$

144 답 7

1st 넓이가 m인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{m}$임을 이용하자.



정사각형 ABCD의 넓이가 3이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$이지?
즉, $\overline{AD}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{AP}=\overline{AD}=\sqrt{3}$이야.

2nd □AEFC의 넓이를 이용하여 $\overline{AE}$의 길이를 구하자.
$\triangle ABC=\frac{3}{2}$이므로
$\square AEFC=4\triangle ABC=4\times\frac{3}{2}=6$
즉, 넓이가 6인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{6}$이므로
$\overline{AE}=\sqrt{6}$
$\therefore \overline{AQ}=\overline{AE}=\sqrt{6}$

3rd 주어진 식의 값을 구하자.
따라서 $a=-1-\sqrt{3}$, $b=-1+\sqrt{6}$이므로
$(a+\sqrt{3})^2+(b+1)^2=\{(-1-\sqrt{3})+\sqrt{3}\}^2+\{(-1+\sqrt{6})+1\}^2$
$=(-1)^2+(\sqrt{6})^2$
$=1+6=7$

145 답 ㄴ, ㄷ

1st 점 A와 점 P 사이의 거리를 구하자.
점 A와 점 P 사이의 거리는 원의 둘레의 길이와 같아.
반지름의 길이가 1인 원의 둘레의 길이는
$2\pi\times1=2\pi$
$\therefore k=0+2\pi=2\pi$

2nd 이제 k의 값을 알았으니 옳은 것을 찾을 수 있겠지?
ㄱ. $\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}\times2\pi=\pi$는 무리수이므로
$\frac{1}{2}k$는 $\frac{a}{b}$(a, b는 정수, $b\neq0$)의 꼴로 나타낼 수 없어. (거짓)
ㄴ. $\pi-\frac{1}{2}k=\pi-\pi=0$($\because$ ㄱ)이므로 $\pi-\frac{1}{2}k$는 유리수야. (참)
ㄷ. $2k+1=2\times2\pi+1=4\pi+1$은 무리수야. (참)
ㄹ. $k-\sqrt{2}=2\pi-\sqrt{2}$는 무리수지? 그런데 무리수는 실수이므로
$k-\sqrt{2}$에 대응하는 점은 수직선 위에 나타낼 수 있어. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이야.

B 근호를 포함한 식의 계산

개념 체크 001~036 정답은 p. 2에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

문제편 p. 32

037 답 ②

① $\sqrt{3}\times\sqrt{27}=\sqrt{3\times27}=\sqrt{81}=9$ ← NO!

② $\sqrt{70}\div\sqrt{7}=\sqrt{70\div7}=\sqrt{10}$ ← OK!

③ $\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{15}=\sqrt{3\times5\times15}=\sqrt{225}=15$ ← NO!

④ $-\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{\dfrac{26}{2}}=-\sqrt{13}$ ← NO!

⑤ $2\sqrt{30}\div6\sqrt{5}=2\sqrt{30}\times\dfrac{1}{6\sqrt{5}}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{\dfrac{30}{5}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ← NO!

038 답 ⑤

$2\sqrt{22}\times(-5\sqrt{3})\times\left(-\sqrt{\dfrac{1}{11}}\right)$

$=2\times(-5)\times(-1)\times\sqrt{22\times3\times\dfrac{1}{11}}=10\sqrt{6}$

039 답 ③

① $\sqrt{48}\div\sqrt{12}=\sqrt{\dfrac{48}{12}}=\sqrt{4}=2$

② $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3\times2}=\sqrt{6}$

③ $\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}}\times\sqrt{3}=\sqrt{\dfrac{40}{5}\times3}=\sqrt{24}$

④ $\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}\div\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\dfrac{35}{6}}\times\sqrt{\dfrac{12}{7}}=\sqrt{\dfrac{35}{6}\times\dfrac{12}{7}}=\sqrt{10}$

⑤ $2\sqrt{24}\div3\sqrt{6}=2\sqrt{24}\times\dfrac{1}{3\sqrt{6}}=\dfrac{2}{3}\times\sqrt{\dfrac{24}{6}}=\dfrac{2}{3}\times\sqrt{4}=\dfrac{4}{3}$

이때, $\dfrac{4}{3}<2<\sqrt{6}<\sqrt{10}<\sqrt{24}$이므로 가장 큰 값은 ③이야.

040 답 48

$\sqrt{3}\times\sqrt{\dfrac{8}{21}}\times\sqrt{\dfrac{63}{4}}=\sqrt{3\times\dfrac{8}{21}\times\dfrac{63}{4}}=\sqrt{18}=\sqrt{a}$

$\therefore a=18$

$\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{2}}\div\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\dfrac{30}{2}}\times\sqrt{\dfrac{8}{45}}=\sqrt{\dfrac{30}{2}\times\dfrac{8}{45}}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}=\sqrt{b}$

$\therefore b=\dfrac{8}{3}$

$\therefore ab=18\times\dfrac{8}{3}=48$

041 답 ③

ㄱ. $\sqrt{28}=\sqrt{2^2\times7}=2\sqrt{7}$ (거짓)

ㄴ. $\sqrt{\dfrac{216}{12}}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}=3\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. $\sqrt{0.56}=\sqrt{\dfrac{56}{100}}=\sqrt{\dfrac{14}{25}}=\sqrt{\dfrac{14}{5^2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{5}$ (참)

ㄹ. $\sqrt{96}=\sqrt{4^2\times6}=4\sqrt{6}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이야.

042 답 ⑤

$\sqrt{90}=\sqrt{3^2\times10}=3\sqrt{10}=3\sqrt{a}$　　$\therefore a=10$

$\sqrt{320}=\sqrt{8^2\times5}=8\sqrt{5}=b\sqrt{5}$　　$\therefore b=8$

$\therefore \sqrt{ab}=\sqrt{80}=\sqrt{4^2\times5}=4\sqrt{5}$

043 답 $2\sqrt{7}$, $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{3}$

$2\sqrt{7}=\sqrt{2^2\times7}=\sqrt{28}$, $4\sqrt{3}=\sqrt{4^2\times3}=\sqrt{48}$,

$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times5}=\sqrt{45}$이므로

$\sqrt{28}<\sqrt{45}<\sqrt{48}$　　$\therefore 2\sqrt{7}<3\sqrt{5}<4\sqrt{3}$

044 답 $\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{4}{5}}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}$, $\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{\dfrac{5}{9}}$

이때, $\dfrac{2}{5}\left(=\dfrac{72}{180}\right)<\dfrac{5}{9}\left(=\dfrac{100}{180}\right)<\dfrac{3}{4}\left(=\dfrac{135}{180}\right)<\dfrac{4}{5}\left(=\dfrac{144}{180}\right)$

이므로 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}<\dfrac{\sqrt{5}}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

따라서 가장 작은 것부터 차례로 나열했을 때, 두 번째 수와 네 번째 수의 곱은

$\dfrac{\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{3}$

045 답 ①

$\sqrt{3000}=\sqrt{100\times30}=10\sqrt{30}$이므로 $\sqrt{30}$의 10배야.

$\therefore x=10$

$\dfrac{\sqrt{0.05}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{5}{100}}\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{5}{1000}}=\sqrt{\dfrac{50}{10000}}=\dfrac{\sqrt{50}}{100}$이므로

$\sqrt{50}$의 $\dfrac{1}{100}$배야.

$\therefore y=\dfrac{1}{100}$

046 답 ⑤

$\sqrt{24}=\sqrt{2^3\times3}=\sqrt{2^3}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times2\times2}\times\sqrt{3}$

$=(\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2})\times\sqrt{3}=(\sqrt{2})^3\times\sqrt{3}=a^3b$

047 답 ③

$\sqrt{1.75}=\sqrt{\dfrac{175}{100}}=\sqrt{\dfrac{5^2\times7}{2^2\times5^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\dfrac{a}{2}$

048 답 ⑤

$\sqrt{300}=\sqrt{2^2\times3\times5^2}=(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}\times(\sqrt{5})^2=2ab^2$

049 답 ⑤

① $\sqrt{30}=\sqrt{100\times0.3}=10\sqrt{0.3}=10a$ ← OK!

② $\sqrt{0.003}=\sqrt{\dfrac{0.3}{100}}=\dfrac{a}{10}$ ← OK!

③ $\sqrt{300}=\sqrt{3\times100}=10\sqrt{3}=10b$ ← OK!

④ $\sqrt{0.03}=\sqrt{\dfrac{3}{100}}=\dfrac{b}{10}$ ← OK!

⑤ $\sqrt{0.00003}=\sqrt{\dfrac{0.3}{10000}}=\dfrac{a}{100}$ ←NO!

050 답 ④

$12=5+7=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{7})^2=a^2+b^2$이므로

$\sqrt{12}=\sqrt{a^2+b^2}$

오|답|피|하|기

제곱근을 처음 접하게 되면 생소한 느낌이 들어서 쉬운 문제인데도 어렵게 느껴지는 경우가 있어. 아직 제곱근이란 개념에 익숙하지 않아서 그런 거니까 여러 가지 유형의 제곱근과 관련된 문제를 많이 풀어 보자.

051 답 ③

$\sqrt{0.9}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

이것이 $k\sqrt{10}$이어야 하므로

$k=\frac{3}{10}$

052 답 ②

$\frac{5a^3}{b}=\frac{5\times(\sqrt{2})^3}{\sqrt{3}}=\frac{5\times2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$

이것이 $\frac{p\sqrt{6}}{q}$이므로 $p=10$, $q=3$

$\therefore p+q=10+3=13$

053 답 ④

$\frac{5\sqrt{a}}{3\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{a}\times\sqrt{15}}{3\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15a}}{45}=\frac{\sqrt{15a}}{9}$

이때, $\frac{\sqrt{15a}}{9}=\frac{\sqrt{105}}{9}$이므로

$15a=105 \quad \therefore a=7$

054 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{10}{\sqrt{75}}=\frac{10}{\sqrt{5^2\times3}}=\frac{10}{5\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

즉, $\frac{2\sqrt{3}}{3}=a\sqrt{3}$이므로 $a=\frac{2}{3}$

$\frac{6}{\sqrt{24}}=\frac{6}{\sqrt{2^2\times6}}=\frac{6}{2\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

즉, $\frac{\sqrt{6}}{2}=b\sqrt{6}$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore \sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

055 답 ①

$4\sqrt{3}\div2\sqrt{6}\times(-\sqrt{12})=\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\times(-2\sqrt{3})$

$=\frac{2}{\sqrt{2}}\times(-2\sqrt{3})$

$=\frac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{-4\sqrt{6}}{2}=-2\sqrt{6}$

056 답 $-36\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}\times(-\sqrt{18})\div\frac{\sqrt{2}}{6}=2\sqrt{3}\times(-3\sqrt{2})\times\frac{6}{\sqrt{2}}$

$=-36\sqrt{3}$

057 답 ②

(주어진 식)$=\left(-\frac{12}{3\sqrt{5}}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\times\frac{2}{\sqrt{6}}$

$=\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{6}}$

$=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

즉, $-\frac{2\sqrt{5}}{5}=k\sqrt{5}$이므로

$k=-\frac{2}{5}$

058 답 ①, ⑤

① $2\sqrt{12}\times3\sqrt{3}\div\sqrt{2}=4\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\frac{36}{\sqrt{2}}=18\sqrt{2}$ ← NO!

② $\sqrt{28}\div\sqrt{35}\times(-\sqrt{20})=2\sqrt{7}\times\frac{1}{\sqrt{35}}\times(-2\sqrt{5})$

$=-4$ ← OK!

③ $(-2\sqrt{18})\times\sqrt{32}\div(-\sqrt{6})=(-6\sqrt{2})\times4\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$=\frac{48}{\sqrt{6}}=8\sqrt{6}$ ← OK!

④ $\sqrt{\frac{8}{3}}\div\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}}\div\frac{\sqrt{5}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{10}}\times\frac{9}{\sqrt{5}}$

$=\frac{18}{\sqrt{150}}=\frac{18}{5\sqrt{6}}$

$=\frac{18\sqrt{6}}{30}=\frac{3\sqrt{6}}{5}$ ← OK!

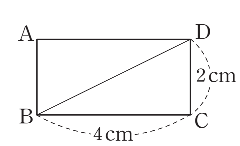
⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{4}\div\left(-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{30}}\right)\times\frac{\sqrt{33}}{3\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}\times\left(-\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{11}}\right)\times\frac{\sqrt{33}}{3\sqrt{5}}$

$=-\frac{7\sqrt{180}}{12\sqrt{5}}=-\frac{42\sqrt{5}}{12\sqrt{5}}$

$=-\frac{7}{2}$ ← NO!

따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤야.

059 답 ③



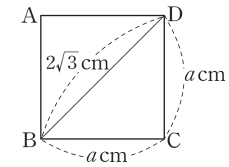
직사각형 ABCD의 가로와 세로의 길이가 각각 4 cm, 2 cm지? 이때, △BCD가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=4^2+2^2=20$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$(cm)

이때, 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 대각선의 길이는 $\sqrt{2}x$ cm이므로 한 변의 길이가 $\overline{BD}=2\sqrt{5}$ cm인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}\times2\sqrt{5}=2\sqrt{10}$(cm)야.

060 답 $\sqrt{6}$ cm



한 변의 길이가 x인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}x$이므로 대각선의 길이가 $2\sqrt{3}$ cm인 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a cm라 하면

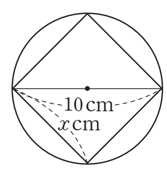
$\sqrt{2}a=2\sqrt{3}$

$\therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

오|답|피|하|기

정사각형의 대각선의 길이 공식이 생각나지 않는다면? 피타고라스 정리를 이용해 대각선의 길이를 구하는 공식을 유도해 봐. 정사각형은 네 변의 길이가 모두 같으므로 a라 두고, 정사각형의 이웃한 두 변과 대각선으로 이루어진 삼각형은 직각삼각형이므로 대각선의 길이를 l이라 하면 $l=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a$야.

061 답 ④



원 모양을 넘지 않으면서 만들 수 있는 가장 큰 정사각형은 그림과 같이 지름을 대각선으로 하고 원에 내접하는 정사각형이야.

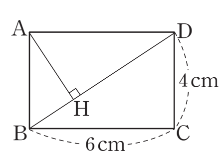
원에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 대각선의 길이는 $\sqrt{2}x$ cm지?

이것이 원의 지름의 길이 10 cm와 같으면 되니까

$\sqrt{2}x=10$

$\therefore\ x=\dfrac{10}{\sqrt{2}}=\dfrac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

062 답 $\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$ cm



먼저, 직사각형 ABCD의 대각선 BD의 길이를 구하자.

직각삼각형 ABD에서 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=4^2+6^2=52$

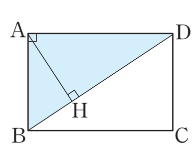
$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$(cm)

이것을 $\overline{AH}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{BD}}$ … (*)에 대입하면

$\overline{AH}=\dfrac{4\times 6}{2\sqrt{13}}=\dfrac{12}{\sqrt{13}}=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$(cm)

오|답|피|하|기

(*)가 어떻게 나왔는지 원리를 알아보자.



직각삼각형 ABD의 넓이를 구하는 방법은 두 가지야.

하나는 $\angle A=90°$이므로 밑변의 길이와 높이를 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$라 하면

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}$ … ㉠

또, 하나는 밑변의 길이를 $\overline{BD}$, 높이를 $\overline{AH}$라 하면

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AH}$ … ㉡

㉠=㉡이니까

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AH}$

$\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{BD}\times\overline{AH}\qquad \therefore\ \overline{AH}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{BD}}$

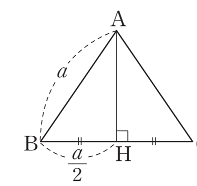
063 답 ③

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$지?

따라서 한 변의 길이가 $2\sqrt{6}$ cm인 정삼각형의 높이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{6}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$(cm)야.

오|답|피|하|기



정삼각형의 높이와 넓이를 구하는 공식을 그냥 외우고 있으면 편리하겠지만 항상 왜 그렇게 나왔는지 알고 있어야 공식을 잊어도 다시 유도할 수 있어.

먼저, 높이인 $\overline{AH}$의 길이를 구하자.

그림에서 직각삼각형 ABH에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$

$a^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\overline{AH}^2$

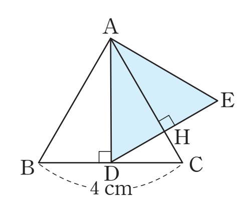
$\overline{AH}^2=\dfrac{3}{4}a^2\qquad \therefore\ \overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

다음, 정삼각형 ABC의 넓이를 구하자.

정삼각형 ABC의 높이가 $\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$이고 밑변의 길이는 $\overline{BC}=a$이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

064 답 ④



정삼각형 ADE의 넓이를 구하기 위해 필요한 것은 △ADE의 한 변의 길이야.

그런데 정삼각형 ADE의 한 변의 길이는 정삼각형 ABC의 높이와 같으니까 결국 △ABC의 높이를 구하면 되겠지?

정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 4 cm이므로

$\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$(cm)

따라서 정삼각형 ADE의 넓이는

$\triangle ADE=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 12=3\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

065 답 $32\sqrt{3}$ cm^2

정삼각형의 한 변의 길이를 a cm라 하면

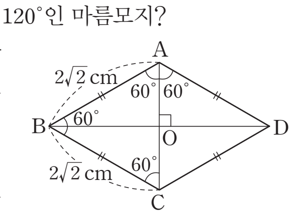
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=4\sqrt{6}\qquad \therefore\ a=4\sqrt{6}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=8\sqrt{2}$

따라서 한 변의 길이가 $8\sqrt{2}$ cm인 정삼각형의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(8\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 128=32\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

066 답 $2\sqrt{6}$ cm

□ABCD는 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$ cm, $\angle A=120°$인 마름모지?



그림과 같이 두 점 A, C를 연결하면 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$ cm인 이등변삼각형이고

$\angle ABC=180°-120°=60°$이므로

△ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ cm인 정삼각형이지.

즉, 두 대각선의 교점을 O라 하면

$\overline{BO}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{6}$(cm)

$\therefore\ \overline{BD}=2\overline{BO}=2\sqrt{6}$(cm)

067 답 ④

$\overline{AG}=\sqrt{6^2+4^2+(4\sqrt{2})^2}$
$=\sqrt{36+16+32}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

068 답 ③

대각선의 길이가 12 cm인 정육면체의 한 모서리의 길이를 a cm라 하면

$\sqrt{3}a=12 \qquad \therefore a=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는 $4\sqrt{3}$ cm야.

069 답 $5\sqrt{5}$ cm²

$\overline{AE}=x$ cm라 하면 $\overline{AG}=3\sqrt{5}$ cm이므로
$\sqrt{4^2+2^2+x^2}=3\sqrt{5}$
$\sqrt{20+x^2}=\sqrt{45}$
$20+x^2=45,\ x^2=25$
즉, x는 25의 양의 제곱근이므로 $x=5$
따라서 $\overline{EG}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$(cm)이므로
$\triangle AEG=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 5=5\sqrt{5}(\text{cm}^2)$

070 답 12

주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 정육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{6}$이므로
$\sqrt{3}a=\sqrt{6} \qquad \therefore a=\sqrt{2}$
즉, 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이가 $\sqrt{2}$이고 구하는 겉넓이는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형 6개의 합이므로
(정육면체의 겉넓이)$=(\sqrt{2})^2\times 6=12$

071 답 ⑤

주어진 정사면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면
$\frac{\sqrt{6}}{3}a=2\sqrt{3} \qquad \therefore a=2\sqrt{3}\times\frac{3}{\sqrt{6}}=3\sqrt{2}$
즉, 주어진 정사면체의 한 모서리의 길이는 $3\sqrt{2}$이므로 이 정사면체의 부피를 V라 하면
$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\times(3\sqrt{2})^3=\frac{\sqrt{2}}{12}\times 27\times 2\sqrt{2}=9$

072 답 $3\sqrt{2}$ cm²

한 모서리의 길이가 a인 정사면체의 높이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$이므로
$\overline{AH}=\frac{\sqrt{6}}{3}\times 6=2\sqrt{6}$(cm)
한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로
정삼각형 BCD에서 $\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$(cm)
이때, 점 H는 △BCD의 무게중심이므로
$\overline{BH}:\overline{HM}=2:1$에서
$\overline{HM}=\frac{1}{3}\overline{BM}=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{3}=\sqrt{3}$(cm)
$\therefore \triangle AHM=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{HM}$
$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}(\text{cm}^2)$

073 답 ②

정사면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하자.
점 H는 △BCD의 무게중심이므로 $\overline{BM}$을 2 : 1로 나누지?
즉, $\overline{BH}=2$ cm이므로
$\overline{BM}=\frac{3}{2}\overline{BH}=\frac{3}{2}\times 2=3$(cm)
이때, △BCD는 정삼각형이고 $\overline{BM}$은 정삼각형 BCD의 높이이므로
$\frac{\sqrt{3}}{2}x=3 \qquad \therefore x=2\sqrt{3}$
따라서 정사면체의 한 모서리의 길이가 $2\sqrt{3}$ cm이므로
(정사면체의 부피)$=\frac{\sqrt{2}}{12}\times(2\sqrt{3})^3$
$=\frac{\sqrt{2}}{12}\times 8\times 3\sqrt{3}$
$=2\sqrt{6}(\text{cm}^3)$

074 답 10

$8\sqrt{2}+3\sqrt{5}-\sqrt{18}+\sqrt{20}=8\sqrt{2}+3\sqrt{5}-3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$
$=5\sqrt{2}+5\sqrt{5}$
이것이 $a\sqrt{2}+b\sqrt{5}$이어야 하므로 $a=5,\ b=5$
$\therefore a+b=5+5=10$

오|답|피|하|기

a와 b가 유리수라는 조건은 매우 중요해.
$8\sqrt{2}+3\sqrt{5}-\sqrt{18}+\sqrt{20}$을 정리하면 $5\sqrt{2}+5\sqrt{5}$가 되고 이것이 $a\sqrt{2}+b\sqrt{5}$라고 하니까 바로 $a=5,\ b=5$가 나오는 것이 상식이겠지?
하지만 a, b가 유리수라는 조건이 빠진다면 어떻게 될까? 이때는 $a=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}},\ b=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$도 답이 될 수 있어. 즉, a, b가 무리수가 될 수 있지? 이렇게 수학에서는 조건이 매우 중요한 역할을 한다는 거 잘 기억하고, 조건을 충분히 이용하자.

075 답 ④

$\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{50}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2}=\sqrt{2}$

076 답 −3

$\sqrt{192}-\sqrt{24}-\sqrt{54}-\sqrt{108}=8\sqrt{3}-2\sqrt{6}-3\sqrt{6}-6\sqrt{3}$
$=2\sqrt{3}-5\sqrt{6}=a\sqrt{3}+b\sqrt{6}$
따라서 $a=2,\ b=-5$이므로
$a+b=2+(-5)=-3$

077 답 ③

$\sqrt{48}-\sqrt{50}+4\sqrt{32}+3\sqrt{12}$
$=4\sqrt{3}-5\sqrt{2}+16\sqrt{2}+6\sqrt{3}$
$=11\sqrt{2}+10\sqrt{3}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$
따라서 $a=11,\ b=10$이므로
$a-b=11-10=1$

078 답 ③

$\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{12}-2\sqrt{27}=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+2\sqrt{3}-6\sqrt{3}$
$=\sqrt{5}-4\sqrt{3}$
$=b-4a$

079 답 $5+\sqrt{3}$

$$2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{50}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}+\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}+\frac{(5\sqrt{2}-\sqrt{6})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$=2\sqrt{3}+\frac{10-\sqrt{12}}{2}=2\sqrt{3}+\frac{10-2\sqrt{3}}{2}$$
$$=2\sqrt{3}+5-\sqrt{3}=5+\sqrt{3}$$

080 답 ①

$$\sqrt{8}-\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{40}\div\sqrt{5}=2\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{8}$$
$$=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}$$

081 답 ②

$$\sqrt{(-6)^2}+(-2\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\left(\sqrt{27}+\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=6+12-\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{6}}{3}\right)=18-\sqrt{3}(3\sqrt{3}+\sqrt{6})$$
$$=18-9-3\sqrt{2}=9-3\sqrt{2}$$

오답피하기

제곱근의 사칙연산을 할 때, 계산이 어려운 이유는 식이 너무 복잡해 보이기 때문이야. 제곱근과 사칙연산의 기호가 뒤죽박죽 섞여 있는 것처럼 보일 때 명심해야 할 것은 기본에 충실해야 한다는 거야. 처음 사칙연산을 배울 때와 마찬가지로 곱하기, 나누기 기호를 찾아 계산할 순서를 정하고 괄호로 묶자. 이렇게 하고 나면 제곱근의 사칙연산이 한결 덜 복잡하게 보일 거야.

082 답 $8-3\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{8}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=\frac{(2\sqrt{2}-2\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=\frac{4-2\sqrt{6}}{2}+\frac{6\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=(2-\sqrt{6})+2\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=2-\sqrt{6}+6-2\sqrt{6}$$
$$=8-3\sqrt{6}$$

083 답 ②

$$2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{5}+1\right)+\frac{\sqrt{48}-\sqrt{30}}{\sqrt{3}}$$
$$=2\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{5}+1\right)+\frac{(4\sqrt{3}-\sqrt{30})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{10}-10+2\sqrt{5}+\frac{12-3\sqrt{10}}{3}$$
$$=\sqrt{10}-10+2\sqrt{5}+4-\sqrt{10}$$
$$=-6+2\sqrt{5}=a+b\sqrt{5}$$

따라서 $a=-6$, $b=2$이므로

$a+b=-6+2=-4$

084 답 ③

$$a(\sqrt{5}-1)+\sqrt{5}(\sqrt{5}-3)=a\sqrt{5}-a+5-3\sqrt{5}$$
$$=(a-3)\sqrt{5}+(-a+5)$$

이므로 계산한 결과가 유리수가 되기 위해서는

$a-3=0$ $\quad\therefore a=3$

085 답 ②

$$\frac{8}{\sqrt{3}}(\sqrt{12}-4)+\sqrt{2}\left(\frac{a}{\sqrt{6}}-\sqrt{18}\right)=8\sqrt{4}-\frac{32}{\sqrt{3}}+\frac{a}{\sqrt{3}}-\sqrt{36}$$
$$=16-\frac{1}{\sqrt{3}}(32-a)-6$$
$$=10-\frac{1}{\sqrt{3}}(32-a)$$

이므로 계산한 결과가 유리수가 되기 위해서는

$32-a=0$ $\quad\therefore a=32$

086 답 ①

$$\sqrt{2}(a-\sqrt{3})+b\left(\frac{2}{\sqrt{6}}+1\right)-\sqrt{8}$$
$$=a\sqrt{2}-\sqrt{6}+\frac{2b}{\sqrt{6}}+b-2\sqrt{2}$$
$$=(a-2)\sqrt{2}-\sqrt{6}+\frac{b\sqrt{6}}{3}+b$$
$$=(a-2)\sqrt{2}+\left(-1+\frac{b}{3}\right)\sqrt{6}+b$$

이므로 계산한 결과가 유리수가 되기 위해서는

$a-2=0$, $1-\frac{b}{3}=0$에서 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

087 답 ①

$$a(\sqrt{5}-2)+4\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)=b$$
$$a\sqrt{5}-2a+6-4\sqrt{5}=b$$
$$(a-4)\sqrt{5}+(-2a+6)=b$$

a, b가 유리수이므로 등식의 좌변이 유리수가 되기 위해서는

$a-4=0$에서 $a=4$

따라서 $b=-2\times4+6=-2$이므로

$ab=4\times(-2)=-8$

088 답 $\frac{3\sqrt{2}+7\sqrt{5}}{2}$

$$x+y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$
$$x-y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$
$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\times(\sqrt{5})^2+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}\times(\sqrt{2})^2$$
$$=\frac{5\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}+7\sqrt{5}}{2}$$

089 답 ④

$$x(y+2)-y(x-3)=xy+2x-xy+3y$$
$$=2x+3y$$
$$=2\times3\sqrt{2}+3(1-2\sqrt{2})$$
$$=6\sqrt{2}+3-6\sqrt{2}$$
$$=3$$

090 답 $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

[다른 풀이]

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

091 답 ④

$x+y=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{7}$

$x-y=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

$\therefore (x+y)(x-y)=\sqrt{7}\times\sqrt{5}=\sqrt{35}$

092 답 $(8\sqrt{3}+16)$ cm

넓이가 a인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{a}$지?

넓이가 각각 12 cm^2, 16 cm^2인 두 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}(\text{cm})$, $\sqrt{16}=4(\text{cm})$

따라서 두 정사각형의 둘레의 길이의 합은

$4\times2\sqrt{3}+4\times4=8\sqrt{3}+16(\text{cm})$

093 답 $\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$

사다리꼴의 윗변의 길이가 $\sqrt{6}$, 아랫변의 길이가 $2\sqrt{3}$, 높이가 $\sqrt{3}$이므로

(사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{6}+2\sqrt{3})\times\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{18}+6}{2}=\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$

094 답 3

직육면체의 가로의 길이는 $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$, 세로의 길이는 $3\sqrt{2}$, 높이는 $\sqrt{5}$이므로

(직육면체의 부피)$=(\sqrt{5}+2\sqrt{2})\times3\sqrt{2}\times\sqrt{5}$

$=(3\sqrt{10}+12)\times\sqrt{5}$

$=3\sqrt{50}+12\sqrt{5}$

$=15\sqrt{2}+12\sqrt{5}$

따라서 $a=15$, $b=12$이므로

$a-b=15-12=3$

095 답 $\frac{9\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{2}$

삼각형의 밑변의 길이는 $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$, 높이는 $3\sqrt{3}$이므로

(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\times3\sqrt{3}$

$=\frac{9\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{2}$

096 답 $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

정사각형 D의 넓이는 정사각형 C의 넓이의 3배라 하므로

정사각형 C의 넓이는 정사각형 D의 넓이의 $\frac{1}{3}$이야.

즉, 정사각형 D의 넓이가 1이므로 정사각형 C의 넓이는 $\frac{1}{3}$

또, 정사각형 C의 넓이는 정사각형 B의 넓이의 2배라 하므로

정사각형 B의 넓이는 정사각형 C의 넓이의 $\frac{1}{2}$이야.

즉, 정사각형 C의 넓이가 $\frac{1}{3}$이므로 정사각형 B의 넓이는

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

마지막으로 정사각형 B의 넓이는 정사각형 A의 넓이의 3배라 하므로 정사각형 A의 넓이는 정사각형 B의 넓이의 $\frac{1}{3}$이야.

즉, 정사각형 B의 넓이는 $\frac{1}{6}$이므로 정사각형 A의 넓이는

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

따라서 정사각형 A의 한 변의 길이는 $\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$이고

정사각형 C의 한 변의 길이는 $\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

구하는 합은 $\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

097 답 ④

$a=6.797$, $b=49.5$이므로

$1000a-100b=1000\times6.797-100\times49.5$

$=6797-4950=1847$

오|답|피|하|기

제곱근표를 읽기가 처음에는 굉장히 힘들 수도 있지만 우선은 제곱근표를 읽는 법을 숙지하는 것이 중요해. 처음 기계를 사용할 때 사용 설명서를 읽어야 그것을 잘 쓸 수 있는 것과 마찬가지야. 제곱근표의 가로줄과 세로줄이 무엇을 나타내는지 알게 된다면 제곱근표 읽는 것은 그야말로 식은 죽 먹기지!!

098 답 (1) 9.763 (2) 485

(1) $\sqrt{5.80}=2.408$, $\sqrt{54.1}=7.355$이므로

$a=2.408$, $b=7.355$

$\therefore a+b=2.408+7.355=9.763$

(2) $\sqrt{58}=7.616$이므로 $x=58$

$\sqrt{5.43}=2.330$이므로 $y=5.43$

$\therefore 100y-x=100\times5.43-58=543-58=485$

099 답 0.7355

$\sqrt{0.541}=\sqrt{\frac{1}{100}\times54.1}=\frac{1}{10}\times\sqrt{54.1}$

$=\frac{1}{10}\times7.355=0.7355$

100 답 ④

① $\sqrt{0.0003}=\sqrt{\frac{1}{10^4}\times3.00}=\frac{1}{100}\times\sqrt{3.00}$ ← OK!

② $\sqrt{0.034}=\sqrt{\frac{1}{10^2}\times3.40}=\frac{1}{10}\times\sqrt{3.40}$ ← OK!

③ $\sqrt{321}=\sqrt{10^2\times3.21}=10\times\sqrt{3.21}$ ← OK!

④ $\sqrt{3250}=\sqrt{10^2\times32.5}=10\times\sqrt{32.5}$ ← NO!

⑤ $\sqrt{34400}=\sqrt{10^4\times3.44}=100\times\sqrt{3.44}$ ← OK!

101 답 (1) 233 (2) 269

(1) $\sqrt{x}=11.45=10\times1.145$

$=10\times\sqrt{1.31}=\sqrt{10^2\times1.31}$

$=\sqrt{131}$

이므로 $x=131$

$\sqrt{y}=0.101=\frac{1}{10}\times1.01$

$=\frac{1}{10}\times\sqrt{1.02}=\sqrt{\frac{1.02}{10^2}}$

$=\sqrt{0.0102}$

이므로 $y=0.0102$

$\therefore\ x+10000y=131+102=233$

(2) $z=\sqrt{7.24}=\sqrt{2^2\times1.81}$

$=2\times\sqrt{1.81}=2\times1.345$

$=2.69$

$\therefore\ 100z=269$

102 답 ④

$\sqrt{0.232}=\sqrt{\frac{23.2}{100}}=\frac{\sqrt{23.2}}{10}$

$=\frac{1}{10}\times4.817=0.4817$

103 답 (1) **187.1** (2) **0.05916**

(1) $\sqrt{35000}=\sqrt{10000\times3.5}=100\sqrt{3.5}$

$=100\times1.871=187.1$

(2) $\sqrt{0.0035}=\sqrt{\frac{35}{10000}}=\frac{\sqrt{35}}{100}$

$=\frac{1}{100}\times5.916=0.05916$

104 답 ④

① $\sqrt{200}=\sqrt{100\times2}=10\sqrt{2}$

$=10\times1.414=14.14$ ← OK!

② $\sqrt{2000}=\sqrt{100\times20}=10\sqrt{20}$

$=10\times4.472=44.72$ ← OK!

③ $\sqrt{20000}=\sqrt{10000\times2}=100\sqrt{2}$

$=100\times1.414=141.4$ ← OK!

④ $\sqrt{0.2}=\sqrt{\frac{20}{100}}=\frac{\sqrt{20}}{10}$

$=\frac{1}{10}\times4.472=0.4472$ ← NO!

⑤ $\sqrt{0.002}=\sqrt{\frac{20}{10000}}=\frac{\sqrt{20}}{100}$

$=\frac{1}{100}\times4.472=0.04472$ ← OK!

105 답 ④

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$=\frac{3\times3.162}{10}=\frac{9.486}{10}=0.9486$

106 답 ⑤

$\frac{\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+9}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{2}+4)\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{(\sqrt{3}+9)\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\frac{2+4\sqrt{2}}{2}+\frac{3+9\sqrt{3}}{3}=1+2\sqrt{2}+1+3\sqrt{3}$

$=2+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}=2+2\times1.414+3\times1.732$

$=2+2.828+5.196=10.024$

107 답 ⑤

$2<\sqrt{7}<3$에서 $5<\sqrt{7}+3<6$이므로

$\sqrt{7}+3$의 정수 부분은 5야. $\therefore\ a=5$

$\sqrt{7}+3$의 소수 부분은 $\sqrt{7}+3$에서 정수 부분을 뺀 것과 같으므로

$b=(\sqrt{7}+3)-5=\sqrt{7}-2$

$\therefore\ a-b=5-(\sqrt{7}-2)=7-\sqrt{7}$

108 답 $\sqrt{14}+1$

$4<\sqrt{21}<5$이므로 $\sqrt{21}$의 정수 부분은 4야. $\therefore\ a=4$

$3<\sqrt{14}<4$이므로 $\sqrt{14}$의 정수 부분은 3이야.

즉, 소수 부분은 $\sqrt{14}-3$이므로 $b=\sqrt{14}-3$

$\therefore\ a+b=4+(\sqrt{14}-3)=\sqrt{14}+1$

109 답 $\frac{7\sqrt{6}}{6}$

$\sqrt{49}<3\sqrt{6}=\sqrt{54}<\sqrt{64}$에서 $7<3\sqrt{6}<8$이므로 $3\sqrt{6}$의 정수 부분은 7이야.

$\therefore\ a=7$

또한, $3\sqrt{6}$의 소수 부분은 $3\sqrt{6}$에서 정수 부분을 뺀 것과 같으므로

$b=3\sqrt{6}-7$

$\therefore\ \frac{3a}{b+7}=\frac{3\times7}{(3\sqrt{6}-7)+7}=\frac{21}{3\sqrt{6}}=\frac{7}{\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$

110 답 ③

$2<\sqrt{5}<3$에서 $\sqrt{5}$의 정수 부분은 2이고, 소수 부분은 $\sqrt{5}$에서 정수 부분을 뺀 것과 같으므로 $\sqrt{5}-2$야.

$\therefore\ x=\sqrt{5}-2$ … ㉠

$8<\sqrt{80}<9$에서 $\sqrt{80}$의 정수 부분은 8이고, 소수 부분은 $\sqrt{80}$에서 정수 부분을 뺀 것과 같으므로 $\sqrt{80}-8$이야.

이때, ㉠의 식을 변형하면 $\sqrt{5}=x+2$이므로 $\sqrt{80}$의 소수 부분, 즉 $\sqrt{80}-8$을 x에 대한 식으로 나타내면

$\sqrt{80}-8=\sqrt{4^2\times5}-8=4\sqrt{5}-8$

$=4(x+2)-8=4x$

111 답 $C<A<B$

$3<\sqrt{15}<4$에서 $2<\sqrt{15}-1<3$이므로 $\sqrt{15}-1$의 정수 부분은 2야.

$\therefore\ a=2$

$1<\sqrt{3}<2$에서 $3<\sqrt{3}+2<4$이므로 $\sqrt{3}+2$의 정수 부분은 3이야.

$\therefore\ b=(\sqrt{3}+2)-3=\sqrt{3}-1$

즉, A, B, C의 값을 구하면

$A=\sqrt{108}-2b=6\sqrt{3}-2(\sqrt{3}-1)=4\sqrt{3}+2$

$B=\sqrt{50}+a=5\sqrt{2}+2$

$C=\sqrt{75}-ab=5\sqrt{3}-2(\sqrt{3}-1)=3\sqrt{3}+2$

그런데 $4\sqrt{3}=\sqrt{48}$, $5\sqrt{2}=\sqrt{50}$, $3\sqrt{3}=\sqrt{27}$에서

$\sqrt{27}<\sqrt{48}<\sqrt{50}$이므로 $3\sqrt{3}<4\sqrt{3}<5\sqrt{2}$

따라서 $3\sqrt{3}+2<4\sqrt{3}+2<5\sqrt{2}+2$이므로

$C<A<B$

112 답 $1-2\sqrt{2}$

$\overline{CP}=\overline{CA}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이고,

$\overline{BQ}=\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$p=0-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

$q=-1+\sqrt{2}$

$\therefore\ p-q=-\sqrt{2}-(-1+\sqrt{2})=1-2\sqrt{2}$

113 답 ②, ⑤

수직선 위의 세 정사각형의 대각선의 길이는 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 1, 1인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이와 같으므로

피타고라스 정리에 의해 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

점 A에 대응하는 수는 -1에서 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 뺀 수이므로

$-1-\sqrt{2}$

점 B에 대응하는 수는 0에서 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 뺀 수이므로

$-\sqrt{2}$

점 C에 대응하는 수는 -2에 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 더한 수이므로

$-2+\sqrt{2}$

점 D에 대응하는 수는 -1에 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 더한 수이므로

$-1+\sqrt{2}$

점 E에 대응하는 수는 2에서 빗변의 길이 $\sqrt{2}$를 뺀 수이므로

$2-\sqrt{2}$

① $\overline{AB}=-\sqrt{2}-(-1-\sqrt{2})=1$

$\overline{BC}=-2+\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$

$\therefore \overline{AB}\neq\overline{BC}$ ← NO!

④ $\overline{BD}=-1+\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-1$ ← NO!

⑤ $\overline{AE}=2-\sqrt{2}-(-1-\sqrt{2})=3$ ← OK!

114 답 $2-5\sqrt{5}$

정사각형 ABCD에서 두 변 BA와 BC의 길이는 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 1, 2인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같아.

따라서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{BA}=\overline{BC}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$a=2-\sqrt{5}$, $b=2+\sqrt{5}$

$\therefore 3a-2b=3(2-\sqrt{5})-2(2+\sqrt{5})$

$=6-3\sqrt{5}-4-2\sqrt{5}$

$=2-5\sqrt{5}$

115 답 ⑤

① $(3\sqrt{2}-4)-(2\sqrt{5}-4)=3\sqrt{2}-2\sqrt{5}$

$=\sqrt{18}-\sqrt{20}<0$

$\therefore 3\sqrt{2}-4<2\sqrt{5}-4$ ← NO!

② $2\sqrt{2}-(2\sqrt{7}-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-2\sqrt{7}$

$=\sqrt{18}-\sqrt{28}<0$

$\therefore 2\sqrt{2}<2\sqrt{7}-\sqrt{2}$ ← NO!

③ $(\sqrt{48}+1)-(3\sqrt{3}+2)=4\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-2$

$=\sqrt{3}-1>0$

$\therefore \sqrt{48}+1>3\sqrt{3}+2$ ← NO!

④ $(\sqrt{20}+\sqrt{7})-(3\sqrt{5}-\sqrt{7})=2\sqrt{5}+\sqrt{7}-3\sqrt{5}+\sqrt{7}$

$=2\sqrt{7}-\sqrt{5}$

$=\sqrt{28}-\sqrt{5}>0$

$\therefore \sqrt{20}+\sqrt{7}>3\sqrt{5}-\sqrt{7}$ ← NO!

⑤ $(\sqrt{12}-4\sqrt{2})-(\sqrt{8}-\sqrt{27})=2\sqrt{3}-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$

$=5\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

$=\sqrt{75}-\sqrt{72}>0$

$\therefore \sqrt{12}-4\sqrt{2}>\sqrt{8}-\sqrt{27}$ ← OK!

116 답 ③

① $2\sqrt{2}-(3\sqrt{2}-\sqrt{5})=-\sqrt{2}+\sqrt{5}>0$

$\therefore 2\sqrt{2} > 3\sqrt{2}-\sqrt{5}$

② $(2\sqrt{5}+2)-(8-\sqrt{5})=3\sqrt{5}-6$

$=\sqrt{45}-\sqrt{36}>0$

$\therefore 2\sqrt{5}+2 > 8-\sqrt{5}$

③ $(4-2\sqrt{2})-(\sqrt{32}-4)=4-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+4$

$=8-6\sqrt{2}$

$=\sqrt{64}-\sqrt{72}<0$

$\therefore 4-2\sqrt{2} < \sqrt{32}-4$

④ $(\sqrt{18}-2\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$=4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

$=\sqrt{32}-\sqrt{27}>0$

$\therefore \sqrt{18}-2\sqrt{3} > \sqrt{3}-\sqrt{2}$

⑤ $(3\sqrt{5}-\sqrt{11})-(2\sqrt{10}-\sqrt{11})=3\sqrt{5}-2\sqrt{10}$

$=\sqrt{45}-\sqrt{40}>0$

$\therefore 3\sqrt{5}-\sqrt{11} > 2\sqrt{10}-\sqrt{11}$

따라서 부등호가 나머지 넷과 다른 것은 ③이야.

117 답 ⑤

$A-B=(6-2\sqrt{5})-3(2-\sqrt{3})$

$=6-2\sqrt{5}-6+3\sqrt{3}$

$=-\sqrt{20}+\sqrt{27}>0$

$\therefore A>B$

$B-C=3(2-\sqrt{3})-(2\sqrt{3}-3)$

$=6-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3$

$=9-5\sqrt{3}$

$=\sqrt{81}-\sqrt{75}>0$

$\therefore B>C$

$\therefore C<B<A$

잘 틀리는 유형 훈련+1up

p. 42

118 답 ⑤

1st b의 값을 구하자.

$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{a}=\sqrt{3}$을 $b=a+\frac{1}{a}$에 대입하면

$b=\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

2nd $s=kt$이면 s는 t의 k배라 하지?

이때, $a=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}=4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=4a$

따라서 b는 a의 4배야.

오답피하기

$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$에서 b가 a의 $\frac{4}{3}$배라고 답한 사람은 함정에 제대로 걸린 거야. a는 $\sqrt{3}$이 아니야. 착각하지 말자. 또, $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 역수를 취해서 b가 a의 $\frac{3}{4}$배라고 푼 것도 마찬가지야. 실수하기 쉬우니까 조심하자.

119 답 ④

1st b의 값을 구하자.

$a=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{a}=\sqrt{6}$을 $b=\frac{1}{a}-a$에 대입하자.

$b=\sqrt{6}-\frac{1}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

2nd $s=kt$이면 s는 t의 k배라 하지?

이때, $a=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$이므로 $b=\frac{5\sqrt{6}}{6}=5\times\frac{\sqrt{6}}{6}=5a$

따라서 b는 a의 5배야.

120 답 $20+10\sqrt{2}$

1st 주어진 조건이 하나밖에 없으니 이것을 이용할 수 있도록 식을 변형해 보자.

주어진 조건 $ab=50$을 이용하기 위해서 근호 밖에 있는 a, b를 근호 안으로 가져와야 해.

$$a\sqrt{\frac{8b}{a}}+2b\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{8a^2b}{a}}+2\sqrt{\frac{ab^2}{b}}$$
$$=\sqrt{8ab}+2\sqrt{ab}$$
$$=2\sqrt{2ab}+2\sqrt{ab}$$

2nd 주어진 조건 $ab=50$을 대입하자.

$$=2\sqrt{100}+2\sqrt{50}$$
$$=20+10\sqrt{2}$$

오|답|피|하|기

이 문제는 주어진 조건을 이용할 수 있게 식을 적절히 변형하는 능력이 필요해. 하지만 그것이 말처럼 쉽지 않지?
우선 발상을 잘해야 해. 근호 밖의 문자가 근호 안으로 들어가기 위해서는 제곱을 해서 들어가야 해. 그러면 이 문제는 조건을 이용할 수 있게 만들어지지. 이런 수학적 도구는 자주 사용되니까 잘 알고 있자.

121 답 $13\sqrt{10}$

1st 주어진 조건이 하나밖에 없으니 이것을 이용할 수 있도록 식을 변형해 보자.

주어진 조건 $ab=10$을 사용하기 위해서 근호 밖에 있는 a, b를 근호 안으로 가져와야 해.

$$a\sqrt{\frac{9b}{a}}+b^2\sqrt{\frac{a^3}{b}}=\sqrt{\frac{9a^2b}{a}}+\sqrt{\frac{a^3b^4}{b}}$$
$$=3\sqrt{ab}+\sqrt{(ab)^3}$$

2nd 주어진 조건 $ab=10$을 대입하자.

$$=3\sqrt{10}+\sqrt{10^3}$$
$$=3\sqrt{10}+10\sqrt{10}=13\sqrt{10}$$

122 답 ④

1st x가 포함된 식에서 제곱을 이용하여 x의 값을 구해 보자.

먼저 $\sqrt{5}+\sqrt{x}=2\sqrt{5}$에서 x의 값을 구해 보자.

$\sqrt{x}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면 $x=5$

2nd y가 포함된 식에서 제곱을 이용하여 y의 값을 구해 보자.

$\sqrt{6+3y}=5\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면

$6+3y=(5\sqrt{3})^2=75$

$3y=69$ $\quad\therefore y=23$

$\therefore y-x=23-5=18$

오|답|피|하|기

제곱근으로 표현된 문제에서 양변을 적절히 제곱하여 x, y의 값을 구하는 문제야. 제곱근이 좀 복잡하게 얽혀 있지? 이것을 적절히 잘 풀어야 해. 이런 유형의 문제는 모양이 복잡하므로 적절하게 변형할 수 있는 기술이 필요해. 그래서 문자와 숫자를 어느 한쪽으로 몰아서 제곱하는 방법이 필요한 거야.

123 답 ②

1st x가 포함된 식에서 제곱을 이용하여 x의 값을 구해 보자.

먼저 $3\sqrt{3}+\sqrt{2x}=7\sqrt{3}$에서 x의 값을 구해 보자.

$\sqrt{2x}=7\sqrt{3}-3\sqrt{3}=4\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면

$2x=48$ $\quad\therefore x=24$

2nd y가 포함된 식에서 제곱을 이용하여 y의 값을 구해 보자.

$\sqrt{8+4y}=6\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$8+4y=180$, $4y=172$ $\quad\therefore y=43$

$\therefore x+y=24+43=67$

124 답 $\frac{1}{3}$

1st 주어진 식을 간단히 해 보자.

$$\sqrt{3}(4\sqrt{3}-1)+\sqrt{27}(a-\sqrt{3})=\sqrt{3}(4\sqrt{3}-1)+3\sqrt{3}(a-\sqrt{3})$$
$$=(12-\sqrt{3})+(3a\sqrt{3}-9)$$
$$=3+(3a-1)\sqrt{3}$$

2nd 주어진 식이 유리수가 되려면 $(3a-1)\sqrt{3}$이 0이 되어야지?

$3a-1=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

오|답|피|하|기

이 유형의 문제는 항등식의 성질을 이용한 방법과 매우 유사하지?
예를 들어, $(2-a)x+(3-b)y=0$에서 x, y의 값에 상관없이 등식이 성립하기 위해서는 $a=2$, $b=3$이어야 해.
이것과 마찬가지로 이 문제도 $\sqrt{3}$에 대한 식으로 만들고 계수가 0이 되는 a를 찾는 비슷한 방법으로 풀고 있어.

125 답 $\frac{1}{2}$

1st 주어진 식을 간단히 해 보자.

$$\sqrt{2}(4\sqrt{18}-1)+\sqrt{8}(a-\sqrt{50})=\sqrt{2}(12\sqrt{2}-1)+2\sqrt{2}(a-5\sqrt{2})$$
$$=24-\sqrt{2}+2\sqrt{2}a-20$$
$$=4+(2a-1)\sqrt{2}$$

2nd 주어진 식이 유리수가 되려면 $(2a-1)\sqrt{2}$가 0이 되어야 하지?

$2a-1=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

오|답|피|하|기

많은 친구들은 근호 안에 큰 숫자가 나오면 무조건 소인수분해 등을 사용해서 작은 숫자들의 곱(또는 합)으로 쪼개야 한다고 알고 있어. 위의 풀이에서도 그렇게 해결하고 있지? 그러나
$2\times18=36=6^2$, $8\times50=400=20^2$임을 이용하여
$$4\sqrt{36}-\sqrt{2}+a\sqrt{8}-\sqrt{400}=2a\sqrt{2}-\sqrt{2}+4\times6-20$$
$$=(2a-1)\sqrt{2}+4$$
이렇게 풀 수 있어. 비슷한 유형의 문제를 푼다고 해서 한 가지 방법으로만 생각하는 것이 아니라, 다양한 문제를 많이 풀어 보면서 '사고의 유연성'을 길러야만 더 높은 곳까지 올라갈 수 있다는 거야.

B

126 답 $2\sqrt{3}$

1st 연산 기호 ◎의 정의를 이용하여 식을 전개해 보자.

$$\begin{aligned}(a◎2)-2(1◎a)&=(a\sqrt{3}-2)-2(\sqrt{3}-a)\\&=a\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}+2a\\&=(a-2)\sqrt{3}-2+2a\\&=b\end{aligned}$$

2nd 계산 결과가 유리수가 되려면 $a-2=0$이어야 해.
이때, a, b는 모두 유리수이므로
$a-2=0$에서 $a=2$이고 $b=-2+2\times2=2$야.

$$\begin{aligned}\therefore\ 2b◎\sqrt{3}a&=4◎2\sqrt{3}\\&=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

127 답 $2+\sqrt{2}$

1st 연산 기호 ★의 정의를 이용하여 식을 전개해 보자.

$$\begin{aligned}(a★3)-(1★a)&=\{(a+3)-3\sqrt{2}\}-\{(1+a)-a\sqrt{2}\}\\&=a+3-3\sqrt{2}-1-a+a\sqrt{2}\\&=2-(3-a)\sqrt{2}\\&=b\end{aligned}$$

2nd 계산 결과가 유리수가 되려면 $3-a=0$이어야 해.
이때, a, b는 모두 유리수이므로
$3-a=0$에서 $a=3$이고 $b=2$야.

$$\begin{aligned}\therefore\ a\sqrt{2}★b&=3\sqrt{2}★2\\&=(3\sqrt{2}+2)-2\sqrt{2}\\&=2+\sqrt{2}\end{aligned}$$

128 답 12

1st 좌변을 우변과 같은 모양으로 바꿔야 해.

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{5}}-\sqrt{2}(2+\sqrt{10})\\&=\frac{(\sqrt{10}-3)\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\sqrt{2}(2+\sqrt{10})\\&=\frac{5\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{5}-2\sqrt{2}-2\sqrt{5}\\&=-\sqrt{2}-\frac{13\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

2nd A, B가 유리수라는 것을 이용하면 A, B의 값을 구할 수 있어.
이것이 $A\sqrt{2}+B\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$A=-1$, $B=-\frac{13}{5}$

$\therefore\ A-5B=-1-5\times\left(-\frac{13}{5}\right)=12$

오답피하기

이 문제의 핵심은 제곱근이 포함된 식을 간단하게 바꾸는 거야.
분모의 유리화 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$에서 실수하는 경우가 많으니까 주의해야 해.
여기서 A, B가 유리수라는 조건이 없다면 어떻게 될까?
$A\sqrt{2}=-\frac{13\sqrt{5}}{5}$이면 $A=-\frac{13\sqrt{10}}{10}$
$B\sqrt{5}=-\sqrt{2}$이면 $B=-\frac{\sqrt{10}}{5}$
이렇게 A, B가 다르게 나올 수 있어.
그래서 A, B가 유리수라는 조건이 꼭 필요해.

129 답 $\frac{190}{3}$

1st 좌변을 우변과 같은 모양으로 바꿔야 해.

$$\begin{aligned}&(5\sqrt{3}+2)\div\sqrt{3}-\sqrt{7}(2+\sqrt{21})\\&=5+\frac{2\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{7}-7\sqrt{3}\\&=-\frac{19\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{7}+5\end{aligned}$$

2nd A, B, C가 유리수라는 것을 이용하면 A, B, C의 값을 구할 수 있지?
이것이 $A\sqrt{3}+B\sqrt{7}+C$이어야 하고, A, B, C가 유리수이니까

$A=-\frac{19}{3}$, $B=-2$, $C=5$

$\therefore\ ABC=\left(-\frac{19}{3}\right)\times(-2)\times5=\frac{190}{3}$

130 답 ③

1st 주어진 표의 제곱근의 값을 이용하기 위해 11.43을 적절한 두 수의 곱의 꼴로 나타내 보자.
주어진 표는 1.10부터 1.37까지의 제곱근의 값의 일부만 나타나 있지?
11.43을 적절한 두 수의 곱의 꼴로 바꾸면 $11.43=9\times1.27$

2nd 양수 a에 대하여 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$임을 이용하여 $\sqrt{11.43}$의 값을 구하자.

$\therefore\ \sqrt{11.43}=\sqrt{9\times1.27}=3\sqrt{1.27}=3\times1.127=3.381$

오답피하기

이런 유형의 문제는 주어진 수를 적절하게 바꾸는 능력이 있어야 풀 수 있어. 그런데 쉽지 않지?
문제를 푸는 열쇠는 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$를 이용하는 데 있어.
즉, 11.43을 어떤 제곱인 수와 주어진 표의 수를 곱한 값으로 만들어야 $\sqrt{11.43}$의 값이 나오는지 이해해야 해.
이 정도는 알고 있어야 이 문제를 푸는 열쇠를 찾았다고 볼 수 있어. 이 문제를 통해 알 수 있는 것은 주어진 표에 있는 값 외에도 주어진 표의 값에 제곱인 수를 곱한 값들은 얼마든지 제곱근의 값을 구할 수 있다는 거야. 이런 발상을 하는 것이 쉽지 않지만 한 번 정확히 풀면 나중에 비슷한 유형들을 풀 때 당황해하지 않을 거야.

131 답 ①

1st 주어진 표의 제곱근의 값을 이용하기 위해 452를 적절한 두 수의 곱의 꼴로 나타내 보자.
주어진 표는 1.10부터 1.37까지의 제곱근의 값의 일부만 나타나 있지?
452를 적절한 곱의 꼴로 바꾸면 $452=4\times113=4\times100\times1.13$

2nd $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$임을 이용하여 $\sqrt{452}$의 값을 구하자.

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt{452}&=\sqrt{4\times100\times1.13}=20\sqrt{1.13}\\&=20\times1.063=21.26\end{aligned}$$

132 답 0.1584

1st 양수 x에 대하여 $x^2=a$를 만족하면 $x=\sqrt{a}$가 되겠지?
$1.584^2=2.51$에서 $1.584=\sqrt{2.51}$임을 알 수 있지?

2nd 구하는 수를 $\sqrt{2.51}$의 값을 이용할 수 있게 나타내 보자.

$\therefore\ \sqrt{0.0251}=\sqrt{\frac{2.51}{100}}=\frac{\sqrt{2.51}}{10}=\frac{1}{10}\times1.584=0.1584$

오답피하기

보통 $\sqrt{2.51}=1.584$로 주어지고 $\sqrt{0.0251}$의 값을 구하라고 하면 아마 쉽게 구할 수 있었을 거야.
그런데 이 문제는 제곱이 주어지고 제곱과 제곱근의 관계를 이용하여 그것을 추론해야 하지? 개념만 확실히 알고 있다면 어렵지 않게 풀 수 있지만 이런 것을 제대로 파악하지 못했다면 어려웠을 거야.
제곱과 제곱근의 관계처럼 쌍으로 생각해야 하는 것이 수학에서는 무척 많아. 예를 들어, 어떤 수와 그 수의 역수 관계 등은 어느 조건 하나가 주어지고 둘 사이의 관계를 이용하여 다른 조건을 찾아야 되는 경우가 많아. 이것을 숨겨진 조건이라고 하지. 이것을 정확히 알고 있으면 숨겨진 조건으로 문제를 쉽게 풀 수 있어.

133 답 3.8175

1st 제곱과 제곱근의 관계를 기억하자.
$1.414^2=2$에서 $\sqrt{2}=1.414$이고, $1.732^2=3$에서 $\sqrt{3}=1.732$이지?
2nd 분모의 유리화를 잊으면 안 돼.
$\therefore \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}+2\sqrt{3}$
$=\frac{1.414}{4}+2\times1.732=0.3535+3.464=3.8175$

134 답 $32\sqrt{7}$

1st 넓이가 k인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{k}$야.
세 정사각형의 한 변의 길이를 각각 a, b, $c(a<b<c)$라 하면
$a^2=28$에서 $a=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$
$b^2=112$에서 $b=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$
$c^2=175$에서 $c=\sqrt{175}=5\sqrt{7}$
2nd 구하는 도형의 둘레의 길이를 a, b, c로 나타내 봐.
도형의 둘레의 길이는 $2a+2b+4c$이므로
$2a+2b+4c=2\times2\sqrt{7}+2\times4\sqrt{7}+4\times5\sqrt{7}$
$=4\sqrt{7}+8\sqrt{7}+20\sqrt{7}$
$=32\sqrt{7}$

135 답 $9\sqrt{3}$

1st 넓이가 k인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{k}$야.
넓이가 48, 12, 3인 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각
$\sqrt{48}=4\sqrt{3}$, $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$
2nd $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 길이를 각각 구해 보자.
$\overline{AB}=4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$
$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}=6\sqrt{3}+3\sqrt{3}$
$=9\sqrt{3}$

136 답 $3\sqrt{3}-5$

1st 무리수는 정수 부분과 소수 부분으로 나뉘지?
$8<\sqrt{75}<9$이므로 $\sqrt{75}$의 정수 부분은 8이고
소수 부분은 $\sqrt{75}-8$이야.
$\therefore f(75)=\sqrt{75}-8$
$3<\sqrt{12}<4$이므로 $\sqrt{12}$의 정수 부분은 3이고
소수 부분은 $\sqrt{12}-3$이야.
$\therefore f(12)=\sqrt{12}-3$
2nd $f(75)-f(12)$의 값을 구해 보자.
$\therefore f(75)-f(12)=(\sqrt{75}-8)-(\sqrt{12}-3)$
$=5\sqrt{3}-8-2\sqrt{3}+3$
$=3\sqrt{3}-5$

137 답 $-\sqrt{2}+\sqrt{5}-1$

1st 무리수는 정수 부분과 소수 부분으로 나뉘지?
$4<\sqrt{18}<5$, $4<\sqrt{20}<5$이므로
$\sqrt{18}$과 $\sqrt{20}$의 정수 부분은 4이고
소수 부분은 각각 $\sqrt{18}-4$, $\sqrt{20}-4$야.
$\therefore f(18)=\sqrt{18}-4$, $f(20)=\sqrt{20}-4$
$5<\sqrt{32}<6$이므로 $\sqrt{32}$의 정수 부분은 5이고
소수 부분은 $\sqrt{32}-5$야.
$\therefore f(32)=\sqrt{32}-5$
$6<\sqrt{45}<7$이므로 $\sqrt{45}$의 정수 부분은 6이고
소수 부분은 $\sqrt{45}-6$이야. $\therefore f(45)=\sqrt{45}-6$
2nd 주어진 식에 대입하여 값을 구해 보자.
$\therefore f(18)-f(20)-f(32)+f(45)$
$=(\sqrt{18}-4)-(\sqrt{20}-4)-(\sqrt{32}-5)+(\sqrt{45}-6)$
$=3\sqrt{2}-4-2\sqrt{5}+4-4\sqrt{2}+5+3\sqrt{5}-6$
$=-\sqrt{2}+\sqrt{5}-1$

138 답 $24\sqrt{5}\pi$ cm³

1st 밑면인 원의 반지름의 길이를 구해야겠지?
원기둥의 옆면인 직사각형의 가로의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 밑면인 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면
$2\pi r=4\sqrt{3}\pi$
$\therefore r=2\sqrt{3}$
2nd 원기둥의 부피를 구하자.
따라서 원기둥의 부피는
$\pi\times(2\sqrt{3})^2\times2\sqrt{5}=24\sqrt{5}\pi(\text{cm}^3)$

139 답 $(18+12\sqrt{14})\pi$ cm²

1st 밑면인 원의 반지름의 길이를 구해야겠지?
원뿔의 옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 밑면인 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면
$2\pi r=6\sqrt{2}\pi$
$\therefore r=3\sqrt{2}$
2nd 원뿔의 겉넓이를 구하자.
따라서 원뿔의 겉넓이는
$\pi\times(3\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\times4\sqrt{7}\times6\sqrt{2}\pi=(18+12\sqrt{14})\pi(\text{cm}^2)$

140 답 $2\sqrt{10}-6$

1st 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$의 길이를 구하면 p, q의 값을 구할 수 있어.
정사각형 ABCD에서 두 변 AB와 AD의 길이는 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 1, 3인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같아.
따라서 피타고라스 정리에 의해
$\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$
따라서 $\overline{AP}=\overline{AB}$, $\overline{AQ}=\overline{AD}$이므로 점 P에 대응하는 수 p는
$p=3+\sqrt{10}$, 점 Q에 대응하는 수 q는 $q=3-\sqrt{10}$이야.
2nd $p-q$를 간단히 하고, 무리수는 정수 부분과 소수 부분으로 나뉘는 것을 이용하여 구해 보자.
$p-q=(3+\sqrt{10})-(3-\sqrt{10})=2\sqrt{10}$
따라서 $6<2\sqrt{10}=\sqrt{40}<7$에서 $p-q$의 정수 부분은 6이므로
$p-q$의 소수 부분은 $2\sqrt{10}-6$이야.

141 답 $2\sqrt{2}-2$

1st 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{BD}$, $\overline{GE}$의 길이를 구하면 p, q의 값을 구할 수 있어.
$\triangle BCD$와 $\triangle FGE$는 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 2, 2인 직각이등변삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{BD}=\overline{GE}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
즉, 점 P에 대응하는 수 p는 $p=0+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$, 점 Q에 대응하는 수 q는 $q=8-2\sqrt{2}$야.

2nd $\frac{q}{p}$를 간단히 하고, 무리수는 정수 부분과 소수 부분으로 나뉘는 것을 이용하여 구해 보자.

$$\frac{q}{p}=\frac{8-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{(8-2\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}-4}{4}=2\sqrt{2}-1$$

이때, $2<2\sqrt{2}=\sqrt{8}<3$에서 $1<2\sqrt{2}-1<2$이므로
$\frac{q}{p}$의 정수 부분은 1이야.
따라서 $\frac{q}{p}$의 소수 부분은 $(2\sqrt{2}-1)-1=2\sqrt{2}-2$야.

서술형 다지기

p. 46

[142-143 채점기준표]

Ⅰ	a의 값을 구한다.	30%
Ⅱ	b의 값을 구한다.	30%
Ⅲ	$\sqrt{ab}$의 값을 구한다.	40%

142 답 $7\sqrt{10}$

먼저, a의 값을 구하자.
$\sqrt{980}=\sqrt{196\times5}=\sqrt{14^2\times5}=14\sqrt{5}$
$\therefore a=14$ … Ⅰ
그다음, b의 값을 구하자.
$\sqrt{2450}=\sqrt{1225\times2}=\sqrt{35^2\times2}=35\sqrt{2}$
$\therefore b=35$ … Ⅱ
그래서, $\sqrt{ab}$의 값을 구하자.
$\therefore \sqrt{ab}=\sqrt{14\times35}=\sqrt{2\times5\times7^2}=7\sqrt{10}$ … Ⅲ

143 답 $5\sqrt{2}$

먼저, a의 값을 구하자.
$\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=5\sqrt{3}$
$\therefore a=5$ … Ⅰ
그다음, b의 값을 구하자.
$\sqrt{200}=\sqrt{100\times2}=10\sqrt{2}$
$\therefore b=10$ … Ⅱ
그래서, $\sqrt{ab}$의 값을 구하자.
$\therefore \sqrt{ab}=\sqrt{5\times10}=5\sqrt{2}$ … Ⅲ

[144-145 채점기준표]

Ⅰ	나눗셈을 곱셈으로 바꾼다.	40%
Ⅱ	약분을 하거나 유리화를 한다.	20%
Ⅲ	계산하여 답을 구한다.	40%

144 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

먼저, 나눗셈을 곱셈으로 바꾸자.
$\sqrt{6}\div\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{9}{\sqrt{18}}+\frac{4}{3\sqrt{2}}$
$=\sqrt{6}\times\frac{4}{3\sqrt{3}}-\frac{9}{3\sqrt{2}}+\frac{4}{3\sqrt{2}}$ … Ⅰ
그다음, 약분을 하거나 분모를 유리화하자.
$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$ … Ⅱ
그래서, 계산하자.
$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$=\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ … Ⅲ

145 답 $\frac{13\sqrt{6}}{18}$

먼저, 나눗셈을 곱셈으로 바꾸자.
$\sqrt{8}\div\frac{3\sqrt{3}}{4}-\sqrt{18}\div6\sqrt{3}$
$=2\sqrt{2}\times\frac{4}{3\sqrt{3}}-\sqrt{18}\times\frac{1}{6\sqrt{3}}$ … Ⅰ
그다음, 약분을 하거나 분모를 유리화하자.
$=\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{6}$
$=\frac{8\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{6}$ … Ⅱ
그래서, 계산하자.
$=\frac{8\sqrt{6}}{9}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{13\sqrt{6}}{18}$ … Ⅲ

146 답 $\frac{1}{50}$

$\sqrt{0.004}=\sqrt{\frac{4}{1000}}=\frac{2}{10\sqrt{10}}=\frac{1}{5\sqrt{10}}$ … Ⅰ
$=\frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{50}$ … Ⅱ
$\therefore x=\frac{1}{50}$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	소수를 분수로 고친다.	40%
Ⅱ	분모를 유리화한다.	40%
Ⅲ	x의 값을 구한다.	20%

147 답 3

$\sqrt{2}(\sqrt{12}+2\sqrt{2})-\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{18}-\sqrt{2})=\sqrt{24}+4-a\sqrt{6}+\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
$=2\sqrt{6}+4-a\sqrt{6}+\frac{a}{3}\sqrt{6}$
$=\left(2-\frac{2}{3}a\right)\sqrt{6}+4$ … Ⅰ

주어진 식이 유리수가 되려면

$\left(2-\frac{2}{3}a\right)\sqrt{6}=0$이 되어야 한다. … Ⅱ

$2-\frac{2}{3}a=0 \qquad \therefore a=3$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 식을 간단히 한다.	40%
Ⅱ	간단히 한 결과가 유리수가 될 조건을 찾는다.	30%
Ⅲ	a의 값을 구한다.	30%

148 답 $7\sqrt{6}$

$a\sqrt{\frac{12b}{a}}+b\sqrt{\frac{75a}{b}}=\sqrt{a^2\times\frac{12b}{a}}+\sqrt{b^2\times\frac{75a}{b}}$ … Ⅰ

$=\sqrt{12ab}+\sqrt{75ab}$ … Ⅱ

$=\sqrt{12\times2}+\sqrt{75\times2}$

$=2\sqrt{6}+5\sqrt{6}=7\sqrt{6}$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	근호 밖의 a, b를 근호 안으로 넣는다.	40%
Ⅱ	제곱근 안의 식을 간단히 한다.	30%
Ⅲ	ab의 값을 대입하여 식의 값을 구한다.	30%

149 답 $12+15\sqrt{2}+12\sqrt{3}$

삼각기둥의 높이를 h라 하면 부피가 $6\sqrt{6}$이므로

$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times h$

$\therefore h=12\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ … Ⅰ

따라서 삼각기둥의 겉넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}\right)+(\sqrt{3}+3+\sqrt{6})\times4\sqrt{3}$ … Ⅱ

$=\sqrt{18}+12+12\sqrt{3}+4\sqrt{18}$

$=3\sqrt{2}+12+12\sqrt{3}+12\sqrt{2}$

$=12+15\sqrt{2}+12\sqrt{3}$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	삼각기둥의 높이를 구한다.	40%
Ⅱ	삼각기둥의 겉넓이를 구하는 식을 세운다.	20%
Ⅲ	겉넓이를 구한다.	40%

150 답 $A<B<C$

$A-B=2(\sqrt{2}+\sqrt{7})-(2\sqrt{7}+3)$

$=2\sqrt{2}+2\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3$

$=2\sqrt{2}-3$

$=\sqrt{8}-\sqrt{9}<0$

$\therefore A<B$ … Ⅰ

$B-C=(2\sqrt{7}+3)-(\sqrt{32}+3)$

$=2\sqrt{7}+3-\sqrt{32}-3$

$=2\sqrt{7}-\sqrt{32}$

$=\sqrt{28}-\sqrt{32}<0$

$\therefore B<C$ … Ⅱ

$\therefore A<B<C$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	A와 B의 대소를 비교한다.	40%
Ⅱ	B와 C의 대소를 비교한다.	40%
Ⅲ	A, B, C의 대소를 비교한다.	20%

151 답 $(40\sqrt{3}+16\sqrt{2})\text{ cm}^3$

(처음 직육면체의 부피)$=3\sqrt{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$=24\sqrt{3}(\text{cm}^3)$ … Ⅰ

(새로 만든 직육면체의 부피)

$=(3\sqrt{2}+\sqrt{2})\times(4\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{2}+\sqrt{2})$

$=4\sqrt{2}\times(4\sqrt{3}+\sqrt{2})\times2\sqrt{2}$

$=16(4\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$=64\sqrt{3}+16\sqrt{2}(\text{cm}^3)$ … Ⅱ

$\therefore$ (새로 만든 직육면체의 부피)$-$(처음 직육면체의 부피)

$=(64\sqrt{3}+16\sqrt{2})-24\sqrt{3}=40\sqrt{3}+16\sqrt{2}(\text{cm}^3)$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	처음의 직육면체의 부피를 구한다.	40%
Ⅱ	새로 만든 직육면체의 부피를 구한다.	40%
Ⅲ	두 직육면체의 부피의 차를 구한다.	20%

최고난도 만점 문제

p. 48

152 답 ③

1st 원의 넓이는 $\pi\times$(반지름의 길이)^{2}임을 이용하자.

세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2, r_3이므로 넓이를 구하면 πr_1^2, πr_2^2, πr_3^2이지?

2nd $A:B=a:b$이고 $B:C=s:t$이면 $A:B:C=as:bs:bt$임을 이용하자.

두 원 C_2와 C_1의 넓이의 비가 $2:1$이므로

$\pi r_2^2:\pi r_1^2=2:1=6:3$

또, 두 원 C_3과 C_2의 넓이의 비가 $4:3$이므로

$\pi r_3^2:\pi r_2^2=4:3=8:6$

$\therefore \pi r_3^2:\pi r_2^2:\pi r_1^2=8:6:3$

즉, $\pi r_3^2=8k$, $\pi r_2^2=6k$, $\pi r_1^2=3k$(단, $k>0$)로 놓을 수 있어.

3rd 색칠한 부분의 넓이가 24π임을 이용하여 k의 값을 구하자.

색칠한 부분의 넓이는 원 C_2의 넓이에서 원 C_1의 넓이를 뺀 것이므로 $\pi r_2^2-\pi r_1^2=3k$, 즉 $3k=24\pi$

$\therefore k=8\pi$

따라서 $\pi r_3^2=8k=8\times8\pi=64\pi$이므로

$r_3^2=64$

$\therefore r_3=\sqrt{64}=8$

153 답 $-\frac{2}{7}$

1st 연산 ⊙을 이용하여 주어진 식을 정리해 보자.

두 유리수 x, y에 대하여 $x\odot y=\sqrt{3}x-y$로 약속되어 있으므로

좌변부터 정리하면

$\{(x\odot3y)\odot y\}+1=\{(\sqrt{3}x-3y)\odot y\}+1$

$=\sqrt{3}(\sqrt{3}x-3y)-y+1$

$=3x-3\sqrt{3}y-y+1$

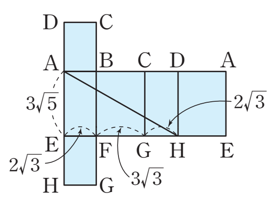
이고 우변은 $x\odot3y=\sqrt{3}x-3y$

2nd 위에서 구한 식을 정리해 보자.
(좌변)=(우변)이므로
$3x-3\sqrt{3}y-y+1=\sqrt{3}x-3y$
이 식을 $\sqrt{3}$에 대한 식으로 정리하면
$(3x+2y+1)-(x+3y)\sqrt{3}=0$
x, y가 유리수이므로 위의 등식이 성립하려면
$\begin{cases} 3x+2y+1=0\text{에서 } 3x+2y=-1 & \cdots ㉠ \\ x+3y=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

3rd 연립방정식을 풀어 보자.
㉠−㉡×3을 하면
$-7y=-1 \quad \therefore y=\frac{1}{7}$
$y=\frac{1}{7}$을 ㉡에 대입하면 $x=-\frac{3}{7}$
$\therefore x+y=-\frac{3}{7}+\frac{1}{7}=-\frac{2}{7}$

154 답 $8\sqrt{3}$

1st 직육면체의 전개도를 그리자.
직육면체의 전개도를 그리면 그림과 같아.



2nd 최단 거리는 직선 거리야.
이때, 직육면체의 꼭짓점 A에서 겉면을 따라 이동하여 점 H에 이르는 최단 거리는 전개도에서 점 A와 점 H를 잇는 선분의 길이와 같아.
$\overline{AE}=3\sqrt{5}$, $\overline{EH}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=7\sqrt{3}$이므로
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2+(7\sqrt{3})^2}=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$
따라서 최단 거리는 $8\sqrt{3}$이야.

오답피하기

문제에서 주어진 대로 입체도형에서 생각하거나, 자칫 전개도를 잘못 그리면 틀릴 수 있는 문제야. 전개도를 그릴 때, 꼭짓점이 어디에 있는지 잘 살펴보고 그리도록 해. 또, 꼭짓점 A에서 출발해 어디를 지나 점 H에 이르는 건지도 잘 살펴봐.

155 답 6

1st $f(x)$에 x 대신 1, 2, 3, 4, …를 대입해 보자.
$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$로 약속되었지?
x 대신 1, 2, 3, 4, …를 대입하면
$f(1)=\sqrt{2}-\sqrt{1}$, $f(2)=\sqrt{3}-\sqrt{2}$
$f(3)=\sqrt{4}-\sqrt{3}$, $f(4)=\sqrt{5}-\sqrt{4}$

2nd $f(x)$의 합의 규칙을 찾자.
$f(1)+f(2)=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{3}-1$
$f(1)+f(2)+f(3)=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$
$=\sqrt{4}-1$
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})$
$=\sqrt{5}-1$
이제 규칙이 보이지?
즉, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(x)=\sqrt{x+1}-1$이므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)=\sqrt{49}-1=7-1=6$

오답피하기

이 문제는 겉으로는 어렵게 보여도 실제로 규칙만 찾으면 어렵지 않게 풀 수 있어. 특히, 약속된 부분이 새로운 문제는 약속된 부분을 나열해 보면 규칙이 보이는 경우가 대부분이야.
이런 유형의 문제는 수학 전반에 걸쳐 비슷하게 적용되니까 새롭게 정의된 것은 정의된 대로 나열해 보면 규칙을 찾을 수 있을 거야.

156 답 ④

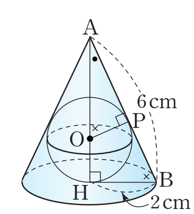
1st 먼저 x, y의 값의 범위부터 구해 보자.
$\sqrt{x}$의 정수 부분이 5이므로 $5\le\sqrt{x}<6$이지?
즉, $25\le x<36$에서 자연수 x는 25, 26, …, 35야.
또한, $\sqrt{y}$의 정수 부분이 8이므로 $8\le\sqrt{y}<9$야.
즉, $64\le y<81$에서 자연수 y는 64, 65, …, 80이지.

2nd $\sqrt{y-x}$의 정수 부분이 최대가 되려면 x, y는 어떤 값을 가져야 할까?
이때, $\sqrt{y-x}$의 정수 부분이 최대가 되려면 $\sqrt{y-x}$의 값이 최대가 되어야겠지?
즉, y의 값은 최대이고 x의 값은 최소일 때 $\sqrt{y-x}$가 최댓값을 가지므로 $\sqrt{y-x}$의 최댓값은 $\sqrt{80-25}=\sqrt{55}$야.
따라서 $7=\sqrt{49}<\sqrt{55}<\sqrt{64}=8$이므로 $\sqrt{y-x}$의 정수 부분의 최댓값은 7이야.

157 답 ②

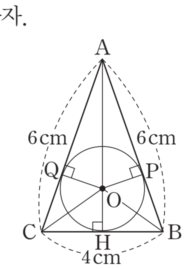
1st 피타고라스 정리를 이용해 $\overline{AH}$의 길이를 구해.
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$(cm)

2nd 닮음인 두 삼각형을 찾아 닮음비를 이용하여 구의 반지름의 길이를 구하자.



점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 P라 하자.
이때, △AHB와 △APO에서
∠A는 공통이고, ∠AHB=∠APO=90°
이므로 △AHB∽△APO (AA 닮음)
구의 반지름의 길이를 r cm라 하면
$\overline{AB}:\overline{BH}=\overline{AO}:\overline{OP}$
$6:2=(4\sqrt{2}-r):r$
$6r=8\sqrt{2}-2r$, $8r=8\sqrt{2} \quad \therefore r=\sqrt{2}$
따라서 구의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ cm이므로 구의 겉넓이는
$4\pi r^2=4\pi\times(\sqrt{2})^2=8\pi(\text{cm}^2)$

[다른 풀이]
주어진 도형을 잘라 그림과 같은 단면을 생각하자.



$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$는 원 O의 접선이므로
$\overline{AB}\perp\overline{OP}$, $\overline{BC}\perp\overline{OH}$, $\overline{CA}\perp\overline{OQ}$지?
이때, $\overline{AB}=\overline{AC}=6$ cm, $\overline{BC}=4$ cm이고
원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면
△ACB의 넓이는
△ACB=△OAB+△OBC+△OCA
$=\frac{1}{2}\times6\times r+\frac{1}{2}\times4\times r+\frac{1}{2}\times6\times r$
$=8r(\text{cm}^2)$ ⋯ ㉠
또, △ACB에서 $\overline{BC}$는 밑변이고
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$(cm)는 높이이므로
△ACB$=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}(\text{cm}^2)$ ⋯ ㉡
㉠=㉡이므로 $8r=8\sqrt{2}$에서 $r=\sqrt{2}$
(이하 동일)

C 곱셈 공식

개념 체크 001~026 정답은 p. 3에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

문제편 p. 52

027 답 ③

$(2x+5y)(-3x+6y)=-6x^2+12xy-15xy+30y^2$
$=-6x^2-3xy+30y^2$

028 답 ②

$(Ax-6y)(2x+By)=2Ax^2+(AB-12)xy-6By^2$
$=10x^2+Cxy-18y^2$

따라서 $2A=10$, $AB-12=C$, $-6B=-18$이므로

$A=5$, $B=3$, $C=3$

$\therefore A+B+C=5+3+3=11$

오답피하기

이 식 같은 경우는 좌변을 전개하고 나서 각 계수를 비교하는 것이 제일 빨라. 전개하지 않고 각 계수를 하나하나 따로 계산하는 것은 오히려 식을 복잡하게 만들어서 좋지 않아.

029 답 ②

$(x+1)(x+1)(x+1)=(x^2+x+x+1)(x+1)$
$=(x^2+2x+1)(x+1)$
$=(x^2+2x+1)x+x^2+2x+1$
$=x^3+2x^2+x+x^2+2x+1$
$=x^3+3x^2+3x+1$

따라서 $A=3$, $B=3$이므로

$AB=3\times3=9$

030 답 $4a^2+5ab+12a-6b^2-9b$

(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}(4a-3b)(2a+4b+6)$
$=\frac{1}{2}(2a+4b+6)(4a-3b)$
$=(a+2b+3)(4a-3b)$
$=(a+2b+3)\times4a-(a+2b+3)\times3b$
$=4a^2+8ab+12a-3ab-6b^2-9b$
$=4a^2+5ab+12a-6b^2-9b$

031 답 ④

$(2x+5y)^2=(2x)^2+2\times2x\times5y+(5y)^2=4x^2+20xy+25y^2$

① xy의 계수는 20이야. (참)

② $(-2x-5y)^2=\{-(2x+5y)\}^2=(2x+5y)^2$ (참)

③ x^2의 계수는 4, y^2의 계수는 25이므로 그 합은 29야. (참)

④ $\left(x+\frac{5}{2}y\right)^2=\left\{\frac{1}{2}(2x+5y)\right\}^2=\frac{1}{4}(2x+5y)^2$

따라서 $\left(x+\frac{5}{2}y\right)^2$은 $(2x+5y)^2$의 $\frac{1}{4}$배야. (거짓)

⑤ 전개하여 식을 정리하면 항은 3개지? (참)

032 답 ③

$(2x+3y)^2+4(x+2y)^2$
$=(2x)^2+2\times2x\times3y+(3y)^2+4\{x^2+2\times x\times2y+(2y)^2\}$
$=4x^2+12xy+9y^2+4(x^2+4xy+4y^2)$
$=4x^2+12xy+9y^2+4x^2+16xy+16y^2$
$=8x^2+28xy+25y^2$

033 답 4

$(2x+4y)^2=4x^2+16xy+16y^2=Ax^2+Bxy+Cy^2$이므로

$A=4$, $B=16$, $C=16$

$\therefore \frac{AB}{C}=\frac{4\times16}{16}=4$

034 답 2

$(x+A)^2=x^2+2Ax+A^2=x^2+Bx+\frac{4}{9}$이므로

$2A=B$, $A^2=\frac{4}{9}$

따라서 $A=\frac{2}{3}$ ($\because$ A는 양수)이고 $B=\frac{4}{3}$이므로

$A+B=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2$

035 답 ③

$(2x+1)^4=\{(2x+1)^2\}^2=(4x^2+4x+1)^2$
$=(4x^2+4x+1)(4x^2+4x+1)$
$=(4x^2+4x+1)\times4x^2+(4x^2+4x+1)\times4x$
$+(4x^2+4x+1)\times1$
$=16x^4+16x^3+4x^2+16x^3+16x^2+4x+4x^2+4x+1$
$=16x^4+32x^3+24x^2+8x+1$

따라서 x^2의 계수는 24야.

오답피하기

복잡하게 전개할 필요 없이 x^2의 계수만 빨리 간단하게 구할 수 있는 방법이 있어.

$(2x+1)^4=(4x^2+4x+1)^2=\{4x^2+(4x+1)\}^2$
$=(4x^2)^2+2\times4x^2\times(4x+1)+(4x+1)^2$

여기서 첫째 항에서는 x^2의 항이 나오지 않고, 둘째 항에서는 $2\times4x^2=8x^2$이 나오고, 셋째 항에서는 $(4x)^2=16x^2$이 나오므로 결국 $8+16=24$가 x^2의 계수야.

036 답 ③

$(3x-y)^2=(3x)^2-2\times3x\times y+y^2=9x^2-6xy+y^2$

① $(3x+y)^2=(3x)^2+2\times3x\times y+y^2=9x^2+6xy+y^2$

② $(-3x-y)^2=(-3x)^2-2\times(-3x)\times y+y^2$
$=9x^2+6xy+y^2$

③ $(-3x+y)^2=(-3x)^2+2\times(-3x)\times y+y^2$
$=9x^2-6xy+y^2$

④ $-(3x-y)^2=-\{(3x)^2-2\times3x\times y+y^2\}$
$=-(9x^2-6xy+y^2)=-9x^2+6xy-y^2$

⑤ $-(-3x+y)^2=-\{(-3x)^2+2\times(-3x)\times y+y^2\}$
$=-(9x^2-6xy+y^2)=-9x^2+6xy-y^2$

따라서 주어진 식과 같은 것은 ③이야.

오|답|피|하|기

이 문제에서는 $(-1)^2=1$이라는 특성을 잘 이용하면 아주 간단하게 풀 수 있어. 주어진 선택지의 식을 전부 다 전개해서 원래 식과 비교하려면 시간도 너무 많이 걸리고 정확도도 떨어질 수 있어. 그러기보다는 $(3x-y)^2$의 괄호 안에 -1을 곱해주면 문제가 해결돼. 제곱 안에 -1이 들어가면 어차피 1이 되니까 제곱하면 값은 똑같이 나와. 괄호 안에 -1을 곱해주면 $(-3x+y)^2$이 되지? 이제 이 식을 선택지에서 찾으면 답은 ③번!

037 답 ③

$(6x-5)^2=(6x)^2-2\times6x\times5+5^2=36x^2-60x+25$

따라서 $A=36$, $B=-60$, $C=25$이므로

$A-B+C=36-(-60)+25=121$

038 답 ④

$(Ax-B)^2=(Ax)^2-2\times Ax\times B+B^2$

$=A^2x^2-2ABx+B^2$

이것이 $\frac{1}{4}x^2-Cx+\frac{1}{9}$이므로

$A^2=\frac{1}{4}$, $2AB=C$, $B^2=\frac{1}{9}$

따라서 $A=\frac{1}{2}$ $(\because A>0)$, $B=\frac{1}{3}$ $(\because B>0)$, $C=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{AB}{C}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\div\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

039 답 $25a^2-30a+9$

한 변의 길이가 x인 정사각형의 넓이는 x^2이지?

따라서 한 변의 길이가 $5a-3$인 정사각형의 넓이는

$(5a-3)^2=(5a)^2-2\times5a\times3+3^2=25a^2-30a+9$

040 답 ④

$(2a+b)(2a-b)=(2a)^2-b^2=4a^2-b^2$

041 답 a^2-36

$(-a+6)(-a-6)=(-a)^2-6^2=a^2-36$

042 답 ①

ㄱ. $(x-y)(-x-y)=-(x-y)(x+y)$

$=-(x^2-y^2)=-x^2+y^2$ (참)

ㄴ. $(-2a+3b)(-2a-3b)=(-2a)^2-(3b)^2$

$=4a^2-9b^2$ (거짓)

ㄷ. $\left(\frac{2}{5}x+y\right)\left(\frac{2}{5}x-y\right)=\left(\frac{2}{5}x\right)^2-y^2$

$=\frac{4}{25}x^2-y^2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이야.

043 답 33

$(7-4x)(4x+7)=-(4x-7)(4x+7)$

$=-(16x^2-49)=-16x^2+49$

따라서 x^2의 계수는 -16, 상수항은 49이므로

구하는 합은 $-16+49=33$이야.

044 답 x^8-256

$(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)=(x^2-4)(x^2+4)(x^4+16)$

$=(x^4-16)(x^4+16)$

$=(x^4)^2-16^2$

$=x^8-256$

045 답 ①

$(x+3y)(x-4y)=x^2+\{3+(-4)\}xy-12y^2=x^2-xy-12y^2$

따라서 xy의 계수는 -1, y^2의 계수는 -12이므로

그 합은 -13이야.

046 답 ①

$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)=x^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)x-\frac{1}{10}$

$=x^2-\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}=x^2+Ax+B$

따라서 $A=-\frac{3}{10}$, $B=-\frac{1}{10}$이므로

$A+B=-\frac{3}{10}+\left(-\frac{1}{10}\right)=-\frac{4}{10}=-\frac{2}{5}$

047 답 ⑤

$(x+5y)(x+\square y)=x^2+(5+\square)xy+5\times\square y^2$이고

이 식이 $x^2+9xy+\square y^2$과 같으므로

$5+\square=9$에서 첫 번째 $\square$ 안의 수는 4야.

$\therefore (x+5y)(x+4y)=x^2+(5+4)xy+20y^2$

$=x^2+9xy+\square y^2$

따라서 두 번째 $\square$ 안의 수는 20이므로

두 수의 합은 $4+20=24$야.

048 답 38

$(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)$

$=x^2+(1+2)x+2+x^2+(2+3)x+6+x^2+(3+4)x+12$

$=x^2+3x+2+x^2+5x+6+x^2+7x+12$

$=3x^2+15x+20=Ax^2+Bx+C$

따라서 $A=3$, $B=15$, $C=20$이므로

$A+B+C=3+15+20=38$

[다른 풀이]

$(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)$

$=Ax^2+Bx+C$

는 x에 대한 항등식이므로 x 대신 1을 대입해도 성립하지?

$\therefore A+B+C=(1+1)(1+2)+(1+2)(1+3)+(1+3)(1+4)$

$=6+12+20=38$

049 답 ③

$(3x-1)(x+2)=3x^2+(6-1)x-2=3x^2+5x-2$

050 답 ①

$\left(\frac{2}{5}x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{2}x^2+\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\right)x-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{5}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{1}{3}$

따라서 x의 계수는 $-\frac{4}{5}$야.

C

051 답 ①

$(-2x+A)(Bx+1)=-2Bx^2+(-2+AB)x+A$

이것이 $-6x^2-5x-1$이므로 x의 계수만 비교하면

$-2+AB=-5$

$\therefore AB=-3$

[다른 풀이]

$(-2x+A)(Bx+1)=-2Bx^2+(-2+AB)x+A$

$=-6x^2-5x-1$

이때, $-2B=-6$, $A=-1$이므로 $A=-1$, $B=3$

$\therefore AB=-3$

052 답 ②

$(2A-3B)(A+2B)$

$=2A^2+AB-6B^2$

$=2(3x+1)^2+(3x+1)(2x+4)-6(2x+4)^2$

$=2(9x^2+6x+1)+(6x^2+14x+4)-6(4x^2+16x+16)$

$=18x^2+12x+2+6x^2+14x+4-24x^2-96x-96$

$=-70x-90$

[다른 풀이]

$(2A-3B)(A+2B)$에 $A=3x+1$, $B=2x+4$를 대입하면

$\{2(3x+1)-3(2x+4)\}\{3x+1+2(2x+4)\}$

$=(6x+2-6x-12)(3x+1+4x+8)$

$=-10(7x+9)$

$=-70x-90$

053 답 ③

① $(3x+4)^2=(3x)^2+2\times3x\times4+4^2$

$=9x^2+24x+16$ (참)

② $(2x-1)^2=(2x)^2-2\times2x\times1+1^2$

$=4x^2-4x+1$ (참)

③ $(x+1)(x-1)(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)$

$=(x^2)^2-1^2$

$=x^4-1$ (거짓)

④ $(-3x+5)(5x+6)=-15x^2+(-18+25)x+30$

$=-15x^2+7x+30$ (참)

⑤ $(2a+3b)(5a-4b)=10a^2+(-8+15)ab-12b^2$

$=10a^2+7ab-12b^2$ (참)

054 답 ③

$(-3x+8)^2+(-3x-8)^2=\{-(3x-8)\}^2+\{-(3x+8)\}^2$

$=(3x-8)^2+(3x+8)^2$

$=9x^2-48x+64+9x^2+48x+64$

$=18x^2+128$

055 답 -1

$3(x-a)^2-(2x+1)(x+b)$

$=3(x^2-2ax+a^2)-\{2x^2+(2b+1)x+b\}$

$=3x^2-6ax+3a^2-2x^2-(2b+1)x-b$

$=x^2-(6a+2b+1)x+3a^2-b$

이때, x의 계수가 0이므로

$6a+2b+1=0$

$\therefore 6a+2b=-1$

056 답 5

$(-x+2y)^2=(-x)^2+2\times(-x)\times2y+(2y)^2$

$=x^2-4xy+4y^2$ (거짓)

$(2x+y)^2=(2x)^2+2\times2x\times y+y^2$

$=4x^2+4xy+y^2$ (참)

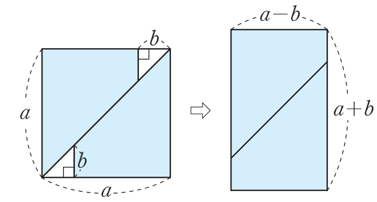
$(-3x-y)^2=(-3x)^2-2\times(-3x)\times y+y^2$

$=9x^2+6xy+y^2$ (거짓)

따라서 출력되는 값은 2, 1, 2이므로 합은 $2+1+2=5$야.

057 답 a^2-b^2

색칠한 도형만을 모으면 그림과 같아.



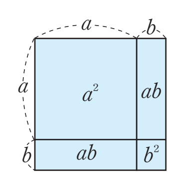
따라서 색칠한 도형의 넓이는 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$이야.

[다른 풀이]

$a\times a-\frac{1}{2}\times b\times b\times2=a^2-b^2$

058 답 ①

그림과 같이 각 도형의 넓이를 구하면

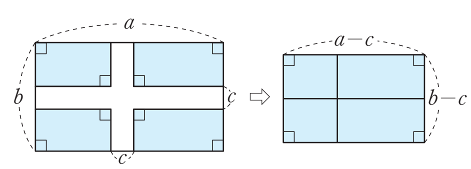


$(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2$

$=a^2+2ab+b^2$

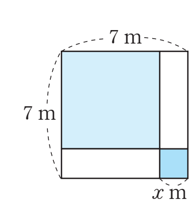
059 답 $ab-ac-bc+c^2$

그림과 같이 색칠한 도형을 붙여 보자.



따라서 색칠한 도형의 넓이는 $(a-c)(b-c)=ab-ac-bc+c^2$이야.

060 답 4 m^2



강낭콩을 심는 정사각형 모양의 땅의 한 변의 길이를 x m라 하면 나팔꽃을 심는 땅의 한 변의 길이는 $(7-x)$ m지?

이 땅의 넓이가 25 m^2이므로

$(7-x)^2=25$, $(7-x)^2=5^2$

$7-x=5$ ($\because 7-x>0$) $\quad\therefore x=2$

따라서 강낭콩을 심는 땅의 넓이는 $2\times2=4(m^2)$

061 답 ②

(색칠한 직사각형의 넓이)$=(x-3y)(x+2y)$

$=x^2+(-3y+2y)x-6y^2$

$=x^2-xy-6y^2$

062 답 ①

$\overline{FC}=x-y$이고 □GCFH가 정사각형이므로

$\overline{GC}=\overline{FC}=x-y$

$\overline{BG}=\overline{BC}-\overline{GC}=2x-(x-y)=x+y$

$$\begin{aligned}\therefore\ \square EBGH&=\overline{BG}\times\overline{HG}\\&=\overline{BG}\times\overline{FC}\\&=(x+y)(x-y)\\&=x^2-y^2\end{aligned}$$

063 답 ①

색칠한 부분의 넓이는 큰 정사각형의 넓이에서 작은 직사각형의 넓이를 뺀 값이지?

이때, 작은 직사각형의 가로의 길이는

$3a+2-(a-1)=2a+3$이고,

세로의 길이는

$3a+2-(a-5)=2a+7$이므로

(색칠한 부분의 넓이)

$=(3a+2)^2-(2a+3)(2a+7)$

$=9a^2+12a+4-\{4a^2+(14+6)a+21\}$

$=9a^2+12a+4-4a^2-20a-21$

$=5a^2-8a-17$

064 답 ②

$a-1=A$라 하면

$$\begin{aligned}(a-2b-1)(a+2b-1)&=(A-2b)(A+2b)\\&=A^2-(2b)^2\\&=A^2-4b^2\\&=(a-1)^2-4b^2\\&=a^2-2a+1-4b^2\end{aligned}$$

065 답 ⑤

$x^2-x=A$라 하면

$$\begin{aligned}(x^2-x+1)(x^2-x+3)-5&=(A+1)(A+3)-5\\&=A^2+4A+3-5\\&=A^2+4A-2\\&=(x^2-x)^2+4(x^2-x)-2\\&=x^4-2x^3+x^2+4x^2-4x-2\\&=x^4-2x^3+5x^2-4x-2\end{aligned}$$

이므로 x^2의 계수는 5이고, 상수항은 -2야.

따라서 구하는 합은 $5+(-2)=3$

066 답 5

주어진 등식의 좌변을 전개하면

$$\begin{aligned}x(x+1)(x^2+x+1)&=(x^2+x)(x^2+x+1)\\&=A(A+1)\\&=A^2+A\\&=(x^2+x)^2+(x^2+x)\\&=x^4+2x^3+x^2+x^2+x\\&=x^4+2x^3+2x^2+x\end{aligned}$$

이므로 우변의 각 항의 계수와 비교하여 상수 a, b, c의 값을 구하면 $a=2$, $b=2$, $c=1$

$\therefore\ a+b+c=2+2+1=5$

067 답 6

주어진 등식의 좌변을 전개하면

$$\begin{aligned}(A-2)^2&=A^2-4A+4\\&=(ax+by)^2-4(ax+by)+4\\&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2-4ax-4by+4\\&=a^2x^2+(2aby-4a)x+b^2y^2-4by+4\end{aligned}$$

우변의 각 항의 계수와 비교하여 상수 a, b의 값을 구하면

$a=2$, $b=3$ $\quad\therefore\ ab=2\times3=6$

068 답 ②

$$\begin{aligned}x(x-1)(x+3)(x+4)&=\{x(x+3)\}\{(x-1)(x+4)\}\\&=(x^2+3x)(x^2+3x-4)\\&=A(A-4)\\&=A^2-4A\\&=(x^2+3x)^2-4(x^2+3x)\\&=x^4+6x^3+9x^2-4x^2-12x\\&=x^4+6x^3+5x^2-12x\end{aligned}$$

따라서 x^2의 계수는 5야.

069 답 ③

$(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)$

$=\{(x-2)(x+2)\}\{(x-3)(x+3)\}$

$=(x^2-4)(x^2-9)$

$=x^4-13x^2+36$

이므로 x^3의 계수는 0, x^2의 계수는 -13이야.

따라서 구하는 합은 -13이야.

070 답 $A=x-10$, $B=x-2$, $C=x^2-8x$

$(x+2)(x-2)(x-6)(x-10)$

$=\{(x+2)(\underbrace{x-10}_{A})\}\times\{(\underbrace{x-2}_{B})(x-6)\}$

$=(\underbrace{x^2-8x}_{C}-20)(x^2-8x+12)$

$=(C-20)(C+12)$

$=C^2-8C-240$

$=(x^2-8x)^2-8(x^2-8x)-240$

$=x^4-16x^3+64x^2-8x^2+64x-240$

$=x^4-16x^3+56x^2+64x-240$

071 답 ⑤

㉠×㉣$=(x+3)(2x+5)=\underline{2x^2+11x}+15$

㉡×㉢$=(x+4)(2x+3)=\underline{2x^2+11x}+12$

이므로 두 개씩 묶어서 전개하여 생기는 공통 부분은 $2x^2+11x$야.

따라서 공통 부분의 x의 계수는 11이야.

072 답 ④

$(2\sqrt{2}-3)(5\sqrt{2}+2)+8\sqrt{2}$

$=10(\sqrt{2})^2+(4-15)\sqrt{2}-6+8\sqrt{2}$

$=20-11\sqrt{2}-6+8\sqrt{2}=14-3\sqrt{2}$

따라서 $a=14$, $b=-3$이므로

$a-b=14-(-3)=17$

073 답 $55+2\sqrt{5}$

(주어진 식)

$=\{(\sqrt{5})^2-2\times\sqrt{5}\times2+2^2\}+\{1^2+2\times1\times3\sqrt{5}+(3\sqrt{5})^2\}$

$=(9-4\sqrt{5})+(46+6\sqrt{5})=55+2\sqrt{5}$

074 답 ⑤

$(x+3-\sqrt{6})(x+3+\sqrt{6})$
$=\{(x+3)-\sqrt{6}\}\{(x+3)+\sqrt{6}\}$
$=(x+3)^2-(\sqrt{6})^2=x^2+6x+9-6$
$=x^2+6x+3$
따라서 x의 계수는 6, 상수항은 3이므로 구하는 곱은
$6\times3=18$

[다른 풀이]
주어진 식의 전개식에서
(x의 계수)$=(3-\sqrt{6})+(3+\sqrt{6})=6$
(상수항)$=(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})=3^2-(\sqrt{6})^2=9-6=3$
(이하 동일)

075 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $(2\sqrt{5}-1)^2$
$=(2\sqrt{5})^2-2\times2\sqrt{5}\times1+1^2$
$=20-4\sqrt{5}+1=21-4\sqrt{5}$ ← 무리수
ㄴ. $(3-2\sqrt{3})(-2\sqrt{3}-3)$
$=-(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})$
$=-\{3^2-(2\sqrt{3})^2\}$
$=-(9-12)=3$ ← 유리수
ㄷ. $(3\sqrt{2}-2)(6\sqrt{2}+4)$
$=36+(12-12)\sqrt{2}-8=28$ ← 유리수
ㄹ. $(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+7)$
$=10+(7-3)\sqrt{10}-21=-11+4\sqrt{10}$ ← 무리수
따라서 계산 결과가 유리수인 것은 ㄴ, ㄷ이야.

076 답 ①

$(\sqrt{2}-4)^2-(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)$
$=2-8\sqrt{2}+16-\{(2\sqrt{2})^2-3^2\}$
$=18-8\sqrt{2}-(8-9)$
$=19-8\sqrt{2}$

077 답 ②

$(2\sqrt{3}+\sqrt{7})(2\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{15}-4)(\sqrt{15}+4)$
$=\{(2\sqrt{3}+\sqrt{7})(2\sqrt{3}-\sqrt{7})\}\{(\sqrt{15}-4)(\sqrt{15}+4)\}$
$=\{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2\}\{(\sqrt{15})^2-4^2\}$
$=(12-7)(15-16)$
$=-5$

078 답 ②

$(2+3\sqrt{6})(a-4\sqrt{6})=2a+(-8+3a)\sqrt{6}-72$
$=2a-72+(3a-8)\sqrt{6}$
유리수가 되려면
$3a-8=0\qquad\therefore a=\frac{8}{3}$

079 답 ⑤

둘레의 길이가 $4\sqrt{5}+12\sqrt{7}$인 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면 둘레의 길이는 $4x$지?
$4x=4\sqrt{5}+12\sqrt{7}\qquad\therefore x=\sqrt{5}+3\sqrt{7}$
$\therefore$ (정사각형의 넓이)$=(\sqrt{5}+3\sqrt{7})^2$
$=5+6\sqrt{35}+63$
$=68+6\sqrt{35}$

080 답 $9-4\sqrt{5}$

$(4\sqrt{5}+9)^{99}(4\sqrt{5}-9)^{100}$
$=(4\sqrt{5}+9)^{99}(4\sqrt{5}-9)^{99}(4\sqrt{5}-9)$
$=\{(4\sqrt{5}+9)(4\sqrt{5}-9)\}^{99}(4\sqrt{5}-9)$
$=(80-81)^{99}(4\sqrt{5}-9)=(-1)^{99}\times(4\sqrt{5}-9)$
$=-(4\sqrt{5}-9)=9-4\sqrt{5}$

오답피하기

지수가 너무 커서 순간 당황했지? 이러한 문제를 풀 때의 핵심 열쇠는 같은 지수에 대하여 두 식을 묶는 거지. 이때, 위 문제처럼 두 지수가 다른 경우엔 큰 지수를 작은 지수에 맞춰야 해. 문제가 좀 어렵지만 비슷한 유형의 문제를 좀 더 풀어 보면 푸는 요령이 생길 거야.

081 답 ①

$$\frac{2\sqrt{7}-4}{3-\sqrt{7}}=\frac{(2\sqrt{7}-4)(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}$$
$$=\frac{6\sqrt{7}+14-12-4\sqrt{7}}{9-7}=\frac{2+2\sqrt{7}}{2}=1+\sqrt{7}$$
따라서 $a=1$, $b=1$이므로
$a+b=1+1=2$

082 답 ②

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{-\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(-\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(-\sqrt{6}-\sqrt{5})(-\sqrt{6}+\sqrt{5})}$$
$$=\frac{-(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2}{(-\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{-(6-2\sqrt{30}+5)}{6-5}$$
$$=-11+2\sqrt{30}$$

083 답 $-18-8\sqrt{6}$

$$(3\sqrt{2}+\sqrt{3})\div\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}=(3\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$
$$=(3\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$
$$=(3\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1}$$
$$=-2(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$
$$=-2(6+3\sqrt{6}+\sqrt{6}+3)=-18-8\sqrt{6}$$

084 답 ①

(주어진 식)
$$=\frac{\sqrt{3}(5+3\sqrt{3})}{(5-3\sqrt{3})(5+3\sqrt{3})}-\frac{\sqrt{3}(5-3\sqrt{3})}{(5+3\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}+9}{25-27}-\frac{5\sqrt{3}-9}{25-27}=-\frac{5\sqrt{3}+9}{2}+\frac{5\sqrt{3}-9}{2}$$
$$=\frac{-5\sqrt{3}-9+5\sqrt{3}-9}{2}=-9$$

085 답 8

$$\frac{1-\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}-\frac{3+\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}-\frac{(3+\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}$$
$=(17-7\sqrt{6})-(27+11\sqrt{6})=-10-18\sqrt{6}$
따라서 $A=-10$, $B=-18$이므로
$A-B=-10-(-18)=8$

086 답 $9-5\sqrt{2}$

(주어진 식)$=5(x^2-2x+1)-(6x^2-9x+4x-6)$

$=5x^2-10x+5-6x^2+5x+6=-x^2-5x+11$

$x=\sqrt{2}$를 위의 식에 대입하면

$-x^2-5x+11=-(\sqrt{2})^2-5\sqrt{2}+11=9-5\sqrt{2}$

087 답 ①

$(x+y)^2-(x-y)^2=x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)$

$=4xy=4(4-3\sqrt{2})\times2\sqrt{6}$

$=32\sqrt{6}-24\sqrt{12}=-48\sqrt{3}+32\sqrt{6}$

따라서 $a=-48$, $b=32$이므로

$a+b=-48+32=-16$

088 답 ②

$x=4-\sqrt{7}$에서 $x-4=-\sqrt{7}$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$(x-4)^2=(-\sqrt{7})^2$, $x^2-8x+16=7$, $x^2-8x=-9$

$\therefore x^2-8x+10=-9+10=1$

089 답 ⑤

$x=\dfrac{2}{-2-\sqrt{2}}=\dfrac{2(-2+\sqrt{2})}{(-2-\sqrt{2})(-2+\sqrt{2})}=-2+\sqrt{2}$

에서 $x+2=\sqrt{2}$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$(x+2)^2=(\sqrt{2})^2$, $x^2+4x+4=2$, $x^2+4x=-2$

$\therefore \sqrt{x^2+4x+11}=\sqrt{-2+11}=\sqrt{9}=3$

090 답 ②

$\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$, 즉 $3<\sqrt{10}<4$에서 $4<\sqrt{10}+1<5$이므로

$\sqrt{10}+1$의 정수 부분은 4야.

$\therefore a=4$

또한, $\sqrt{10}+1$의 소수 부분은 $\sqrt{10}+1$에서 정수 부분을 뺀 것과 같으므로

$b=(\sqrt{10}+1)-4=\sqrt{10}-3$

$\therefore a-\dfrac{1}{b}=4-\dfrac{1}{\sqrt{10}-3}=4-(\sqrt{10}+3)=1-\sqrt{10}$

091 답 $12-3\sqrt{13}$

$2<\sqrt{5}<3$이므로 $\sqrt{5}$의 정수 부분은 2지?

$\therefore a=\sqrt{5}-2$

$3<\sqrt{13}<4$이므로 $\sqrt{13}$의 정수 부분은 3이야.

$\therefore b=\sqrt{13}-3$

$\therefore a^2-2\sqrt{5}a+\sqrt{13}b$

$=(\sqrt{5}-2)^2-2\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)+\sqrt{13}(\sqrt{13}-3)$

$=5-4\sqrt{5}+4-10+4\sqrt{5}+13-3\sqrt{13}=12-3\sqrt{13}$

092 답 ④

$\sqrt{9}<2\sqrt{3}=\sqrt{12}<\sqrt{16}$에서 $3<2\sqrt{3}<4$이므로 $2\sqrt{3}$의 정수 부분은 3이야.

$\therefore x=3$

또한, $2\sqrt{3}$의 소수 부분은 $2\sqrt{3}$에서 정수 부분을 뺀 것과 같으므로

$y=2\sqrt{3}-3$

이때, $y+3=2\sqrt{3}$에서 양변을 제곱하여 정리하면

$(y+3)^2=(2\sqrt{3})^2$, $y^2+6y+9=12$, $y^2+6y=3$

$\therefore x^2+y^2+6y=3^2+3=9+3=12$

093 답 ④

$\dfrac{8}{4-2\sqrt{3}}=\dfrac{8(4+2\sqrt{3})}{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}=\dfrac{8(4+2\sqrt{3})}{16-12}$

$=2(4+2\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$

이때, $\sqrt{36}<\sqrt{48}<\sqrt{49}$에서 $6<4\sqrt{3}<7$이고

$14<8+4\sqrt{3}<15$이므로 $8+4\sqrt{3}$의 정수 부분은 $a=14$야.

또, $8+4\sqrt{3}$의 소수 부분은 $b=8+4\sqrt{3}-14=4\sqrt{3}-6$이지.

$\therefore a+\sqrt{3}b=14+\sqrt{3}(4\sqrt{3}-6)=14+12-6\sqrt{3}$

$=26-6\sqrt{3}$

094 답 ③

$101\times99=(100+1)(100-1)=100^2-1^2$

$=10000-1=9999$

따라서 ③ $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$이 알맞아.

095 답 ①

ㄱ. $1004^2=(1000+4)^2=1000^2+2\times1000\times4+4^2$

$=1000000+8000+16=1008016$ ← 적당해!

ㄴ. $999^2=(1000-1)^2=1000^2-2\times1000\times1+1$

$=1000000-2000+1=998001$ ← 적당해!

ㄷ. $51\times54=(50+1)(50+4)=50^2+(4+1)\times50+4$

$=2500+250+4=2754$ ← 적당하지 않아!

ㄹ. $69\times71=(70-1)(70+1)=70^2-1^2$

$=4900-1=4899$ ← 적당하지 않아!

따라서 바르게 연결한 것은 ㄱ, ㄴ이야.

096 답 9991

$97\times103=(100-3)(100+3)=100^2-3^2$

$=10000-9=9991$

097 답 2940

$21^2+51\times49=(20+1)^2+(50+1)(50-1)$

$=20^2+2\times20\times1+1^2+50^2-1^2$

$=400+40+1+2500-1=2940$

098 답 2

$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^4-1)(x^4+1)$

$=x^8-1$

$x^8-1=255$, $x^8=256=2^8$

$\therefore x=2$ ($\because$ x는 자연수)

099 답 ④

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로

$a^2+b^2=5^2-2\times6=25-12=13$

오|답|피|하|기

곱셈 공식의 변형 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$는 자주 이용되는 공식이야.
이것은 고등학교에서는 더욱 자주 쓰이기 때문에 잘 알아 둬야 해.
두 수의 제곱의 합은 두 수의 합과 곱만 있으면 구할 수 있다는 것을 기억하자.

C

100 답 ②

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에 $x+y=5$, $x^2+y^2=17$을 대입하면

$17=5^2-2xy$, $2xy=8$

$\therefore xy=4$

101 답 ④

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$이므로 $x-y=8$, $xy=3$을 대입하면

$x^2+y^2=8^2+2\times3=64+6=70$

102 답 100

두 수를 a, $b(a>b)$라 하면 두 수의 차가 2이고, 두 수의 곱이 48이므로

$a-b=2$, $ab=48$

따라서 두 수의 제곱의 합, 즉 a^2+b^2의 값을 구하면

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=2^2+2\times48=4+96=100$

103 답 ④

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=5$에서

$\frac{a+b}{ab}=5 \qquad \therefore a+b=5ab$

그런데 $ab=\frac{1}{6}$이므로

$a+b=5ab=5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=\left(\frac{5}{6}\right)^2-2\times\frac{1}{6}=\frac{25}{36}-\frac{1}{3}$

$=\frac{25}{36}-\frac{12}{36}=\frac{13}{36}$

104 답 ③

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=5^2-2=25-2=23$

105 답 ③

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

$=6^2+2=36+2=38$

106 답 ⑤

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4$

$=4^2+4=16+4=20$

107 답 ④

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=3^2-2=9-2=7$

이때, $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=x^4+2\times x^2\times\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}=x^4+\frac{1}{x^4}+2$이므로

$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$

$=7^2-2=49-2=47$

108 답 ②

$x^2+7x+1=0$에 $x=0$을 대입하면 $1\neq0$으로 등식이 성립하지 않아. 즉, $x=0$이 해가 아니지?

따라서 $x^2+7x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+7+\frac{1}{x}=0$에서 $x+\frac{1}{x}=-7$

$\therefore x+2+\frac{1}{x}=-7+2=-5$

109 답 ④

$x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-2-\frac{1}{x}=0$에서 $x-\frac{1}{x}=2$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$

$=2^2+4=4+4=8$

110 답 ⑤

$a^2+5a-1=0$의 양변을 a로 나누면

$a+5-\frac{1}{a}=0$에서 $a-\frac{1}{a}=-5$

$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$

$=(-5)^2+2=25+2=27$

$\therefore a^2-7+\frac{1}{a^2}=27-7=20$

111 답 3

$x^2-Ax+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-A+\frac{1}{x}=0$에서 $x+\frac{1}{x}=A$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$7=A^2-2$

$\therefore A^2=9$

따라서 A는 9의 양의 제곱근이므로

$A=3$

112 답 ⑤

$x^2-10x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-10+\frac{1}{x}=0$에서 $x+\frac{1}{x}=10$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=10^2-2=100-2=98$

$\therefore x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}$

$=98+10=108$

113 답 ①

1st 이차항의 계수를 이용해서 -2와 A의 관계를 찾아.

$(-2x-1)(4x+3)$을 전개하는데 -2를 잘못 보고 전개하여 $4Ax^2+2x+B$가 되었다는 것은 -2를 A로 보았다는 것이므로

$$\begin{aligned}(Ax-1)(4x+3)&=4Ax^2+3Ax-4x-3\\&=4Ax^2+(3A-4)x-3\\&=4Ax^2+2x+B\end{aligned}$$

$3A-4=2,\ B=-3$

$\therefore\ A=2,\ B=-3$

2nd 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개해.

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+A)(x+B)&=(x+2)(x-3)\\&=x^2+(2-3)x-6\\&=x^2-x-6\end{aligned}$$

오답피하기

-2를 무엇으로 잘못 보았는지를 찾아내는 것이 가장 중요해. 따라서 -2를 잘못 보고 전개한 식 $4Ax^2+2x+B$에서 A가 원래 전개하려던 식 $(-2x-1)(4x+3)$의 이차항의 계수와 어떤 관계가 있는지 확인하는 것이 이 문제의 핵심이야. 그리고 이런 문제는 문장 독해 능력이 부족한 경우에 틀리게 되는 경우가 많아. 꼼꼼히 읽고 신중하게 생각하는 습관을 들이는 것이 좋겠어.
얼핏 보면 -2를 무슨 수로 잘못 봐서 전개했는지 감이 안 올 수도 있어. 그렇지만 전개된 식을 보고 잘 생각해보면 x^2의 계수가 $4A$이므로 $4x$에 어떤 수를 곱하면 $4Ax^2$이 나올지 역으로 추론해 볼 수 있어. 이 부분만 잘 한다면 나머지는 단순 계산이므로 쉽게 구할 수 있어.

114 답 ④

1st 이차항의 계수를 이용해서 4와 A의 관계를 찾아.

$(-5x+1)(4x-2)$를 전개하는데 4를 잘못 보고 전개하여 $-5Ax^2+12x-B$가 되었다는 것은 4를 A로 보았다는 것이므로

$$\begin{aligned}(-5x+1)(Ax-2)&=-5Ax^2+10x+Ax-2\\&=-5Ax^2+(A+10)x-2\\&=-5Ax^2+12x-B\end{aligned}$$

$A+10=12,\ -2=-B$

$\therefore\ A=2,\ B=2$

2nd 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개해.

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+A)(x+B)&=(x+2)(x+2)\\&=(x+2)^2=x^2+4x+4\end{aligned}$$

115 답 -2

1st 공통 부분을 찾아 한 문자로 치환한 후 전개해.

$2x-1=A$라 하면

$$\begin{aligned}(2x-2y-1)(2x+y-1)&=(A-2y)(A+y)\\&=A^2-yA-2y^2\\&=(2x-1)^2-y(2x-1)-2y^2\\&=4x^2-4x+1-2xy+y-2y^2\\&=4x^2-2xy-2y^2-4x+y+1\end{aligned}$$

따라서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은

$4+(-2)+(-2)+(-4)+1+1=-2$

116 답 18

1st 공통 부분을 찾아 한 문자로 치환한 후 전개해.

$a+3b=A$라 하면

$$\begin{aligned}(a+3b-2)(a+3b+5)&=(A-2)(A+5)\\&=A^2+3A-10\\&=(a+3b)^2+3(a+3b)-10\\&=a^2+6ab+9b^2+3a+9b-10\end{aligned}$$

따라서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은

$1+6+9+3+9+(-10)=18$

117 답 ③

1st 유리수 a, b와 무리수 $\sqrt{m}$에 대해 $a+b\sqrt{m}$이 유리수가 되려면 $b=0$이야.

$(4+\sqrt{3})(2a-5\sqrt{3})=8a-15+(-20+2a)\sqrt{3}$

이므로 계산 결과가 유리수가 되려면

$-20+2a=0$

$\therefore\ a=10$

오답피하기

a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}$이 유리수가 되려면 무리수인 $\sqrt{m}$이 없어져야 하지? 그래서 $\sqrt{m}$의 계수인 $b=0$이 되어야 하는 거야.

118 답 ①

1st 유리수 a, b와 무리수 $\sqrt{m}$에 대해 $a+b\sqrt{m}$이 유리수가 되려면 $b=0$이야.

$(\sqrt{6}-3a)(\sqrt{6}+1)=6-3a+(-3a+1)\sqrt{6}$

이므로 계산 결과가 유리수가 되려면

$-3a+1=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

119 답 95

1st 곱셈 공식을 이용해서 분모를 유리화하자.

$$\begin{aligned}x&=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\\&=\frac{5-2\sqrt{6}}{3-2}=5-2\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y&=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\\&=\frac{5+2\sqrt{6}}{3-2}=5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

2nd $x+y$, xy의 값을 구하자.

$x+y=(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})=10$,

$xy=(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=25-24=1$이므로

$(x+y)^2-5xy=10^2-5\times1=100-5=95$

오답피하기

곱셈 공식을 잊지는 않았겠지? 무턱대고 $(x+y)^2-5xy$에 x, y의 값을 대입시켰다가는 계산 실수로 틀릴 수가 있어. 최대한 주어진 식을 간단히 하는 것이 어려운 계산을 피하는 방법이야.
이 문제는 $x+y$, xy의 값을 구해야 계산이 편하겠지?

120 답 $\frac{22}{7}$

1st $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$에서 무엇을 구해야 하는지 생각해 보자.

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ … ㉠

위의 식의 값을 구하기 위해서는 $x+y$, xy의 값을 알아야 해.

2nd $x+y$, xy의 값을 구하자.

$x=3+\sqrt{2}$, $y=3-\sqrt{2}$이므로

$x+y=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6$

$xy=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7$

3rd 구한 값을 ㉠에 대입하자.

$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{6^2-2\times7}{7}=\frac{22}{7}$

121 답 ㄱ, ㄷ

1st 근호가 있으면 제곱하여 근호를 없애자.

ㄱ. $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 양변을 제곱하면

$(\sqrt{x+y})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$, $x+y=x+2\sqrt{xy}+y$

$2\sqrt{xy}=0$ $\quad\therefore xy=0$

이것을 만족하는 자연수 x, y는 없지? (참)

2nd k의 정수 부분이 1이면 $1\le k<2$야.

ㄴ. $\sqrt{x+y}$의 정수 부분이 1이면 $1\le\sqrt{x+y}<2$이고, 각 변을 제곱하면 $1\le x+y<4$

$x+y$가 자연수이므로 $x+y=1$ 또는 $x+y=2$ 또는 $x+y=3$

(ⅰ) $x+y=1$인 자연수 순서쌍 (x, y)는 존재하지 않지?

(ⅱ) $x+y=2$인 경우는 $(x, y)=(1, 1)$로 1개

(ⅲ) $x+y=3$인 경우는 $(x, y)=(1, 2)$, $(2, 1)$로 2개

즉, 순서쌍 (x, y)의 개수는 3개야. (거짓)

3rd $\sqrt{27-3x}$가 자연수가 되기 위해서는 $27-3x$가 제곱인 수가 되어야지?

ㄷ. $\sqrt{27-3x}$가 자연수가 되려면 $27-3x$는 27보다 작은 제곱인 수가 되어야 해.

즉, $27-3x$는 1, 4, 9, 16, 25가 될 수 있는데 각각에 대하여

x의 값은 $\frac{26}{3}$, $\frac{23}{3}$, 6, $\frac{11}{3}$, $\frac{2}{3}$지?

여기서 자연수 $x=6$으로 1개야. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이야.

오|답|피|하|기

여러 가지 문제가 복합적으로 다루어지고 있는 옳은 것을 고르는 문제야. 하나하나가 쉽지는 않아. 하지만 제곱근을 없애기 위해 제곱을 해야 풀릴 수 있다는 공통점이 있지.

제곱근과 관련된 문제 중 그 값이 자연수 또는 정수가 되는 자연수 x를 구하는 문제가 자주 출제가 되고 있어. 그와 관련된 문제를 많이 풀어서 익숙해지도록 하자.

122 답 ㄱ, ㄴ

1st 등식을 만족하는 x, y의 값을 생각해 보자.

ㄱ. $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$의 양변에 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$를 곱하면

$1=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, $1=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2$

$\therefore x-y=1$

즉, $x-y=1$을 만족하는 자연수 x, y는 무수히 많아. (참)

2nd k의 정수 부분이 2이면 $2\le k<3$이지?

ㄴ. $\sqrt{x+y}$의 정수 부분이 2이면 $2\le\sqrt{x+y}<3$이고, 각 변을 제곱하면 $4\le x+y<9$

$x+y$가 자연수이므로 $x+y=4$ 또는 $x+y=5$ 또는 $x+y=6$ 또는 $x+y=7$ 또는 $x+y=8$

(ⅰ) $x+y=4$인 경우 순서쌍 (x, y)를 구하면

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$로 3개!

(ⅱ) $x+y=5$인 경우 순서쌍 (x, y)를 구하면

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$로 4개!

(ⅲ) $x+y=6$인 경우 순서쌍 (x, y)를 구하면

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$로 5개!

(ⅳ) $x+y=7$인 경우 순서쌍 (x, y)를 구하면

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$로 6개!

(ⅴ) $x+y=8$인 경우 순서쌍 (x, y)를 구하면

$(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$, $(7, 1)$로 7개!

즉, 순서쌍 (x, y)의 개수는 25개야. (참)

3rd $\sqrt{18-5x}$가 자연수가 되기 위해서는 $18-5x$가 제곱인 수가 되어야지?

ㄷ. $\sqrt{18-5x}$가 자연수가 되려면 $18-5x$는 18보다 작은 제곱인 수, 즉 1, 4, 9, 16이 될 수 있는데 각각에 대하여 x의 값은

$\frac{17}{5}$, $\frac{14}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{2}{5}$지? 여기서 자연수 x는 존재하지 않아. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이야.

123 답 $-1+3\sqrt{2}$

1st 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 길이를 구하면 a, b의 값을 구할 수 있어.

두 정사각형에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 길이는 직각을 낀 두 변의 길이가 모두 1인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이와 같으므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\quad\therefore \overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{2}$

$\overline{CD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\quad\therefore \overline{CQ}=\overline{CD}=\sqrt{2}$

따라서 점 P에 대응하는 수 a는 $a=-2+\sqrt{2}$, 점 Q에 대응하는 수 b는 $3-\sqrt{2}$야.

2nd 주어진 식에 a, b의 값을 대입하자.

$$\begin{aligned}\therefore a+3b+ab&=(-2+\sqrt{2})+3(3-\sqrt{2})+(-2+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})\\&=-2+\sqrt{2}+9-3\sqrt{2}+(-6+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2)\\&=7-2\sqrt{2}-8+5\sqrt{2}=-1+3\sqrt{2}\end{aligned}$$

124 답 $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$

1st 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{CB}$, $\overline{CD}$의 길이를 구하면 a, b의 값을 구할 수 있어.

정사각형 ABCD에서 두 변 CB, CD의 길이는 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 1, 2인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같으므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{CB}=\overline{CD}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore a=3-\sqrt{5}$, $b=3+\sqrt{5}$

2nd 주어진 식에 a, b의 값을 대입하자.

$$\begin{aligned}\therefore \frac{b-a}{a}&=\frac{(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\\&=\frac{2\sqrt{5}(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{6\sqrt{5}+10}{4}=\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

C

125 답 **6**

1st 분모의 유리화로 식을 정리해 보자.

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{29}+\sqrt{30}}$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{30}-\sqrt{29})$

$=\sqrt{30}-1$

2nd 소수 부분 x의 값을 구하자.

$5<\sqrt{30}<6$에서 $4<\sqrt{30}-1<5$이므로 $\sqrt{30}-1$의 정수 부분은 4야.

$\therefore x=(\sqrt{30}-1)-4=\sqrt{30}-5$

3rd 주어진 식을 계산하자.

$x=\sqrt{30}-5$에서 $x+5=\sqrt{30}$

양변을 제곱하면

$x^2+10x+25=30 \qquad \therefore x^2+10x=5$

$\therefore x^2+10x+1=5+1=6$

126 답 **9**

1st 분모의 유리화로 식을 정리해 보자.

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{39}+\sqrt{40}}$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{40}-\sqrt{39})$

$=\sqrt{40}-1$

2nd 소수 부분 x의 값을 구하자.

$6<\sqrt{40}<7$에서 $5<\sqrt{40}-1<6$이므로 $\sqrt{40}-1$의 정수 부분은 5야.

$\therefore x=(\sqrt{40}-1)-5=\sqrt{40}-6$

3rd 주어진 식을 계산하자.

$x=\sqrt{40}-6$이므로 $x+6=\sqrt{40}$

양변을 제곱하면

$x^2+12x+36=40 \qquad \therefore x^2+12x=4$

$\therefore x^2+12x+5=4+5=9$

127 답 $\mathbf{3\sqrt{2}}$

1st 무리수만 남기고 나머지를 이항하자.

$x=\sqrt{2}-1$에서 $x+1=\sqrt{2}$

2nd 양변을 제곱하여 x에 대한 이차식을 구하자.

양변을 제곱하면

$(x+1)^2=(\sqrt{2})^2$, $x^2+2x+1=2$

$\therefore x^2+2x=1$ ⋯ ㉠

3rd ㉠을 이용하여 주어진 식의 값을 구하자.

$\therefore x^3+2x^2+2x+3=x(x^2+2x)+2x+3$

$=x+2x+3$ ($\because$ ㉠)

$=3x+3=3(\sqrt{2}-1)+3=3\sqrt{2}$

128 답 $\mathbf{2\sqrt{2}+1}$

1st 무리수만 남기고 나머지를 이항하자.

$x=\sqrt{2}+2$에서 $x-2=\sqrt{2}$

2nd 양변을 제곱하여 x에 대한 이차식을 구하자.

양변을 제곱하면

$(x-2)^2=(\sqrt{2})^2$, $x^2-4x+4=2$

$\therefore x^2-4x=-2$ ⋯ ㉠

3rd ㉠을 이용하여 주어진 식의 값을 구하자.

$\therefore x^3-4x^2+4x-3=x(x^2-4x)+4x-3$

$=-2x+4x-3$ ($\because$ ㉠)

$=2x-3=2(\sqrt{2}+2)-3=2\sqrt{2}+1$

129 답 $\mathbf{12\sqrt{2}+14\sqrt{3}}$

1st 정삼각형의 둘레의 길이를 아니까 한 변의 길이를 구할 수 있어.

정삼각형의 한 변의 길이를 x라 하면 둘레의 길이는 $3x$지?

$3x=6\sqrt{2}+12\sqrt{3}$

$\therefore x=2\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

2nd 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이야.

따라서 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2}+4\sqrt{3})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(8+16\sqrt{6}+48)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(56+16\sqrt{6})$

$=14\sqrt{3}+4\sqrt{18}$

$=12\sqrt{2}+14\sqrt{3}$

130 답 $\mathbf{7+2\sqrt{6}}$

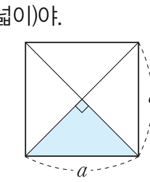
1st 정사각형의 둘레의 길이를 아니까 한 변의 길이를 구할 수 있어.

정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$4a=8\sqrt{6}+8 \qquad \therefore a=2\sqrt{6}+2$

2nd (정사각형의 넓이)$=4\times$(직각이등변삼각형의 넓이)야.

그림과 같이 정사각형의 두 대각선이 만나서 생기는 네 개의 직각이등변삼각형 중 하나의 넓이는 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로 구하는 넓이는



$\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}\times(2\sqrt{6}+2)^2$

$=\frac{1}{4}\times(24+8\sqrt{6}+4)$

$=\frac{1}{4}\times(28+8\sqrt{6})$

$=7+2\sqrt{6}$

131 답 $\mathbf{-4}$

1st 두 항씩 묶어서 전개했을 때 일차항의 계수가 같아야 해.

주어진 식을 전개하면

$(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$

$=(x+1)(x-3)\times(x+2)(x-4)$

$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)$ ⋯ ㉠

2nd $x^2-2x-4=0$에서 $x^2-2x=4$야.

이때, $x^2-2x-4=0$에서 $x^2-2x=4$이므로

㉠에 대입하면

㉠$=(4-3)\times(4-8)=-4$

132 답 **208**

1st 두 항씩 묶어서 전개했을 때 일차항의 계수가 같아야 해.

주어진 식을 전개하면

$(2x-1)(2x-3)(x-2)(x-3)$

$=(2x-1)(x-3)\times(2x-3)(x-2)$

$=(2x^2-7x+3)(2x^2-7x+6)$ ⋯ ㉠

2nd $2x^2-7x-10=0$에서 $2x^2-7x=10$이야.

이때, $2x^2-7x-10=0$에서 $2x^2-7x=10$이므로

㉠에 대입하면

㉠$=(10+3)(10+6)=13\times16=208$

133 답 820

1st 곱셈 공식을 변형하여 이용하자.

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=2^2+2\times3=4+6=10$

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$

$=10^2-2\times3^2=100-18=82$

$\therefore (a^2+b^2)(a^4+b^4)=10\times82=820$

134 답 $\frac{3}{7}$

1st 곱셈 공식을 변형하여 이용하자.

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$a-1-\frac{1}{a}=0 \quad \therefore a-\frac{1}{a}=1$

$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2=1^2+2=3$

$a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2=3^2-2=7$

따라서 $a^2+\frac{1}{a^2}=k\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)$에 대입하면

$3=7k \quad \therefore k=\frac{3}{7}$

135 답 $\frac{5\sqrt{3}+9}{2}$

1st $[x]$의 값부터 구해 보자.

양수 x에 대하여 $[x]$는 x의 정수 부분을 의미해.

$1<\sqrt{3}<2$에서 $3<\sqrt{3}+2<4$이므로 $[x]=3$이야.

2nd 주어진 식의 값을 구하자.

$$\therefore \frac{[x]}{x-[x]}+\frac{3x+[x]}{[x]}=\frac{3}{\sqrt{3}+2-3}+\frac{3(\sqrt{3}+2)+3}{3}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}-1}+(\sqrt{3}+2)+1$$

$$=\frac{3(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}+\sqrt{3}+3$$

$$=\frac{3\sqrt{3}+3}{3-1}+\sqrt{3}+3$$

$$=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}+\sqrt{3}+3$$

$$=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}+\frac{2\sqrt{3}+6}{2}=\frac{5\sqrt{3}+9}{2}$$

136 답 $6+\sqrt{5}$

1st $[x]$의 값부터 구해 보자.

양수 x에 대하여 $[x]$는 x의 정수 부분을 의미해.

$2<\sqrt{5}<3$에서 $3<\sqrt{5}+1<4$이므로 $[x]=3$이야.

2nd 주어진 식의 값을 구하자.

$$\therefore \frac{x-[x]+1}{x}+\frac{x[x]}{x-2}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+1)-3+1}{\sqrt{5}+1}+\frac{3(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+1-2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{3(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}+\frac{3(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2+\frac{3}{4}(\sqrt{5}+1)^2$$

$$=\frac{1}{4}(5-2\sqrt{5}+1)+\frac{3}{4}(5+2\sqrt{5}+1)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}=6+\sqrt{5}$$

서술형 다지기

p. 66

C

[137-138 채점기준표]

Ⅰ	x의 분모를 유리화한다.	30%
Ⅱ	y의 분모를 유리화한다.	30%
Ⅲ	주어진 식의 값을 구한다.	40%

137 답 63

먼저, x의 분모를 유리화하자.

$$x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{2}=\frac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15} \quad \cdots \text{Ⅰ}$$

그다음, y의 분모를 유리화하자.

$$y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{2}=\frac{8-2\sqrt{15}}{2}=4-\sqrt{15} \quad \cdots \text{Ⅱ}$$

그래서, x^2+xy+y^2의 값을 구하자.

이때, $x+y=(4+\sqrt{15})+(4-\sqrt{15})=8$,

$xy=(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=1$이므로

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=8^2-1=63$ … Ⅲ

138 답 321

먼저, x의 분모를 유리화하자.

$$x=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=\frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=(\sqrt{5}+2)^2=9+4\sqrt{5} \quad \cdots \text{Ⅰ}$$

그다음, y의 분모를 유리화하자.

$$y=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=(\sqrt{5}-2)^2=9-4\sqrt{5} \quad \cdots \text{Ⅱ}$$

그래서, x^2-xy+y^2의 값을 구하자.

이때, $x+y=(9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})=18$,

$xy=(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})=1$이므로

$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=18^2-3\times1=321$ … Ⅲ

[139-140 채점기준표]

Ⅰ	앞의 두 식에서의 공통 부분을 A로 치환하여 전개한다.	40%
Ⅱ	Ⅰ에서 전개한 식과 나머지 식의 공통 부분을 B로 치환하여 전개한다.	40%
Ⅲ	치환한 식을 다시 대입하여 정리한다.	20%

139 답 a^8-a^4+16

먼저, $a^2+2=A$로 두고 주어진 식을 간단히 하자.

주어진 식에서 $a^2+2=A$라 하면

$(a^2-a+2)(a^2+a+2)=(A-a)(A+a)=A^2-a^2$

$=(a^2+2)^2-a^2=a^4+4a^2+4-a^2$

$=a^4+3a^2+4$ … Ⅰ

그다음, $a^4+4=B$로 두고 주어진 식을 간단히 하자.

이때, $a^4+4=B$라 하면

$(a^2-a+2)(a^2+a+2)(a^4-3a^2+4)$

$=(a^4+3a^2+4)(a^4-3a^2+4)$

$=(B+3a^2)(B-3a^2)=B^2-9a^4$ … Ⅱ

그래서, $B=a^4+4$를 다시 대입하여 정리하자.

$=(a^4+4)^2-9a^4=a^8+8a^4+16-9a^4$

$=a^8-a^4+16$ … Ⅲ

140 답 $x^8+x^4y^4+y^8$

먼저, $x^2+y^2=A$로 두고 주어진 식을 간단히 하자.

주어진 식에서 $x^2+y^2=A$라 하면

$$\begin{aligned}(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)&=(A-xy)(A+xy)\\&=A^2-x^2y^2\\&=(x^2+y^2)^2-x^2y^2\\&=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2\\&=x^4+x^2y^2+y^4\end{aligned}$$ … Ⅰ

그다음, $x^4+y^4=B$로 두고 주어진 식을 간단히 하자.

이때, $x^4+y^4=B$라 하면

$(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

$=(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4)$

$=(B+x^2y^2)(B-x^2y^2)$

$=B^2-x^4y^4$ … Ⅱ

그래서, $B=x^4+y^4$을 다시 대입하여 정리하자.

$=(x^4+y^4)^2-x^4y^4$

$=x^8+2x^4y^4+y^8-x^4y^4$

$=x^8+x^4y^4+y^8$ … Ⅲ

141 답 $-\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}A&=(-2a+3b)^2-(a-b)^2\\&=4a^2-12ab+9b^2-a^2+2ab-b^2\\&=3a^2-10ab+8b^2\end{aligned}$$

$B=(a+3b)(a-3b)=a^2-9b^2$

$$\begin{aligned}C&=(4a+3b)(-pa+qb)\\&=-4pa^2+(4q-3p)ab+3qb^2\end{aligned}$$ … Ⅰ

이때, $A+B+\frac{35}{3}ab=C$이므로

$3a^2-10ab+8b^2+a^2-9b^2+\frac{35}{3}ab=-4pa^2+(4q-3p)ab+3qb^2$

$4a^2+\frac{5}{3}ab-b^2=-4pa^2+(4q-3p)ab+3qb^2$ … Ⅱ

따라서 $4=-4p$, $\frac{5}{3}=4q-3p$, $-1=3q$이므로

$p=-1$, $q=-\frac{1}{3}$

$\therefore p+q=-1+\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	A, B, C를 간단히 한다.	30%
Ⅱ	간단히 한 식을 $A+B+\frac{35}{3}ab=C$에 대입한다.	30%
Ⅲ	p, q의 값을 찾아 $p+q$의 값을 구한다.	40%

142 답 $\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}(a+\sqrt{2})(3\sqrt{2}-4)&=3a\sqrt{2}-4a+6-4\sqrt{2}\\&=(3a-4)\sqrt{2}-4a+6\end{aligned}$$ … Ⅰ

유리수가 되려면 $3a-4=0$ … Ⅱ

$\therefore a=\frac{4}{3}$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 식을 간단히 한다.	40%
Ⅱ	간단히 한 결과가 유리수가 될 조건을 찾는다.	30%
Ⅲ	a의 값을 구한다.	30%

143 답 -10

$\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3}-\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$=\frac{(3+\sqrt{6})(\sqrt{6}+3)}{(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)}-\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$=\frac{(3+\sqrt{6})^2}{6-9}-\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3}$ … Ⅰ

$=\frac{15+6\sqrt{6}}{-3}-\frac{7-3\sqrt{6}}{-1}$

$=-5-2\sqrt{6}+7-3\sqrt{6}=2-5\sqrt{6}$ … Ⅱ

따라서 $a=2$, $b=-5$이므로

$ab=2\times(-5)=-10$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 식의 분모를 유리화한다.	40%
Ⅱ	식을 정리한다.	30%
Ⅲ	ab의 값을 구한다.	30%

144 답 33

$2\sqrt{2}+3>0$, $2\sqrt{2}-3<0$이므로

$x=\sqrt{(2\sqrt{2}+3)^2}=2\sqrt{2}+3$

$y=\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}=-(2\sqrt{2}-3)=3-2\sqrt{2}$ … Ⅰ

이때, $x+y=(2\sqrt{2}+3)+(3-2\sqrt{2})=6$,

$xy=(2\sqrt{2}+3)(3-2\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=9-8=1$

이므로 … Ⅱ

$$\begin{aligned}x^2-xy+y^2&=(x+y)^2-3xy\\&=6^2-3\times1=36-3\\&=33\end{aligned}$$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	x, y를 간단히 한다.	30%
Ⅱ	$x+y$, xy의 값을 각각 구한다.	40%
Ⅲ	x^2-xy+y^2의 값을 구한다.	30%

145 답 $(8-4\sqrt{2})$ cm

두 정삼각형의 넓이의 비가 2 : 1이므로 한 변의 길이의 비는 $\sqrt{2}$: 1이다. … Ⅰ

두 정삼각형의 한 변의 길이를 각각 $\sqrt{2}a$ cm, a cm(단, $a>0$)라 하면

$3(\sqrt{2}a+a)=12$, $(\sqrt{2}+1)a=4$

$\therefore a=\frac{4}{\sqrt{2}+1}=\frac{4(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=4(\sqrt{2}-1)$ … Ⅱ

따라서 큰 정삼각형의 한 변의 길이는

$\sqrt{2}a=\sqrt{2}\times4(\sqrt{2}-1)=8-4\sqrt{2}$(cm) … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	넓이의 비를 이용해 두 정삼각형의 한 변의 길이의 비를 구한다.	30%
Ⅱ	두 정삼각형의 둘레의 길이의 합이 12 cm임을 이용해 식을 세워 작은 정삼각형의 한 변의 길이를 구한다.	40%
Ⅲ	큰 정삼각형의 한 변의 길이를 구한다.	30%

146 답 $9x^2+y^2+x^2y^2+9$

$3x\odot(-y)+xy\odot3=(3x+y)^2+(xy-3)^2$ … Ⅰ

$=9x^2+6xy+y^2+x^2y^2-6xy+9$ … Ⅱ

$=9x^2+y^2+x^2y^2+9$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	연산 ⊙의 정의에 따라 식을 세운다.	40%
Ⅱ	곱셈 공식을 이용하여 식을 전개한다.	40%
Ⅲ	전개한 식을 간단히 한다.	20%

최고난도 만점 문제

p. 68

147 답 11

1st 좌변을 곱셈 공식을 이용하여 전개한 다음 ab의 값을 구하자.

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$이고

이것이 $x^2+(a+b)x+10$이므로 $ab=10$

2nd a, b가 정수이고 $ab=10$을 만족하는 a, b를 구하자.

그런데 a, b가 정수이므로 $ab=10$을 만족하는 a, b의 값을 표로 나타내면 다음과 같아.

a	-1	-2	-5	-10	1	2	5	10
b	-10	-5	-2	-1	10	5	2	1
$a+b$	-11	-7	-7	-11	11	7	7	11

3rd 표를 보고 $a+b$의 가장 큰 값을 찾을수 있어.

따라서 $a+b$가 가질 수 있는 가장 큰 값은 11이야.

오답피하기

이 문제를 풀다 보면 $ab=10$이라는 조건 외에 다른 조건은 없다고 생각하기 쉬워. 하지만 문제를 잘 읽어보면 a, b가 정수라는 조건이 있어. 따라서 a, b는 $ab=10$을 만족하는 특정한 순서쌍을 이루고, 그 개수는 한정되어 있어. 이 같은 사실을 알아낸다면 $ab=10$을 만족하는 정수 a, b가 이루는 순서쌍들을 모두 찾아낸 뒤, 그 중 문제에서 요구한 답을 구해야 한다는 사실을 알 수 있어. 항상 문제를 잘 읽어보고 푸는 습관을 기르는 것이 중요해. 'a, b가 정수', 혹은 'a, b가 자연수'같은 조건들은 이유 없이 주어지는 조건이 아닐 뿐만 아니라 문제를 푸는 핵심 단서가 될 수 있으니, 이러한 부분들을 빠뜨리지 말고 확인하는 습관을 기르도록 하자!

148 답 ③

1st $x+\frac{1}{x}=3$임을 알 수 있어.

어떤 수를 x라 하면 어떤 수와 그 역수의 합이 항상 3이므로

$x+\frac{1}{x}=3$

2nd A의 값의 범위를 구할 수 있어.

이때, 두 수의 차 $x-\frac{1}{x}$ 또는 $\frac{1}{x}-x$의 값의 범위를 구하는 거잖아.

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$

즉, $4<\left(x-\frac{1}{x}\right)^2<9$에서 $2^2<\left(x-\frac{1}{x}\right)^2<3^2$이고,

두 수의 차 A는 양수이므로 $2<A<3$

오답피하기

수학에서 쓰는 '두 수의 차'라는 말은 '두 수 중 큰 수에서 작은 수를 뺀 값'이라고 이해해야 해. 즉, 두 수의 차는 큰 수에서 작은 수를 뺀 값이므로 항상 양수 또는 0이야.

한편, 이 문제에서는 '어떤 수'와 '그 역수'중에 무엇이 더 큰 수인지 알 수 없잖아. 따라서 어떤 수를 x라 하고 '어떤 수'와 '그 역수'의 차를 A라 하면, $A=x-\frac{1}{x}$ 또는 $A=\frac{1}{x}-x$이고, $A>0$임을 알 수 있어.

149 답 20

1st 주어진 식을 x에 관한 부등식으로 변형하자.

정수 n에 대하여 $n-3<\sqrt{x+1}<n+3$을 만족한다고 하므로

각 변을 제곱하면

$(n-3)^2<x+1<(n+3)^2$

각 변에서 1을 빼면

$(n-3)^2-1<x<(n+3)^2-1$

2nd m, n이 자연수일 때, $m<t<n$을 만족하는 자연수 t의 개수는 $(n-m-1)$개지?

정수 x의 개수를 구하면

$(n+3)^2-1-\{(n-3)^2-1\}-1$

$=n^2+6n+9-1-(n^2-6n+9-1)-1$

$=12n-1$

이때, 정수 x의 개수가 239개이므로

$12n-1=239$, $12n=240$

$\therefore n=20$

오답피하기

부등식에서 개수를 구하는 문제를 어려워하는 학생들이 많은 것 같아.

a, b, x가 모두 정수이고 $a<b$일 때,

$a\le x\le b$를 만족하는 x의 개수는 $(b-a+1)$개

$a<x\le b$를 만족하는 x의 개수는 $(b-a)$개

$a\le x<b$를 만족하는 x의 개수는 $(b-a)$개

$a<x<b$를 만족하는 x의 개수는 $(b-a-1)$개

임을 외워 두도록 하자.

150 답 $\frac{-10+6\sqrt{2}}{7}$

1st x의 값의 범위를 알고 $[x]$의 값을 구할 수 있어.

$1<\sqrt{2}<2$이므로 각 변에 1을 더하면 $2<\sqrt{2}+1<3$

즉, $x=\sqrt{2}+1=2.\times\times\times$이므로 $[x]=2$

2nd 주어진 식에 $[x]$의 값을 대입하여 계산하자.

$$\therefore \frac{[x]}{x-2[x]}\times\left(\frac{2x-[x]}{2x+[x]}\right)^2$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}+1-4}\times\left(\frac{2\sqrt{2}+2-2}{2\sqrt{2}+2+2}\right)^2$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}-3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}-3}\times\frac{2}{6+4\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}-3}\times\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{2}+4-9-6\sqrt{2}}=\frac{2}{-5-3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2(-5+3\sqrt{2})}{(-5-3\sqrt{2})(-5+3\sqrt{2})}=\frac{-10+6\sqrt{2}}{7}$$

C

151 답 $x=\frac{1}{8}$, $y=-\frac{1}{24}$

1st 먼저 a의 값과 b의 값을 찾아야 돼.
$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{5}<3$이므로 $\sqrt{5}$의 정수 부분은 2지?
$\sqrt{5}$의 소수 부분은 $\sqrt{5}$에서 정수 부분 2를 빼면 되므로
$a=\sqrt{5}-2$
또한, $b=\frac{1}{a}$이므로
$b=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$

2nd 주어진 식에 a, b의 값을 대입해 보자.
$(a-1)x+3(b+3)y+1=0$에 a, b의 값을 대입하면
$(\sqrt{5}-3)x+3(\sqrt{5}+5)y+1=0$
$(\sqrt{5}-3)x+(3\sqrt{5}+15)y+1=0$
$(-3x+15y+1)+(x+3y)\sqrt{5}=0$
x, y가 유리수이므로 위의 등식이 성립하려면
$\begin{cases} -3x+15y+1=0\text{에서 } -3x+15y=-1 \cdots ㉠ \\ x+3y=0 \cdots ㉡ \end{cases}$

3rd 연립방정식을 풀어 보자.
㉠$+$㉡$\times 3$을 하면
$24y=-1 \qquad \therefore y=-\frac{1}{24}$
$y=-\frac{1}{24}$을 ㉡에 대입하면
$x-3\times\frac{1}{24}=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{8}$

152 답 4

1st $\langle\ \rangle$ 안의 값을 간단한 식으로 정리하자.
$\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$
$\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{5}-2$

2nd $\sqrt{5}$의 값의 범위를 구한 후, 간단히 정리한 식이 어떤 범위에 속하는지 계산해 보자.
$2.2^2=4.84$, $2.3^2=5.29$이므로
$2.2^2<5<2.3^2$
$\therefore 2.2<\sqrt{5}<2.3 \cdots ㉠$
㉠의 각 변에 2를 더하면 $4.2<\sqrt{5}+2<4.3 \cdots ㉡$
㉠의 각 변에서 2를 빼면 $0.2<\sqrt{5}-2<0.3 \cdots ㉢$

3rd 이제 약속된 $\langle\ \ \rangle$의 값을 구해 보자.
㉡에 의해 $\sqrt{5}+2$는 정수 4에 가장 가까우므로
$\left\langle\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right\rangle=\langle\sqrt{5}+2\rangle=4$
또, ㉢에 의해 $\sqrt{5}-2$는 정수 0에 가장 가까우므로
$\left\langle\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right\rangle=\langle\sqrt{5}-2\rangle=0$
$\therefore \left\langle\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right\rangle+\left\langle\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right\rangle=4+0=4$

오|답|피|하|기

대체적으로 $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{5}=2.236$을 기억하고 있으니까 이걸 이용하면 범위를 구하지 않고 답을 구할 수 있어. 물론 이것은 객관식이나 단답형에서 사용하면 시간 절약도 되고 정확한 답을 얻을 수 있어. 하지만 서술형이라면 위의 풀이처럼 풀어야 만점을 받을 수 있어. 수학은 항상 논리적으로 푸는 연습을 하는 게 중요해.

153 답 $-\frac{1}{k}$

1st 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 떠올려 보자.
$k\times(\sqrt{41}-\sqrt{42})^{25}=(\sqrt{41}+\sqrt{42})^{25}(\sqrt{41}-\sqrt{42})^{25}$
$=\{(\sqrt{41}+\sqrt{42})(\sqrt{41}-\sqrt{42})\}^{25}$
$=(41-42)^{25}=(-1)^{25}=-1$

2nd 0이 아닌 두 실수 A, B에 대하여 $AB=-1$이면 $A=-\frac{1}{B}$이지?
즉, $k\times(\sqrt{41}-\sqrt{42})^{25}=-1$이므로
$(\sqrt{41}-\sqrt{42})^{25}=-\frac{1}{k}$ $(\because k\neq 0)$

154 답 4

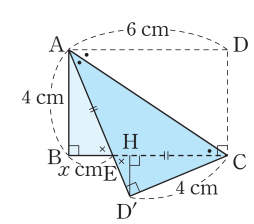
1st $f(1)+f(2)+\cdots+f(49)$를 간단히 계산하자.
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(49)$
$=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{50}}$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{50}-\sqrt{49})$
$=\sqrt{50}-1$

2nd (무리수)$=$(정수 부분)$+$(소수 부분)이야.
그런데 $7<\sqrt{50}<8$에서 $6<\sqrt{50}-1<7$이므로 $\sqrt{50}-1$의 정수 부분은 6이야.
$\therefore x=(\sqrt{50}-1)-6=\sqrt{50}-7$

3rd 무리수만 남기고 이항한 다음 제곱하여 정리하자.
$x=\sqrt{50}-7$이므로 $x+7=\sqrt{50}$
양변을 제곱하면 $(x+7)^2=50$
$x^2+14x+49=50 \qquad \therefore x^2+14x=1$
$\therefore x^2+14x+3=1+3=4$

155 답 $\frac{20}{13}$ cm

1st 먼저 어떤 삼각형이 합동인지 찾아보자.
$\triangle$ABE와 $\triangle$CD′E가 합동인지 살펴 보자.
직사각형 ABCD에서 대각선 AC를 접는 선으로 하였으므로
$\angle$DAC$=\angle$D′AC
$\overline{\text{AD}}$ // $\overline{\text{BC}}$이므로
$\angle$DAC$=\angle$ACB ($\because$ 엇각)
즉, $\triangle$AEC는 $\overline{\text{AE}}=\overline{\text{CE}}$인 이등변삼각형이야.



또, $\angle$ABE$=\angle$CD′E$=90^\circ$,
$\angle$AEB$=\angle$CED′ ($\because$ 맞꼭지각)이므로
$\triangle$ABE와 $\triangle$CD′E는 RHA 합동이야.

2nd 적절히 미지수로 둘 것을 정하고, 식을 세워 보자.
$\overline{\text{BE}}=x$ cm라 하면 $\overline{\text{D'E}}=x$ cm이고 $\overline{\text{CE}}=(6-x)$ cm
$\triangle$CD′E는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{\text{CE}}^2=\overline{\text{CD'}}^2+\overline{\text{D'E}}^2$에서
$(6-x)^2=4^2+x^2$, $36-12x+x^2=16+x^2$
$12x=20 \qquad \therefore x=\frac{5}{3}$
$\therefore \overline{\text{D'E}}=\frac{5}{3}$ cm, $\overline{\text{CE}}=6-x=6-\frac{5}{3}=\frac{13}{3}$(cm)

3rd 이제 $\overline{\text{D'H}}$의 길이를 구하자.
따라서 $\triangle\text{CD'E}=\frac{1}{2}\times\overline{\text{CE}}\times\overline{\text{D'H}}=\frac{1}{2}\times\overline{\text{CD'}}\times\overline{\text{D'E}}$이므로
$\frac{1}{2}\times\frac{13}{3}\times\overline{\text{D'H}}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{5}{3} \qquad \therefore \overline{\text{D'H}}=\frac{20}{13}$(cm)

D 인수분해

개념 체크 001~036 정답은 p. 3~4에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

문제편 p. 72

037 답 ③
$3x^2y-6x^2$의 공통인수가 $3x^2$이므로
$3x^2y-6x^2=3x^2(y-2)$
따라서 선택지 중 인수가 아닌 것은 ③이야.

038 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ
x^3-x^2의 공통인수는 x^2이므로 공통인수로 묶어 보면
$x^3-x^2=x^2(x-1)$
따라서 x^3-x^2의 인수는 1, x, $x-1$, x^2, $x(x-1)$, $x^2(x-1)$이므로 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ이 x^3-x^2의 인수야.

039 답 ⑤
주어진 다항식의 공통인수는 $x-1$이므로
$(x-1)(x-2)+(x+3)(x-1)$
$=(x-1)\{(x-2)+(x+3)\}$
$=(x-1)(2x+1)$

040 답 ①, ④
먼저 $ab(x-y)+b(y-x)$에서 공통인수가 있는지 찾아 보자.
$x-y$와 $y-x$는 공통인수가 아니라고 생각할지 모르지만
$y-x=-(x-y)$가 되잖아?
주어진 식을 공통인수 $b(x-y)$로 묶어 인수분해하면
$ab(x-y)+b(y-x)=ab(x-y)-b(x-y)$
$=b(x-y)(a-1)$
따라서 선택지 중 인수가 아닌 것은 ①, ④야.

041 답 $(x-5)(a+2b+c)$
(주어진 식)$=a(x-5)+2b(x-5)+c(x-5)$
$=(x-5)(a+2b+c)$

042 답 ④
$9x^2+24x+16=(3x)^2+2\times3x\times4+4^2=(3x+4)^2$
따라서 $a=3$, $b=4$이므로
$a+b=3+4=7$

오답피하기

완전제곱식이 되는 꼴을 보자.

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$2\times a\times b$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$-2\times a\times b$

043 답 ⑤
$x^2+12x+36=x^2+2\times x\times6+6^2=(x+6)^2$
따라서 선택지 중 인수인 것은 ⑤야.

044 답 $\left(\frac{5}{3}a-\frac{9}{2}b\right)^2$
$\frac{25}{9}a^2-15ab+\frac{81}{4}b^2$
$=\left(\frac{5}{3}a\right)^2-2\times\frac{5}{3}a\times\frac{9}{2}b+\left(\frac{9}{2}b\right)^2$
$=\left(\frac{5}{3}a-\frac{9}{2}b\right)^2$

045 답 ㄱ, ㄷ
ㄱ. $x^2-4x+4=x^2-2\times x\times2+2^2=(x-2)^2$
ㄴ. $x^2+x=x(x+1)$
ㄷ. $25x^2+10x+1=(5x)^2+2\times5x\times1+1^2=(5x+1)^2$
ㄹ. $2x^2-12x+36=2(x^2-6x+18)$
따라서 완전제곱식이 되는 것은 ㄱ, ㄷ이야.

046 답 ③
주어진 선택지는 모두 완전제곱식을 이용하여 인수분해가 되지만 부호를 주의깊게 봐야 해.
① $x^2-20xy+100y^2=x^2-2\times x\times10y+(10y)^2$
$=(x-10y)^2$ ← OK!
② $2x^2-16x+32=2(x^2-8x+16)$
$=2(x^2-2\times x\times4+4^2)$
$=2(x-4)^2$ ← OK!
③ $25x^2+60xy+36y^2=(5x)^2+2\times5x\times6y+(6y)^2$
$=(5x+6y)^2$ ← NO!
④ $x^2-2+\frac{1}{x^2}=x^2-2\times x\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ ← OK!
⑤ $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=x^2-2\times x\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$ ← OK!

047 답 ⑤
우선 주어진 식을 전개하여 정리해 보자.
$(x+4)(x-6)+k=x^2-2x-24+k$
일차항의 계수가 -2이므로 완전제곱식이 되려면 상수항은
$\left(\frac{-2}{2}\right)^2=1$이 되어야 해.
$-24+k=1$
$\therefore k=25$

048 답 ②
$(x-a+2)(x+5-2a)$가 완전제곱식이 되려면
$(x-a+2)(x+5-2a)=(x+\square)^2$인 꼴이어야 해.
$-a+2=5-2a$
$\therefore a=3$

049 답 14
$4x^2+12x+a=(bx+c)^2$에서
$4x^2+12x+a=(2x)^2+2\times2x\times3+a$이므로 $a=3^2=9$
즉, $4x^2+12x+9=(2x+3)^2$이므로 $b=2$, $c=3$
$\therefore a+b+c=9+2+3=14$

050 답 ④

$4x^2+(3k-3)xy+9y^2=(2x)^2+(3k-3)xy+(3y)^2$이 완전제곱식이 되려면 xy의 계수는 $2\times2\times3=12$ 또는 $-2\times2\times3=-12$이어야 해.

(i) $3k-3=12$에서 $3k=15$

$\therefore k=5$

(ii) $3k-3=-12$에서 $3k=-9$

$\therefore k=-3$

따라서 모든 k의 값의 합은 $5+(-3)=2$

오|답|피|하|기

완전제곱식에서는 부호에 주의해야 해!

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

051 답 30

$ax^2+24x+4=(bx+2)^2$에서 우변을 전개하여 계수를 비교하자.

$ax^2+24x+4=(bx+2)^2=b^2x^2+4bx+4$

일차항의 계수에서 $24=4b$

$\therefore b=6$

이차항의 계수에 b의 값을 대입하면

$a=b^2=6^2=36$

$\therefore a-b=36-6=30$

052 답 ④

$x^2-6x+9=(x-3)^2$, $x^2-4x+4=(x-2)^2$이지?

따라서 주어진 식은

$\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$

이때, $2<x<3$이면 $x-3<0$, $x-2>0$이므로

$\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x-2)^2}=-(x-3)-(x-2)$

$=-x+3-x+2=-2x+5$

오|답|피|하|기

그럼 $x<2$인 경우와 $x>3$인 경우, 각각 식이 어떻게 변하는지 알아볼까?

(i) $x<2$일 때 $x-3<0$, $x-2<0$이므로

$\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x-2)^2}=-(x-3)+(x-2)$

$=-x+3+x-2=1$

(ii) $x>3$일 때 $x-3>0$, $x-2>0$이므로

$\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x-2)^2}=(x-3)-(x-2)$

$=x-3-x+2=-1$

053 답 ②

$x^2-10x+25=(x-5)^2$이지?

$0<x<5$이면 $x-5<0$이므로

$\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-5)^2}$

$=x-(x-5)$

$=x-x+5=5$

054 답 ②

$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$, $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$이지?

$y<x<0$이므로 $x-y>0$, $x+y<0$이야.

$\therefore \sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2+2xy+y^2}=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(x+y)^2}$

$=x-y-(x+y)$

$=x-y-x-y=-2y$

055 답 $2x$

$x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}=\left(x+\frac{1}{6}\right)^2$, $x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}=\left(x-\frac{1}{6}\right)^2$이지?

$0<6x<1$에서 $0<x<\frac{1}{6}$이므로 $x+\frac{1}{6}>0$, $x-\frac{1}{6}<0$

$\therefore \sqrt{x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}}-\sqrt{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}}$

$=\sqrt{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2}$

$=x+\frac{1}{6}+\left(x-\frac{1}{6}\right)$

$=x+\frac{1}{6}+x-\frac{1}{6}=2x$

056 답 5

$\sqrt{x}=a-1$에서 양변을 제곱하면 $x=(a-1)^2$

이를 주어진 식에 대입하자.

$\sqrt{x+6a+3}+\sqrt{x-4a+8}$

$=\sqrt{(a-1)^2+6a+3}+\sqrt{(a-1)^2-4a+8}$

$=\sqrt{a^2-2a+1+6a+3}+\sqrt{a^2-2a+1-4a+8}$

$=\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$

여기서 $1<a<3$이므로 $a+2>0$, $a-3<0$

$\therefore \sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-3)^2}=a+2-(a-3)$

$=a+2-a+3=5$

057 답 ⑤

$4x^2-81=(2x)^2-9^2=(2x+9)(2x-9)$

$=(ax+b)(ax-b)$

따라서 $a=2$, $b=9$ ($\because$ a, b는 자연수)이므로

$a+b=2+9=11$

오|답|피|하|기

여기서는 a, b가 자연수라는 조건이 중요해.

그 조건이 없다면 $a=-2$, $b=-9$일 수도 있거든.

즉, $(-2x-9)(-2x+9)$도 가능하다는 거야.

058 답 ③

$3x^2-12y^2$에서 공통인수가 3이니 우선 묶어 보자.

$3x^2-12y^2=3(x^2-4y^2)$

$=3\{x^2-(2y)^2\}$

$=3(x+2y)(x-2y)$

059 답 $\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)$

$\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^2=\left(\frac{1}{3}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}b\right)^2$

$=\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)$

060 답 ④

공통인수 a로 묶자.

$ax^2-4a=a(x^2-4)=a(x^2-2^2)=a(x+2)(x-2)$

인수는 1, a, $x+2$, $x-2$, $a(x+2)$, $a(x-2)$, $(x+2)(x-2)$, $a(x+2)(x-2)$이지?

따라서 인수가 아닌 것은 ④ $x-4$야.

061 답 ③

$(2x+1)^2-(x-2)^2=\{(2x+1)+(x-2)\}\{(2x+1)-(x-2)\}$
$=(2x+1+x-2)(2x+1-x+2)$
$=(3x-1)(x+3)$
$=(3x+a)(x+b)$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로
$a+2b=-1+2\times3=5$

062 답 ④

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=36$에 조건 $x+y=18$을 대입하면
$x-y=2$
$x+y=18$, $x-y=2$를 연립하여 풀면
$x=10$, $y=8$

063 답 ⑤

x^8이 나온다고 당황하지 말고, $x^8=(x^4)^2$을 생각하면 간단해.

$x^8-1=(x^4)^2-1^2=(x^4+1)(x^4-1)$
$=(x^4+1)\{(x^2)^2-1^2\}$
$=(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$
$=(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

따라서 선택지 중 x^8-1의 인수가 아닌 것은 ⑤ x^6-1이야.

오|답|피|하|기

이런 유형의 문제가 나왔을 때 지수의 숫자가 크다고 해서 겁먹을 필요는 전혀 없어. x의 지수가 2의 배수라면 얼마든지 a^2-b^2의 인수분해 공식을 쓸 수 있으니까. 지수가 더 이상 2로 나누어지지 않을 때까지 공식을 사용해서 인수분해를 하면 되는 거야.

064 답 24

$256=16^2$이지?

$a^4-256b^4=(\underline{a^2})^2-(\underline{16b^2})^2=(\underline{a^2}+\underline{16b^2})(\underline{a^2}-\underline{16b^2})$
$=(a^2+16b^2)\{a^2-(4b)^2\}$
$=(a^2+16b^2)(a+4b)(a-4b)$

따라서 □ 안에 들어갈 세 자연수는 순서대로 16, 4, 4이므로 그 합은 24야.

065 답 ⑤

적절히 항을 묶어 공통인수를 찾아보자.

$x^2(y^2-1)-y^2+1$
$=x^2(\underline{y^2-1})-(\underline{y^2-1})=(\underline{y^2-1})(x^2-1)$
$=(y+1)(y-1)(x+1)(x-1)$

따라서 선택지 중 인수가 아닌 것은 ⑤ $x-y$지!

066 답 $(a+b-2)(a-b)$

새로운 연산 기호 $*$은 앞의 수에서 뒤의 수를 뺀 후 제곱하라는 거야. 간단하지? 해보자.

$a*1=(a-1)^2$, $b*1=(b-1)^2$이므로

$(a*1)-(b*1)=(\underline{a-1})^2-(\underline{b-1})^2$
$=\{(\underline{a-1})+(\underline{b-1})\}\{(\underline{a-1})-(\underline{b-1})\}$
$=(a-1+b-1)(a-1-b+1)$
$=(a+b-2)(a-b)$

067 답 ④

$(x+3)(x+2)-2=x^2+5x+6-2=x^2+5x+4$
$=(x+1)(x+4)$
$=(x+a)(x+b)$

이때, $a>b$이므로 $a=4$, $b=1$이야.
$\therefore a^2b=16\times1=16$

068 답 ③

두 수의 곱이 상수항이고 두 수의 합이 일차항의 계수가 되는 수를 찾아보자.

곱이 -21이 되는 수는 -3, 7 또는 3, -7이잖아. 이 중 합이 -4가 되는 두 수는 3, -7이야.

$\therefore x^2-4x-21=(x+3)(x-7)$

따라서 구하는 두 일차식의 합은
$(x+3)+(x-7)=2x-4$

069 답 ③

① $x^2-x-2=(\underline{x+1})(x-2)$ ② $x^2-2x-3=(\underline{x+1})(x-3)$
③ $x^2-4=(x+2)(x-2)$ ④ $x^2+4x+3=(\underline{x+1})(x+3)$
⑤ $x^2+2x+1=(\underline{x+1})^2$

070 답 ②

$x^2+Ax-8=(x+B)(x+4)$
$=x^2+(4+B)x+4B$

에서 계수끼리 비교하면

$\begin{cases} A=4+B & \cdots ㉠ \\ -8=4B & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $B=-2$이고 이것을 ㉠에 대입하면 $A=2$
$\therefore B-A=-2-2=-4$

오|답|피|하|기

우변의 식에서 상수항은 $4B$이겠지? 각 인수들에서 상수항들끼리만 곱해져야 상수항에 대한 식이 나올테니까! 그렇다면 $-8=4B$이니까 $B=-2$를 바로 얻어낼 수 있을 거야.
그러면 $x^2+Ax-8=(x-2)(x+4)$에서 A의 값 정도는 쉽게 구할 수 있겠지?

071 답 ②

곱이 -14인 두 정수는 -14, 1 또는 -7, 2 또는 -2, 7 또는 -1, 14이므로 A의 값이 될 수 있는 것은 -13, -5, 5, 13이야.

072 답 ③

$(x-2)(5x-1)+4=5x^2-11x+6$
$=(5x-6)(x-1)$

$5x \quad -6 \rightarrow -6x$
$x \quad -1 \rightarrow -5x\ (+$
$-11x$

따라서 두 일차식의 합은 $(5x-6)+(x-1)=6x-7$

073 답 ⑤

$2x^2-3x-9=(2x+3)(x-3)$
$=(ax+b)(cx+d)$

$2x \quad 3 \rightarrow 3x$
$x \quad -3 \rightarrow -6x\ (+$
$-3x$

$a>0$, $c>0$인 조건을 이용하면
$a+b+c+d=2+3+1+(-3)=3$

오|답|피|하|기

여기서는 a, b, c, d의 값들을 정확히는 알지 못해도 합을 구할 수 있어. 그렇지만 $a>0$, $c>0$인 것은 꼭 염두해 두어야 해. 음수인 경우는 값이 달라지니까.
$2x^2-3x-9=(-2x-3)(-x+3)$
이렇게도 인수분해가 가능하거든!

074 답 ②

$4x^2-22x+24=2(2x^2-11x+12)$
$=2(2x-3)(x-4)$이므로

$$\begin{array}{lll} 2x & -3 & \to -3x \\ x & -4 & \to \underline{-8x}(+ \\ & & \ \ -11x \end{array}$$

인수는 1, 2, $2x-3$, $x-4$, $2(2x-3)$, $2(x-4)$, $(2x-3)(x-4)$, $2(2x-3)(x-4)$야.
따라서 선택지 중 인수가 아닌 것은 ②야.

075 답 0

$5x^2-8xy-4y^2=(5x+2y)(x-2y)$
$=(5x+my)(x+ny)$

$$\begin{array}{lll} 5x & 2y & \to 2xy \\ x & -2y & \to \underline{-10xy}(+ \\ & & \ \ -8xy \end{array}$$

따라서 $m=2$, $n=-2$이므로
$m+n=2+(-2)=0$

076 답 ②

$2x^2+ax+b=(2x-1)(x-2)$이니까 우변을 전개하고 계수를 비교하여 a, b의 값을 구하면 돼.
$(2x-1)(x-2)=2x^2-5x+2$
이것이 $2x^2+ax+b$와 같으니까 $a=-5$, $b=2$
$\therefore a+b=-5+2=-3$

077 답 ④

① $2x^2-7x+3=(2x-1)(\underline{x-3})$
② $2x^2-x-15=(2x+5)(\underline{x-3})$
③ $4x^2-11x-3=(4x+1)(\underline{x-3})$
④ $3x^2+8x-3=(x+3)(3x-1)$
⑤ $2x^2-13x+21=(2x-7)(\underline{x-3})$
따라서 $x-3$을 인수로 갖지 않는 것은 ④야.

오|답|피|하|기

$x-3$을 인수로 갖는 지에 대해서는 인수분해를 하지 않아도 알 수 있는 방법이 있어. $x=3$을 대입하여 그 다항식이 0이 나오면 $x-3$을 인수로 갖게 돼!
예를 들어, ② $2x^2-x-15$에 $x=3$을 대입하면 $18-3-15=0$이 되지? 그러면 $2x^2-x-15$는 $x-3$을 인수를 가져.
그러나 ④ $3x^2+8x-3$에 $x=3$을 대입하면 $27+24-3=48\neq0$이므로 $x-3$을 인수로 갖지 않아!
이 방법은 고등학교 때 '인수정리'라는 개념으로 공부할 거야. 미리 알고 있으면 도움이 되겠지?

078 답 $\frac{1}{4}(x+2)(3x-4)$

계수가 분수가 나올 경우 $\frac{1}{4}$로 묶어 계수를 정수로 만들자.

$\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2=\frac{1}{4}(3x^2+2x-8)$
$=\frac{1}{4}(x+2)(3x-4)$

$$\begin{array}{lll} x & 2 & \to 6x \\ 3x & -4 & \to \underline{-4x}(+ \\ & & \ \ 2x \end{array}$$

079 답 ①

$7x^2-(3a-1)x-12=(x+b)(7x+6)$
$=7x^2+(6+7b)x+6b$
이므로 $-(3a-1)=6+7b$, $-12=6b$
$-12=6b$ $\quad\therefore b=-2$
$-3a+1=6+7\times(-2)$, $-3a+1=-8$
$-3a=-9$ $\quad\therefore a=3$
$\therefore ab=3\times(-2)=-6$

080 답 ①

$(x-2)(x+9)+(x-4)^2+4x-18$
$=x^2+7x-18+x^2-8x+16+4x-18$
$=2x^2+3x-20$
$=(x+4)(2x-5)$

$$\begin{array}{lll} x & 4 & \to 8x \\ 2x & -5 & \to \underline{-5x}(+ \\ & & \ \ 3x \end{array}$$

081 답 ③

이 문제는 문자 x 말고 또 다른 문자 a가 있어서 좀 어렵지만 문자 a를 숫자처럼 생각하고, $a^2-1=(a+1)(a-1)$로 놓고 풀어 보자.
$2x^2+(3a+1)x+a^2-1$
$=2x^2+(3a+1)x+(a+1)(a-1)$
$=(2x+a-1)(x+a+1)$

$$\begin{array}{lll} 2x & (a-1) & \to (a-1)x \\ x & (a+1) & \to \underline{2(a+1)x}(+ \\ & & \ \ (3a+1)x \end{array}$$

082 답 ②, ④

주어진 식을 모두 인수분해해야겠지?
① $x^2+18x+81=x^2+2\times x\times9+9^2=(x+9)^2$ ← OK!
② $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{9}y^2=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{4}{9}y^2\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}y\right)\left(x-\frac{2}{3}y\right)$ ← NO!
③ $x^2+5x-14=(x+7)(x-2)$ ← OK!
④ $6x^2-11x-2=(6x+1)(x-2)$ ← NO!
⑤ $9x^3-15x^2y+6xy^2=3x(3x^2-5xy+2y^2)$
$=3x(x-y)(3x-2y)$ ← OK!
따라서 옳지 않은 것은 ②, ④야.

083 답 ⑤

① $4x^2+\boxed{4}x+1=(2x+1)^2$
② $x^2+x-20=(x+5)(x-\boxed{4})$
③ $9x^2-16=(3x+\boxed{4})(3x-4)$
④ $10x^2+13x+\boxed{4}=(2x+1)(5x+4)$
⑤ $12x^2-x-6=(\boxed{3}x+2)(4x-3)$
따라서 ①, ②, ③, ④ 4이고 ⑤ 3이므로 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤야.

084 답 11

$x^2-6x+9=(x-3)^2$ $\quad\therefore a=3$
$x^2-4=(x+2)(x-2)$ $\quad\therefore b=2$
$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$ $\quad\therefore c=5$
$2x^2+x-3=(x-1)(2x+3)$ $\quad\therefore d=1$
$\therefore a+b+c+d=3+2+5+1=11$

085 답 ⑤

$2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$
$4x^2+4x-15=(2x-3)(2x+5)$
이므로 두 다항식의 공통인 인수는 $2x-3$이야.

086 답 ①

$-2a^2b+18b=-2b(a^2-9)=-2b(a+3)(a-3)$

$3a^2-7a-6=(3a+2)(a-3)$

이므로 두 다항식의 공통인 인수는 $a-3$이야.

087 답 ③

ㄱ. $x^3-x=x(x^2-1)=x(\underline{x+1})(x-1)$

ㄴ. $x^2-2x+1=(x-1)^2$

ㄷ. $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$

ㄹ. $-5x^2-5x=-5x(\underline{x+1})$

ㅁ. $4x^2+7x-2=(x+2)(4x-1)$

ㅂ. $-3x^2+2x+5=-(3x^2-2x-5)=-(\underline{x+1})(3x-5)$

따라서 $x+1$을 인수로 갖는 것은 ㄱ, ㄹ, ㅂ이야.

088 답 $x-2$

$x^3y-x^2y-2xy=xy(x^2-x-2)$

$=xy(x+1)(\underline{x-2})$

$(x+3)^2-6(x+4)+11=x^2+6x+9-6x-24+11$

$=x^2-4$

$=(x+2)(\underline{x-2})$

$(2x-1)x^2-4(2x-1)x+8x-4$

$=(2x-1)x^2-4(2x-1)x+4(2x-1)$

$=(2x-1)(x^2-4x+4)=(2x-1)(\underline{x-2})^2$

따라서 세 다항식의 1이 아닌 공통인 인수는 $x-2$야.

089 답 ①

$10x^2+mx-6$이 $5x+2$를 인수로 가지고, 이차항의 계수가 10이므로 $10x^2+mx-6=(5x+2)(2x+p)$로 놓고 우변을 전개하자.

$(5x+2)(2x+p)=10x^2+(5p+4)x+2p$

이것의 우변이 $10x^2+mx-6$과 같아야 하므로

$2p=-6 \qquad \therefore p=-3$

$\therefore m=5p+4=5\times(-3)+4=-11$

090 답 -1

이차식 $x^2-ax-30$이 $x+6$으로 나누어떨어진다는 것은 $x^2-ax-30$이 $x+6$을 인수로 갖는다는 의미와 같아. 즉,

$x^2-ax-30=(x+6)(x+A)$

$=x^2+(6+A)x+6A$

$6A=-30 \qquad \therefore A=-5$

따라서 $6+A=-a$이므로

$-a=6+(-5)$

$\therefore a=-1$

091 답 ③

세 이차식의 공통인 인수는 $2x^2-8$과 x^2-x-2의 공통인 인수와 같지?

$2x^2-8=2(x^2-4)=2(x+2)(x-2)$

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

즉, 두 이차식의 공통인 인수가 $x-2$이므로 세 이차식의 공통인 인수도 $x-2$야.

$\therefore a=-2$

$3x^2+bx-4$가 $x-2$를 인수로 가지므로

$3x^2+bx-4=(x-2)(3x+A)$로 놓으면

$3x^2+bx-4=3x^2+(A-6)x-2A$

$-2A=-4 \qquad \therefore A=2$

$A-6=b \qquad \therefore b=2-6=-4$

$\therefore a+b=-2+(-4)=-6$

092 답 ④

$x^2+11x+k=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$이므로

$a+b=11$, $ab=k$

즉, 두 자연수 a, b에 대하여 합이 11이고 곱이 k가 되어야 하므로

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
k	10	18	24	28	30	30	28	24	18	10

따라서 k의 최댓값은 30이야.

093 답 $(x-2)(x-3)$

미현이는 일차항의 계수를 잘못 보고 $(x+2)(x+3)$으로 인수분해하였으므로 $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$에서 상수항은 제대로 보았으니 상수항은 6이야.

또, 종국이는 상수항을 잘못 보고 $(x-1)(x-4)$로 인수분해하였으므로 $(x-1)(x-4)=x^2-5x+4$에서 일차항의 계수는 제대로 보았으니 일차항의 계수는 -5야.

따라서 제대로 본 이차식은 x^2의 계수가 1이므로 x^2-5x+6이지?

$\therefore x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

094 답 ②

일차항의 부호를 반대로 본 이차식은 $(x+3)(x-2)=x^2+x-6$이므로 올바른 이차식은 x^2-x-6이야.

따라서 인수분해하면 $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

095 답 16

일차항의 계수를 잘못 본 것은 $(x-2)(x+14)=x^2+12x-28$이므로 바르게 본 상수항은 -28이야.

또, 상수항을 잘못 본 것은 $(x-3)(x-9)=x^2-12x+27$이므로 바르게 본 일차항의 계수는 -12야.

따라서 올바른 이차식은 $x^2-12x-28$이고 이것이 x^2+ax+b와 같아야 하므로

$a=-12$, $b=-28$

$\therefore a-b=-12-(-28)=16$

096 답 0

태연이는 이차항의 계수만 정확히 보고 인수분해하였으므로

$(2x-1)(x+2)=2x^2+3x-2$에서 이차항의 계수는 2,

수영이는 일차항의 계수만 정확히 보고 인수분해하였으므로

$(3x-2)(x-1)=3x^2-5x+2$에서 일차항의 계수는 -5,

유나는 상수항만 정확히 보고 인수분해하였으므로

$(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$에서 상수항은 -3

즉, 바르게 본 이차식은 $2x^2-5x-3$이고 이를 인수분해하면

$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)=(x+p)(qx+r)$

따라서 $p=-3$, $q=2$, $r=1$이므로

$p+q+r=-3+2+1=0$

097 답 ③

각 건물의 넓이를 구하자.
본관 : x^2, 휴게실 : x, 기숙사 : $2x$, 식당 : $3x$, 화단 : $4+4=8$
따라서 건물의 넓이의 합은 $x^2+x+2x+3x+8=x^2+6x+8$이고 이를 인수분해하면 $x^2+6x+8=(x+4)(x+2)$이므로 그림의 건물들의 넓이의 합과 같은 넓이를 가지는 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 합은 $(x+4)+(x+2)=2x+6$이야.

098 답 $4a+12$

정사각형 ABCD의 넓이는 $a^2+3a+3a+9=a^2+6a+9$
$\therefore a^2+6a+9=(a+3)^2$
따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 $a+3$이므로 둘레의 길이는 $4(a+3)=4a+12$야.

099 답 $(x+1)(x+3)$

$A=x^2+x+x+x+x+1+1+1=x^2+4x+3$
따라서 다항식 A를 인수분해하면
$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$이야.

100 답 ⑤

주어진 직사각형의 넓이의 합은
$x^2+x^2+x+x+x+x+x+1+1+1=2x^2+5x+3$
위 식을 인수분해하면 $2x^2+5x+3=(2x+3)(x+1)$
따라서 큰 직사각형의 둘레의 길이는
$2\{(2x+3)+(x+1)\}=2(3x+4)=6x+8$

101 답 $3a+2b$

$6a^2+19ab+10b^2$을 인수분해하면 나머지 세로의 길이를 알 수 있어.
$6a^2+19ab+10b^2=(2a+5b)(3a+2b)$
따라서 구하는 세로의 길이는 $3a+2b$야.

102 답 $(4x-5)$ m

$12x^2-7x-10=(3x+2)(4x-5)$
따라서 구하는 가로의 길이는 $(4x-5)$ m가 돼.

103 답 ⑤

직사각형의 넓이는 가로의 길이와 세로의 길이의 곱으로 구해지지?
$5x^2-13x+8=(5x-8)(x-1)$
즉, 가로의 길이가 $x-1$이므로 세로의 길이는 $5x-8$이야.
따라서 가로의 길이와 세로의 길이의 합은
$(x-1)+(5x-8)=6x-9$

104 답 $2a-1$

$\frac{1}{2}\times\{(a+1)+(a+5)\}\times(\text{높이})=2a^2+5a-3$에서
$2a^2+5a-3=(a+3)(2a-1)$이므로
$(a+3)\times(\text{높이})=(a+3)(2a-1)$
$\therefore (\text{높이})=2a-1$

[다른 풀이]

사다리꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\{(\text{윗변의 길이})+(\text{아랫변의 길이})\}\times(\text{높이})$이므로 $2a^2+5a-3=\frac{1}{2}\times\{(a+1)+(a+5)\}\times(\text{높이})$
좌변과 우변의 a^2의 계수가 같아야 하므로 높이를 $2a+A$로 두자.
$2a^2+5a-3=\frac{1}{2}\times(2a+6)(2a+A)$
$2(2a^2+5a-3)=(2a+6)(2a+A)$
$4a^2+10a-6=4a^2+(2A+12)a+6A$에서
$-6=6A \quad \therefore A=-1$
따라서 높이는 $2a+A=2a-1$이야.

105 답 24 cm

두 색종이의 넓이의 차는 $(a^2-b^2)\text{ cm}^2$이므로
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=150$
둘레의 길이의 합이 100 cm이므로
$4(a+b)=100$
$a+b=25$
$25(a-b)=150$
$\therefore a-b=6$
따라서 두 색종이의 둘레의 길이의 차는
$4a-4b=4(a-b)$
$=4\times6=24(\text{cm})$

106 답 $x(x+10)\pi$

x만큼 늘인 원의 반지름의 길이는 $5+x$이니까 색칠한 부분의 넓이는 큰 원의 넓이에서 작은 원의 넓이를 빼면 되므로
$(5+x)^2\pi-5^2\pi$
$=(25+10x+x^2-25)\pi$
$=(x^2+10x)\pi=x(x+10)\pi$

107 답 ①

한 변의 길이가 x m인 정사각형에서 가로의 길이를 a m만큼 늘이고 세로의 길이를 b m만큼 줄인 직사각형의 넓이는
$(x+a)(x-b)=x^2+\underbrace{3x-10}_{\text{늘어난 넓이}}=(x+5)(x-2)$
문제의 조건에서 a, b는 자연수이므로
$a=5$, $b=2$
$\therefore a+b=5+2=7$

108 답 ⑤

색칠한 부분의 넓이는 한 변의 길이가 x인 정사각형의 넓이에서 한 변의 길이가 $x-2y$인 작은 정사각형의 넓이를 뺀 것과 같아.
$x^2-(x-2y)^2=x^2-(x^2-4xy+4y^2)$
$=4xy-4y^2$
$=4y(x-y)$
따라서 선택지 중 인수인 것은 ⑤ $x-y$이지!

109 답 $12x+8$

도형 (가)의 넓이는
$(3x+2)^2-3^2=(3x+2+3)(3x+2-3)$
$=(3x+5)(3x-1)$
즉, 도형 (나)의 넓이가 $(3x+5)(3x-1)$이므로 도형 (나)의 가로의 길이는 $3x+5$야.
따라서 도형 (나)의 둘레의 길이는
$2\{(3x+5)+(3x-1)\}=12x+8$이야.

D

110 답 ③

1st 정수 a가 나올 수 있는 경우를 따져 봐.

x^2의 계수 10은 1과 10 또는 2와 5의 곱으로, 상수항 -7은 -1과 7, 1과 -7의 곱으로 나타낼 수 있으므로 순서를 바꾸는 것까지 생각해 주면

$\begin{array}{ccc}1 & \times & 1\\ 10 & & -7\end{array}$ $\begin{array}{ccc}1 & \times & -7\\ 10 & & 1\end{array}$ $\begin{array}{ccc}1 & \times & -1\\ 10 & & 7\end{array}$ $\begin{array}{ccc}1 & \times & 7\\ 10 & & -1\end{array}$

$\begin{array}{ccc}2 & \times & 1\\ 5 & & -7\end{array}$ $\begin{array}{ccc}2 & \times & -7\\ 5 & & 1\end{array}$ $\begin{array}{ccc}2 & \times & -1\\ 5 & & 7\end{array}$ $\begin{array}{ccc}2 & \times & 7\\ 5 & & -1\end{array}$

따라서 a의 값은 3, -69, -3, 69, -9, -33, 9, 33의 8개야.

오답피하기

정수 a가 나오는 경우를 따져줄 때, 부호를 결정하는 것에 유의해야 해. 두 수의 곱이 -7이면 -1과 7, 1과 -7인 경우도 각각 생각해 주어야 하고, 마찬가지로 두 수의 곱이 10이 나오는 경우도 1과 10, 2와 5인 경우도 가짓수를 빼먹지 않도록 해야지.
그런데 두 수의 곱이 10이 나오는 경우에는 -1과 -10, -2와 -5로 생각해야 하지 않을까? 아니야.
예를 들어, $\begin{array}{ccc}-1 & \times & 1\\ -10 & & -7\end{array}$을 생각해 보자. 이것은 $\begin{array}{ccc}1 & \times & -1\\ 10 & & 7\end{array}$과 같아. 그 이유는 $(-x+1)(-10x-7)=(x-1)(10x+7)$과 같기 때문이지.

111 답 ③

1st 상수항을 두 수의 곱으로 나타낼 때 그 합이 -2가 되는 수를 찾아보자.

$x^2-2x-a=(x+\alpha)(x-\beta)$ (단, α, β는 자연수)로 나타내면
$\alpha-\beta=-2$, $\alpha\beta=a$야.
$\therefore a=1\times3,\ 2\times4,\ 3\times5,\ 4\times6,\ 5\times7,\ 6\times8$ ($\because 1<a<50$)
따라서 자연수 a는 3, 8, 15, 24, 35, 48의 6개야.

112 답 ③

1st $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$ 꼴인 것을 찾아보자.

① $1+2y+y^2=(y+1)^2$
② $x^2-12xy+36y^2=x^2-2\times x\times 6y+(6y)^2=(x-6y)^2$
④ $16x^2-8xy+y^2=(4x)^2-2\times4x\times y+y^2=(4x-y)^2$
⑤ $x^2-8x+16=(x-4)^2$

113 답 ④

1st $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$ 꼴인 것을 찾아보자.

① $\frac{1}{4}x^2+x+1=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\times\frac{1}{2}x\times1+1^2$
$=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$
② $a^2+4a+4=(a+2)^2$
③ $3x^2-12xy+12y^2=3(x^2-4xy+4y^2)$
$=3\{x^2-2\times x\times 2y+(2y)^2\}$
$=3(x-2y)^2$
⑤ $9x^2-12xy+4y^2=(3x)^2-2\times3x\times2y+(2y)^2$
$=(3x-2y)^2$

114 답 ③

1st $a^2+\square+b^2$이 완전제곱식이면 $\square=\pm2ab$야.

$25x^2+(k-1)x+9=(5x)^2+(k-1)x+3^2$
이것이 완전제곱식이 되기 위해서는
$k-1=\pm2\times5\times3$
$\therefore k=-29$ ($\because k<0$)

오답피하기

주어진 식이 완전제곱식이 되려면 $(5x)^2+(k-1)x+3^2$이므로 일차항은 $(k-1)x=\pm2\times5x\times3$에서 k의 값이 두 개 나올 수 있지? 그런데 조건에서 $k<0$이라 했으므로 $k-1=-30$일 때만 만족하게 되지.

115 답 ⑤

1st 완전제곱식이 되려면 x의 계수를 2로 나눈 것의 제곱이 상수항이 되어야 해.

$3x^2-10x+A=3\left(x^2-\frac{10}{3}x+\frac{A}{3}\right)$
완전제곱식이 되기 위해서는
$\frac{A}{3}=\left\{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{10}{3}\right)\right\}^2=\frac{25}{9}$
$\therefore A=\frac{25}{3}$

오답피하기

x^2+ax+b가 완전제곱식이 될 조건이 헷갈리지? 꼭 정리해 놓자.
(1) a가 주어졌을 때, $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$
(2) $b(b>0)$가 주어졌을 때, $a=\pm2\sqrt{b}$
이 두 가지 방법만 알고 있으면 거의 다 아는 거야.

116 답 $2x-5$

1st $2<x<3$인 범위에서 근호 안의 식의 부호를 따져 보자.

$4-4x+x^2=x^2-4x+4=(x-2)^2$
$9-6x+x^2=x^2-6x+9=(x-3)^2$
$2<x<3$에서 $x-2>0$, $x-3<0$이므로
(주어진 식)$=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x-3)^2}$
$=x-2+x-3$
$=2x-5$

오답피하기

이 문제는 x의 값의 범위가 중요해.
$2<x<3$일 때 $x-2>0$, $x-3<0$
$x<2$일 때 $x-2<0$, $x-3<0$
$x>3$일 때 $x-2>0$, $x-3>0$
이므로 각각의 경우에 따라 답이 달라짐에 유의해야 해.

117 답 ②

1st x의 값의 범위를 잘 보고 근호 안의 식의 부호를 따져 보자.

$2<x<3$일 때 $x>0$, $x-2>0$, $x-3<0$
$\therefore \sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$
$=\sqrt{x^2}-\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$
$=x-(x-2)-(x-3)$
$=x-x+2-x+3$
$=-x+5$

118 답 ①

1st 두 수의 곱 bc가 이차식의 상수항이 됨을 알고 따져 보자.

$x^2+ax+15=(x+b)(x+c)$에서

$x^2+ax+15=x^2+(b+c)x+bc$이므로

$bc=15,\ a=b+c$

2nd 표로 작성하여 a의 값을 살펴보자.

b	1	15	-1	-15	3	5	-3	-5
c	15	1	-15	-1	5	3	-5	-3
a	16	16	-16	-16	8	8	-8	-8

따라서 a의 최솟값은 -16이야.

오답피하기

두 수의 곱이 $bc=15$라고 생각할 때 조건에서 b, c가 정수라 했으므로 반드시 둘 다 음수가 되는 경우도 있다는 걸 잊지마. 그렇지 않으면 최솟값이 달라지니까.

119 답 최댓값 : 49, 최솟값 : 14

1st 두 수의 곱 ab가 48일 때, 그 합 $A=a+b$가 되는 수들을 따져 봐.

$x^2+Ax+48=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$이므로

$A=a+b,\ ab=48$

a, b가 모두 양의 정수이므로

a	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
b	48	24	16	12	8	6	4	3	2	1
A	49	26	19	16	14	14	16	19	26	49

따라서 A의 최댓값은 49, 최솟값은 14야.

120 답 ②

1st 주어진 두 다항식을 각각 인수분해하자.

$(x-2)^2-1=x^2-4x+4-1=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$2x^2+x-3=(2x+3)(x-1)$

따라서 두 다항식의 공통인 인수는 $x-1$이야.

121 답 ②

1st 주어진 다항식을 각각 인수분해하자.

① $2x^2-13x+21=(2x-7)(x-3)$

② $2x^2+3x-9=(2x-3)(x+3)$

③ $3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)$

④ $2x^2-7x+3=(2x-1)(x-3)$

⑤ $3x^2+x-30=(3x+10)(x-3)$

따라서 ①, ③, ④, ⑤ 의 공통인 인수는 $x-3$이지만 ②는 $x-3$을 인수로 갖지 않아.

122 답 ④

1st 주어진 다항식을 두 일차식의 곱의 꼴로 나타내자.

$x-1$이 $2x^2-6x+m$의 인수이므로

$2x^2-6x+m=(x-1)(2x+A)$로 나타낼 수 있지?

2nd 계수 비교를 하여 상수 m의 값을 구해.

$2x^2-6x+m=2x^2+(A-2)x-A$에서

$A-2=-6 \qquad \therefore A=-4$

따라서 $-A=m$이므로

$m=-(-4)=4$

123 답 7

1st 나누어떨어짐은 인수가 된다고 생각하자.

$5x^2+Ax-6$이 $5x-3$으로 나누어떨어지므로 $5x^2+Ax-6$은 $5x-3$을 인수로 가져.

$5x^2+Ax-6=(5x-3)(x+B)=5x^2+(5B-3)x-3B$

계수를 비교하면

$-3B=-6 \qquad \therefore B=2$

따라서 $5B-3=A$이므로

$A=5\times2-3=7$

124 답 ①

1st 주어진 다항식을 인수분해해보자.

② $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

③ $x^2+x+\frac{1}{4}=x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

④ $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

⑤ $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

그런데 ① x^2-4x-4는 유리수의 범위에서 인수분해되지 않아.

125 답 ①

1st 주어진 다항식을 인수분해하자.

② $100-\frac{1}{64}x^2=10^2-\left(\frac{1}{8}x\right)^2=\left(10+\frac{1}{8}x\right)\left(10-\frac{1}{8}x\right)$

③ $\frac{1}{4}x^2+2x+4=\frac{1}{4}(x^2+8x+16)=\frac{1}{4}(x+4)^2$

④ $10x^2-3x-1=(5x+1)(2x-1)$

⑤ $x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(3x^2+5x-2)=\frac{1}{3}(x+2)(3x-1)$

그런데 ① $25x^2-8$은 유리수의 범위에서 인수분해되지 않아.

126 답 ⑤

1st 제대로 본 x의 계수와 상수항을 찾자.

$(x+1)(x-8)=x^2-7x-8$에서 x의 계수를 잘못 보았으므로 올바른 상수항은 -8

또, $(x+8)(x-6)=x^2+2x-48$에서 상수항을 잘못 보았으므로 올바른 x의 계수는 2

2nd 올바른 이차식을 구하여 인수분해하자.

즉, 바르게 본 이차식은 x^2+2x-8이지?

$\therefore x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

오답피하기

이런 긴 문장의 문제는 어렵다고 생각할지 모르지만 제대로 본 항만 잘 알고 있으면 아주 쉽게 풀 수 있지. 즉, 이런 유형의 문제는 잘못 본 것에 집중하지 말고 제대로 본 것에 집중하자!

127 답 18

1st 제대로 본 x의 계수와 상수항을 찾자.

$(x-3)^2=x^2-6x+9$에서 상준이는 상수항은 제대로 보았으므로 상수항은 9

$(x+7)(x-1)=x^2+6x-7$에서 혜수는 x의 계수는 제대로 보았으므로 x의 계수는 6

2nd 올바른 이차식을 인수분해하자.

즉, 바르게 본 이차식은 $x^2+6x+9=(x+3)^2=(x+c)^2$

따라서 $a=6$, $b=9$, $c=3$이므로

$a+b+c=6+9+3=18$

128 답 ⑤

1st 직사각형의 넓이를 인수분해하자.

$8x^2-2x-3=(2x+1)(4x-3)$

따라서 세로의 길이는 $2x+1$이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$2\{(4x-3)+(2x+1)\}=2(6x-2)=12x-4$

오답피하기

직사각형의 넓이를 인수분해하여 세로의 길이는 쉽게 구할 수 있으나 둘레의 길이를 구할 때 가로, 세로의 길이를 1번만 더해 실수하는 경우가 있어. 직사각형의 둘레의 길이는 가로, 세로의 길이를 2번씩 더하는 거 잊지마.

129 답 ⑤

1st 직육면체의 부피를 이용하여 높이를 구하자.

$10x^2+14x-12=2(5x^2+7x-6)=2(x+2)(5x-3)$

따라서 직육면체의 높이는 $5x-3$이야.

2nd 겉넓이를 구하자.

∴ (직육면체의 겉넓이)

$=2\{2(x+2)+(x+2)(5x-3)+2(5x-3)\}$

$=2(2x+4+5x^2+7x-6+10x-6)$

$=2(5x^2+19x-8)=10x^2+38x-16$

130 답 $(x+2)(3x+8)$

1st $<a, b, c>$의 정의에 따라 $<x, 2, -7x>$와 $<3, -2x, 4>$의 식부터 구해 보자.

$<x, 2, -7x>=(x+2)\{2-(-7x)\}=(x+2)(7x+2)$

$<3, -2x, 4>=\{3+(-2x)\}(-2x-4)=(3-2x)(-2x-4)$

$=2(2x-3)(x+2)$

2nd 주어진 식을 정리하여 인수분해하면 끝!!

∴ $<x, 2, -7x>-<3, -2x, 4>$

$=\underline{(x+2)}(7x+2)-2(2x-3)\underline{(x+2)}$ ← 공통인수 $x+2$

$=(x+2)\{(7x+2)-2(2x-3)\}$

$=(x+2)(7x+2-4x+6)=(x+2)(3x+8)$

오답피하기

$<x, 2, -7x>-<3, -2x, 4>$를 인수분해할 때, 두 식을 각각 전개하여 식을 정리한 후 인수분해해도 돼.
하지만 전개하다 보면 문제 푸는 과정이 길어져서 실수할 수도 있거든. 이 문제처럼 식을 정리하는 과정에서 두 다항식의 공통인수가 보이는 경우는 전개하지 않고 바로 인수분해하는 것이 편리해.
이러한 문제들은 뒤에 배우는 인수분해의 활용 부분에 자세히 나오니까 잘 기억해 두자.

131 답 $(x^2+1)(y^2+1)(x+1)(x-1)$

1st ◎의 연산은 두 수를 제곱해서 빼라는 거구, ⊙의 연산은 두 수를 제곱하여 곱하고 1을 빼라는 거야.

$x^2◎y=x^4-y^2$, $x^2⊙y=x^4y^2-1$

∴ $(x^2◎y)+(x^2⊙y)=x^4-y^2+x^4y^2-1$

2nd 이제, 적당히 묶어 공통인수를 찾아내자.

$x^4-y^2+x^4y^2-1=x^4(1+y^2)-(1+y^2)=(1+y^2)(x^4-1)$

$=(1+y^2)(x^2+1)(x^2-1)$

$=(1+y^2)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$=(x^2+1)(y^2+1)(x+1)(x-1)$

132 답 5

1st 주어진 식을 인수분해하자.

$3n^2-8n-16=(3n+4)(n-4)$ ⋯ ㉠

2nd 소수는 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수지?

$3n^2-8n-16$이 소수이므로 ㉠은 $1\times$(소수)로 표현되어야 해.

즉, $3n+4=1$ 또는 $n-4=1$이어야 하지.

(i) $3n+4=1$일 때, $n=-1$

그런데 n은 자연수라 했으므로 성립하지 않아.

(ii) $n-4=1$일 때, $n=5$

따라서 $n=5$야.

133 답 11

1st 주어진 식을 인수분해하자.

$6n^2-11n-10=(3n+2)(2n-5)$ ⋯ ㉠

2nd 소수는 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수야.

$6n^2-11n-10$이 소수이므로 ㉠은 $1\times$(소수)로 표현되어야 해.

즉, $3n+2=1$ 또는 $2n-5=1$이어야 하지.

(i) $3n+2=1$일 때, $n=-\frac{1}{3}$

그런데 n은 자연수라 했으므로 성립하지 않아.

(ii) $2n-5=1$일 때, $n=3$

따라서 구하는 소수는 $3n+2=3\times3+2=11$이야.

서술형 다지기

p. 84

[134-135 채점기준표]

Ⅰ	근호 안의 식을 인수분해한다.	40%
Ⅱ	근호를 없애기 위해 부호를 판정한다.	20%
Ⅲ	주어진 식을 간단히 한다.	40%

134 답 $-2x$

먼저, 근호 안에 있는 식을 인수분해하자.

$\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$

$=\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}$ ⋯ Ⅰ

그다음, 근호를 없애기 위해 부호를 판정하자.

$0<4x<1$에서 $0<x<\frac{1}{4}$이므로

$x-\frac{1}{4}<0$, $x+\frac{1}{4}>0$ ⋯ Ⅱ

그래서, 주어진 식을 간단히 하자.

∴ (주어진 식)$=\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}$

$=-\left(x-\frac{1}{4}\right)-\left(x+\frac{1}{4}\right)$

$=-x+\frac{1}{4}-x-\frac{1}{4}$

$=-2x$ ⋯ Ⅲ

중등자이(중3상) 정답D~F-ok.indd 57 2019-08-06 오후 5:05:06

135 답 $-a+5$

먼저, 근호 안에 있는 식을 인수분해하자.

(주어진 식)$=\sqrt{a^2}-\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$ … Ⅰ

그다음, 근호를 없애기 위해 부호를 판정하자.

$2<a<3$이므로

$a-2>0$, $a-3<0$ … Ⅱ

그래서, 주어진 식을 간단히 하자.

$\therefore$ (주어진 식)$=a-(a-2)-(a-3)$

$=a-a+2-a+3$

$=-a+5$ … Ⅲ

[136-137 채점기준표]

Ⅰ	주어진 식을 전개한다.	30%
Ⅱ	전개한 식을 인수분해한다.	50%
Ⅲ	두 일차식의 합을 구한다.	20%

136 답 $2x-3$

먼저, $(x-3)(x+6)-6x$를 전개하자.

$(x-3)(x+6)-6x=x^2-3x-18$ … Ⅰ

그다음, 전개한 식을 인수분해하자.

$=(x+3)(x-6)$ … Ⅱ

그래서, 두 일차식의 합을 구하자.

따라서 두 일차식은 $x+3$, $x-6$이므로 구하는 합은

$(x+3)+(x-6)=2x-3$ … Ⅲ

137 답 $6x-8$

먼저, $(2x-5)^2+(x+3)(x-7)+12$를 전개하자.

$(2x-5)^2+(x+3)(x-7)+12$

$=4x^2-20x+25+x^2-4x-21+12$

$=5x^2-24x+16$ … Ⅰ

그다음, 전개한 식을 인수분해하자.

$=(5x-4)(x-4)$ … Ⅱ

그래서, 두 일차식의 합을 구하자.

따라서 두 일차식은 $5x-4$, $x-4$이므로 구하는 합은

$(5x-4)+(x-4)=6x-8$ … Ⅲ

138 답 2

$16x^2+24x+5a=\{(4x)^2+2\times4x\times3+3^2\}-3^2+5a$

$=(4x+3)^2-9+5a$ … Ⅰ

$-9+5a=0$ $\therefore a=\frac{9}{5}$

즉, $16x^2+24x+5a=(4x+3)^2$이고, 이것이 $(3bx-c)^2$과 같으므로

$4=3b$ $\therefore b=\frac{4}{3}$

$3=-c$ $\therefore c=-3$ … Ⅱ

$\therefore 5a-3b+c=5\times\frac{9}{5}-3\times\frac{4}{3}+(-3)$

$=9-4-3=2$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 등식의 좌변을 완전제곱식으로 고친다.	30%
Ⅱ	등식의 양변의 계수를 비교하여 a, b, c의 값을 구한다.	50%
Ⅲ	$5a-3b+c$의 값을 구한다.	20%

139 답 5

$\sqrt{x}=a-2$에서 $x=(a-2)^2=a^2-4a+4$이므로 … Ⅰ

주어진 식에 $x=a^2-4a+4$를 대입하면

$\sqrt{x+6a-3}+\sqrt{x-4a+12}$

$=\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-8a+16}$

$=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-4)^2}$ … Ⅱ

$=(a+1)-(a-4)$ ($\because 2<a<4$)

$=a+1-a+4=5$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	x를 a에 대한 식으로 나타낸다.	30%
Ⅱ	x를 주어진 식에 대입하여 근호 안의 식을 인수분해한다.	40%
Ⅲ	근호를 없애고 식을 간단히 한다.	30%

140 답 -7

$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$이므로 $x^2+ax-20$은 $x+2$ 또는 $x+5$를 인수로 갖는다. … Ⅰ

(i) $x^2+ax-20$이 $x+2$를 인수로 가질 때,

$x^2+ax-20=(x+2)(x+m)$으로 놓으면

$2m=-20$ $\therefore m=-10$

$\therefore a=2+m=2+(-10)=-8$

(ii) $x^2+ax-20$이 $x+5$를 인수로 가질 때,

$x^2+ax-20=(x+5)(x+n)$으로 놓으면

$5n=-20$ $\therefore n=-4$

$\therefore a=5+n=5+(-4)=1$ … Ⅱ

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은 $-8+1=-7$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$x^2+7x+10$을 인수분해하여 공통인 인수를 찾는다.	30%
Ⅱ	각 경우에 따른 a의 값을 구한다.	50%
Ⅲ	모든 a의 값의 합을 구한다.	20%

141 답 35

$x^2+12x+m=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$\therefore a+b=12$, $ab=m$ … Ⅰ

$a+b=12(a>b)$인 경우는

$\begin{cases}a=11\\b=1\end{cases}$, $\begin{cases}a=10\\b=2\end{cases}$, $\begin{cases}a=9\\b=3\end{cases}$, $\begin{cases}a=8\\b=4\end{cases}$, $\begin{cases}a=7\\b=5\end{cases}$ … Ⅱ

이때, $m=ab$이므로 $m=11$, 20, 27, 32, 35가 될 수 있다.

따라서 m의 최댓값은 35이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	인수분해한 식을 전개하여 $a+b$, ab의 값을 구한다.	30%
Ⅱ	$a+b=12$인 자연수 a, b의 값을 찾는다.	40%
Ⅲ	m의 최댓값을 구한다.	30%

142 답 29

성태는 $(x+1)(x-10)=x^2-9x-10$에서 x의 계수를 잘못 보았으므로 원래의 이차식의 상수항은 -10이다. … Ⅰ

영주는 $(x+6)(x-3)=x^2+3x-18$에서 상수항을 잘못 보았으므로 원래의 이차식의 x의 계수는 3이다. … Ⅱ

즉, 원래의 이차식은 $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$

따라서 $a=5$, $b=-2$ 또는 $a=-2$, $b=5$이므로

$a^2+b^2=5^2+(-2)^2=29$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	원래의 이차식의 상수항을 구한다.	30%
Ⅱ	원래의 이차식의 x의 계수를 구한다.	30%
Ⅲ	원래의 이차식을 인수분해하여 a, b의 값을 찾고 a^2+b^2의 값을 구한다.	40%

143 답 $4x+10y$

$(12x^3+60x^2y+75xy^2)\pi=3x(4x^2+20xy+25y^2)\pi$

$=3x(2x+5y)^2\pi$ … Ⅰ

이때, 원기둥의 높이가 $3x$이므로 밑면의 넓이는 $(2x+5y)^2\pi$이다.

따라서 밑면의 반지름의 길이가 $2x+5y$이므로 … Ⅱ

밑면의 지름의 길이는

$2(2x+5y)=4x+10y$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	원기둥의 부피의 식을 인수분해한다.	50%
Ⅱ	밑면의 넓이를 이용해 밑면의 반지름의 길이를 구한다.	30%
Ⅲ	밑면의 지름의 길이를 구한다.	20%

최고난도 만점 문제

p. 86

144 답 ④

1st 정사각형은 가로, 세로의 길이가 서로 같지?

주어진 직사각형들의 넓이의 합을 구하면

$x^2+x+x+x+x+x+x+1=x^2+6x+1$

여기에 넓이가 1인 정사각형이 k개 더해져서 $x^2+6x+1+k$가 완전제곱식이 되어야 정사각형의 넓이를 나타내는 것이지?

즉, $x^2+6x+1+k$가 완전제곱식이 되려면

$1+k=\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$ $\quad\therefore k=8$

따라서 넓이가 1인 정사각형이 8개가 더 필요해.

145 답 $5a$

1st $0<a<1$일 때, a, $a+\frac{1}{a}$, $a-\frac{1}{a}$의 부호를 따져 보자.

(i) $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=a$

(ii) $0<a<1$에서 $\frac{1}{a}>1$이므로 $a-\frac{1}{a}<0$

$$\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}=\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}-4}=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}$$
$$=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=-\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

(iii) $a+\frac{1}{a}>0$이므로

$$\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}+4}=\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}$$
$$=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$\therefore$ (주어진 식)$=3a+\left(a-\frac{1}{a}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)=5a$

146 답 -3

1st 주어진 두 식을 모두 나누어떨어지게 하는 일차식을 찾자.

두 식을 모두 나누어떨어지게 하는 일차식이 있다는 것은 주어진 두 식에서 일차식인 공통인 인수가 있다는 뜻이야.

즉, $x^2+(a+1)x+a=(x+1)(x+a)$이므로

$x^2+(a+2)x+a-3$은 $x+1$ 또는 $x+a$를 인수로 가져야 해.

2nd 각 경우에 대하여 a의 값을 구하자.

(i) $x+1$을 인수로 갖는 경우

$x^2+(a+2)x+a-3=(x+1)(x+A)$라 하면

$x^2+(a+2)x+a-3=x^2+(1+A)x+A$에서

$a+2=1+A$, $a-3=A$

즉, $A=a+1$이고 $A=a-3$이어야 하는데 이를 만족시키는 A의 값은 없으므로 이 경우는 성립하지 않아.

(ii) $x+a$를 인수로 갖는 경우

$x^2+(a+2)x+a-3=(x+a)(x+B)$라 하면

$x^2+(a+2)x+a-3=x^2+(a+B)x+aB$에서

$a+2=a+B$, $a-3=aB$

$a+2=a+B$에서 $B=2$

$a-3=aB$에서 $a-3=2a$이므로 $a=-3$

따라서 구하는 a의 값은 -3이야.

147 답 ④

1st 색종이의 넓이와 둘레의 길이를 a와 b에 대한 식으로 나타내자.

색칠한 부분의 넓이는 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이에서 한 변의 길이가 b인 정사각형의 넓이를 빼면 되므로

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=40$ ⋯ ㉠

또한, 색칠한 부분의 둘레의 길이가 $16\sqrt{2}$이므로

$4(a+b)=16\sqrt{2}$ $\quad\therefore a+b=4\sqrt{2}$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4\sqrt{2}(a-b)=40$ $\quad\therefore a-b=\frac{40}{4\sqrt{2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

148 답 $(6x+1)(x-1)$

1st 삼차식을 세 일차식의 곱으로 나타내자.

$x^3+Ax^2+Bx-3=(x+1)(x-3)(x+k)$라 하자.

$x^3+Ax^2+Bx-3=(x^2-2x-3)(x+k)$

$=x^3+(k-2)x^2-(2k+3)x-3k$

이므로 $A=k-2$, $B=-(2k+3)$, $-3=-3k$

$-3=-3k$에서 $k=1$이므로

$A=k-2=1-2=-1$

$B=-(2k+3)=-(2+3)=-5$

2nd $6x^2+Bx+A$를 인수분해하자.

따라서 $6x^2+Bx+A$, 즉 $6x^2-5x-1$을 인수분해하면

$6x^2-5x-1=(6x+1)(x-1)$

149 답 $2(a-b-3)$

1st 사다리꼴의 넓이를 인수분해하자.

$(a-2)^2-(b+1)^2=\{(a-2)+(b+1)\}\{(a-2)-(b+1)\}$

$=(a+b-1)(a-b-3)$

이때, $(a+b-1)(a-b-3)=\frac{1}{2}\times(b+a-1)\times$(높이)이므로

$2(a+b-1)(a-b-3)=(a+b-1)\times$(높이)

$\therefore$ (높이)$=2(a-b-3)$

150 답 ③

1st 식이 복잡해 보이지? 겁먹지 말고 $a=\sqrt{b^2+77}$의 양변을 제곱해서 정리해 봐.

$a=\sqrt{b^2+77}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2=b^2+77$, $a^2-b^2=77$

$\therefore (a+b)(a-b)=77$

2nd a, b가 자연수이므로 연립방정식을 세울 수 있어.

a, b가 자연수이므로 $(a+b)(a-b)=77$에서

$\begin{cases} a+b=77 \\ a-b=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a+b=11 \\ a-b=7 \end{cases}$

3rd 이제 연립방정식을 푸는 일만 남았어.

두 연립방정식을 각각 풀면

$a=39$, $b=38$ 또는 $a=9$, $b=2$

그런데 a, b는 두 자리 자연수이므로 $a=39$, $b=38$

$\therefore 2a-b=2\times39-38=40$

오|답|피|하|기

> 연립방정식을 세우는 과정에서 $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=77 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a+b=7 \\ a-b=11 \end{cases}$ 인 경우는 왜 뺐냐구? 문제를 잘 봐. a, b가 자연수라 했잖아. 두 자연수끼리 덧셈한 결과가 뺄셈한 결과보다 작을 수는 없겠지?

151 답 20개

1st 주어진 다항식이 x^2-4x-n (n은 자연수)의 꼴로 나타내어지지?

x^2-4x-n (단, n은 $1\le n\le500$인 자연수) 중 x의 계수와 상수항이 모두 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 식은

$x^2-4x-n=(x+a)(x-b)$ (단, a, b는 자연수)

의 꼴로 나타낼 수 있어.

2nd 이제 $a-b$와 ab의 값을 구해 보자.

이때, $x^2-4x-n=(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$에서

$a-b=-4$, $ab=n$이고 a, b는 자연수이므로

$n=ab=1\times5,\ 2\times6,\ 3\times7,\ \cdots$

그런데 $n\le500$이고 $20\times24=480$, $21\times25=525$이므로

$n=ab=1\times5,\ 2\times6,\ 3\times7,\ \cdots,\ 20\times24$야.

따라서 주어진 이차식 중 x의 계수와 상수항이 모두 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 20개야.

E 인수분해의 활용

개념 체크 001~024 정답은 p. 4에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

문제편 p. 90

025 답 ⑤

$$\begin{aligned} x^2(x-1)-x+1&=x^2(x-1)-(x-1) \\ &=(x-1)(x^2-1) \\ &=(x-1)(x+1)(x-1) \\ &=(x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ⑤야.

026 답 $(a-b)(x-y)$

$$\begin{aligned} (a-b)x+(b-a)y&=(a-b)x-(a-b)y \\ &=(a-b)(x-y) \end{aligned}$$

027 답 ②, ④

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=x(x-y)+y(x-y)-(x-y) \\ &=(x-y)(x+y-1) \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ②, ④야.

028 답 ④

$$\begin{aligned} b(a-b)+2ac-2bc&=b(a-b)+2c(a-b) \\ &=(a-b)(b+2c) \end{aligned}$$

따라서 두 일차식은 $a-b$, $b+2c$이므로 그 합은

$(a-b)+(b+2c)=a+2c$야.

029 답 ①

$$\begin{aligned} 2x^2+x-1-(x+1)^2&=(x+1)(2x-1)-(x+1)^2 \\ &=(x+1)\{(2x-1)-(x+1)\} \\ &=(x+1)(2x-1-x-1) \\ &=(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

030 답 ①

$(x-1)^2-2(x-1)-8$에서 $x-1=A$로 치환하자.

$$\begin{aligned} (x-1)^2-2(x-1)-8&=A^2-2A-8 \\ &=(A+2)(A-4) \\ &=(x-1+2)(x-1-4) \\ &=(x+1)(x-5)\ \cdots\ ㉠ \end{aligned}$$

$2x^2-9x-5=(2x+1)(x-5)\ \cdots\ ㉡$

따라서 ㉠, ㉡의 공통인 인수는 $x-5$야.

031 답 -2

$x-3=A$로 치환하면

$$\begin{aligned} (x-3)^2+2(x-3)-24&=A^2+2A-24 \\ &=(A+\underbrace{\boxed{6}}_{(가)})\{A+(\underbrace{\boxed{-4}}_{(나)})\} \\ &=(x-3+\boxed{6})\{x-3+(\boxed{-4})\} \\ &=(x+\underbrace{\boxed{3}}_{(다)})\{x+(\underbrace{\boxed{-7}}_{(라)})\} \end{aligned}$$

$\therefore a+b+c+d=6+(-4)+3+(-7)=-2$

032 답 ②

$x-y=A$로 치환하자.

$$\begin{aligned}1-(x-y)^2&=1-A^2\\&=(1+A)(1-A)\\&=(1+x-y)\{1-(x-y)\}\\&=(1+x-y)(1-x+y)\end{aligned}$$

033 답 -3

$x+1=A$로 치환하자.

$$\begin{aligned}(x+1)^2-5(x+1)+6&=A^2-5A+6\\&=(A-2)(A-3)\\&=(x+1-2)(x+1-3)\\&=(x-1)(x-2)\\&=(x+a)(x+b)\end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=-2$ 또는 $a=-2$, $b=-1$이므로

$a+b=-1+(-2)=-3$

034 답 ③

$(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$에서 $x^2+2x=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}A^2-11A+24&=(A-3)(A-8)\\&=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)\\&=(x+3)(x-1)(x+4)(x-2)\\&=(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)\end{aligned}$$

따라서 선택지 중 인수가 아닌 것은 ③이야.

035 답 ③

$(2x+1)^2-(x-4)^2$

$=(2x+1+x-4)(2x+1-x+4)$

$=(3x-3)(x+5)$

$=3(x-1)(x+5)$ ⋯ ㉠

또, $3(x+3)^2+5(x+3)-2$에서 $x+3=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}3A^2+5A-2&=(3A-1)(A+2)\\&=\{3(x+3)-1\}\{(x+3)+2\}\\&=(3x+8)(x+5)\ \cdots\ ㉡\end{aligned}$$

따라서 ㉠, ㉡의 공통인 인수는 $x+5$야.

036 답 -5

$(x-y)^2-8x+8y+16=(x-y)^2-8(x-y)+16$

에서 $x-y=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}A^2-8A+16&=(A-4)^2\\&=(x-y-4)^2\\&=(x+ay+b)^2\end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=-4$이므로

$a+b=-1+(-4)=-5$

037 답 ②

$2(x+1)^2+3(x+1)(x-2)+(x-2)^2$에서

$x+1=A$, $x-2=B$로 치환하면

$$\begin{aligned}2A^2+3AB+B^2&=(2A+B)(A+B)\\&=(2x+2+x-2)(x+1+x-2)\\&=3x(2x-1)\end{aligned}$$

038 답 $-2(2x+3)(x+9)$

(주어진 식)$=(x-3)^2-6(x+3)^2+(x-3)(x+3)$에서

$x-3=A$, $x+3=B$로 치환하면

$$\begin{aligned}A^2-6B^2+AB&=A^2+AB-6B^2\\&=(A+3B)(A-2B)\\&=(x-3+3x+9)(x-3-2x-6)\\&=(4x+6)(-x-9)\\&=-2(2x+3)(x+9)\end{aligned}$$

039 답 ②, ③

$(a-b)(a-b+1)-2$에서 $a-b=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}A(A+1)-2=A^2+A-2&=(A+2)(A-1)\\&=(a-b+2)(a-b-1)\end{aligned}$$

따라서 선택지 중에서 인수인 것은 ②, ③이야.

040 답 ④

$x-y=A$로 치환하면

$(x-y-2)(x-y+5)-30$

$=(A-2)(A+5)-30=A^2+3A-10-30$

$=A^2+3A-40=(A+8)(A-5)$

$=(x-y+8)(x-y-5)$

041 답 $(x+1)(x+3)(x-1)(x-3)$

$x^2-3=A$로 치환하면

$(x^2-x-3)(x^2+x-3)-3x^2$

$=(x^2-3-x)(x^2-3+x)-3x^2$

$=(A-x)(A+x)-3x^2=A^2-x^2-3x^2$

$=A^2-4x^2=A^2-(2x)^2$

$=(A+2x)(A-2x)=(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)$

$=(x+3)(x-1)(x+1)(x-3)$

$=(x+1)(x+3)(x-1)(x-3)$

042 답 ①

$x-y=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}\text{(주어진 식)}&=\{-(x-y)-\sqrt{5}\}(x-y-\sqrt{5})+4(x-y)\\&=(-A-\sqrt{5})(A-\sqrt{5})+4A\\&=-A^2+5+4A\\&=-(A^2-4A-5)\\&=-(A-5)(A+1)\\&=-(x-y-5)(x-y+1)\end{aligned}$$

이것이 $-(x-ay+b)(x-y+c)$이므로

$a=1$, $b=-5$, $c=1$ 또는 $a=1$, $b=1$, $c=-5$

$\therefore a+b+c=1+(-5)+1=-3$

043 답 $\left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$이므로

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)&=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4-4\left(x-\frac{1}{x}\right)\\&=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)+4\end{aligned}$$

여기서 $x-\frac{1}{x}=A$로 치환하면

$A^2-4A+4=(A-2)^2=\left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2$

044 답 4

일차식 4개를 적절히 2개씩 묶어서 곱하여 공통 부분이 나오도록 하자.

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$

$x^2+3x=A$로 치환하면

$A(A+2)+1=A^2+2A+1=(A+1)^2=(x^2+3x+1)^2$

이것이 $(x^2+ax+b)^2$과 같아야 하므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

오|답|피|하|기

이 문제와 같은 유형에서 2개씩 적절히 묶는 요령이 뭘까?
공통 부분이 생기려면 2개씩 묶었을 때, 각각의 두 일차식의 상수항의 합이 서로 같아야 해. 그러면 그 두 식을 각각 전개한 결과의 일차항의 계수가 같아지거든. 그럼 같은 이차식 모양이 나와서 치환할 수가 있는 거야.

045 답 ③

$x(x-2)(x-1)(x+1)+1=(x^2-x)(x^2-x-2)+1$

$x^2-x=A$로 치환하면

$A(A-2)+1=A^2-2A+1=(A-1)^2=(x^2-x-1)^2$

따라서 선택지 중 인수인 것은 ③이야.

046 답 $2x^2-4x-11$

$(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)-6$

$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)-6$

$x^2-2x=A$로 치환하면

$(A-3)(A-8)-6=A^2-11A+18=(A-9)(A-2)$

$=(x^2-2x-9)(x^2-2x-2)$

따라서 두 이차식은 x^2-2x-9, x^2-2x-2이므로 그 합은

$(x^2-2x-9)+(x^2-2x-2)=2x^2-4x-11$

047 답 13

$(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$x^2+x=A$로 치환하면

$(A-2)(A-12)+24=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$

이것이 $(x+a)(x-b)(x^2+x-c)$와 같으므로

$a=3$, $b=2$, $c=8$ ($\because$ a, b, c는 양수)

$\therefore a+b+c=3+2+8=13$

오|답|피|하|기

치환하는 것을 아무리 달리해도 그 결과는 같아.
이 문제에서 $x^2+x-2=X$로 치환하면

$X(X-10)+24=X^2-10X+24$

$=(X-4)(X-6)$

$=(x^2+x-2-4)(x^2+x-2-6)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$

봐봐! 결과는 같지?

048 답 -3

$(x-4)(x+2)(x+1)(x-2)-4x^2$

$=(x^2-3x-4)(x^2-4)-4x^2=(x^2-4-3x)(x^2-4)-4x^2$

$x^2-4=A$로 치환하면

$(A-3x)A-4x^2$

$=A^2-3xA-4x^2$

$$\begin{array}{ccccc} A & & x & \to & xA \\ A & & -4x & \to & -4xA \\ \hline & & & & -3xA \end{array}$$

$=(A+x)(A-4x)$

$=(x^2-4+x)(x^2-4-4x)$

$=(x^2+x-4)(x^2-4x-4)$

따라서 두 이차식의 x의 계수의 합은 $1+(-4)=-3$이야.

오|답|피|하|기

주어진 식을 아무리 묶어 봐도 공통된 x항이 나오지 않아서 당황했을 거야. 이때는 x항뿐만 아니라 상수항을 포함한 식에서 공통인 식을 찾아 주면 되지. 아무리 복잡해 보이는 식이어도 공통인 식만 찾으면 문제 해결 완료!

049 답 ①

$x^2+16y^2-8xy-25=(x^2-8xy+16y^2)-25=(x-4y)^2-5^2$

$=(x-4y+5)(x-4y-5)$

이것이 $(x+ay+b)(x+cy+d)$라 하므로

$a=-4$, $b=5$, $c=-4$, $d=-5$

또는 $a=-4$, $b=-5$, $c=-4$, $d=5$

$\therefore a+b+c+d=-4+5+(-4)+(-5)=-8$

050 답 ③

$xy-y+2x-2=y(x-1)+2(x-1)$

$=(x-1)(y+2)$

따라서 선택지 중 인수인 것은 ③이야.

051 답 $a+1$

$ab+b-a-1=b(a+1)-(a+1)$

$=(a+1)(b-1)$ ⋯ ㉠

$a^2-ab+a-b=a(a-b)+(a-b)$

$=(a-b)(a+1)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 공통인 인수는 $a+1$이야.

052 답 ②

$ab+bc+cd+da=b(a+c)+d(a+c)$

$=(a+c)(b+d)=15$

그런데 $a+c=5$이므로

$5(b+d)=15$ $\therefore b+d=3$

053 답 ⑤

(주어진 식)$=y-x^2y-x+x^3=x^3-x^2y-x+y$

$=x^2(x-y)-(x-y)=(x-y)(x^2-1)$

$=(x-y)(x+1)(x-1)$

따라서 선택지 중 인수가 아닌 것은 ⑤야.

오|답|피|하|기

이 문제를 보았을 때 $xy+1$이 공통 부분으로 보여서 쉽다고 생각했을지도 몰라. 하지만 더 이상 인수분해가 되지 않지? 주어진 식을 제대로 인수분해하기 위해서는 먼저 식을 전개한 후에 생각해야 해. 그럼 바로 답이 나올 거야.

054 답 -2

$x^2+2x+2y-y^2=(x^2-y^2)+2(x+y)$
$=(x+y)(x-y)+2(x+y)$
$=(x+y)(x-y+2)$

이것이 $(x+y)(x+ay+b)$와 같으므로
$a=-1,\ b=2 \qquad \therefore ab=-1\times2=-2$

055 답 ②

$a^2-2a+1-b^2=(a-1)^2-b^2$에서 $a-1=A$로 치환하면
(주어진 식)$=A^2-b^2=(A+b)(A-b)$
$=(a-1+b)(a-1-b)$
$=(a+b-1)(a-b-1)$

056 답 ④

$x^2-y^2+6x+9=x^2+6x+9-y^2=(x+3)^2-y^2$
여기서 $x+3=A$로 치환하자.
(주어진 식)$=A^2-y^2=(A+y)(A-y)$
$=(x+3+y)(x+3-y)$
$=(x+y+3)(x-y+3)=45 \cdots$ ㉠
$x+y=2$이므로 ㉠에서
$(2+3)(x-y+3)=45,\ 5(x-y+3)=45$
$x-y+3=9 \qquad \therefore x-y=6$

057 답 ②

$x^2+y^2-2xy-2x+2y-15=x^2-2xy+y^2-2(x-y)-15$
$=(x-y)^2-2(x-y)-15$
여기서 $x-y=A$로 치환하면
$A^2-2A-15=(A-5)(A+3)=(x-y-5)(x-y+3)$

058 답 ①

$x^2+6xy+9y^2+3x+9y+2=(x+3y)^2+3(x+3y)+2$
$x+3y=A$로 치환하면
$A^2+3A+2=(A+1)(A+2)$
$=(x+3y+1)(x+3y+2)$
따라서 두 일차식은 $x+3y+1,\ x+3y+2$이므로 이들의 합은
$(x+3y+1)+(x+3y+2)=2x+6y+3$

059 답 4

식이 복잡하면 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후에 인수분해해 보자.
$x^2-xy-2y^2+5x-y+6$
$=x^2+(5-y)x-2y^2-y+6$
$=x^2+(5-y)x-(2y^2+y-6)$
$=x^2+(5-y)x-(2y-3)(y+2)$
$=(x-2y+3)(x+y+2)$

$$\begin{array}{lllll} x & \searrow\!\!\!\nearrow & -(2y-3) & \rightarrow & -(2y-3)x \\ x & & y+2 & \rightarrow & (y+2)x\ (+ \\ \hline & & & & (5-y)x \end{array}$$

이것이 $(x+ay+b)(x+cy+d)$와 같으므로
$a+b+c+d=-2+3+1+2=4$

오|답|피|하|기

특수한 경우를 제외하고 이런 유형의 문제는 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 나머지 문자를 수와 같은 경우로 생각하여 일차항의 계수가 나올 수 있도록 해 주는 거야. 조금만 연습하면 금방 방법을 터득할 수 있게 돼.

060 답 ④

y에 대하여 내림차순으로 식을 정리하자.
$x^2+xy+4x-2y-12$
$=(x-2)y+x^2+4x-12=(x-2)y+(x+6)(x-2)$
$=(x-2)(y+x+6)=(x-2)(x+y+6)$
따라서 $a=-2,\ b=1,\ c=6$이므로
$a+b+c=-2+1+6=5$

061 답 $(x-3y+1)^2$

$x^2+9y^2+2x-6y-6xy+1$을 x에 대하여 내림차순으로 정리해 보자.
$x^2+2x-6xy+9y^2-6y+1=x^2-2(3y-1)x+9y^2-6y+1$
$=x^2-2(3y-1)x+(3y-1)^2$
$=x^2-2\times x\times(3y-1)+(3y-1)^2$
$=(x-3y+1)^2$

[다른 풀이]
$x^2+9y^2+2x-6y-6xy+1=x^2-6xy+9y^2+2(x-3y)+1$
$=(x-3y)^2+2(x-3y)+1$
$=(x-3y+1)^2$

062 답 ⑤

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리해 보자.
$x^2-y^2+7x+y+12$
$=x^2+7x-y^2+y+12$
$=x^2+7x-(y^2-y-12)$
$=x^2+7x-(y+3)(y-4)$
$=(x+y+3)(x-y+4)$

$$\begin{array}{lllll} x & \searrow\!\!\!\nearrow & y+3 & \rightarrow & (y+3)x \\ x & & -(y-4) & \rightarrow & -(y-4)x\ (+ \\ \hline & & & & 7x \end{array}$$

063 답 ②

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2$를 x에 대하여 내림차순으로 정리해 보자.
$x^2+(1-5y)x+4y^2+2y-2$
$=x^2+(1-5y)x+2(2y^2+y-1)$
$=x^2+(1-5y)x+2(2y-1)(y+1)$
$=(x-4y+2)(x-y-1)$

$$\begin{array}{lllll} x & \searrow\!\!\!\nearrow & -2(2y-1) & \rightarrow & -2(2y-1)x \\ x & & -(y+1) & \rightarrow & -(y+1)x\ (+ \\ \hline & & & & (1-5y)x \end{array}$$

즉, 두 일차식의 합은
$(x-4y+2)+(x-y-1)=2x-5y+1$
이것이 $2x+ay+b$이므로 $a=-5,\ b=1$
$\therefore a+b=-5+1=-4$

064 답 ①

세 문자 $a,\ b,\ c$ 중 차수가 가장 낮은 문자 c에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$
$=c(b^2-a^2)+a^2b-b^3=-c(a^2-b^2)+b(a^2-b^2)$
$=(a^2-b^2)(b-c)=(a+b)(a-b)(b-c)$
따라서 〈보기〉 중에서 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이야.

065 답 $a(a-b)(a-c)$

공통인수인 a로 묶어 보자.
$a^3-(b+c)a^2+abc$
$=a\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=a(a-b)(a-c)$

$$\begin{array}{lllll} a & \searrow\!\!\!\nearrow & -b & \rightarrow & -ab \\ a & & -c & \rightarrow & -ac\ (+ \\ \hline & & & & -(b+c)a \end{array}$$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned} a^3-(b+c)a^2+abc &= a^3-a^2b-a^2c+abc \\ &= a^3-a^2c-a^2b+abc \\ &= a^2(a-c)-ab(a-c) \\ &= (a^2-ab)(a-c) \\ &= a(a-b)(a-c) \end{aligned}$$

066 답 ②

$ab-b^2-ac+bc$를 a에 대하여 내림차순으로 정리해 보자.

$ab-ac-b^2+bc=a(b-c)-b(b-c)=(a-b)(b-c)$

이때, $a-b=-3$ ⋯ ㉠, $c-a=2$ ⋯ ㉡에서 ㉠+㉡을 하면

$-b+c=-1$ $\quad\therefore b-c=1$ ⋯ ㉢

$\therefore$ (주어진 식)$=-3\times1=-3$ ($\because$ ㉠, ㉢)

오|답|피|하|기

주어진 식만으로 식의 값을 구할 수 없을 경우에는 조건에 있는 식을 최대한 변형하여 식의 값을 구할 줄 알아야 해. $a-b$의 값과 $c-a$의 값이 주어질 때, $b-c$의 값도 구해낼 줄 알아야 해.

067 답 $(a+1)(b+1)(c+1)$

$abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$

$=\underline{abc+ab}+\underline{bc+b}+\underline{ca+a}+\underline{c+1}$

$=ab(c+1)+b(c+1)+a(c+1)+(c+1)$

$=(c+1)(\underline{ab+b}+\underline{a+1})=(c+1)\{b(a+1)+(a+1)\}$

$=(c+1)(a+1)(b+1)=(a+1)(b+1)(c+1)$

068 답 ③

공통인수인 3.14로 묶어 주자.

$$\begin{aligned} 6.5^2\times3.14-3.5^2\times3.14 &= 3.14(6.5^2-3.5^2) \\ &= 3.14(6.5+3.5)(6.5-3.5) \\ &= 3.14\times10\times3=94.2 \end{aligned}$$

069 답 ③

$273^2-272^2=(273+272)(273-272)=273+272=545$

따라서 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한 거야.

070 답 ④

$202^2-198^2=(202+198)(202-198)=400\times4=1600$

$\therefore \sqrt{202^2-198^2}=\sqrt{1600}=\sqrt{40^2}=40$

071 답 5417

$5416=A$로 놓으면

$$\begin{aligned} 5416\times5418+1 &= A(A+2)+1 \\ &= A^2+2A+1 \\ &= (A+1)^2 \\ &= (5416+1)^2=5417^2 \end{aligned}$$

따라서 어떤 자연수는 5417이야.

072 답 ③

두 항씩 묶어서 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하자.

$(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+(7^2-8^2)$

$=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)$

$\qquad+(5-6)(5+6)+(7-8)(7+8)$

$=-3-7-11-15=-36$

073 답 -128

두 항씩 묶어서 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하자.

$1^2+5^2+9^2+13^2-(3^2+7^2+11^2+15^2)$

$=1^2+5^2+9^2+13^2-3^2-7^2-11^2-15^2$

$=1^2-3^2+5^2-7^2+9^2-11^2+13^2-15^2$

$=(1^2-3^2)+(5^2-7^2)+(9^2-11^2)+(13^2-15^2)$

$=(1-3)(1+3)+(5-7)(5+7)$

$\qquad+(9-11)(9+11)+(13-15)(13+15)$

$=-2(4+12+20+28)=-2\times64=-128$

074 답 ②

(주어진 식)$=\dfrac{2020(2021+1)}{(2021+1)(2021-1)}=\dfrac{2020\times2022}{2022\times2020}=1$

075 답 9100

(i) $A=103^2-6\times103+9=103^2-2\times103\times3+3^2$에서

$a^2-2ab+b^2$ 꼴이므로 $(a-b)^2$을 이용하자.

$A=(103-3)^2=100^2=10000$

(ii) $B=35^2-350+25=35^2-2\times35\times5+5^2$에서 마찬가지로

$(a-b)^2$을 이용하면

$B=(35-5)^2=30^2=900$

$\therefore A-B=10000-900=9100$

076 답 ③

$$\begin{aligned} 2^8-1 &= (2^4)^2-1^2=(2^4+1)(2^4-1) \\ &= (2^4+1)(2^2+1)(2^2-1) \\ &= (2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)=17\times5\times3 \end{aligned}$$

이때, 17, 5, 3은 모두 소수지?

따라서 2^8-1의 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=8$(개)야.

오|답|피|하|기

중 1에서 배운 약수의 개수 구하는 방법이 기억나지? 자연수 A가 $a^l\times b^m\times c^n$ (a, b, c는 서로 다른 소수)으로 소인수분해될 때, A의 약수의 개수는 $(l+1)(m+1)(n+1)$개야.

077 답 2651

$50=x$로 놓고 근호 안의 수부터 인수분해를 이용하여 계산해 보자.

$$\begin{aligned} 50\times51\times52\times53+1 &= x(x+1)(x+2)(x+3)+1 \\ &= (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 \end{aligned}$$

$x^2+3x=A$로 치환하면

$A(A+2)+1=A^2+2A+1=(A+1)^2$

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned} \sqrt{(A+1)^2} &= A+1=x^2+3x+1=50^2+3\times50+1 \\ &= 2500+150+1=2651 \end{aligned}$$

078 답 ①

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$이므로 $x+y$, $x-y$의 값을 구하면 되지?

$x=\sqrt5-\sqrt3$, $y=\sqrt5+\sqrt3$이므로

$x+y=2\sqrt5$, $x-y=-2\sqrt3$

$$\begin{aligned} \therefore (x+y)(x-y) &= 2\sqrt5\times(-2\sqrt3) \\ &= -4\sqrt{15} \end{aligned}$$

오답피하기

x^2-y^2의 값을 x의 값과 y의 값을 직접 대입하여 구해도 돼.

$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

$=(5-2\sqrt{15}+3)-(5+2\sqrt{15}+3)$

$=(8-2\sqrt{15})-(8+2\sqrt{15})=-4\sqrt{15}$

근호가 있으니까 좀 복잡하지?

인수분해를 이용하여 푸는 것이 더 쉽고 정확해.

079 답 ②

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$이니까

$a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, $b=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$에서

$a-b=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

$\therefore (a-b)^2=(-\sqrt{2})^2=2$

080 답 ④

주어진 식은 $\dfrac{y^2-x^2}{xy}=\dfrac{(y+x)(y-x)}{xy}$ … ㉠

$y+x$, $y-x$, xy의 값을 구해야 돼.

먼저 x와 y의 분모를 유리화하자.

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=-\dfrac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=-\dfrac{\sqrt{3}+2}{3-4}=\sqrt{3}+2$

$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=-\dfrac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=-\dfrac{\sqrt{3}-2}{3-4}=\sqrt{3}-2$

$\therefore y+x=2\sqrt{3}$, $y-x=-4$, $xy=(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)=-1$

따라서 이 값들을 ㉠에 대입하면

(주어진 식)$=\dfrac{2\sqrt{3}\times(-4)}{-1}=8\sqrt{3}$

081 답 ⑤

$a^2-2ab-3b^2=(a+b)(a-3b)$ … ㉠

$a=1.75$, $b=0.25$이므로

$a+b=2$, $a-3b=1.75-3\times0.25=1.75-0.75=1$

따라서 ㉠의 값은 $2\times1=2$야.

082 답 ②

$(a-b)a^2+(b-a)b^2=(a-b)a^2-(a-b)b^2$

$=(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a-b)(a+b)(a-b)$

$=(a-b)^2(a+b)$

이때, $a+b=\sqrt{6}$, $ab=1$이므로

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(\sqrt{6})^2-4\times1=6-4=2$

$\therefore (a-b)^2(a+b)=2\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

오답피하기

곱셈 공식의 변형 잊지 않았지?

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(3) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

083 답 ②

$(x-2)^2-6(x-2)+9$에서 $x-2=A$로 치환하면

$A^2-6A+9=(A-3)^2=(x-2-3)^2=(x-5)^2$

이때, $x=5+\sqrt{2}$이므로

$(x-5)^2=(5+\sqrt{2}-5)^2=(\sqrt{2})^2=2$

084 답 ④

$x^2-2xy+y^2+2x-2y+1=(x-y)^2+2(x-y)+1$

$x-y=A$로 치환하면

$A^2+2A+1=(A+1)^2=(x-y+1)^2$

$=(\sqrt{5}+1)^2=5+2\sqrt{5}+1=6+2\sqrt{5}$

085 답 ⑤

주어진 식을 간단히 하자.

$\dfrac{(a+b)(1+x+y)}{(a+b)x^2-(a+b)y^2}=\dfrac{(a+b)(1+x+y)}{(a+b)(x^2-y^2)}$

$=\dfrac{1+x+y}{(x+y)(x-y)}$ ($\because a+b\neq0$)

$x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$이므로

$x+y=2$, $x-y=2\sqrt{2}$

따라서 $x+y$, $x-y$의 값을 대입하면

$\dfrac{1+x+y}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{3}{2\times2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

086 답 165

$(a+2)(b+2)=ab+2(a+b)+4=10$에서 $ab=-4$이므로

$-4+2(a+b)+4=10$ $\quad\therefore a+b=5$

$a^3+b^3+a^2b+ab^2=a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a^2+b^2)(a+b)$

이때, a^2+b^2의 값을 구하면

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\times(-4)=25+8=33$

$\therefore (a^2+b^2)(a+b)=33\times5=165$

087 답 ③

주어진 식을 정리하면

$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)$

$=(x+y)^2(x-y)^2$

$=\{(x+y)(x-y)\}^2$

x의 분모를 유리화하고 y도 전개하여 정리하자.

$x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}$

$=3+2\sqrt{2}$

$y=(\sqrt{2}-1)^2=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$

즉, $x+y=6$, $x-y=4\sqrt{2}$이므로

$\{(x+y)(x-y)\}^2=(6\times4\sqrt{2})^2=1152$

오답피하기

이렇게 풀어도 돼!

$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$에서 $x^2=A$, $y^2=B$라 하면

$(A+B)^2-4AB=(A-B)^2=(x^2-y^2)^2$

$=\{(x+y)(x-y)\}^2$

088 답 ③

a^2-b^2+2b-1을 인수분해하자.

$a^2-b^2+2b-1=a^2-(b^2-2b+1)=a^2-(b-1)^2$

$=(a+b-1)(a-b+1)$

직사각형의 가로의 길이가 $a+b-1$이므로 세로의 길이는

$a-b+1$이야.

따라서 직사각형의 둘레의 길이는

$2\{(a+b-1)+(a-b+1)\}=4a$

089 답 6

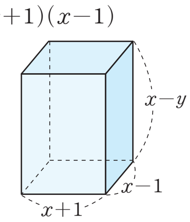
$\overline{AC}$, $\overline{BD}$는 각각 두 직각삼각형 ABC와 BAD의 빗변이므로
피타고라스 정리에 의해
$\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
즉, 점 P에 대응하는 수는 2에서 $\sqrt{2}$를 뺀 것이므로
$a=2-\sqrt{2}$
점 Q에 대응하는 수는 1에서 $\sqrt{2}$를 더한 것이므로
$b=1+\sqrt{2}$
$\therefore a+b=(2-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=3$ ⋯ ㉠
한편, 주어진 식을 인수분해하자.
$a^2+2ab+b^2+a+b-6=(a+b)^2+(a+b)-6$
$a+b=A$로 치환하면
$A^2+A-6=(A+3)(A-2)=(a+b+3)(a+b-2)$
$=(3+3)(3-2)=6$ ($\because$ ㉠)

090 답 ②

$xy-y^2+3x-6y-9=xy+3x-y^2-6y-9$
$=x(y+3)-(y^2+6y+9)$
$=x(y+3)-(y+3)^2$
$=(y+3)(x-y-3)$
직사각형의 세로의 길이가 $x-y-3$이므로 가로의 길이는 $y+3$이야.
따라서 화단의 둘레의 길이는 $2\{(y+3)+(x-y-3)\}=2x$

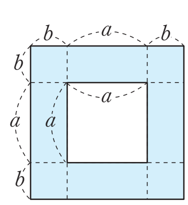
091 답 ⑤

직육면체의 부피를 먼저 인수분해해.
$x^3-x^2y-x+y=x^2(x-y)-(x-y)$
$=(x-y)(x^2-1)=(x-y)(x+1)(x-1)$
이 직육면체의 밑면의 가로의 길이가 $x+1$,
세로의 길이가 $x-1$이므로 높이는 $x-y$야.
따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은
$4\{(x+1)+(x-1)+(x-y)\}$
$=4(3x-y)=12x-4y$



092 답 ③

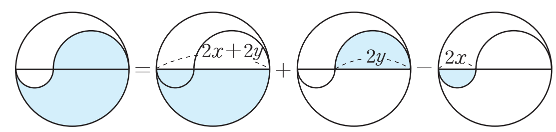
화단의 넓이를 a와 b로 나타내 보자.
화단의 넓이는 큰 정사각형의 넓이에서 작은 정사각형의 넓이를 빼야 해.
(큰 정사각형의 넓이)$=(a+2b)^2$
(작은 정사각형의 넓이)$=a^2$
(화단의 넓이)$=(a+2b)^2-a^2$
$=(a+2b+a)(a+2b-a)$
$=(2a+2b)\times 2b=4b(a+b)$
따라서 가로의 길이가 $a+b$이므로
세로의 길이는 $4b$야.



093 답 ③

$\overline{AB}=2r$ cm라 하면
$\overline{AD}=(2r+2)$ cm
$\overline{AC}=2r+2+2=2r+4$(cm)
$\overline{AD}$를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이가 5π cm이므로
$2\pi\times\dfrac{2r+2}{2}=5\pi$, $2r+2=5$ $\quad\therefore r=\dfrac{3}{2}$
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)
$=$($\overline{AC}$를 지름으로 하는 원의 넓이)
$-$($\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 넓이)
$=\left(\dfrac{2r+4}{2}\right)^2\pi-\left(\dfrac{2r}{2}\right)^2\pi$
$=\{(r+2)^2-r^2\}\pi$
$=(r+2+r)(r+2-r)\pi$
$=4(r+1)\pi$
$=4\left(\dfrac{3}{2}+1\right)\pi=10\pi(\text{cm}^2)$

094 답 ④



(색칠한 부분의 넓이)
$=$(큰 반원의 넓이)$+$(중간 반원의 넓이)$-$(작은 반원의 넓이)
$=\dfrac{1}{2}(x+y)^2\pi+\dfrac{1}{2}y^2\pi-\dfrac{1}{2}x^2\pi$
$=\dfrac{1}{2}\pi\{(x+y)^2+y^2-x^2\}$
$=\dfrac{1}{2}\pi\{(x+y)^2-(x^2-y^2)\}$
$=\dfrac{1}{2}\pi\{(x+y)^2-(x+y)(x-y)\}$
$=\dfrac{1}{2}\pi(x+y)(x+y-x+y)$
$=y(x+y)\pi$

095 답 $2y+1$

먼저 원기둥의 부피가 $\underbrace{(x^2+2x+2y+2x^2y+4xy+1)}_{㉠}\pi$이므로
㉠ 부분을 인수분해하자.
㉠에서 y에 대하여 내림차순으로 식을 정리하면
$x^2+2x+2y+2x^2y+4xy+1$
$=y(2+2x^2+4x)+x^2+2x+1$
$=2y(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)$
$=2y(x+1)^2+(x+1)^2$
$=(2y+1)(x+1)^2$
그런데 이 원기둥의 밑면의 지름의 길이가 $2(x+1)$이므로
(원기둥의 부피)$=$(밑면의 넓이)$\times$(높이)를 이용하면
$\pi\times(x+1)^2\times$(높이)$=(2y+1)(x+1)^2\pi$
$\therefore$ (높이)$=2y+1$

096 답 8

육상 트랙은 직선 구간 2개와 반원인 곡선 구간 2개로 이루어져 있지?
$\therefore$ (육상 트랙의 길이)
$=2\times$(직선 구간의 길이)$+2\times$(반원의 호의 길이)
$(6+2\pi)x+10y+4\pi=2\times(ax+by)+2\times\left\{\dfrac{2\pi\times(x+2)}{2}\right\}$
$=2ax+2by+2\pi x+4\pi$
$=(2a+2\pi)x+2by+4\pi$
x, y의 계수끼리 같아야 하므로
$2a+2\pi=6+2\pi$ $\quad\therefore a=3$
$2b=10$ $\quad\therefore b=5$
$\therefore a+b=3+5=8$

097 답 $x+y$

A, B, C, D를 구해 보자.

$A=x^3$, $B=x^2y$, $C=xy^2$, $D=y^3$

$\therefore A+3B+3C+D=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

이제 이것을 인수분해해 보자.

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$=x^3+2x^2y+x^2y+2xy^2+xy^2+y^3$

$=x^2(x+y)+2xy(x+y)+y^2(x+y)$

$=(x+y)(x^2+2xy+y^2)$

$=(x+y)(x+y)^2$

$=(x+y)^3$

따라서 구하는 정육면체의 한 모서리의 길이는 $x+y$야.

098 답 ③

$a^3c-a^2bc+ab^2c+ac^3-b^3c-bc^3=0$에서 좌변을 인수분해하자.

$a^3c-a^2bc+ab^2c+ac^3-b^3c-bc^3$

$=ac^3-bc^3+a^3c-a^2bc+ab^2c-b^3c$

$=(a-b)c^3+(a^3-a^2b+ab^2-b^3)c$

$=(a-b)c^3+\{a^2(a-b)+b^2(a-b)\}c$

$=(a-b)c^3+(a-b)(a^2+b^2)c$

$=(a-b)\{c^3+(a^2+b^2)c\}$

$=c(a-b)(a^2+b^2+c^2)$

$\therefore c(a-b)(a^2+b^2+c^2)=0$

그런데 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 양수지?

즉, $c(a^2+b^2+c^2)>0$이야.

따라서 $a-b=0$이므로 조건을 만족하는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이야.

잘 틀리는 유형 훈련+1up

p. 98

099 답 ③

1st 공통 부분이 생기도록 2개씩 묶어 보자.

$xy-y-2x+2=y(x-1)-2(x-1)$

$=(x-1)(y-2)$

따라서 선택지 중에서 인수인 것은 ③이야.

오답피하기

자리가 바뀌어 있기 때문에 공통 부분을 쉽게 찾지 못해서 틀리는 경우가 있어. 일단 묶어 보고 생각하자.

또한, $xy-y-2x+2$를 다음과 같이 묶어 인수분해할 수도 있어.

$(xy-2x)-y+2=x(y-2)-(y-2)$

$=(y-2)(x-1)$

100 답 $(x-2y)(2x-1)$

1st 두 개의 항을 적당히 묶어 공통 부분이 생기도록 하자.

$2x^2-4xy-x+2y=2x(x-2y)-(x-2y)$

$=(x-2y)(2x-1)$

101 답 ③

1st 공통 부분이 나올 수 있게 묶어 보자.

$x^2-xy-2y^2-3x-3y=(x^2-xy-2y^2)-3(x+y)$

$=(x+y)(x-2y)-3(x+y)$

$=(x+y)(x-2y-3)$

오답피하기

$x^2-xy-2y^2$을 인수분해할 때 x^2의 항과 $2y^2$을 분리하여 $-xy$의 항이 나올 수 있도록 해주는 거야. 이 부분에서 상당히 약한 사람이 있지?

$x \quad y \longrightarrow xy$

$x \quad -2y \longrightarrow -2xy \ (+$

$-xy$

$\therefore x^2-xy-2y^2=(x+y)(x-2y)$

102 답 ②

1st 적당히 항을 묶어 공통 부분을 찾아보자.

$a^2-ab-2a+b+1=(a^2-2a+1)-ab+b$

$=(a-1)^2-b(a-1)$

$=(a-1)(a-1-b)$

$=(a-1)(a-b-1)$

따라서 선택지 중에서 인수인 것은 ②야.

103 답 ④

1st $ac+ad+bc+bd$를 적당히 묶어서 인수분해하자.

$ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)$

$=(a+b)(c+d)$

2nd $X^2+2XY+Y^2=(X+Y)^2$ 이지?

$(a+b)^2+(c+d)^2+2(a+b)(c+d)$

$=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$

$a+b=A$, $c+d=B$로 치환하면

(주어진 식)$=A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$

$=(a+b+c+d)^2$

104 답 ④

1st $x^2=A$로 치환하자.

$x^2=A$로 치환하면

$x^4+2x^2-3=(x^2)^2+2x^2-3=A^2+2A-3$

$=(A+3)(A-1)$

$=(x^2+3)(x^2-1)$

$=(x^2+3)(x+1)(x-1)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④야.

105 답 ②, ④

1st 좌변의 식을 인수분해해 보자.

$2xy-2x-y+1=3$의 좌변을 인수분해하면

$2x(y-1)-(y-1)=(2x-1)(y-1)=3$

2nd 두 정수의 곱이 3이 되는 경우를 살펴보자.

x, y가 자연수이므로 $2x-1\geq1$, $y-1\geq0$에서

$(2x-1)(y-1)=3$이 되는 경우는 다음과 같아.

$2x-1=1$, $y-1=3$ 또는 $2x-1=3$, $y-1=1$

$\therefore x=1$, $y=4$ 또는 $x=2$, $y=2$

따라서 각각의 경우에서 순서쌍 (x, y)를 구하면

$(1, 4)$, $(2, 2)$가 돼.

106 답 ⑤

1st 좌변의 식을 인수분해해 보자.

$xy-x-3y+3=x(y-1)-3(y-1)$
$=(x-3)(y-1)=5$

2nd 두 정수의 곱이 5가 되는 경우를 살펴보자.

x, y가 자연수이므로 $x-3\geq-2$, $y-1\geq0$에서
$(x-3)(y-1)=5$가 되는 경우는 다음과 같아.

$\begin{cases}x-3=1\\y-1=5\end{cases}$ 일 때 $\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$, $\begin{cases}x-3=5\\y-1=1\end{cases}$ 일 때 $\begin{cases}x=8\\y=2\end{cases}$

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(4, 6)$, $(8, 2)$이므로 $a=8$, $b=2$
$\therefore ab=8\times2=16$

107 답 $(x+y+1)(x-y+1)$

1st 연산 ◦의 뜻을 잘 생각해 봐.

$(x+y)\circ(x-y)+1=(x+y)(x-y)+(x+y)+(x-y)+1$
$=x^2-y^2+2x+1=(x^2+2x+1)-y^2$
$=(x+1)^2-y^2$

2nd $x+1=A$로 치환하자.

이때, $x+1=A$로 치환하면
(주어진 식)$=A^2-y^2=(A+y)(A-y)$
$=(x+1+y)(x+1-y)$
$=(x+y+1)(x-y+1)$

108 답 ④

1st 연산 〈 〉의 뜻을 잘 생각해 봐.

$\langle a, b\rangle=(a-b)^2$이므로
$\langle 3x, 2y\rangle-\langle 2x, -3y\rangle=(3x-2y)^2-(2x+3y)^2$

2nd 식이 복잡한 경우는 치환!!

$3x-2y=A$, $2x+3y=B$로 치환하면
$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$
$=(3x-2y+2x+3y)(3x-2y-2x-3y)$
$=(5x+y)(x-5y)$

109 답 ④

1st 치환하여 인수분해하자.

$x+1=A$, $y-1=B$로 치환하면
$2(x+1)^2-(x+1)(y-1)-6(y-1)^2$
$=2A^2-AB-6B^2=(2A+3B)(A-2B)$
$=\{2(x+1)+3(y-1)\}\{(x+1)-2(y-1)\}$
$=(2x+3y-1)(x-2y+3)$
따라서 $a=3$, $b=-2$이므로
$a-b=3-(-2)=5$

110 답 ④

1st x^2-x가 공통으로 보이지? 치환하여 풀자.

$x^2-x=A$로 치환하면
$(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12$
$=A^2-8A+12=(A-6)(A-2)$
$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$
$=(x+2)(x-3)(x+1)(x-2)$
따라서 4개의 일차식의 합은
$(x+2)+(x-3)+(x+1)+(x-2)=4x-2$

111 답 ③

1st x^2+12가 공통으로 보이지? 치환하자.

$x^2+12=A$로 치환하면
$(x^2-8x+12)(x^2-7x+12)-6x^2$
$=(A-8x)(A-7x)-6x^2=A^2-15xA+56x^2-6x^2$
$=A^2-15xA+50x^2=(A-5x)(A-10x)$
$=(x^2-5x+12)(x^2-10x+12)$
따라서 두 이차식의 합은
$(x^2-5x+12)+(x^2-10x+12)=2x^2-15x+24$

오답피하기

> 보통 이차항과 일차항의 합에 대해 치환했지만 이차항과 상수항의 합도 치환할 수 있음을 기억해. 공통이 될 만한 것은 모두 치환할 수 있다는 걸 기억하자.

112 답 ④

1st $a-b$가 보이지? 치환하여 풀자.

$a-b=A$로 치환하면
$(a-b-\sqrt{2})(2b-2a-\sqrt{8})-2a+2b$
$=(a-b-\sqrt{2})\{-2(a-b)-2\sqrt{2}\}-2(a-b)$
$=(a-b-\sqrt{2})\{-2(a-b+\sqrt{2})\}-2(a-b)$
$=-2(a-b-\sqrt{2})(a-b+\sqrt{2})-2(a-b)$
$=-2(A-\sqrt{2})(A+\sqrt{2})-2A$
$=-2(A^2-2)-2A=-2(A^2+A-2)$
$=-2(A+2)(A-1)=-2(a-b+2)(a-b-1)$
$=-2\{a-\overset{(가)}{(b-2)}\}\{a-\overset{(나)}{(b+1)}\}$
$\therefore$ (가)+(나)$=(b-2)+(b+1)=2b-1$

113 답 ③

1st 두 개의 항을 적당히 묶어 치환할 수 있는 항을 만들어 보자.

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$
$x^2+3x=A$로 치환하면
$A(A+2)+1=A^2+2A+1$
$=(A+1)^2$
$=(x^2+3x+1)^2$
따라서 선택지 중 인수인 것은 ③이야.

오답피하기

> ( )( )( )( )$+k$ 꼴의 인수분해는 공통 부분이 생기도록 2개씩 묶어 전개하고 공통 부분을 치환하여 인수분해하는 게 그 해법이야. 적당히 묶는 방법이 헷갈린다구? x^2항은 이차항으로 대부분 공통 부분에 속하지만 x항, 즉 일차항이 같은지 상수항이 같은지는 해봐야 알 수 있어. 몇 개 안 되니까 묶어 보고 공통 부분을 찾자.

114 답 ①

1st 두 개의 항을 적당히 묶어 공통 부분을 치환하여 풀도록 하자.

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+a$
$x^2+5x=A$로 치환하면
$(A+4)(A+6)+a=A^2+10A+24+a$ ⋯ ㉠

2nd 완전제곱식이 되려면 상수항은 일차항의 계수의 $\frac{1}{2}$을 곱한 값의 제곱과 같아야 해.

㉠이 완전제곱식이 되려면 A의 계수의 $\frac{1}{2}$을 곱한 값의 제곱이 상수항이 되면 되지?

$\left(\frac{10}{2}\right)^2=24+a$, $25=24+a$

$\therefore a=1$

115 답 ⑤

1st $2x+1=A$, $x-2=B$로 치환하자.

$$\begin{aligned}(2x+1)^2-(x-2)^2&=A^2-B^2\\&=(A+B)(A-B)\\&=(2x+1+x-2)(2x+1-x+2)\\&=(3x-1)(x+3)\end{aligned}$$

이것이 $(3x+a)(x+b)$와 같으므로 $a=-1$, $b=3$

$\therefore a+3b=-1+9=8$

오|답|피|하|기

> 물론 이 문제는 전개한 후 정리해서 인수분해해도 돼.
> $$\begin{aligned}(2x+1)^2-(x-2)^2&=(4x^2+4x+1)-(x^2-4x+4)\\&=3x^2+8x-3\\&=(3x-1)(x+3)\end{aligned}$$
> 푸는 방법은 여러 가지야. 한 가지만 고집하지 않아도 돼. 하지만 시간이 적게 걸리고 정확하게 풀 수 있는 방법을 선택해야겠지.

116 답 ⑤

1st $x+5$, $x-3$이 보이지? 치환하자.

$x+5=A$, $x-3=B$로 치환하자.

$$\begin{aligned}&2(x+5)^2+5(x+5)(x-3)-3(x-3)^2\\&=2A^2+5AB-3B^2\\&=(A+3B)(2A-B)\\&=(x+5+3x-9)(2x+10-x+3)\\&=(4x-4)(x+13)\\&=4(x-1)(x+13)\end{aligned}$$

2nd a, b, c를 정할 수 있지?

a, b, c가 양수이므로 $a=4$, $b=1$, $c=13$

$\therefore a+b+c=4+1+13=18$

117 답 ③

1st x에 대하여 내림차순으로 정리하자.

$$\begin{aligned}x^2-y^2+3x+y+2&=x^2+3x-y^2+y+2\\&=x^2+3x-(y^2-y-2)\\&=x^2+3x-(y-2)(y+1)\\&=(x-y+2)(x+y+1)\end{aligned}$$

이것이 $(x+ay+b)(x+cy+d)$이므로

$a+b+c+d=-1+2+1+1=3$

오|답|피|하|기

> 이런 유형의 문제에 약한 사람이 있어. x에 대하여 내림차순으로 식을 정리하고 y에 대한 식을 인수분해하여 두 일차식의 곱의 꼴로 나오게 하는 게 바로 그 해법이야. 확실히 이해하고 넘어가자.

118 답 ①

1st x에 대하여 내림차순으로 정리해 보자.

$$\begin{aligned}2x^2+3xy+y^2-5x-4y+3&=2x^2+(3y-5)x+y^2-4y+3\\&=2x^2+(3y-5)x+(y-1)(y-3)\\&=(2x+y-3)(x+y-1)\end{aligned}$$

이것이 $(2x+ay+b)(x+cy+d)$이므로

$a=1$, $b=-3$, $c=1$, $d=-1$

$\therefore a+b+c+d=1+(-3)+1+(-1)=-2$

119 답 ⑤

1st 1004가 공통인수이므로 묶어 주자.

$$\begin{aligned}1004\times(0.75^2-0.25^2)&=1004\times(0.75+0.25)\times(0.75-0.25)\\&=1004\times1\times0.5=502\end{aligned}$$

오|답|피|하|기

> 참 복잡한 계산이지만 인수분해를 이용하면 아주 간단해지지. 사소한 소수의 덧셈, 뺄셈에 실수하지 않도록 해!

120 답 ⑤

1st $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하자.

$$\begin{aligned}\sqrt{504^2-496^2}&=\sqrt{(504+496)(504-496)}\\&=\sqrt{1000\times8}=\sqrt{100\times10\times2^3}\\&=\sqrt{100\times2^4\times5}=40\sqrt{5}\end{aligned}$$

121 답 ①

1st x, y의 분모를 유리화해서 간단히 나타내자.

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore x^2-2xy+y^2&=(x-y)^2\\&=(\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\\&=(-2\sqrt{2})^2=8\end{aligned}$$

오|답|피|하|기

> x, y의 분모를 유리화하면 값들이 간단해지지. 주어진 다항식도 완전제곱식이니까 x, y의 값을 대입하되 부호 때문에 틀리지 않도록 주의해야 해!

122 답 ④

1st x, y의 분모를 유리화하자.

$$x=\frac{1}{1-\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$y=\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=-\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

2nd $x+y$, $x-y$의 값을 구하자.

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$이므로 $x+y$, $x-y$의 값만 구하면 돼.

$$x+y=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}=-1$$

$$x-y=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-1)\times(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$

서술형 다지기 p. 102

[123-124 채점기준표]

Ⅰ	공통 부분을 한 문자로 치환한다.	20%
Ⅱ	치환한 문자를 이용하여 인수분해한다.	40%
Ⅲ	원래의 식을 대입하여 정리한다.	40%

123 답 $(x^2-2x+2)(x+1)(x-3)$

먼저, 공통 부분을 찾아 치환하자.

$x^2-2x=A$로 치환하자. … Ⅰ

그다음, 치환한 문자를 이용하여 인수분해하자.

(주어진 식)$=(x^2-2x)^2-(x^2-2x)-6$

$=A^2-A-6$

$=(A+2)(A-3)$ … Ⅱ

그래서, 원래의 식을 대입하여 정리하자.

$=(x^2-2x+2)(x^2-2x-3)$

$=(x^2-2x+2)(x+1)(x-3)$ … Ⅲ

124 답 $(a-b+6)(a-b-3)$

먼저, 공통 부분을 찾아 치환하자.

$a-b=A$로 놓으면 … Ⅰ

그다음, 치환한 문자를 이용하여 인수분해하자.

(주어진 식)$=(A-2)(A+5)-8=A^2+3A-10-8$

$=A^2+3A-18=(A+6)(A-3)$ … Ⅱ

그래서, 원래의 식을 대입하여 정리하자.

$=(a-b+6)(a-b-3)$ … Ⅲ

[125-126 채점기준표]

Ⅰ	$a+b$의 값을 구한다.	40%
Ⅱ	주어진 식을 인수분해한다.	40%
Ⅲ	식의 값을 구한다.	20%

125 답 100

먼저, $a+b$의 값을 구하자.

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=17+2\times4=25$

$\therefore a+b=5$ ($\because a>0,\ b>0$) … Ⅰ

그다음, 주어진 식을 인수분해하자.

(주어진 식)$=ab(a^2+2ab+b^2)$

$=ab(a+b)^2$ … Ⅱ

그래서, 식의 값을 구하자.

$=4\times5^2=100$ … Ⅲ

126 답 $24\sqrt{5}$

먼저, $a+b$의 값을 구하자.

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$=12+2\times4=20$

$\therefore a+b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ ($\because a>0,\ b>0$) … Ⅰ

그다음, 주어진 식을 인수분해하자.

$a^3+a^2b+ab^2+b^3=a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2)$ … Ⅱ

그래서, 식의 값을 구하자.

$=2\sqrt{5}\times12$

$=24\sqrt{5}$ … Ⅲ

127 답 $(x+2)(x-1)(x^2-x-8)$

연산 ⊙은 앞의 수를 제곱한 것에서 뒤의 수를 제곱한 것을 빼는 연산이다. … Ⅰ

$x^2-5=A$, $x+3=B$로 치환하면

(주어진 식)$=(x^2-5)^2-(x+3)^2=A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$=(x^2-5+x+3)(x^2-5-x-3)$ … Ⅱ

$=(x^2+x-2)(x^2-x-8)$

$=(x+2)(x-1)(x^2-x-8)$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	연산 ⊙의 뜻을 파악한다.	30%
Ⅱ	주어진 식을 치환을 이용해 인수분해한다.	50%
Ⅲ	원래의 식을 대입하여 정리한다.	20%

128 답 $(2,\ 4)$, $(0,\ -2)$, $(4,\ 2)$, $(-2,\ 0)$

$ab-a-b=2$에서 양변에 1을 더하면

$ab-a-b+1=3$, $a(b-1)-(b-1)=3$

$\therefore (a-1)(b-1)=3$ … Ⅰ

a, b가 정수이므로 $a-1$, $b-1$도 정수이다. 즉,

$a-1$	1	-1	3	-3
$b-1$	3	-3	1	-1

… Ⅱ

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 4)$, $(0,\ -2)$, $(4,\ 2)$, $(-2,\ 0)$이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 식을 변형한 후 인수분해하여 좌변은 두 식의 곱으로, 우변은 정수가 되게 만든다.	50%
Ⅱ	$a-1$, $b-1$의 값을 찾는다.	30%
Ⅲ	순서쌍 $(a,\ b)$를 모두 구한다.	20%

129 답 -10

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $7<4+\sqrt{10}<8$

또, $-4<-\sqrt{10}<-3$이므로 $0<4-\sqrt{10}<1$ … Ⅰ

$\therefore a=4+\sqrt{10}-7=\sqrt{10}-3$, $b=4-\sqrt{10}$ … Ⅱ

$\therefore$ (주어진 식)$=ab-4a+3b-12=a(b-4)+3(b-4)$

$=(b-4)(a+3)=(4-\sqrt{10}-4)(\sqrt{10}-3+3)$

$=(-\sqrt{10})\times\sqrt{10}=-10$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$4+\sqrt{10}$, $4-\sqrt{10}$의 값의 범위를 구한다.	30%
Ⅱ	a, b의 값을 구한다.	30%
Ⅲ	주어진 식을 인수분해한 후 대입하여 식의 값을 구한다.	40%

130 답 $(a-b)(b-c)(a-c)$

(주어진 식)$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$ … Ⅰ

$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$ … Ⅱ

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리한다.	30%
Ⅱ	공통 부분인 $b-c$로 묶어 낸다.	40%
Ⅲ	나머지 부분도 인수분해하여 정리한다.	30%

131 답 -210

(주어진 식)

$=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+\cdots+(19^2-20^2)$ … Ⅰ

$=(1+2)(1-2)+(3+4)(3-4)+(5+6)(5-6)$
$+\cdots+(19+20)(19-20)$ … Ⅱ

$=-(3+7+11+\cdots+39)$

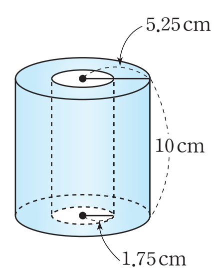
$=-210$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	두 개의 항씩 묶는다.	30%
Ⅱ	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한다.	40%
Ⅲ	각 항을 계산하여 값을 구한다.	30%

132 답 245π cm³

만들어지는 입체도형은 그림과 같이 구멍이 뚫린 원기둥이다. … Ⅰ



큰 원기둥과 작은 원기둥의 부피를 각각 A, B라 하면

$A=\pi\times5.25^2\times10$

$=10\pi\times5.25^2(\text{cm}^3)$

$B=\pi\times1.75^2\times10$

$=10\pi\times1.75^2(\text{cm}^3)$ … Ⅱ

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$A-B=10\pi(5.25^2-1.75^2)$

$=10\pi(5.25+1.75)(5.25-1.75)$

$=10\pi\times7\times3.5$

$=245\pi(\text{cm}^3)$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	회전시킨 입체도형의 모양을 파악한다.	20%
Ⅱ	큰 원기둥과 작은 원기둥의 부피를 각각 구한다.	30%
Ⅲ	인수분해 공식을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.	50%

최고난도 만점 문제

p. 104

133 답 7

1st $a-b=3$, $b-c=-1$을 이용하여 $a-c$의 값을 구하자.

$a-b=3$ … ㉠, $b-c=-1$ … ㉡에서 ㉠+㉡을 하면

$a-c=2$ … ㉢

2nd 주어진 식을 인수분해하자.

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{3^2+(-1)^2+(-2)^2\}$ ($\because$ ㉠, ㉡, ㉢)

$=\frac{1}{2}\times14=7$

134 답 ①

1st 적당히 항을 묶어 인수분해할 수 있도록 해 보자.

$a^2-b^2-c^2+2a+2bc+1=(a^2+2a+1)-(b^2-2bc+c^2)$

$=(a+1)^2-(b-c)^2$

$=(a+1+b-c)(a+1-b+c)$

$=(a+b-c+1)(a-b+c+1)$

135 답 ②

1st 인수분해 공식을 이용하여 $f(x)$의 (　) 안의 수들을 정리해 보자.

$f(x)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)$
$\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x}}\times\frac{x+1}{x}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{x+1}{x}$

2nd 이제 k의 값을 구할 수 있겠지?

이때, $f(k)=\frac{11}{21}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{k+1}{k}=\frac{11}{21}$

$21(k+1)=22k$　　$\therefore k=21$

136 답 ⑤

1st 어떤 수 A가 B로 나누어떨어진다는 의미는 B가 A의 약수라는 거야.

주어진 수를 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하여 정리하자.

$2^{40}-1=(2^{20})^2-1=(2^{20}+1)(2^{20}-1)$

$=(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^{10}-1)$

$=(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^5+1)(2^5-1)$

$=(2^{20}+1)(2^{10}+1)\times33\times31$

주어진 자연수의 약수 중 30과 40 사이의 수는 33과 31이 돼.

따라서 이 두 자연수의 합은 $33+31=64$야.

137 답 $-6\sqrt{2}$

1st $x+y$, $x-y$가 눈에 들어오지? 치환하자.

$x+y=A$, $x-y=B$로 치환하자.

$A^3B-B^3A=AB(A^2-B^2)=AB(A+B)(A-B)$

$=(x+y)(x-y)(x+y+x-y)(x+y-x+y)$

$=4xy(x+y)(x-y)$

2nd xy, $x+y$, $x-y$의 값을 구하자.

$x+y=\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}+\frac{3-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=3$

$x-y=\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}-\frac{3-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$xy=\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\times\frac{3-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\{3+(\sqrt{3}+\sqrt{2})\}\{3-(\sqrt{3}+\sqrt{2})\}}{4}$

$=\frac{9-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{4}=\frac{4-2\sqrt{6}}{4}=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

$\therefore 4xy(x+y)(x-y)=4\times\frac{2-\sqrt{6}}{2}\times3\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$=6(2-\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=-6\sqrt{2}$

138 답 128

1st 조건을 이용하여 $x+y$의 값을 구하자.

$x^2y-3x+xy^2-3y=(x^2y+xy^2)-3(x+y)$
$=xy(x+y)-3(x+y)$
$=(x+y)(xy-3)=72$

이때, $xy=12$이므로

$9(x+y)=72 \quad \therefore x+y=8$

2nd 구하고자 하는 식을 인수분해하자.

$x^3-x^2y-xy^2+y^3=(x^3-x^2y)-(xy^2-y^3)$
$=x^2(x-y)-y^2(x-y)$
$=(x-y)(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)(x-y)$
$=(x-y)^2(x+y)$ ⋯ ㉠

3rd $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$를 이용하자.

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=8^2-4\times12=64-48=16$

$\therefore (x-y)^2(x+y)=16\times8=128$

139 답 2700

1st 모서리의 길이의 합, 겉넓이를 각각 구하자.

(가) 직육면체의 모서리의 길이의 총합이 48이므로

$4(4+x+y)=48 \quad \therefore x+y=8$ ⋯ ㉠

또, (가) 직육면체의 겉넓이가 94이므로

$2(4x+4y+xy)=94,\ 4x+4y+xy=47$

$4(x+y)+xy=47,\ 4\times8+xy=47$ ($\because$ ㉠)

$\therefore xy=15$ ⋯ ㉡

(나) 직육면체의 겉넓이 A는 $A=2(x^2y^2+x^3y+xy^3)$

(다) 직육면체의 겉넓이 B는 $B=2(xy+3x^2y+3xy^2)$

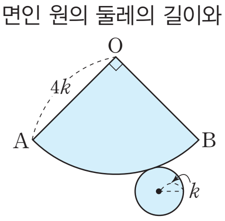
2nd A, B를 주어진 식에 대입하자.

$A+B+2x^2y^2+2xy$
$=2(x^2y^2+x^3y+xy^3)+2(xy+3x^2y+3xy^2)+2x^2y^2+2xy$
$=2xy(xy+x^2+y^2+1+3x+3y+xy+1)$
$=2xy(x^2+2xy+3x+y^2+3y+2)$
$=2xy\{x^2+(2y+3)x+y^2+3y+2\}$
$=2xy\{x^2+(2y+3)x+(y+1)(y+2)\}$
$=2xy(x+y+1)(x+y+2)$
$=2\times15\times9\times10$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=2700$

140 답 $x-1$

1st 원뿔의 전개도에서 호 AB의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같아.

원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 k라 하자. 밑면인 원의 둘레의 길이와 호 AB의 길이가 같으므로



$2\pi k=2\pi\times\overline{OA}\times\frac{90}{360} \quad \therefore \overline{OA}=4k$

2nd (원뿔의 겉넓이)=(원의 넓이)+(부채꼴의 넓이)임을 이용하자.

이 원뿔의 겉넓이는 밑면인 원의 넓이와 옆면인 부채꼴의 넓이의 합이므로

$\pi\times k^2+\pi\times(4k)^2\times\frac{90}{360}=\pi k^2+4\pi k^2=5\pi k^2$

이것이 $(5x^2-10x+5)\pi$와 같아야 하므로

$(5x^2-10x+5)\pi=5(x^2-2x+1)\pi=5(x-1)^2\pi$에서

$k^2=(x-1)^2 \quad \therefore k=x-1$ ($\because x\geq2$)

F 이차방정식의 풀이

개념 체크 001~047 정답은 p. 5에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

문제편 p. 110

048 답 ②

모든 항을 좌변으로 이항해야지.

ㄱ. $4x^2-4-3x^2-2x+1=0 \quad \therefore x^2-2x-3=0$ ← 이차방정식

ㄴ. $x^2-1-x^2-x=0 \quad \therefore -x-1=0$ ← 일차방정식

ㄷ. $x^4-4x^2+4-x^2-1=0$

$\therefore x^4-5x^2+3=0$ ← 이차방정식이 아니야!

ㄹ. $2x^2+6x-6x-3=0 \quad \therefore 2x^2-3=0$ ← 이차방정식

따라서 이차방정식인 것은 ㄱ, ㄹ이야.

049 답 ⑤

모든 항을 좌변으로 이항하자.

① $x^2=0$ ← 이차방정식

② $x(x-2)=0 \quad \therefore x^2-2x=0$ ← 이차방정식

③ $x^2=x+1 \quad \therefore x^2-x-1=0$ ← 이차방정식

④ $3x^2+3x-1=0$ ← 이차방정식

⑤ $(x+1)(x-1)=x^2-x,\ x^2-1-x^2+x=0$

$\therefore x-1=0$ ← 일차방정식

오답피하기

이차방정식인지 아닌지 판단할 때 반드시 모든 항을 좌변으로 이항해야 해. x^2의 항만 있다고 섣불리 풀다가 답이 틀려지거든. 이항한 후 정리하고 난 다음에 판단하자.

050 답 12

식을 전개한 후 이항하여 정리해.

$3(x+1)^2=2(x-1),\ 3x^2+6x+3-2x+2=0$

$\therefore 3x^2+4x+5=0$

따라서 $a=3$, $b=4$, $c=5$이므로

$a+b+c=3+4+5=12$

051 답 $a\neq-1$

우변에 있는 항을 좌변으로 이항해.

$ax^2-2x=-x^2-1,\ ax^2-2x+x^2+1=0$

$\therefore (a+1)x^2-2x+1=0$

이차방정식이 되려면 x^2의 항의 계수가 0이 아니어야 해.

$a+1\neq0 \quad \therefore a\neq-1$

052 답 ③

$-4x(ax-3)=2x^2+1$에서 $-4ax^2+12x-2x^2-1=0$

$\therefore (4a+2)x^2-12x+1=0$

이때, $4a+2=0$, 즉 $a=-\frac{1}{2}$인 경우는 이차항이 없어지고 일차방정식이 돼.

053 답 ③, ⑤

주어진 해를 x 대신에 대입하여 등호가 성립하는 것을 찾자.

① $1^2-2\times1=-1\neq0$

② $2^2+3\times2+2=12\neq0$

③ $(-3)^2-9=0$

④ $(-3+2)(-3-3)=6\neq0$

⑤ $2\times(-1)\times(-1-1)=4$

054 답 ④

$x=1$을 대입하여 등호가 성립하는 것을 찾자.

① $1^2+1=2\neq0$

② $1^2-2\times1-1=-2\neq0$

③ $1^2-3=-2\neq0$

④ $1^2+3\times1-4=0$

⑤ $1^2-2\times1+3=2\neq0$

055 답 4개

$x=-2$를 대입해서 등호가 성립하는 것을 찾자.

ㄱ. $(-2)^2=4\neq2$

ㄴ. $(-2+1)(-2+2)=0$

ㄷ. $(-2)^2-4=0$

ㄹ. $(-2)^2+(-2)-2=0$

ㅁ. $(-2-1)^2=9\neq0$

ㅂ. $(-2+2)^2=0$

따라서 $x=-2$를 해로 가지는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅂ으로 4개야.

056 답 ②

x의 값인 -2, -1, 0, 1, 2를 $x^2+3x-4=0$에 대입하여 등식이 성립하는 것을 찾자.

$x=-2$: $(-2)^2+3\times(-2)-4=-6\neq0$

$x=-1$: $(-1)^2+3\times(-1)-4=-6\neq0$

$x=0$: $0^2+3\times0-4=-4\neq0$

$x=1$: $1^2+3\times1-4=0$

$x=2$: $2^2+3\times2-4=6\neq0$

따라서 주어진 이차방정식의 해는 $x=1$로 1개야.

오답피하기

이차방정식 $x^2+3x-4=0$은 $(x+4)(x-1)=0$이므로 $x=-4$ 또는 $x=1$이라고 하여 해가 2개라고 성급하게 답을 쓰면 안 돼! x의 값이 제한되어 있는 것을 잊지 마!

057 답 $x=-2$

$2x^2-18=5x$에서 $2x^2-5x-18=0$이므로 주어진 x의 값을 대입하여 등식이 성립하는 것을 찾자.

$x=-3$일 때, $2\times(-3)^2-5\times(-3)-18=15\neq0$

$x=-2$일 때, $2\times(-2)^2-5\times(-2)-18=0$

$x=-1$일 때, $2\times(-1)^2-5\times(-1)-18=-11\neq0$

$x=0$일 때, $2\times0^2-5\times0-18=-18\neq0$

$x=1$일 때, $2\times1^2-5\times1-18=-21\neq0$

따라서 주어진 이차방정식의 해는 $x=-2$야.

058 답 ④

이차방정식 $x^2+ax+a+5=0$의 한 근이 $x=-4$이므로 대입하면

$(-4)^2+a\times(-4)+a+5=0$, $16-4a+a+5=0$

$-3a+21=0$ $\quad\therefore a=7$

059 답 ④

한 근 $x=2$를 이차방정식 $x^2-2ax+2a=0$에 대입해.

$2^2-2a\times2+2a=0$

$4-2a=0$ $\quad\therefore a=2$

060 답 ⑤

$x=p$를 이차방정식에 대입하면 $p^2+2p-4=0$

$\therefore p^2+2p=4$

061 답 ②

$x=-2$, $x=5$를 이차방정식 $ax^2+bx-10=0$에 각각 대입해.

$x=-2$일 때, $4a-2b-10=0$

$\therefore 2a-b=5$ ⋯ ㉠

$x=5$일 때, $25a+5b-10=0$

$\therefore 5a+b=2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore a+b=1+(-3)=-2$

062 답 8

(ⅰ) $x=\frac{1}{3}$을 $x^2+ax-1=0$에 대입하면

$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}a-1=0$, $\frac{1}{9}+\frac{1}{3}a-1=0$

$\frac{1}{3}a=\frac{8}{9}$ $\quad\therefore a=\frac{8}{3}$

(ⅱ) $x=\frac{1}{3}$을 $bx^2+5x-2=0$에 대입하면

$b\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}-2=0$, $\frac{1}{9}b+\frac{5}{3}-2=0$

$\frac{1}{9}b=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore b=3$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해

$ab=\frac{8}{3}\times3=8$

063 답 ④

$\alpha^2-4\alpha-1=0$에서 $\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-4-\frac{1}{\alpha}=0$ $\quad\therefore \alpha-\frac{1}{\alpha}=4$

또, $\alpha^2-4\alpha=1$이므로 주어진 식의 값은

$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)(\alpha^2-4\alpha)=4\times1=4$

064 답 ①

$x=\alpha$를 이차방정식 $x^2-3x+1=0$에 대입하면

$\alpha^2-3\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-3+\frac{1}{\alpha}=0$ $\quad\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=3$ ⋯ ㉠

$\therefore \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=3^2-2=7$ ($\because$ ㉠)

065 답 ②

$a^2+a-4=0$에서 $a^2+a=4$이므로

주어진 식의 값은

$$\begin{aligned}a^5+a^4-4a^3-a^2-a+7&=a^3(a^2+a-4)-(a^2+a)+7\\&=a^3\times0-4+7\\&=3\end{aligned}$$

F

066 답 96

$x-\frac{5}{x}=7$에서 $x^2-7x-5=0$
$x^2-7x-5=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha^2-7\alpha-5=0$ $\therefore \alpha^2-7\alpha=5$
$\beta^2-7\beta-5=0$ $\therefore \beta^2-7\beta=5$
$\therefore (\alpha^2-7\alpha+7)(\beta^2-7\beta+3)=(5+7)\times(5+3)=96$

067 답 4

$a^2-2a-1=0$에서 $a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면
$a-2-\frac{1}{a}=0$, 즉 $a-2=\frac{1}{a}$이 성립해.
또, $a^2=2a+1$이므로 주어진 식에 대입하면
$$\frac{4a^4}{2a+1}-\frac{8}{a-2}=\frac{4a^4}{a^2}-8a$$
$$=4a^2-8a$$
$$=4(a^2-2a)$$
$$=4\times1=4$$

068 답 ⑤

$x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$
$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$
즉, $a=-6$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=-6$이므로
$a^2+b^2=(-6)^2+2^2=40$

069 답 ③

$x^2-3x+18=2x^2$에서 $x^2+3x-18=0$
$(x+6)(x-3)=0$이므로 $a=6$, $b=-3$ ($\because a>b$)
$\therefore a-b=6-(-3)=9$

070 답 ②

$(x+6)(x-2)=x-8$, $x^2+4x-12=x-8$
$x^2+4x-12-x+8=0$, $x^2+3x-4=0$
$(x+4)(x-1)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

071 답 ②

$2x^2+3x-5=0$, $(2x+5)(x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=1$
(두 근의 합)$=A=-\frac{5}{2}+1=-\frac{3}{2}$
(두 근의 곱)$=B=-\frac{5}{2}\times1=-\frac{5}{2}$
$\therefore 3A-B=-\frac{9}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{4}{2}=-2$

072 답 ①

$6x^2+x-1=0$, $(2x+1)(3x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$ ($\because a>b$)이므로
$\frac{b}{a}=\left(-\frac{1}{2}\right)\div\frac{1}{3}=-\frac{3}{2}$

073 답 ④

$x^2-x-5=\frac{4x-x^2}{3}$에서
$3x^2-3x-15=4x-x^2$, $4x^2-7x-15=0$
$(4x+5)(x-3)=0$ $\therefore x=-\frac{5}{4}$ 또는 $x=3$
따라서 $-\frac{5}{4}$와 3 사이에 있는 정수는 -1, 0, 1, 2이므로
그 합은 $-1+0+1+2=2$

074 답 ⑤

$2x^2-ax-3a-10=0$에 $x=a$를 대입하면
$2a^2-a^2-3a-10=0$, $a^2-3a-10=0$
$(a+2)(a-5)=0$ $\therefore a=5$ ($\because a>0$)

075 답 ③

$3x^2-8x+5=0$, $(3x-5)(x-1)=0$
$\therefore x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=1$
즉, 두 근 중 작은 근은 $x=1$이고 $x=1$이 이차방정식
$x^2+kx-2k^2+5=0$의 한 근이므로 이를 대입하면
$1+k-2k^2+5=0$, $2k^2-k-6=0$
$(2k+3)(k-2)=0$
$\therefore k=-\frac{3}{2}$ 또는 $k=2$
따라서 모든 k의 값의 합은 $-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$

076 답 ⑤

이차방정식이므로 $a-1\neq0$, 즉 $a\neq1$이야.
주어진 이차방정식 $(a-1)x^2-(a^2+1)x+2(a+1)=0$에 $x=2$를
대입해 보자.
$4(a-1)-2(a^2+1)+2(a+1)=0$
$4a-4-2a^2-2+2a+2=0$, $-2a^2+6a-4=0$
$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$
그런데 $a\neq1$이므로 $a=2$

077 답 ③

먼저 좌변을 풀면
$x◎(x-2)=x(x-2)-x+1$
$=x^2-2x-x+1=x^2-3x+1$ ⋯ ㉠
우변을 정리하면
$2◎3=2\times3-2+1=5$ ⋯ ㉡
㉠$=$㉡이므로 $x^2-3x+1=5$
$x^2-3x-4=0$, $(x-4)(x+1)=0$
$\therefore x=4$ ($\because x$는 양수)

078 답 ①

$x^2+ax-6=0$ ⋯ ㉠의 한 근이 3이므로 $x=3$을 대입하면
$9+3a-6=0$ $\therefore a=-1$
㉠에 $a=-1$을 대입하면
$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$
즉, 다른 한 근은 $b=-2$야.
$\therefore a+b=-1+(-2)=-3$

079 답 ②

$x=-3$을 $x^2+2x+a=0$ ⋯ ㉠에 대입하자.

$9-6+a=0$ $\quad\therefore a=-3$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

즉, 다른 한 근은 $b=1$이야.

$\therefore a-b=-3-1=-4$

080 답 ③

이차방정식 $x^2+(a-1)x+2(a+1)=0$ ⋯ ㉠의 한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$4+2(a-1)+2(a+1)=0$, $4+2a-2+2a+2=0$

$4a=-4$ $\quad\therefore a=-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 $x=0$이야.

081 답 18

이차방정식 $x^2-(a-1)x-24=0$ ⋯ ㉠의 한 근이 -4이므로 $x=-4$를 대입하면

$16+4(a-1)-24=0$, $4a-12=0$ $\quad\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$x^2-2x-24=0$, $(x+4)(x-6)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=6$

따라서 $x=6$을 $2x^2-13x+b=0$에 대입하면

$2\times6^2-13\times6+b=0$ $\quad\therefore b=6$

$\therefore ab=3\times6=18$

082 답 $x=-\frac{3}{5}$

이차방정식 $(k-1)x^2-(k^2+2k)x-3=0$ ⋯ ㉠의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$k-1+k^2+2k-3=0$, $k^2+3k-4=0$

$(k+4)(k-1)=0$ $\quad\therefore k=-4$ 또는 $k=1$

그런데 $k=1$이면 ㉠에서 x^2의 계수가 0이 되어 이차방정식이라는 문제의 조건에 맞지 않지?

즉, $k=-4$야.

그러므로 $k=-4$를 ㉠에 대입하면

$(-4-1)x^2-(16-8)x-3=0$

$-5x^2-8x-3=0$, $5x^2+8x+3=0$

$(x+1)(5x+3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{3}{5}$

따라서 다른 한 근은 $x=-\frac{3}{5}$이야.

083 답 ③

이차방정식에서 중근을 갖는다는 것은 근이 1개만 나오는 거야.

ㄱ. $(x-3)^2=9$, $x^2-6x+9=9$, $x^2-6x=0$
 $x(x-6)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=6$

ㄴ. $6x=x^2+9$, $x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0$
 $\therefore x=3$ (중근) ← OK!

ㄷ. $2x^2-4x+2=0$, $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$
 $\therefore x=1$ (중근) ← OK!

ㄹ. $3x^2=12$, $x^2-4=0$
 $(x+2)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 중근을 가지는 것은 ㄴ, ㄷ이야.

084 답 ⑤

① $x^2=0$ $\quad\therefore x=0$ (중근)

② $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$
 $\therefore x=1$ (중근)

③ $(2x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$ (중근)

④ $x(x-8)+16=0$, $x^2-8x+16=0$
 $(x-4)^2=0$ $\quad\therefore x=4$ (중근)

⑤ $x^2+14x+13=0$, $(x+13)(x+1)=0$
 $\therefore x=-13$ 또는 $x=-1$

085 답 ②

① $(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$ (중근) ← OK!

② $x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$ $\quad\therefore x=-2$ (중근) ← NO!

③ $4x^2-4x+1=0$, $(2x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$ (중근) ← OK!

④ $x^2-12x+36=0$, $(x-6)^2=0$ $\quad\therefore x=6$ (중근) ← OK!

⑤ $(x+1)^2=-4x-8$, $x^2+2x+1+4x+8=0$
 $x^2+6x+9=0$, $(x+3)^2=0$
 $\therefore x=-3$ (중근) ← OK!

086 답 ③

이차항의 계수가 3이고, 중근 $x=-1$을 가지므로 주어진 이차방정식은

$3(x+1)^2=0$ $\quad\therefore 3x^2+6x+3=0$

이것은 $3x^2+ax+b=0$과 같아야 하므로

$a=6$, $b=3$

$\therefore a+b=6+3=9$

오|답|피|하|기

$x=-1$이 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$의 근이니까 이 식에 $x=-1$을 대입해야겠다고 생각할지도 몰라. 이때, $x=-1$을 대입하면 $3-a+b=0$이 돼. 또, 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용하면 a, b 사이의 관계식을 하나 더 구할 수 있지. 하지만 이 두 식을 연립하려면 더 복잡해져. 이차방정식에서 이차항의 계수 p와 중근 q가 주어지면 $p(x-q)^2=0$이라 식을 세울 수 있다는 것을 기억하자.

087 답 ②

$x^2-6x+1+k=0$이 중근을 가지려면 좌변의 식이 완전제곱식이 되어야 해.

$\left(\frac{-6}{2}\right)^2=1+k$, $9=1+k$

$\therefore k=8$

088 답 ②

이차방정식 $x^2-4x+a-3=0$을 $(x+b)^2=0$의 꼴로 나타낼 수 있다는 것은 주어진 이차방정식이 중근을 갖는다는 뜻이야.

$x^2-4x+a-3=0$이 중근을 갖기 위해서는

$a-3=\left(\frac{-4}{2}\right)^2=4$이어야 하므로 $a=7$

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2-4x+4=0$, 즉 $(x-2)^2=0$이므로 $b=-2$

$\therefore a+2b=7+2\times(-2)=3$

F

089 답 6

이차방정식 $x^2+2x+8-k=0$ ⋯ ㉠이 중근을 가지므로 좌변은 완전제곱식이 되어야 해.

$\left(\frac{2}{2}\right)^2=8-k$, $1=8-k$

$\therefore k=7$

$k=7$을 ㉠에 대입하면

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$ (중근)

이차방정식이 중근 $x=p$를 갖는다고 하므로 $p=-1$

$\therefore k+p=7+(-1)=6$

090 답 $-\frac{7}{2}$

이차방정식 $x^2-(k+2)x+4=0$이 중근을 가지므로

$\left\{\frac{-(k+2)}{2}\right\}^2=4$, $(k+2)^2=16$

$k^2+4k-12=0$, $(k+6)(k-2)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$

문제의 조건에서 $k>0$이므로 $k=2$

따라서 $x=2$가 $x^2+ax+3=0$의 근이므로

$2^2+2a+3=0$ $\quad\therefore a=-\frac{7}{2}$

오답피하기

이차항의 계수가 양수인 이차식을 완전제곱식으로 만들어줄 때, 상수항만 모르는 경우 상수항은 항상 양수야. 하지만 이차항과 상수항은 알고 일차항을 모르는 경우 그 일차항은 항상 부호가 다른 2개의 값이 나와. 그래서 이 문제도 $k>0$이라는 조건이 있기 때문에 $k=2$만을 가지고 풀게 돼. 만약 조건이 없는 경우는 당연히 $k=-6$, $k=2$의 두 가지 경우를 다 따져줘야 해.

091 답 $\frac{1}{18}$

이차방정식 $x^2-2ax+b=0$이 중근을 가지려면

$b=\left(\frac{-2a}{2}\right)^2$, 즉 $b=a^2$이어야 해.

이때, a, b는 주사위의 눈의 수이므로 1부터 6까지의 값을 가질 수 있지?

$a=1$일 때, $b=1^2=1$

$a=2$일 때, $b=2^2=4$

$a\geq3$일 때는 $b\geq9$가 되어 조건을 만족시키지 않아.

즉, $b=a^2$을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(2, 4)$야.

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$이야.

092 답 ②

$4(x-1)^2=20$, $(x-1)^2=5$

$x-1=\pm\sqrt{5}$ $\quad\therefore x=1\pm\sqrt{5}$

따라서 $x=1\pm\sqrt{5}=A\pm\sqrt{B}$이므로 $A=1$, $B=5$

$\therefore A+B=1+5=6$

093 답 ④

$4(x-1)^2=36$, $(x-1)^2=9$

$x-1=\pm3$, $x=1\pm3$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

094 답 ⑤

$2(x-6)^2-7=0$, $(x-6)^2=\frac{7}{2}$

$x-6=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$, $x=6\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

$\therefore x=6\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$

따라서 두 근의 합은 $\left(6+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)+\left(6-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)=12$

095 답 ④

$(x-2)^2=k$, $x-2=\pm\sqrt{k}$

$\therefore x=2\pm\sqrt{k}$

따라서 두 근은 $x=2+\sqrt{k}$, $x=2-\sqrt{k}$이고 두 근의 곱이 -4이므로

$(2+\sqrt{k})(2-\sqrt{k})=4-k=-4$ $\quad\therefore k=8$

096 답 ②

① $x^2=8$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$

② $2x^2-98=0$, $x^2=49$ $\quad\therefore x=\pm7$

③ $3x^2-25=0$, $x^2=\frac{25}{3}$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{\frac{25}{3}}=\pm\frac{5\sqrt{3}}{3}$

④ $(x+2)^2=10$, $x+2=\pm\sqrt{10}$
$\quad\therefore x=-2\pm\sqrt{10}$

⑤ $2(x-1)^2=4$, $(x-1)^2=2$
$\quad x-1=\pm\sqrt{2}$ $\quad\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

따라서 근이 모두 유리수인 이차방정식은 ②야.

097 답 ③

$2(x+a)^2=10$, $(x+a)^2=5$

$x+a=\pm\sqrt{5}$ $\quad\therefore x=-a\pm\sqrt{5}$

이때, 해가 $x=-1\pm\sqrt{b}$이므로 $a=1$, $b=5$

$\therefore a+b=1+5=6$

098 답 ①

이차방정식 $(x-1)^2=a$ ⋯ ㉠에서 한 근이 5이므로 x 대신 5를 대입하면

$(5-1)^2=a$ $\quad\therefore a=16$

$a=16$을 ㉠에 대입하면

$(x-1)^2=16$, $x=1\pm4$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

따라서 다른 한 근은 $x=-3$이야.

099 답 $k=0$, $x=2$ (중근)

$3(x-2)^2+k=0$, $3(x-2)^2=-k$

이 이차방정식이 중근을 가지려면

(완전제곱식)$=0$ 꼴이어야 하므로 $k=0$

$3(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$ (중근)

100 답 ⑤

$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+k-6=0$, 즉 $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=-k+6$이 해를 가지기 위해서는 $-k+6\geq0$이어야 하므로

$-k\geq-6$ $\quad\therefore k\leq6$

따라서 선택지 중 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤야.

101 답 ④

$a\neq0$이므로

$(x-p)^2=\frac{q}{a}$, $x-p=\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$ $\quad\therefore x=p\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$

주어진 이차방정식이 서로 다른 두 근을 가지려면 $\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$가 존재해야겠지?

즉, 근호 안이 양수이기만 하면 되므로

$\frac{q}{a}>0$ $\quad\therefore aq>0$

오답피하기

> $a(x-p)^2=q$에서 양변을 a로 나눌 때에는 a가 0이 아니라는 전제 조건이 필요해. 주어진 문제에 '이차방정식'이라는 말이 있으므로 a가 0이 아니라는 것이 명백해져. 앞으로 이차방정식이라는 말이 나오면 이차항의 계수가 0이 아니라는 뜻을 포함하고 있음을 알아 두자.

102 답 ③

$x^2-4x+2=0$, $x^2-4x=-2$

$x^2-4x+4=-2+4$, $(x-2)^2=2$

이것이 $(x+a)^2=b$와 같아야지?

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a+b=-2+2=0$

103 답 ①

$x^2-8x+1=0$, $x^2-8x=-1$

$x^2-8x+(-4)^2=-1+(-4)^2$, $(x-4)^2=15$

이것이 $(x-4)^2=k$와 같으므로 $k=15$

104 답 ④

$(x-3)(x+5)=8$, $x^2+2x-15=8$

$x^2+2x=23$, $x^2+2x+1=23+1$, $(x+1)^2=24$

이것이 $(x+a)^2=b$와 같아야 하므로 $a=1$, $b=24$

$\therefore b-a=24-1=23$

105 답 ①

먼저 이차항의 계수가 분수이므로 $\frac{1}{2}$로 묶자.

$\frac{1}{2}x^2-4x=-a$, $\frac{1}{2}\{x^2-8x+(-4)^2\}=-a+\frac{(-4)^2}{2}$

$\frac{1}{2}(x^2-8x+16)=-a+8$, $\frac{1}{2}(x-4)^2=8-a$

이것이 $\frac{1}{2}(x+b)^2=4$와 같아야 하므로

$-4=b$, $8-a=4$ $\quad\therefore a=4$, $b=-4$

$\therefore ab=4\times(-4)=-16$

오답피하기

> 이차항의 계수가 분수일 때 정수로 만들고 풀 수 있으나 그대로 풀게 되면 다음에 유의해야 해.
>
> $\frac{1}{2}x^2-4x=-a \Rightarrow \frac{1}{2}(x^2-8x+16)=-a+16$ (×)
>
> $\frac{1}{2}x^2-4x=-a \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}(x^2-8x+16)}_{\text{곱한 값}}=-a+8$ (○)
>
> 성급하게 하면 우변을 $-a+16$으로 계산할 수 있으니 조심해야 해!

106 답 ②

$x^2+2x-2=0$에서

$x^2+2x=2$

$x^2+2x+\overset{A}{1}^2=2+1^2$

$(x+1)^2=3 \leftarrow B$

$x+1=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{3}$

따라서 $A=1$, $B=3$이므로

$A+B=1+3=4$

107 답 ③

① $(x+1)^2=5$, $x+1=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$ ← OK!

② $3x^2-8x=-2$, $x^2-\frac{8}{3}x=-\frac{2}{3}$

$x^2-\frac{8}{3}x+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=-\frac{2}{3}+\frac{16}{9}$, $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

$\therefore x=\frac{4}{3}\pm\frac{\sqrt{10}}{3}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{3}$ ← OK!

③ $x^2+x-1=0$, $x^2+x=1$

$x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1+\frac{1}{4}$, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$\therefore x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ← NO!

④ $2x^2+x=2$, $x^2+\frac{1}{2}x=1$

$x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2=1+\frac{1}{16}$, $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$

$\therefore x=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{17}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$ ← OK!

⑤ $\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x=2$, $x^2+6x=8$

$x^2+6x+3^2=8+9$, $(x+3)^2=17$

$\therefore x=-3\pm\sqrt{17}$ ← OK!

108 답 ③

$2x^2-10x+3=0$에서

$2x^2-10x=-3$

$x^2-5x+\left(-\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}+\frac{25}{4}$

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{19}{4}$

$\therefore x=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{19}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{19}}{2}$

따라서 $A=5$, $B=19$이므로

$A+B=5+19=24$

109 답 ④

$3x^2+12x-4=0$에서

$x^2+4x-\frac{4}{3}=0$

$x^2+\overset{(가)}{4}x=\overset{(나)}{\frac{4}{3}}$, $x^2+4x+4=\frac{4}{3}+4$

$(x+\overset{(다)}{2})^2=\overset{(라)}{\frac{16}{3}}$, $x+2=\pm\sqrt{\frac{16}{3}}$

$x=-2\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore x=\overset{(마)}{\frac{-6\pm4\sqrt{3}}{3}}$

110 답 ③

$2x^2-10x+1=0$에서 $x^2-5x+\frac{1}{2}=0$

$x^2-5x+\left(\frac{-5}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{-5}{2}\right)^2$

$x^2-5x+\overset{A}{\boxed{\frac{25}{4}}}=-\frac{1}{2}+\frac{25}{4}$, $\left(x-\overset{B}{\boxed{\frac{5}{2}}}\right)^2=\overset{C}{\boxed{\frac{23}{4}}}$

$\therefore x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{23}{4}}=\frac{5\pm\sqrt{23}}{2}$

따라서 $A=\frac{25}{4}$, $B=\frac{5}{2}$, $C=\frac{23}{4}$이므로

$A-B+C=\frac{25}{4}-\frac{5}{2}+\frac{23}{4}=\frac{19}{2}$

111 답 2

$x^2-8x+k=0$에서 $x^2-8x=-k$

$x^2-8x+(-4)^2=-k+(-4)^2$, $(x-4)^2=-k+16$

$\therefore x=4\pm\sqrt{-k+16}=4\pm\sqrt{14}$

따라서 $-k+16=14$이므로 $k=2$

112 답 3

$x^2-6ax+7=0$에서 $x^2-6ax+(-3a)^2=-7+(-3a)^2$

$x^2-6ax+9a^2=-7+9a^2$, $(x-3a)^2=-7+9a^2$

$x-3a=\pm\sqrt{-7+9a^2}$

$\therefore x=3a\pm\sqrt{-7+9a^2}$

그런데 해가 $x=-3\pm\sqrt{b}$이므로

$3a=-3$, $-7+9a^2=b$에서

$a=-1$, $b=-7+9=2$

$\therefore b-a=2-(-1)=3$

113 답 ④

(i) $x^2-8x+15=0$, $(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

(ii) $2x^2-9x+9=0$, $(2x-3)(x-3)=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$

따라서 (i), (ii)의 공통인 근은 $x=3$이야.

114 답 ①

Ⅰ. $x^2-25=0$, $x^2=\pm25$ $\quad\therefore x=\pm5$

Ⅱ. $x^2+10x+25=0$, $(x+5)^2=0$ $\quad\therefore x=-5$ (중근)

Ⅲ. $(x+5)(5x-1)=0$ $\quad\therefore x=-5$ 또는 $x=\frac{1}{5}$

Ⅳ. $x^2+3x-10=0$, $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

따라서 Ⅰ~Ⅳ의 이차방정식의 공통인 근은 $x=-5$야.

115 답 ④

(i) $x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 공통인 근은 $x=2$야.

이 근이 $x^2-3mx+2=0$의 한 근이므로 $x=2$를 대입하면

$4-6m+2=0$ $\quad\therefore m=1$

116 답 ⑤

두 이차방정식을 동시에 만족하는 x의 값이 -2라는 것은 공통인 근이 -2라는 거야. $x=-2$를 각각에 대입해 보자.

(i) $x^2+4x+a=0$에서

$4-8+a=0$ $\quad\therefore a=4$

(ii) $x^2+bx-2=0$에서

$4-2b-2=0$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore a+b=4+1=5$

117 답 ⑤

$2x^2-11x-21=0$에서

$(2x+3)(x-7)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=7$

$(x-2)^2=25$에서

$x-2=\pm5$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=7$

따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=7$이야.

118 답 ①

$x^2-ax+b=0$에 $x=3$을 대입하면

$9-3a+b=0$ $\quad\therefore 3a-b=9$ ⋯ ㉠

또, $x^2+bx-3a=0$에 $x=3$을 대입하면

$9+3b-3a=0$ $\quad\therefore a-b=3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=0$

$\therefore b-a=0-3=-3$

119 답 ②

Ⅰ. $1-x^2=0$에서 $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$

Ⅱ. $x(x+1)=3x^2-2x-5$에서 $2x^2-3x-5=0$

$(x+1)(2x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

Ⅲ. $(x-1)(x-6)=14$에서 $x^2-7x-8=0$

$(x+1)(x-8)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=8$

따라서 세 이차방정식의 공통인 근은 $x=-1$이야.

120 답 ④

먼저 주어진 두 이차방정식의 해를 각각 구해 보자.

$x^2-x=6$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

또, $3x^2+5x-2=0$에서

$(x+2)(3x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

즉, 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=-2$야.

$x=-2$가 $x^2+kx+k^2-28=0$의 한 근이므로 대입하면

$(-2)^2-2k+k^2-28=0$

$k^2-2k-24=0$

$(k+4)(k-6)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=6$

따라서 구하는 양수 k의 값은 6이야.

잘 틀리는 유형 훈련+1up

p. 118

121 답 ⑤

1st 이차방정식이 되려면 이차항의 계수가 0이 아니어야 해.
$(a^2-a-2)x^2+3ax+6=0$이 이차방정식이 되려면 이차항의 계수가 0이 아니어야 해.
2nd a에 대한 이차방정식을 풀어 보자.
$a^2-a-2\neq0$, $(a+1)(a-2)\neq0$
$\therefore a\neq-1$이고 $a\neq2$

오답피하기

$a^2-a-2=(a+1)(a-2)=0$이면 $a=-1$ 또는 $a=2$야.
'또는'의 의미는 둘 중의 하나만이라도 만족하면 된다는 거야. 물론 둘 다 만족해도 돼!
하지만 $a^2-a-2\neq0$인 경우 $a^2-a-2=(a+1)(a-2)\neq0$이므로 $a\neq-1$ 또는 $a\neq2$라고 생각하면 틀려. $a\neq-1$ 그리고 $a\neq2$이어야 해. 둘 다 모두 성립해야 되는 거야. 이해하겠지?

122 답 $a\neq-1$이고 $a\neq4$

1st 이차방정식이 되려면 이차항의 계수가 0이 아니어야 해.
$(a^2-3a)x^2+x=4x^2+ax-5$에서
$(a^2-3a-4)x^2+(1-a)x+5=0$
이 방정식이 이차방정식이 되려면 $a^2-3a-4\neq0$이어야 해.
2nd a에 대한 이차방정식을 풀자.
$a^2-3a-4\neq0$, $(a+1)(a-4)\neq0$
$\therefore a\neq-1$이고 $a\neq4$

123 답 ①

1st 주어진 한 근을 방정식에 대입하여 식의 값을 구하자.
이차방정식 $x^2-4x-3=0$의 한 근이 a이므로
$a^2-4a-3=0$
$a^2-4a=3$에서 양변에 2를 곱하면 $2a^2-8a=6$
$\therefore 2a^2-8a+1=6+1=7$ ⋯ ㉠
또, 이차방정식 $3x^2+6x-7=0$의 한 근이 b이므로
$3b^2+6b-7=0$
$3b^2+6b=7$이므로 양변을 3으로 나누면 $b^2+2b=\frac{7}{3}$
$\therefore b^2+2b-\frac{10}{3}=\frac{7}{3}-\frac{10}{3}=-1$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서
$(2a^2-8a+1)\left(b^2+2b-\frac{10}{3}\right)=7\times(-1)=-7$

124 답 ③

1st 각각의 근을 방정식에 대입하자.
이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 한 근이 a이므로 $a^2-5a+3=0$
$a^2-5a=-3$ $\therefore a^2-5a+6=-3+6=3$ ⋯ ㉠
이차방정식 $2x^2+3x-4=0$의 한 근이 b이므로 $2b^2+3b-4=0$
$2b^2+3b=4$이고 양변을 2로 나누면
$b^2+\frac{3}{2}b=2$ $\therefore b^2+\frac{3}{2}b+3=2+3=5$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서
$(a^2-5a+6)\left(b^2+\frac{3}{2}b+3\right)=3\times5=15$

125 답 ②

1st 이차항의 계수를 1로 만들어보자.
$3x^2-12x+11=0$의 양변을 3으로 나누면
$x^2-4x=-\frac{11}{3}$, $x^2-4x+4=-\frac{11}{3}+4$
$\therefore (x-2)^2=\frac{1}{3}$
따라서 $A=2$, $B=\frac{1}{3}$이므로
$AB=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

오답피하기

제곱근을 이용해 근을 구할 때는 이차항의 계수를 1로 만들어 주어야 완전제곱식으로 고치기가 쉬워져. $x^2+ax+b=0$의 좌변이 완전제곱식이 되려면 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$이어야 한다는 걸 꼭 기억해.

126 답 ⑤

1st 완전제곱식으로 만들어보자.
$3x^2-4x-6=0$, $3x^2-4x=6$의 양변을 3으로 나누면
$x^2-\frac{4}{3}x=2$, $x^2-\frac{4}{3}x+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2$
$\therefore \left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{22}{9}$
따라서 $A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{22}{9}$이므로
$\frac{B}{A}=\frac{22}{9}\div\frac{2}{3}=\frac{22}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{11}{3}$

127 답 -2

1st $x=-1$을 대입해 보자.
$(a-3)x^2+(a^2-1)x+8=0$의 한 근이 $x=-1$이므로
$a-3-a^2+1+8=0$, $a^2-a-6=0$
2nd a에 대한 이차방정식을 풀자.
$(a+2)(a-3)=0$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$
주어진 이차방정식이 x에 대한 이차방정식이므로
$a-3\neq0$에서 $a\neq3$이지?
따라서 $a=-2$야.

오답피하기

x에 대한 이차방정식에서 이차항의 계수는 0이 아니어야 해. 섣불리 기계적으로 문제를 풀어간다면 당연히 오답이 나오기 마련이야. 실수하기 쉬운 부분이니까 주의하자.

128 답 ④

1st $x=-2$를 대입하자.
$4(a+1)+2(a+2)+a^2-3=0$
$4a+4+2a+4+a^2-3=0$
$a^2+6a+5=0$, $(a+5)(a+1)=0$
$\therefore a=-5$ 또는 $a=-1$
이때, x에 대한 이차방정식이므로 이차항의 계수 $a+1\neq0$이어야 해.
따라서 $a\neq-1$에서 $a=-5$이므로
모든 상수 a의 값의 합은 -5야.

F

129 답 91

1st 정수 해를 가지기 위한 조건을 찾아보자.

이차방정식 $x^2+6x-n=0$의 정수인 두 근을 a, b라 하면

$x^2+6x-n=0$, $(x-a)(x-b)=0$

$\therefore x^2-(a+b)x+ab=0$

즉, $a+b=-6$, $ab=-n$이야.

합이 -6이고 곱이 음수인 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 구하면

$(1, -7)$, $(2, -8)$, $(3, -9)$, $(4, -10)$, $(5, -11)$, $(6, -12)$, $(7, -13)$, $(8, -14)$, $\cdots$

따라서 $ab=-n$이 되는 두 자리 자연수 n의 최댓값은

$n=-\{7\times(-13)\}=91$

오|답|피|하|기

문제가 좀 어려울 수 있어. $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$임을 이용하여 $a+b=-6$, $ab=-n$이 되는 두 자리 자연수 n을 찾아주어야 해. $a+b=-6$을 만족하는 정수 a, b가 무수히 많으니까 적당히 나열하고 $ab=-n$이 두 자리 자연수가 되는 n의 최댓값을 구하는 게 핵심이야.

다른 풀이 방법을 소개할게. 완전제곱식을 이용해서 해를 구해 보면 $x=-3\pm\sqrt{9+n}$이야. 이때, x가 정수이려면 $\sqrt{9+n}$의 값이 자연수여야겠지? $\sqrt{9+n}$이 자연수이려면 근호 안에 있는 $9+n$이 제곱인 수가 되어야 해. 적당히 $9+n$이 $10^2=100$이라고 가정하면 $n=91$이야. $9+n$이 $11^2=121$이라고 가정하면 $n=112$이지. 그런데 문제에서 n은 두 자리 자연수라 했으므로 두 자리 자연수 n의 최댓값은 91임을 알 수 있어.

130 답 7개

1st 정수 해를 가지기 위한 조건을 따져 보자.

이차방정식 $x^2+2x-n=0$의 정수인 두 근을 a, b라 하면

$x^2+2x-n=0$, $(x-a)(x-b)=0$

$\therefore x^2-(a+b)x+ab=0$

즉, $a+b=-2$, $ab=-n$이야.

합이 -2이고 곱이 음수인 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 구하면

$(1, -3)$, $(2, -4)$, $(3, -5)$, $(4, -6)$, $(5, -7)$, $(6, -8)$, $(7, -9)$, $(8, -10)$, $(9, -11)$, $(10, -12)$, $\cdots$이므로

두 자리 자연수 n의 값은 $n=15$, 24, 35, 48, 63, 80, 99로 7개야.

오|답|피|하|기

두 자리 자연수를 찾을 수 있으므로 세 자리 이상의 수도 얼마든지 가능해. 꼼꼼히 찾아주어야 해!

131 답 $\frac{12}{17}$

1st 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이를 순서대로 따져 보자.

이차방정식 $2x^2+3x-1=0$의 양변을 $\boxed{2}$로 나누면 $\leftarrow A$

$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$

상수항을 우변으로 이항하면

$x^2+\frac{3}{2}x=\boxed{\frac{1}{2}}\leftarrow B$

양변에 $\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)^2=\boxed{\frac{9}{16}}$를 더하면 $\leftarrow C$

$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{1}{2}+\frac{9}{16}$

좌변을 완전제곱식으로 바꾸면

$\left(x+\boxed{\frac{3}{4}}\right)^2=\boxed{\frac{17}{16}}\leftarrow E$

D

따라서 $A=2$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{9}{16}$, $D=\frac{3}{4}$, $E=\frac{17}{16}$이므로

$A\times B\times C\div D\div E=2\times\frac{1}{2}\times\frac{9}{16}\div\frac{3}{4}\div\frac{17}{16}$

$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{9}{16}\times\frac{4}{3}\times\frac{16}{17}=\frac{12}{17}$

오|답|피|하|기

이차항의 계수가 1이 아닌 경우는 1로 만들어주어야 완전제곱식으로 바꾸기 쉬워. $\left(\frac{\text{일차항의 계수}}{2}\right)^2=$(상수항)이 되어야 완전제곱식이 됨을 꼭 잊지 말자.

132 답 ②

1st 각각의 과정을 순서대로 해보자.

$3x^2-7x+4=0$, $x^2-\frac{7}{3}x=-\frac{4}{3}$

$x^2-\frac{7}{3}x+\left(-\frac{7}{6}\right)^2=-\frac{4}{3}+\left(-\frac{7}{6}\right)^2$

$x^2-\frac{7}{3}x+\boxed{\frac{49}{36}}=-\frac{4}{3}+\boxed{\frac{49}{36}}$ ㉠

$\left(x-\boxed{\frac{7}{6}}\right)^2=\boxed{\frac{1}{36}}$, $x-\boxed{\frac{7}{6}}=\boxed{\pm\frac{1}{6}}\leftarrow$㉣

㉡ ㉢

$x=\frac{7}{6}\pm\frac{1}{6}$

$\therefore x=\boxed{1}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$ ㉤

133 답 9

1st $x^2+ax-3=0$에 $x=3$을 대입해 보자.

이차방정식 $x^2+ax-3=0$ ⋯ ㉠의 한 근이 3이므로 $x=3$을 대입하면

$9+3a-3=0$ $\quad\therefore a=-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

2nd $3x^2-8x+b=0$의 한 근이 -1임을 알았지?

$x=-1$이 이차방정식 $3x^2-8x+b=0$의 한 근이므로 대입하면

$3+8+b=0$ $\quad\therefore b=-11$

$\therefore a-b=-2-(-11)=9$

134 답 -2

1st $2x^2+ax-15=0$에 $x=\frac{5}{2}$를 대입해 보자.

$x=\frac{5}{2}$가 이차방정식 $2x^2+ax-15=0$ ⋯ ㉠의 한 근이므로 대입하면

$\frac{25}{2}+\frac{5}{2}a-15=0$ $\quad\therefore a=1$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 다른 한 근을 구하자.

$2x^2+x-15=0$, $(x+3)(2x-5)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

2nd $x^2+2x+b=0$의 한 근이 -3임을 알았지?

다른 한 근이 -3이므로 이차방정식 $x^2+2x+b=0$에 $x=-3$을 대입하면

$9-6+b=0$ $\quad\therefore b=-3$

$\therefore a+b=1+(-3)=-2$

135 답 ⑤

1st $x^2-2x-3=0$의 두 근 중 어느 한 근이 공통인 근이므로 두 가지 경우를 따져 보자.

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

2nd 공통인 근이 -1일 때, a의 값을 구하자.

(i) $2x^2+ax-3=0$에 $x=-1$을 대입하면

$2-a-3=0 \qquad \therefore a=-1$

3rd 공통인 근이 3일 때, a의 값을 구하자.

(ii) $2x^2+ax-3=0$에 $x=3$을 대입하면

$18+3a-3=0$, $3a=-15$

$\therefore a=-5$

따라서 $a=-5$ 또는 $a=-1$이야.

오|답|피|하|기

여지껏 푼 문제는 공통인 근을 주고 해결하는 거지만 위 문제는 공통인 근이 될 두 가지 경우를 따져줘야 하기 때문에 좀 까다로운 문제야. 문제의 제시 조건에 따라 경우를 나눠서 구하는 연습이 필요해.

136 답 ④

1st 공통인 근 a를 두 이차방정식에 각각 대입하자.

$a^2+3a-2k=0 \cdots$ ㉠

$a^2+ka-6=0 \cdots$ ㉡

2nd 미지수가 2개이므로 연립하여 풀자.

㉠$-$㉡을 하면 $(3-k)a-2k+6=0$

$(3-k)a+2(3-k)=0$

$\therefore (3-k)(a+2)=0$

그런데 $k=3$이면 두 이차방정식이 같게 되므로 오직 하나의 공통인 근을 가진다는 조건에 맞지 않아.

따라서 $a=-2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$4-6-2k=0 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore ka=(-1)\times(-2)=2$

오|답|피|하|기

ⓒ에서 k의 값과 a의 값을 원래의 이차방정식에 넣어 보고 답을 찾아내야 해. $k=3$인 경우 두 이차방정식이 같게 되거든. 반드시 조건에 맞는지 답을 다시 넣어 보는 습관을 가지자.

137 답 ⑤

1st $B=2A$에 A, B를 대입하자.

$x^2+x-6=2(x^2-x-12)$, $x^2-3x-18=0$

$(x+3)(x-6)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=6$

조건에서 $A\neq0$이므로

$x^2-x-12\neq0$, $(x+3)(x-4)\neq0$

$\therefore x\neq-3$이고 $x\neq4$

따라서 구하는 x의 값은 6이야.

오|답|피|하|기

수학 문제는 항상 조건이 중요해. 만약 조건을 제대로 읽지 않으면 답이 여러 개 나올 수도 있지. 그럼, 그 답은 당연히 오답일 수 밖에! 여기선 $A\neq0$을 만족하는 x의 값만 찾는 거야.

138 답 ⑤

1st $3A=-2B$에 A, B의 식을 대입하자.

$3(x^2-2x-3)=-2(x^2-7x-8)$

$3x^2-6x-9=-2x^2+14x+16$

$5x^2-20x-25=0$, $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=5 \cdots$ ㉠

그런데 $A\neq0$이어야 하므로

$x^2-2x-3\neq0$, $(x+1)(x-3)\neq0$

$\therefore x\neq-1$이고 $x\neq3 \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의해 구하는 x의 값은 5야.

139 답 ②

1st $x^2+6x+k=0$이 중근을 가질 k의 값을 구하자.

$x^2+6x+k=0$이 중근을 가지려면 이차식 x^2+6x+k가 완전제곱식이 되어야 하므로 $k=\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$

2nd k의 값을 대입하여 이차방정식을 풀자.

이차방정식 $(k-5)x^2+4x+1=0$에 $k=9$를 대입하면

$4x^2+4x+1=0$, $(2x+1)^2=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ (중근)

오|답|피|하|기

중근을 가진다는 것은 이차방정식이 (완전제곱식)$=0$ 꼴이 된다는 거야.

즉, $x^2+ax+b=0$에서 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$이 되어야지?

자주 쓰이니까 꼭 기억해.

140 답 ③

1st 중근을 갖게 될 a의 값을 구하자.

$x^2-10x+a-2=0$이 중근을 가지려면 좌변의 식이 완전제곱식이 되어야 해.

$a-2=\left(\frac{-10}{2}\right)^2=25 \qquad \therefore a=27$

이것을 $x^2-ax-28=0$에 대입하면

$x^2-27x-28=0$, $(x+1)(x-28)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=28$

141 답 $2\sqrt{2}$

1st $x^2+2x-1=0$의 한 근이 a이므로 $x=a$를 대입해 봐.

이차방정식 $x^2+2x-1=0$에 $x=a$를 대입하면

$a^2+2a-1=0 \cdots$ ㉠

2nd 구하는 식에서 $\frac{1}{a}$이 있지? 그럼 ㉠의 양변을 a로 나눠서 식을 유도해야 해.

$a\neq0$이므로 ㉠의 양변을 a로 나누면

$a+2-\frac{1}{a}=0 \qquad \therefore a-\frac{1}{a}=-2$

3rd 곱셈 공식의 변형에서 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4$를 이용해 보자.

이때, $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4=(-2)^2+4=8$이므로

$a+\frac{1}{a}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

F

142 답 28

1st $x^2-5x+1=0$의 한 근이 a이므로 $x=a$를 대입해 봐.
이차방정식 $x^2-5x+1=0$에 $x=a$를 대입하면
$a^2-5a+1=0$ ⋯ ㉠

2nd 구하는 식에서 $\frac{1}{a}$이 있지? 그럼 ㉠의 양변을 a로 나눠서 식을 유도해야 해.
$a\neq0$이므로 ㉠의 양변을 a로 나누면
$a-5+\frac{1}{a}=0 \quad \therefore a+\frac{1}{a}=5$

3rd 곱셈 공식의 변형에서 $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$를 이용해 보자.
이때, $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$이므로

$$a^2+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)$$
$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2+\left(a+\frac{1}{a}\right)$$
$$=5^2-2+5=28$$

143 답 ②

1st $8-k$의 값에 따라 주어진 이차방정식의 근이 결정되지? 〈보기〉에 주어진 k의 값을 대입하면서 참 · 거짓을 판별해 보자.

ㄱ. $k=-1$일 때,
$(x-3)^2=8+1=9$, $x-3=\pm3 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=6$
즉, 주어진 이차방정식은 정수인 근을 가져. (참)

ㄴ. $k=0$일 때,
$(x-3)^2=8$, $x-3=\pm2\sqrt{2} \quad \therefore x=3\pm2\sqrt{2}$
즉, 주어진 이차방정식은 무리수인 근을 가져. (거짓)

ㄷ. $k=7$일 때,
$(x-3)^2=8-7=1$, $x-3=\pm1 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=4$
즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 2개의 근을 가져. (거짓)

ㄹ. $k=10$일 때, $(x-3)^2=8-10=-2$이므로 주어진 이차방정식의 근은 존재하지 않아. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이야.

144 답 ⑤

1st $k+1$의 값에 따라 주어진 이차방정식의 근이 결정되지? 선택지에 주어진 k의 값을 대입하면서 참 · 거짓을 판별해 보자.

① $k=-2$일 때,
$(x-3)^2=-2+1=-1$
즉, 주어진 이차방정식의 근은 존재하지 않아. ← OK!

② $k=-1$일 때,
$(x-3)^2=-1+1=0 \quad \therefore x=3$ (중근) ← OK!

③ $k=0$일 때,
$(x-3)^2=1$, $x-3=\pm1 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=4$
즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 2개의 자연수인 근을 가져. ← OK!

④ $k=1$일 때,
$(x-3)^2=1+1=2$, $x-3=\pm\sqrt{2} \quad \therefore x=3\pm\sqrt{2}$
즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 2개의 근을 가져. ← OK!

⑤ $k=2$일 때,
$(x-3)^2=2+1=3$, $x-3=\pm\sqrt{3} \quad \therefore x=3\pm\sqrt{3}$
즉, 주어진 이차방정식은 무리수인 근을 가져. ← NO!

따라서 옳지 않은 것은 ⑤야.

서술형 다지기

p. 122

[145-146 채점기준표]

Ⅰ	주어진 한 근을 이차방정식에 대입하여 a의 값을 구한다.	40%
Ⅱ	a의 값을 대입하여 이차방정식을 푼다.	40%
Ⅲ	$a+b$의 값을 구한다.	20%

145 답 $-\frac{11}{3}$

먼저, 주어진 한 근을 이차방정식에 대입하여 a의 값을 구하자.
한 근이 1이므로 주어진 이차방정식에 대입하면
$3-a+2a-1=0$, $a+2=0$
$\therefore a=-2$ ⋯ Ⅰ

그다음, a의 값을 대입하여 이차방정식을 풀자.
$a=-2$를 주어진 이차방정식에 대입하면
$3x^2+2x-5=0$, $(3x+5)(x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=1$ ⋯ Ⅱ

그래서, $a+b$의 값을 구하자.
따라서 $b=-\frac{5}{3}$이므로
$a+b=(-2)+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{11}{3}$ ⋯ Ⅲ

146 답 3

먼저, 주어진 한 근을 이차방정식에 대입하여 a의 값을 구하자.
$x=2$를 주어진 이차방정식에 대입하면
$4(a-1)-2(a^2-1)+2(a-1)=0$
$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$
그런데 $a=1$이면 주어진 식이 x에 대한 이차방정식이 되지 않으므로 $a=2$ ⋯ Ⅰ

그다음, a의 값을 대입하여 이차방정식을 풀자.
$a=2$를 대입하면 $x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ ⋯ Ⅱ

그래서, $a+b$의 값을 구하자.
따라서 $b=1$이므로
$a+b=2+1=3$ ⋯ Ⅲ

[147-148 채점기준표]

Ⅰ	주어진 이차방정식을 (완전제곱식)=(상수항)의 꼴로 나타낸다.	40%
Ⅱ	A, B의 값을 각각 구한다.	40%
Ⅲ	$B-A$의 값을 구한다.	20%

147 답 13

먼저, 주어진 이차방정식을 (완전제곱식)=(상수항)의 꼴로 나타내자.
$x^2-8x=A$에서 $x^2-8x+16=A+16$
$(x-4)^2=A+16$, $x-4=\pm\sqrt{A+16}$ ⋯ Ⅰ

그다음, A, B의 값을 각각 구하자.
$\therefore x=4\pm\sqrt{A+16}=B\pm\sqrt{7}$
즉, $B=4$이고, $7=A+16$에서 $A=-9$ ⋯ Ⅱ

그래서, $B-A$의 값을 구하자.
$\therefore B-A=4-(-9)=13$ ⋯ Ⅲ

148 답 33

먼저, 주어진 이차방정식을 (완전제곱식)=(상수항)의 꼴로 나타내자.

$3x^2+6x-7=0$에서 $x^2+2x-\frac{7}{3}=0$

$x^2+2x+1=\frac{7}{3}+1$, $(x+1)^2=\frac{10}{3}$ … Ⅰ

그다음, A, B의 값을 각각 구하자.

$x+1=\pm\sqrt{\frac{10}{3}}$, $x=-1\pm\frac{\sqrt{30}}{3}$

$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{30}}{3}$

즉, $A=-3$, $B=30$이다. … Ⅱ

그래서, $B-A$의 값을 구하자.

$\therefore B-A=30-(-3)=33$ … Ⅲ

149 답 $-\frac{5}{2}$

$P+Q=0$이므로 $(x^2-3x-10)+(x^2-2x-15)=0$

$2x^2-5x-25=0$, $(2x+5)(x-5)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=5$ … Ⅰ

(i) $x=-\frac{5}{2}$일 때,

$P=\frac{25}{4}+\frac{15}{2}-10=\frac{15}{4}$, $Q=\frac{25}{4}+5-15=-\frac{15}{4}$

(ii) $x=5$일 때,

$P=25-15-10=0$, $Q=25-10-15=0$ … Ⅱ

따라서 $PQ\neq0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-\frac{5}{2}$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$P+Q=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.	40%
Ⅱ	x의 값에 대한 P, Q의 값을 각각 구한다.	40%
Ⅲ	$PQ\neq0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.	20%

150 답 $2p^2-4$

두 근이 a, b이므로 각각 대입하면

$a^2-pa+1=0$에서 $a-p+\frac{1}{a}=0$ ($\because a\neq0$)

$a+\frac{1}{a}=p$ $\quad\therefore \left(a+\frac{1}{a}\right)^2=p^2$ … ㉠ … Ⅰ

또한, $b^2-pb+1=0$에서 $b-p+\frac{1}{b}=0$ ($\because b\neq0$)

$\therefore b+\frac{1}{b}=p$

곱셈 공식의 변형을 이용하면

$\left(b-\frac{1}{b}\right)^2=\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-4$ $\quad\therefore \left(b-\frac{1}{b}\right)^2=p^2-4$ … ㉡ … Ⅱ

따라서 ㉠, ㉡에 의해

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2=p^2+p^2-4=2p^2-4$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	a를 주어진 이차방정식에 대입하여 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$의 값을 구한다.	30%
Ⅱ	b를 주어진 이차방정식에 대입한 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $\left(b-\frac{1}{b}\right)^2$의 값을 구한다.	50%
Ⅲ	$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2$을 p에 대한 식으로 나타낸다.	20%

151 답 41

$x^2-2xy+y^2-2x+2y-15=0$에서

$(x-y)^2-2(x-y)-15=0$ … Ⅰ

여기에서 $x-y=t$라 하면

$t^2-2t-15=0$

$(t+3)(t-5)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=5$ … Ⅱ

그런데 $x>y$이므로 $x-y=t>0$에서 $x-y=5$이고 $xy=8$임을 이용하면

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=25+16=41$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 등식을 $x-y$에 대한 식으로 정리한다.	30%
Ⅱ	$x-y=t$로 치환하여 t에 대한 이차방정식을 푼다.	40%
Ⅲ	$x-y$, xy의 값을 이용해 x^2+y^2의 값을 구한다.	30%

152 답 2

$f(x)=ax^2+bx+c$(단, $a\neq0$)라 하면

$f(x+1)-f(x)=2x$에서

$a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2x$

$(2a-2)x+a+b=0$ … ㉠ … Ⅰ

㉠이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-2=0$, $a+b=0$

$\therefore a=1$, $b=-1$

또한, $f(0)=-1$이므로 $c=-1$

$\therefore f(x)=x^2-x-1$ … Ⅱ

$f(x)=x+2$에서

$x^2-x-1=x+2$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 두 근의 합은 $(-1)+3=2$이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$f(x)=ax^2+bx+c$라 놓고 $f(x+1)-f(x)=2x$의 식을 정리한다.	30%
Ⅱ	x에 대한 항등식의 성질을 이용해 $f(x)$의 식을 구한다.	40%
Ⅲ	방정식 $f(x)=x+2$를 풀어 두 근의 합을 구한다.	30%

153 답 4개

$\langle x\rangle=n$ (n은 자연수)이라 하자.

$\langle x\rangle^2+\langle x\rangle-6=0$에서

$n^2+n-6=0$

$(n+3)(n-2)=0$

$\therefore n=-3$ 또는 $n=2$ … Ⅰ

이때, n은 자연수이므로 $n=2$

즉, x의 양의 약수의 개수가 2개이므로 x는 소수이다. … Ⅱ

따라서 10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7로 4개이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\langle x\rangle=n$으로 놓고 n에 대한 이차방정식을 푼다.	30%
Ⅱ	자연수 n의 값을 구한다.	30%
Ⅲ	조건을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구한다.	40%

F

154 답 $k=\frac{4}{3}$일 때 $x=-12$ (중근)
$k=-\frac{4}{3}$일 때 $x=12$ (중근)

$\frac{1}{6}x^2+3kx+24=0$에서 $x^2+18kx+144=0$ ⋯ ㉠
이때, 이 이차방정식이 중근을 가지려면
$\left(\frac{18k}{2}\right)^2=144$, $k^2=\frac{16}{9}$ $\quad\therefore k=\pm\frac{4}{3}$ ⋯ Ⅰ
(i) $k=\frac{4}{3}$를 ㉠에 대입하면 $x^2+24x+144=0$
$(x+12)^2=0$ $\quad\therefore x=-12$ (중근) ⋯ Ⅱ
(ii) $k=-\frac{4}{3}$를 ㉠에 대입하면 $x^2-24x+144=0$
$(x-12)^2=0$ $\quad\therefore x=12$ (중근) ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용하여 k의 값을 2개 구한다.	40%
Ⅱ	첫 번째 k의 값을 대입하여 중근을 구한다.	30%
Ⅲ	두 번째 k의 값을 대입하여 중근을 구한다.	30%

최고난도 만점 문제

p. 124

155 답 ③

1st 새로운 연산 ★를 따라 식을 세우자.
$(2x-1)★(x+2)=10$
$(2x-1)(x+2)+(2x-1)-(x+2)-1=10$
2nd 전개한 후 x의 값을 구하자.
$2x^2+3x-2+2x-1-x-2-1=10$
$2x^2+4x-16=0$, $x^2+2x-8=0$
$(x+4)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=2$
따라서 문제의 조건에서 $x<0$이므로 $x=-4$

156 답 $\frac{5}{2}$

1st 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$의 해가 존재하지 않으면 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$임을 이용하자.

연립방정식 $\begin{cases} (a-2)x+y=1 \\ x+(7-2a)y=1 \end{cases}$의 해가 존재하지 않으므로
$\frac{a-2}{1}=\frac{1}{7-2a}\neq\frac{1}{1}$ ⋯ ㉠
$\frac{a-2}{1}=\frac{1}{7-2a}$에서 $(a-2)(7-2a)=1$
$2a^2-11a+15=0$, $(2a-5)(a-3)=0$
$\therefore a=\frac{5}{2}$ 또는 $a=3$
2nd ㉠을 만족시키는 a의 값을 찾아.
(i) $a=\frac{5}{2}$일 때, $a-2=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}\neq1$이므로 ㉠을 만족해.
(ii) $a=3$일 때, $a-2=3-2=1$이므로 ㉠을 만족시키지 않아.
따라서 (i), (ii)에서 구하는 a의 값은 $\frac{5}{2}$야.

[다른 풀이]
$\begin{cases} (a-2)x+y=1 & \cdots ㉠ \\ x+(7-2a)y=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$에서 ㉠$-$㉡$\times(a-2)$를 하면

$$\begin{array}{rl} & (a-2)x+\qquad\qquad\quad y=\quad 1 \\ -) & (a-2)x+(a-2)(7-2a)y=a-2 \\ \hline & \{1-(a-2)(7-2a)\}y=3-a \end{array}$$

$(2a^2-11a+15)y=3-a$
$\therefore (2a-5)(a-3)y=-(a-3)$ ⋯ ㉢
(i) $a=\frac{5}{2}$일 때,
㉢은 $0\cdot y=\frac{1}{2}$이므로 이것을 만족하는 y의 값은 없지.
(ii) $a=3$일 때,
$0\cdot y=0$이므로 이것을 만족하는 y의 값은 무수히 많아.
따라서 연립방정식의 해가 존재하지 않을 때의 a의 값은 $\frac{5}{2}$야.

157 답 ③

1st 새롭게 정의된 연산을 이해하고 식을 만들자.
$[x-4, -x, 2, 2x+1]=-1$에서
$(x-4)(2x+1)+2x=-1$, $2x^2-7x-4+2x=-1$
$2x^2-5x-3=0$, $(2x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$
따라서 양수 x의 값은 3이야.

158 답 ①

1st 주어진 이차방정식의 한 근이 1이니까 대입하자.
이차방정식 $(k-2)x^2+(k^2-8)x-2(3k-8)=0$에 $x=1$을 대입하면
$k-2+k^2-8-2(3k-8)=0$
$k^2-5k+6=0$, $(k-2)(k-3)=0$
$\therefore k=2$ 또는 $k=3$
2nd 이차항의 계수가 0이면 이차방정식이 되지 않아.
그런데 $k=2$이면 주어진 방정식의 이차항의 계수가 0이므로
$k=3$
3rd 소수 p에 대하여 p^2의 약수는 $1, p, p^2$으로 3개지?
약수의 개수가 3개인 수는 소수 p에 대하여 p^2 꼴로 나타낼 수 있어.
즉, $1<p^2<100$에서 $1<p<10$
따라서 10보다 작은 소수 p는 2, 3, 5, 7이므로
구하는 수 p^2은 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$으로 4개야.

159 답 ①

1st $\langle x\rangle=t$로 놓고 풀어 보자.
$\langle x\rangle^2-56=\langle x\rangle$에서 $\langle x\rangle=t$로 놓으면
$t^2-56=t$, $t^2-t-56=0$
$(t+7)(t-8)=0$
$\therefore t=-7$ 또는 $t=8$
이때, t는 개수이므로 자연수지?
즉, $t=8$이므로 $\langle x\rangle=8$
소수를 순서대로 나열하면 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ⋯
따라서 $\langle x\rangle=8$을 만족하기 위해서는 $20\leq x\leq23$인 자연수 x이면 돼.
$\therefore x=20, 21, 22, 23$

160 답 1

1st 주어진 점의 좌푯값을 $y=ax+2$에 대입하자.
일차함수 $y=ax+2$의 그래프가 점 $(2a-1,\ -a^2+4)$를 지나므로
$x=2a-1,\ y=-a^2+4$를 대입하면
$-a^2+4=a(2a-1)+2,\ -a^2+4=2a^2-a+2$
$3a^2-a-2=0,\ (3a+2)(a-1)=0$
$\therefore\ a=-\frac{2}{3}$ 또는 $a=1$ ⋯ ㉠
2nd 일차함수의 그래프가 제 4사분면을 지나지 않으려면 (기울기)>0, (y절편)>0이어야 하지?
이때, $y=ax+2$의 그래프가 제 4사분면을 지나지 않으려면
(기울기)>0, (y절편)>0이어야 하므로
(기울기)$=a>0$, (y절편)$=2>0$
따라서 $a>0$이어야 하므로 ㉠에서 $a=1$이야.

161 답 $\frac{7}{2}$

1st $1\le x<2,\ 2\le x<3$으로 범위를 나누어 $[x]$의 값을 구해 보자.
$1\le x<2$일 때, $[x]=1$
$2\le x<3$일 때, $[x]=2$
2nd 각각의 $[x]$의 값에 대하여 주어진 방정식을 풀어봐.
(i) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로 $2x^2=x+3[x]$에서
$2x^2=x+3,\ 2x^2-x-3=0$
$(x+1)(2x-3)=0\qquad \therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
그런데 $1\le x<2$이므로 $x=\frac{3}{2}$
(ii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로 $2x^2=x+3[x]$에서
$2x^2=x+6,\ 2x^2-x-6=0$
$(2x+3)(x-2)=0\qquad \therefore\ x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$
그런데 $2\le x<3$이므로 $x=2$
(i), (ii)에서 $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$이므로 구하는 모든 근의 합은
$\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$

162 답 ④

1st $x^2-ax-4b^2=0$의 한 근이 $x=a-3b$이므로 대입해 봐.
이차방정식 $x^2-ax-4b^2=0$의 한 근이 $x=a-3b$이므로
$x^2-ax-4b^2=0$에 $x=a-3b$를 대입하면
$(a-3b)^2-a(a-3b)-4b^2=0$
위 식을 전개하여 정리하면
$a^2-6ab+9b^2-a^2+3ab-4b^2=0$
$\therefore\ 5b^2-3ab=0$
2nd $5b^2-3ab=0$을 만족시키는 자연수 $a,\ b$를 찾아보자.
$5b^2-3ab=0$에서 $b(5b-3a)=0$
그런데 b는 자연수이므로 $b\ne0$이지?
즉, $5b-3a=0$에서 $3a=5b$
이때, $3a=5b$를 만족시키는 30 이하의 자연수 $a,\ b$를 구하면 다음과 같아.

a	5	10	15	20	25	30
b	3	6	9	12	15	18

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(5,\ 3),\ (10,\ 6),\ (15,\ 9),\ (20,\ 12),\ (25,\ 15),\ (30,\ 18)$로 6개야.

G 이차방정식의 활용

개념 체크 001~034 정답은 p. 5~6에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

문제편 p. 130

035 답 ④

이차방정식 $2x^2-7x+4=0$의 근을 근의 공식으로 구하면
$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times4}}{2\times2}$
$=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}=\frac{A\pm\sqrt{B}}{4}$
따라서 $A=7,\ B=17$이므로
$A+B=7+17=24$

오답피하기
근의 공식을 이용하려면 특히 x항의 계수의 부호를 염두에 두어야 해. 즉, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이니까 $-b$가 쓰임을 주의하자. 또한, 근의 공식에서 분모도 이차항의 계수의 2배인데 그냥 쓰는 경우가 있으니 잊지 않도록!

036 답 ⑤

$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times3\times1}}{2\times3}=\frac{-7\pm\sqrt{37}}{6}$
$\therefore$ (가)$=3$, (나)$=7$, (다)$=1$

037 답 ④

$ax^2-2x-4=0$에서 일차항의 계수가 짝수이므로 짝수 공식을 이용하자.
$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{a}=\frac{1\pm\sqrt{b}}{5}$
따라서 $a=5,\ 1+4a=b$이므로 $a=5,\ b=21$
$\therefore\ a+b=5+21=26$

오답피하기
일차항의 계수가 짝수일 때, 즉 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근을 구하면
$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$
일차항의 계수가 짝수일 때는 좀 더 간단히 근을 구할 수 있어.

038 답 ④

$\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{5}{12}=0$에서 각 항의 계수를 정수로 만들어야 근을 구하기 쉬워.
양변에 각 항의 계수의 분모 4, 6, 12의 최소공배수 12를 곱하면
$3x^2-10x+5=0$
일차항의 계수가 짝수이므로
$x=\frac{5\pm\sqrt{25-15}}{3}=\frac{5\pm\sqrt{10}}{3}=\frac{A\pm\sqrt{B}}{3}$
따라서 $A=5,\ B=10$이므로
$A+B=5+10=15$

039 답 ⑤

$\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}=0$의 양변에 각 항의 계수의 분모 3, 6, 2의 최소공배수 6을 곱하면

$2x^2-5x+3=0$

$(x-1)(2x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

오답피하기

이차방정식의 해를 구할 때, 인수분해를 할까 말까 고민하지 말고 바로 근의 공식을 이용해도 괜찮아. 계산만 정확하게 하면 더 빨리 풀 수 있지?

$2x^2-5x+3=0$을 근의 공식으로 풀면

$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm1}{4}$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

040 답 ①

이차방정식 $0.4x=0.3-0.5x^2$의 양변에 10을 곱하면

$4x=3-5x^2$, $5x^2+4x-3=0$

$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{4+15}}{5}=\frac{-2\pm\sqrt{19}}{5}$

041 답 ④

이차방정식 $0.3x^2+0.5=x$의 양변에 10을 곱하면

$3x^2+5=10x$, $3x^2-10x+5=0$

$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{25-15}}{3}=\frac{5\pm\sqrt{10}}{3}$

따라서 두 근의 합은

$\frac{5+\sqrt{10}}{3}+\frac{5-\sqrt{10}}{3}=\frac{10}{3}$

오답피하기

계수가 분수 또는 소수가 나올 때 분모의 최소공배수 또는 10의 거듭제곱을 곱하여 정수로 만드는데 간혹 좌변만 곱하던가 원래 정수로 있던 수에는 곱하는 걸 잊는 경우가 있으니 모든 항에 곱할 수 있도록 집중하자.

042 답 $x=0$

주어진 식에 분모 5, 2의 최소공배수 10을 곱하자.

$2(x^2+x)-5(3x^2+2)=-10x^2-10$

$2x^2+2x-15x^2-10=-10x^2-10$

$3x^2-2x=0$, $x(3x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

따라서 두 근 중 작은 근은 $x=0$이야.

043 답 ⑤

이차방정식 $0.1x^2+0.4x-1=0$의 양변에 10을 곱하면

$x^2+4x-10=0$

$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{4+10}}{1}=-2\pm\sqrt{14}=-2\pm\sqrt{k}$

$\therefore k=14$

044 답 ③

$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x=0.3$의 양변에 10을 곱하면

$5x^2-2x=3$, $5x^2-2x-3=0$

$(5x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{5}$ 또는 $x=1$

조건에서 $a>b$이므로 $a=1$, $b=-\frac{3}{5}$

$\therefore a-b+ab=1+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}=1$

045 답 $x=2$

$0.2x^2+\frac{2}{5}x-1.6=0$의 양변에 10을 곱하면

$2x^2+4x-16=0$, $x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$ ⋯ ㉠

$\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$의 양변에 3을 곱하면

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 공통인 근은 $x=2$야.

046 답 ①

양변에 분모 5, 3의 최소공배수 15를 곱하고 정리해 보자.

$3x(x-1)=5(x+1)(x-3)$, $3x^2-3x=5(x^2-2x-3)$

$3x^2-3x=5x^2-10x-15$, $2x^2-7x-15=0$

$(2x+3)(x-5)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=5$

047 답 ③

우변의 항을 모두 좌변으로 이항해서 정리해 보자.

$(x-1)^2-2x^2+1=0$

$x^2-2x+1-2x^2+1=0$

$-x^2-2x+2=0$, $x^2+2x-2=0$

인수분해가 안 되지? 근의 공식을 쓰자!

$\therefore x=-1\pm\sqrt{1+2}=-1\pm\sqrt{3}$

따라서 이차방정식의 두 근은 $x=-1+\sqrt{3}$, $x=-1-\sqrt{3}$이므로

(두 근의 곱)$=(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=1-3=-2$

048 답 ②

$3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+5=10\left(x-\frac{1}{3}\right)$에서 $x-\frac{1}{3}=A$로 치환하자.

$3A^2+5=10A$, $3A^2-10A+5=0$

$\therefore A=\frac{5\pm\sqrt{25-15}}{3}=\frac{5\pm\sqrt{10}}{3}$

즉, $x-\frac{1}{3}=\frac{5\pm\sqrt{10}}{3}$이므로 $x=\frac{6\pm\sqrt{10}}{3}$

오답피하기

주어진 이차방정식은 치환을 이용해서 푸는 것이 훨씬 간단하고 쉬워. 전개해서 풀 수도 있지만 복잡해질 수 있거든. 문제에서도 치환하라고 괄호로 묶어 보여주잖아.

049 답 ②

$2(x+2)^2-(3x+1)(2x-3)-8x-14=0$
$2x^2+8x+8-6x^2+7x+3-8x-14=0$
$-4x^2+7x-3=0,\ 4x^2-7x+3=0$
$(4x-3)(x-1)=0 \quad \therefore x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=1$
두 근을 α, β라 하고 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=1$
$\therefore 4\alpha-\beta=4\times\frac{3}{4}-1=3-1=2$

050 답 3

양변에 4를 곱하여 계수를 정수로 바꾸자.
$12(x-1)+x^2+1=4(x^2-2x-3)$
$3x^2-20x-1=0 \quad \therefore x=\frac{10\pm\sqrt{103}}{3}=\frac{A\pm\sqrt{B}}{3}$
따라서 $A=10$, $B=103$이므로
$B-10A=103-10\times10=3$

051 답 ①

$x-y=A$로 치환하면
$A(A+4)-12=0,\ A^2+4A-12=0$
$(A+6)(A-2)=0 \quad \therefore A=-6$ 또는 $A=2$
즉, $x-y=-6$ 또는 $x-y=2$인데 $x>y$에서 $x-y$의 값은 양수이므로 $x-y=2$야.

052 답 ⑤

$a-b=A$로 치환하면 $A^2-A-30=0$
$(A+5)(A-6)=0 \quad \therefore A=-5$ 또는 $A=6$
그런데 $a-b>0$이므로 $a-b=6$
이때, $ab=-4$이므로 곱셈 공식의 변형을 이용하면
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=36-8=28$

053 답 ③, ⑤

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
(1) $b^2-4ac>0$이면 근이 2개
(2) $b^2-4ac=0$이면 근이 1개 (중근)
(3) $b^2-4ac<0$이면 근이 없어.
① $x^2-2x+1=0 \longrightarrow b^2-4ac=4-4=0$
② $2x^2-4x-3=0 \longrightarrow b^2-4ac=16+24=40>0$
③ $x^2-3x+5=0 \longrightarrow b^2-4ac=9-20=-11<0$
④ $x^2+7x+12=0 \longrightarrow b^2-4ac=49-48=1>0$
⑤ $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+1=0 \longrightarrow b^2-4ac=\frac{1}{4}-\frac{4}{3}=-\frac{13}{12}<0$
따라서 근이 없는 것은 ③, ⑤야.

054 답 ⑤

① $x^2+2=0 \longrightarrow b^2-4ac=0-8=-8<0$
② $x^2-4x+4=0 \longrightarrow b^2-4ac=16-16=0$
③ $x^2-x+1=0 \longrightarrow b^2-4ac=1-4=-3<0$
④ $x^2-2x+1=0 \longrightarrow b^2-4ac=4-4=0$
⑤ $2x^2-x-1=0 \longrightarrow b^2-4ac=1+8=9>0$
따라서 서로 다른 두 개의 근을 갖는 것은 ⑤야.

055 답 ①

ㄱ. $B<0$이면 $A^2-4B>0$이므로 서로 다른 두 근을 가져. (참)
ㄴ. $A=0$, $B=9$이면 $x^2+9=0$이고 $b^2-4ac=-36<0$이므로 해가 없어. (거짓)
ㄷ. A^2-4B에서 $A>0$이라 해서 반드시 $A^2-4B<0$은 아니야. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이야.

오답피하기

이렇게 구체적인 값이 아니라 문자로 나오는 경우 겁을 먹는 친구들이 많아. 뚜렷한 값이 주어지지 않기 때문이지. 하지만 위에서 주어진 식 그대로 공식을 적용하여 식을 세우고 주어진 보기에 맞는 수치를 하나씩 대입해 봐. 보기는 그러한 수치들을 일반화하여 표현한 것이니까 너무 막연해 하지 말고 직접 대입해 보면 생각보다 어렵지 않을 거야.

056 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. $4x^2-7x+3=0$에서 $b^2-4ac=49-48=1>0$이므로 서로 다른 2개의 근을 가져.
ㄴ. $\frac{1}{4}x^2-4x+16=0$에서 $b^2-4ac=16-16=0$이므로 중근을 가져.
ㄷ. $3(x-1)^2=-1$, 즉 $3x^2-6x+4=0$에서 $b^2-4ac=36-48=-12<0$이므로 근을 갖지 않아.
ㄹ. $(x+2)(x-2)=6x-13$, 즉 $x^2-6x+9=0$에서 $b^2-4ac=36-36=0$이므로 중근을 가져.
따라서 중근을 갖는 것은 ㄴ, ㄹ이야.

057 답 ②

이차방정식 $x^2-2(k+2)x+k+2=0$이 중근을 가지려면
$4(k+2)^2-4(k+2)=0$이어야 해.
$k^2+4k+4-k-2=0,\ k^2+3k+2=0$
$(k+2)(k+1)=0 \quad \therefore k=-2$ 또는 $k=-1$

058 답 ②

이차방정식 $x^2+6x-5m-1=0$이 중근을 가지려면
$36-4(-5m-1)=0,\ 36+20m+4=0$
$20m=-40 \quad \therefore m=-2$

059 답 3

이차방정식 $(m^2-1)x^2-2(m+1)x+3=0$ … ㉠이 중근을 가지므로
$4(m+1)^2-12(m^2-1)=0,\ m^2+2m+1-3m^2+3=0$
$-2m^2+2m+4=0,\ m^2-m-2=0$
$(m+1)(m-2)=0 \quad \therefore m=-1$ 또는 $m=2$
그런데 ㉠이 이차방정식이려면 이차항의 계수가 0이 아니어야 해.
즉, $m^2-1\neq0$에서 $m\neq\pm1$
$\therefore m=2$
이것을 ㉠에 대입하면
$3x^2-6x+3=0,\ x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$ (중근)
$\therefore n=1$
$\therefore m+n=2+1=3$

G

중등자이(중3상) 정답G~I-ok.indd 87 2019-08-06 오후 5:09:20

060 답 ①

이차방정식 $4x^2+px+9=0$이 중근을 가지므로

$p^2-144=0$, $p^2=144$ $\quad\therefore p=\pm12$

(i) $p=12$일 때

$4x^2+12x+9=0$, $(2x+3)^2=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ (중근)

$\therefore q=-\frac{3}{2}$

(ii) $p=-12$일 때

$4x^2-12x+9=0$, $(2x-3)^2=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ (중근)

$\therefore q=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에 의해 $pq=12\times\left(-\frac{3}{2}\right)=(-12)\times\frac{3}{2}=-18$

061 답 7

이차방정식 $x^2+ax+a=0$ ⋯ ㉠이 중근을 가지므로

$a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a\neq0$)

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$ (중근)

이것이 $x^2+bx+b-1=0$의 근이므로 대입하면

$4-2b+b-1=0$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=4+3=7$

062 답 ②

이차방정식 $3x^2-2x-k=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면

$(-2)^2-4\times3\times(-k)>0$, $4+12k>0$

$\therefore k>-\frac{1}{3}$

063 답 ⑤

이차방정식 $2x^2-8x+k-3=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면

$(-8)^2-8(k-3)>0$, $64-8k+24>0$

$-8k>-88$

$\therefore k<11$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤ 12야.

064 답 ④

이차방정식 $x^2-10x+20+m=0$이 근을 갖지 않으려면

$100-4(20+m)<0$, $100-80-4m<0$

$-4m<-20$

$\therefore m>5$

065 답 7

이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2-7=0$의 해가 2개이므로

$(2k-1)^2-4(k^2-7)>0$, $4k^2-4k+1-4k^2+28>0$

$-4k>-29$

$\therefore k<\frac{29}{4}=7.25$

따라서 가장 큰 정수 k의 값은 7이야.

066 답 6개

(i) 이차방정식 $x^2-4x+m-1=0$이 해를 가지려면

$16-4(m-1)\geq0$, $16-4m+4\geq0$, $-4m\geq-20$

$\therefore m\leq5$

(ii) 이차방정식 $(m+1)x^2+5x+10=0$이 해를 갖지 않으려면

$25-40(m+1)<0$, $25-40m-40<0$, $-40m<15$

$\therefore m>-\frac{3}{8}$

따라서 (i), (ii)를 모두 만족하는 정수 m은 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개야.

오답피하기

문제에서 제시된 '근을 가진다'라는 말에 주목해야 해. '근을 가진다'는 근이 0개만 아니면 된다는 거지. 즉, 1개인 경우와 2개인 경우를 모두 포함하는 거니까 $b^2-4ac\geq0$인 경우를 구하는 거야.

067 답 ②

두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ $\quad\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

이 식이 $x^2+3x-2=0$과 같아야 하므로 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-2$

따라서 x^2의 계수가 1이고 -3, -2를 두 근으로 하는 이차방정식은

$(x+3)(x+2)=0$ $\quad\therefore x^2+5x+6=0$

068 답 ①

두 근이 1, 2이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-1)(x-2)=0$

따라서 $a=-1$, $b=-2$ 또는 $a=-2$, $b=-1$이므로

$a+b=-1+(-2)=-3$

069 답 ④

두 근이 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$이고 x^2의 계수가 6인 이차방정식은

$6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$, $6\left(x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}\right)=0$

$\therefore 6x^2-x-2=0$

따라서 x의 계수는 -1, 상수항은 -2이므로 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore ab=-1\times(-2)=2$

070 답 ⑤

$x=-3$을 중근으로 하고 x^2의 계수가 -2인 이차방정식은

$-2(x+3)^2=0$, $-2(x^2+6x+9)=0$

$-2x^2-12x-18=0$

따라서 $a=-12$, $b=-18$이므로

$a-b=-12-(-18)=6$

071 답 $x=2$ 또는 $x=3$

두 근이 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$, $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$

$\therefore a=-\frac{5}{6}$, $b=\frac{1}{6}$

따라서 이차방정식 $bx^2+ax+1=0$, 즉 $\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{6}x+1=0$을 풀면

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

072 답 ①

이차방정식 $4x^2+12x+k=0$이 중근을 가지려면

$12^2-4\times4\times k=0$

$144-16k=0$　　$\therefore k=9$

따라서 $k-5$, $-k+4$, 즉 4, -5를 두 근으로 하고

x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3(x-4)(x+5)=0$

$\therefore 3x^2+3x-60=0$

073 답 $2x^2-5x+2=0$

이차방정식 $x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

두 근 중 큰 근은 $x=2$이므로 $a=2$

또, 이차방정식 $2x^2-3x+1=0$에서

$(2x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

두 근 중 작은 근은 $x=\frac{1}{2}$이므로 $b=\frac{1}{2}$

따라서 x^2의 계수가 2이고 2, $\frac{1}{2}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

$(x-2)(2x-1)=0$

$\therefore 2x^2-5x+2=0$

074 답 $4x^2+8x+4=0$

일차함수 $y=ax+k$에서 a는 기울기, k는 y절편이므로 그래프에서

$a=\frac{0-(-2)}{4-0}=\frac{1}{2}$

$k=-2$

따라서 $ak=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$을 중근으로 하고

x^2의 계수가 4인 이차방정식은

$4(x+1)^2=0$

$4(x^2+2x+1)=0$

$\therefore 4x^2+8x+4=0$

075 답 ⑤

계수가 유리수인 이차방정식 $2x^2-ax-2=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$야.

즉, 두 근이 $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\{x-(1+\sqrt{2})\}\{x-(1-\sqrt{2})\}=0$이므로

$2\{x^2-(1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\}=0$

$\therefore 2x^2-4x-2=0$

이 식이 $2x^2-ax-2=0$과 같아야 하므로 $a=4$

[다른 풀이]

$x=1+\sqrt{2}$를 이차방정식 $2x^2-ax-2=0$에 직접 대입하여 a의 값을 구해도 돼.

$2(1+\sqrt{2})^2-a(1+\sqrt{2})-2=0$에서

$6+4\sqrt{2}-a(1+\sqrt{2})-2=0$

$a(1+\sqrt{2})=4+4\sqrt{2}=4(1+\sqrt{2})$

$\therefore a=4$

076 답 ②

계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+6x+k=0$의 한 근이 $-3+\sqrt{7}$이면 다른 한 근은 $-3-\sqrt{7}$이야.

즉, 두 근이 $-3+\sqrt{7}$, $-3-\sqrt{7}$이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $\{x-(-3+\sqrt{7})\}\{x-(-3-\sqrt{7})\}=0$

$x^2-(-3+\sqrt{7}-3-\sqrt{7})x+(-3+\sqrt{7})(-3-\sqrt{7})=0$

$\therefore x^2+6x+2=0$

이 식이 $x^2+6x+k=0$과 같아야 하므로 $k=2$

따라서 나머지 한 근과 유리수 k의 값의 합은

$(-3-\sqrt{7})+2=-1-\sqrt{7}$

077 답 ⑤

계수가 유리수인 이차방정식 $2x^2+(m+1)x-5n=0$의 한 근이 $1-3\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1+3\sqrt{2}$야.

즉, 두 근이 $1-3\sqrt{2}$, $1+3\sqrt{2}$이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\{x-(1-3\sqrt{2})\}\{x-(1+3\sqrt{2})\}=0$

$2\{x^2-(1-3\sqrt{2}+1+3\sqrt{2})x+(1-3\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})\}=0$

$2(x^2-2x-17)=0$

$\therefore 2x^2-4x-34=0$

이 식이 $2x^2+(m+1)x-5n=0$과 같아야 하므로

$m+1=-4$에서 $m=-5$

$-5n=-34$에서 $n=\frac{34}{5}$

$\therefore m+5n=-5+5\times\frac{34}{5}=29$

078 답 -36

$1<\sqrt{3}<2$에서 $-2<-\sqrt{3}<-1$이므로 $3<5-\sqrt{3}<4$

즉, $5-\sqrt{3}$의 정수 부분은 3이므로 $a=3$

$b=5-\sqrt{3}-3=2-\sqrt{3}$

이때, $2-\sqrt{3}$은 이차방정식 $3x^2+px+q=0$의 한 근이고 계수가 유리수이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이야.

즉, 두 근이 $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$이고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}=0$

$3\{x^2-(2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})x+(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\}=0$

$3(x^2-4x+1)=0$

$\therefore 3x^2-12x+3=0$

이 식이 $3x^2+px+q=0$과 같아야 하므로

$p=-12$, $q=3$

$\therefore pq=-12\times3=-36$

079 답 ①

이차방정식 $2x^2-2x+k=0$의 두 근을 각각 α, $\beta(\alpha>\beta)$라 하면

$\alpha-\beta=5$ ⋯ ㉠

두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$\therefore 2x^2-2(\alpha+\beta)x+2\alpha\beta=0$

이 식이 $2x^2-2x+k=0$과 같아야 하므로 x항의 계수를 비교하면

$-2(\alpha+\beta)=-2$에서 $\alpha+\beta=1$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\alpha=6$　　$\therefore \alpha=3$

$\alpha=3$을 ㉡에 대입하면 $\beta=-2$

$\therefore k=2\alpha\beta=2\times3\times(-2)=-12$

G

080 답 ③

이차방정식 $x^2-4x-2a+7=0$의 두 근을 각각
α, $\beta(\alpha>\beta)$라 하면 $\alpha-\beta=2$ ⋯ ㉠
두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$
$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
이 식이 $x^2-4x-2a+7=0$과 같아야 하므로 x항의 계수를 비교하면
$-(\alpha+\beta)=-4$에서 $\alpha+\beta=4$ ⋯ ㉡
㉠+㉡을 하면
$2\alpha=6 \quad \therefore \alpha=3$
$\alpha=3$을 ㉡에 대입하면 $\beta=1$
$-2a+7=\alpha\beta$이므로 $-2a+7=3\times1=3$
$-2a=-4 \quad \therefore a=2$

081 답 ③

이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 근의 비가 1 : 2이므로
두 근을 α, 2α라 하자.
두 근이 α, 2α이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-2\alpha)=0$
$\therefore x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$
이 식이 $x^2-6x+k=0$과 같아야 하므로 x항의 계수를 비교하면
$-3\alpha=-6$에서 $\alpha=2$
$\therefore k=2\alpha^2=2\times2^2=8$

082 답 ③

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근 중 작은 근을 α라 하면
다른 한 근은 3α야. 이때, 두 근의 차가 4이므로
$3\alpha-\alpha=4$, $2\alpha=4 \quad \therefore \alpha=2$
즉, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근 2, 6이므로
두 근이 2, 6이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-2)(x-6)=0 \quad \therefore x^2-8x+12=0$
따라서 $a=-8$, $b=12$이므로
$a+b=-8+12=4$

083 답 $\frac{41}{20}$

이차방정식 $x^2-2(k+1)x+4k=0$의 두 근의 비가 5 : 4이므로
한 근을 5α라 하면 다른 한 근은 4α야.
두 근이 5α, 4α이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-5\alpha)(x-4\alpha)=0$
$\therefore x^2-9\alpha x+20\alpha^2=0$
이 식이 $x^2-2(k+1)x+4k=0$과 같아야 하므로
상수항을 비교하면 $4k=20\alpha^2$에서 $k=5\alpha^2$ ⋯ ㉠
또한, x항의 계수를 비교하면 $-2(k+1)=-9\alpha$이므로
$2(5\alpha^2+1)=9\alpha\,(\because$ ㉠$)$, $10\alpha^2-9\alpha+2=0$
$(5\alpha-2)(2\alpha-1)=0$
$\therefore \alpha=\frac{2}{5}$ 또는 $\alpha=\frac{1}{2}$
(i) $\alpha=\frac{2}{5}$일 때, ㉠에 대입하면 $k=5\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$
(ii) $\alpha=\frac{1}{2}$일 때, ㉠에 대입하면 $k=5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$
(i), (ii)에 의하여 모든 상수 k의 값의 합은 $\frac{4}{5}+\frac{5}{4}=\frac{41}{20}$이야.

084 답 ①

1, 5를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-1)(x-5)=0 \quad \therefore x^2-6x+5=0$
즉, 옳게 본 상수항은 5야.
또, -2, -4를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+2)(x+4)=0 \quad \therefore x^2+6x+8=0$
즉, 옳게 본 x의 계수는 6이야.
따라서 옳게 본 이차방정식은 $x^2+6x+5=0$이므로
$(x+5)(x+1)=0 \quad \therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

085 답 48

-3, 5를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+3)(x-5)=0 \quad \therefore x^2-2x-15=0$
즉, 옳게 본 일차항의 계수는 -2야. $\quad \therefore a=-2$
또, 3, -8을 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-3)(x+8)=0 \quad \therefore x^2+5x-24=0$
즉, 옳게 본 상수항은 -24야. $\quad \therefore b=-24$
$\therefore ab=(-2)\times(-24)=48$

086 답 ④

-3, 3을 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+3)(x-3)=0 \quad \therefore x^2-9=0$
즉, 옳게 본 상수항은 -9야.
또, 1, 9를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-1)(x-9)=0 \quad \therefore x^2-10x+9=0$
즉, 옳게 본 일차항의 계수는 -10이야.
따라서 옳게 본 이차방정식은 $x^2-10x-9=0$이므로 짝수 공식을 이용하여 근을 구하면 $x=5\pm\sqrt{5^2+9}=5\pm\sqrt{34}$
즉, $\alpha=5+\sqrt{34}$, $\beta=5-\sqrt{34}$ 또는 $\alpha=5-\sqrt{34}$, $\beta=5\pm\sqrt{34}$이므로
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(5+\sqrt{34}+5-\sqrt{34})^2-2(5+\sqrt{34})(5-\sqrt{34})$
$=100-2\times(-9)=118$

087 답 ③

연속하는 세 홀수를 x, $x+2$, $x+4$로 놓으면
$x^2+(x+2)^2+(x+4)^2=251$
$x^2+x^2+4x+4+x^2+8x+16=251$
$3x^2+12x-231=0$, $x^2+4x-77=0$
$(x+11)(x-7)=0$
$\therefore x=7\ (\because x>0)$
따라서 세 홀수는 7, 9, 11이므로 그 합은 27이야.

오답피하기

이차방정식의 활용 문제에서는 이차방정식을 풀어 나온 두 근이 모두 답이 되는 것이 아닐 수 있어. 개수, 나이, 길이, 넓이 등을 구하는 경우에는 양수인 근만 답이 됨을 기억해!

088 답 ①

연속된 두 짝수를 x, $x+2$라 하면
$x(x+2)=168$, $x^2+2x-168=0$
$(x+14)(x-12)=0$
$\therefore x=12\ (\because x>0)$
따라서 두 짝수는 12, 14이므로 그 중 작은 수는 12야.

089 답 ③

연속된 두 자연수를 x, $x+1$이라 하면
$x^2+(x+1)^2=61$, $x^2+x^2+2x+1=61$
$2x^2+2x-60=0$, $x^2+x-30=0$
$(x+6)(x-5)=0$
$\therefore x=5$ ($\because$ x는 자연수)
따라서 연속된 두 자연수는 5, 6이므로 그 합은 11이야.

090 답 ⑤

연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$이라 하면
$(x+1)^2=2x(x-1)-20$
$x^2+2x+1=2x^2-2x-20$, $x^2-4x-21=0$
$(x+3)(x-7)=0$
$\therefore x=7$ ($\because$ x는 자연수)
따라서 세 수는 6, 7, 8이므로 이 중 가장 큰 수는 8이야.

091 답 ①

$(x+2)^2=2(x+2)$, $x^2+4x+4=2x+4$
$x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$
$\therefore x=-2$ ($\because$ $x\neq0$)

092 답 ④

차가 6인 두 자연수를 x, $x+6$이라 하자.
$x(x+6)=520$, $x^2+6x-520=0$
$(x+26)(x-20)=0$
$\therefore x=20$ ($\because$ x는 자연수)
따라서 두 자연수는 20, 26이므로 그 합은 46이야.

093 답 39

조건 (가)에 의하여 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 $3x$라 하면 구하는 두 자리 수는 $10x+3x$라 할 수 있어.
이때, 조건 (나)에서
$3x^2=(10x+3x)-12$
$3x^2-13x+12=0$
$(3x-4)(x-3)=0$
$\therefore x=3$ ($\because$ x는 자연수)
따라서 구하는 두 자리 자연수는 39야.

094 답 8

$A=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$
$\quad=\{n(n+3)\}\{(n+1)(n+2)\}+1$
$\quad=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$
$n^2+3n=X$로 치환하면
$A=X(X+2)+1=X^2+2X+1$
$\quad=(X+1)^2=(n^2+3n+1)^2$
$A=89^2$에서 $(n^2+3n+1)^2=89^2$
그런데 n이 자연수이므로
$n^2+3n+1>0$이지?
즉, $n^2+3n+1=89$야.
$n^2+3n-88=0$
$(n+11)(n-8)=0$
$\therefore n=8$ ($\because$ n은 자연수)

095 답 ⑤

$\dfrac{n(n-3)}{2}=119$를 정리하면
$n(n-3)=238$, $n^2-3n-238=0$
$(n+14)(n-17)=0$ $\quad\therefore n=17$ ($\because$ n은 자연수)
따라서 십칠각형이야.

오답피하기

위와 같이 상수항이 세 자리 이상의 수일 경우 인수분해가 쉽지 않아. 그럴 땐 소인수분해를 해보는 거야. 그런 다음 그 수의 약수인 수들을 나누어서 일차항의 계수가 나오도록 하면 돼.
즉, 해법은 소인수분해를 정확히 해야 한다는 거!

096 답 ④

$\dfrac{n(n+1)}{2}=120$이어야 하지?
$n(n+1)=240$, $n^2+n-240=0$
$(n+16)(n-15)=0$ $\quad\therefore n=15$ ($\because$ n은 자연수)
따라서 1부터 15까지 더하면 120이야.

097 답 9명

$\dfrac{n(n-1)}{2}=36$을 정리하면
$n(n-1)=72$, $n^2-n-72=0$
$(n+8)(n-9)=0$ $\quad\therefore n=9$ ($\because$ n은 자연수)
따라서 회원 수는 9명이야.

098 답 12번째

$\dfrac{n(n+1)}{2}=78$을 정리하면
$n(n+1)=156$, $n^2+n-156=0$
$(n+13)(n-12)=0$ $\quad\therefore n=12$ ($\because$ n은 자연수)
따라서 공의 개수가 78개인 삼각형은 12번째 삼각형이야.

099 답 ⑤

동생의 나이를 x살이라 하면 형의 나이는 동생의 나이보다 3살 많으므로 $(x+3)$살이야.
$(x+3)^2=2x^2+2$, $x^2+6x+9=2x^2+2$
$x^2-6x-7=0$, $(x+1)(x-7)=0$
$\therefore x=7$ ($\because$ $x>0$)
따라서 형의 나이는 10살, 동생의 나이는 7살이므로 그 합은 17이야.

100 답 ①

왼쪽 면의 쪽수를 x라 하면 오른쪽 면의 쪽수는 $x+1$이지?
$x(x+1)=420$, $x^2+x-420=0$
$(x+21)(x-20)=0$ $\quad\therefore x=20$ ($\because$ $x>0$)
따라서 두 면의 쪽수는 20과 21이므로 두 쪽수의 합은 41이야.

101 답 10개

$20+2n-\dfrac{1}{4}n^2=15$, $2n-\dfrac{1}{4}n^2+5=0$
$n^2-8n-20=0$, $(n+2)(n-10)=0$
$\therefore n=10$ ($\because$ $n>0$)
따라서 15만 원의 비용으로 10개를 만들 수 있어.

G

102 답 ④

지민이의 생일을 x일이라 하면 주아의 생일은 $(x+7)$일이지?

$x(x+7)=330$, $x^2+7x-330=0$

$(x+22)(x-15)=0$

$\therefore x=15$ ($\because x>0$)

따라서 지민이의 생일은 15일, 주아의 생일은 22일이므로 날짜의 합은 37이야.

103 답 30

장난감의 정가를 a원이라 하면 정가에서 x %를 인상한 가격은

$a+a\times\frac{x}{100}=a\left(1+\frac{x}{100}\right)$(원) ⋯ ㉠

또, ㉠에서 x %를 할인한 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)-a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times\frac{x}{100}$

$=a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)$(원) ⋯ ㉡

이때, 정가에서 9 %를 할인한 가격은

$a-a\times\frac{9}{100}=a\left(1-\frac{9}{100}\right)$(원)

이고 이것이 ㉡과 같으므로

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=a\left(1-\frac{9}{100}\right)$

$1-\left(\frac{x}{100}\right)^2=1-\frac{9}{100}$, $\left(\frac{x}{100}\right)^2=\frac{9}{100}$

$\frac{x}{100}=\frac{3}{10}$ ($\because x>0$) $\qquad \therefore x=30$

104 답 7개

두 도시를 뽑아 직선 도로를 연결하면 되므로 도시가 n개 있을 때

$\frac{n(n-1)}{2}=21$, $n^2-n=42$

$n^2-n-42=0$, $(n+6)(n-7)=0$

$\therefore n=7$ ($\because n>0$)

따라서 도시의 개수는 7개야.

105 답 ②

학생 수를 x명이라 하면 한 학생이 받는 지우개의 수는

$\left(\frac{1}{2}x+4\right)$개야.

즉, 전체 지우개의 수는

(학생 수)×(한 학생이 받는 지우개의 수)이므로

$x\left(\frac{1}{2}x+4\right)=120$, $x^2+8x-240=0$

$(x+20)(x-12)=0 \qquad \therefore x=12$ ($\because x>0$)

따라서 학생 수가 12명이므로 한 학생이 받는 지우개의 수는

$\frac{1}{2}\times12+4=10$(개)야.

106 답 21개

줄의 수를 x개라 하면 한 줄에 배열된 의자의 수는

$(x+3)$개이므로

$x(x+21)=378$, $x^2+3x-378=0$

$(x+21)(x-18)=0 \qquad \therefore x=18$ ($\because x>0$)

따라서 줄의 수는 18개이므로 한 줄에 배열된 의자의 수는

$18+3=21$(개)야.

107 답 ③

물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m지?

$-5t^2+40t+100=0$, $t^2-8t-20=0$

$(t+2)(t-10)=0$

$\therefore t=10$ ($\because t>0$)

따라서 10초 후에 지면에 떨어져.

108 답 5초 후

쇠공이 지면에 떨어지는 것은 높이가 0 m일 때야.

$125-5t^2=0$, $t^2-25=0$

$(t+5)(t-5)=0$

$\therefore t=5$ ($\because t>0$)

따라서 5초 후에 지면에 떨어져.

109 답 ①, ③

로켓이 지면으로부터 15 m 높이일 때이므로

$15=20t-5t^2$, $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 지면으로부터 15 m 높이에 있는 것은 발사한 지 1초 후 또는 3초 후야.

110 답 8초

높이가 320 m 지점일 때의 시간을 구하면

$320=80t-5t^2$, $t^2-16t+64=0$

$(t-8)^2=0 \qquad \therefore t=8$ (중근)

즉, 던진 지 8초 후에 야구공의 위치는 320 m야.

또, 지면에 떨어질 때는 높이가 0 m이니까

$0=80t-5t^2$, $5t^2-80t=0$

$t^2-16t=0$, $t(t-16)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=16$

그런데 $t=0$일 때는 처음 던졌을 때이므로 지면에 떨어질 때까지는 16초가 걸리지.

따라서 320 m 지점을 지난 후부터 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 $16-8=8$(초)야.

111 답 (2, 4)

일차함수의 그래프의 기울기는 $\frac{8}{-4}=-2$, y절편은 8이므로

주어진 그래프가 나타내는 식은 $y=-2x+8$

즉, (□OAPB의 넓이)$=\overline{OA}\times\overline{OB}=ab$ ⋯ ㉠

점 P(a, b)는 직선 $y=-2x+8$ 위의 점이므로

$b=-2a+8$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a(-2a+8)=8$

$-2a^2+8a-8=0$, $a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0 \qquad \therefore a=2$ (중근)

이것을 ㉡에 대입하면 $b=4$

따라서 점 P의 좌표는 (2, 4)야.

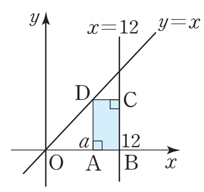
오답피하기

일차함수의 그래프의 x절편과 y절편이 주어졌을 때

(기울기)$=-\frac{(y\text{절편})}{(x\text{절편})}$이야.

112 답 (3, 3), (9, 9)

점 D가 직선 $y=x$ 위의 점이므로
점 D의 좌표를 $D(a, a)$라 하자.
점 A의 x좌표는 a, 점 B의 x좌표는 12이고 직사각형 ABCD의 넓이가 27이므로



$\overline{AB}\times\overline{AD}=(12-a)\times a=27$
$-a^2+12a-27=0$
$a^2-12a+27=0,\ (a-3)(a-9)=0$
$\therefore a=3$ 또는 $a=9$
따라서 점 D의 좌표는 (3, 3) 또는 (9, 9)가 돼.

113 답 (2, 6), (3, 4)

x절편이 5, y절편이 10인 직선의 기울기는 $-\frac{10}{5}=-2$이므로
직선의 방정식은 $y=-2x+10$이야.
즉, 점 A의 x좌표를 a라 하면 y좌표는 $-2a+10$이지.
이때, $(\triangle AOB$의 넓이$)=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AB}$이므로
$\frac{1}{2}a(-2a+10)=6,\ -a^2+5a-6=0$
$a^2-5a+6=0,\ (a-2)(a-3)=0$
$\therefore a=2$ 또는 $a=3$
따라서 점 A의 좌표는 (2, 6) 또는 (3, 4)야.

114 답 17

네 점의 좌표가 각각 $A(-2, -1)$, $B(t+3, -1)$, $C(t+3, t+2)$, $D(-2, t+2)$이므로
$\overline{AB}=|t+3-(-2)|=|t+5|=t+5\ (\because t>0)$
$\overline{BC}=|t+2-(-1)|=|t+3|=t+3\ (\because t>0)$
이때, $\square ABCD=(t+5)(t+3)=20$이므로
$t^2+8t-5=0$ ⋯ ㉠
근의 공식을 이용하여 ㉠을 풀면 $t=-4\pm\sqrt{21}$
$\therefore t=-4+\sqrt{21}\ (\because t>0)$
따라서 $a=-4$, $b=21$이므로
$a+b=-4+21=17$

115 답 5 cm

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $(13-x)$ cm야.
넓이의 합이 89 cm²이니까
$x^2+(13-x)^2=89,\ x^2+x^2-26x+169-89=0$
$2x^2-26x+80=0,\ x^2-13x+40=0$
$(x-5)(x-8)=0$
$\therefore x=5$ 또는 $x=8$
따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 5 cm야.

116 답 2 m

가로의 길이를 x m라 하면 둘레의 길이가 28 m이므로 세로의 길이는 $(14-x)$ m야.
$x(14-x)=48,\ 14x-x^2=48$
$x^2-14x+48=0,\ (x-6)(x-8)=0$
$\therefore x=6$ 또는 $x=8$
따라서 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각 6 m, 8 m 또는 8 m, 6 m이므로 구하는 차는 $8-6=2$(m)야.

117 답 8 cm

밑변의 길이와 높이를 각각 x cm라 하면
$\frac{1}{2}x(6+x)=56,\ x(6+x)=112$
$x^2+6x-112=0,\ (x+14)(x-8)=0$
$\therefore x=8\ (\because x>0)$
따라서 사다리꼴의 높이는 8 cm야.

118 답 10 cm

$\overline{BD}=x$ cm이면 $\overline{DC}=(15-x)$ cm
$\triangle DCE$가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{DE}=\overline{DC}=(15-x)$ cm
$(\square BDEF$의 넓이$)=\overline{BD}\times\overline{DE}=x(15-x)=50$
$15x-x^2=50,\ x^2-15x+50=0$
$(x-5)(x-10)=0$
$\therefore x=5$ 또는 $x=10$
그런데 $\overline{BD}>\overline{DC}$이므로 $\overline{BD}=10$ cm야.

오|답|피|하|기

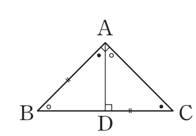
$\triangle DCE$가 왜 직각이등변삼각형이냐구? $\triangle ABC$가 직각이등변삼각형이고, $\overline{BC}$와 $\overline{DE}$는 서로 수직이므로
$\triangle ABC\backsim\triangle EDC$ (AA 닮음)이잖아.
이 문제의 경우 좌표축을 이용하여 문제를 푸는 방법을 이용하는 게 더 편할 수도 있어. 즉, $\overline{AB}$를 y축, $\overline{BC}$를 x축으로 잡고 점 B를 원점으로 잡는 거지. 그럼 $\overline{AC}$는 $y=-x+15$로 표현이 되겠지?
도형 문제에서 출제되는 고난도 문제는 좌표축을 적용해서 풀면 쉽게 해결되는 경우가 많다는 것 기억해 두자.

119 답 $(1+\sqrt{5})$ cm

$\overline{AB}=x$ cm라 하면 $\triangle ABC\backsim\triangle DBA$ (AA 닮음)이니까
$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DB}:\overline{BA}$에서 $x:(x+2)=2:x$
$x^2=2(x+2),\ x^2-2x-4=0$
$\therefore x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2+4}=1\pm\sqrt{5}$
이때, $x>0$이므로 $x=1+\sqrt{5}$
$\therefore \overline{AB}=(1+\sqrt{5})$ cm

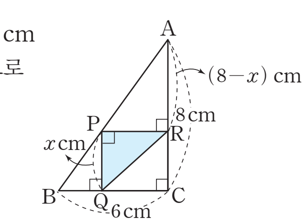
오|답|피|하|기

$\angle BAC=90^\circ$이고 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$일 때
$\bullet+\circ=90^\circ$이므로
$\triangle ABC\backsim\triangle DBA\backsim\triangle DAC$ (AA 닮음)



120 답 ⑤

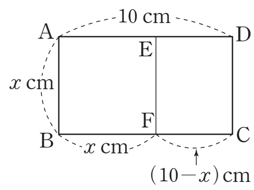
$\overline{PQ}=x$ cm라 하면 $\overline{AR}=(8-x)$ cm
$\triangle ABC\backsim\triangle APR$ (AA 닮음)이므로
$\overline{AC}:\overline{AR}=\overline{BC}:\overline{PR}$
$8:(8-x)=6:\overline{PR}$
$\therefore \overline{PR}=\frac{3}{4}(8-x)$(cm)



$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$
$=\frac{1}{2}\times x\times\frac{3}{4}(8-x)$
$\frac{3}{8}x(8-x)=6,\ 8x-x^2=16,\ x^2-8x+16=0$
$(x-4)^2=0 \qquad \therefore x=4$ (중근)
$\therefore \overline{PQ}=4$ cm

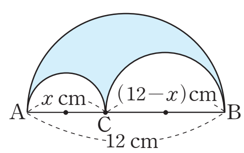
G

121 답 $(-5+5\sqrt{5})$ cm



$\overline{AB}=x$ cm라 하자.
□ABCD와 □DEFC가 닮음이므로
$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{DE}:\overline{DC}$
$x:10=(10-x):x$에서
$x^2=10(10-x)$
$x^2=100-10x$, $x^2+10x-100=0$
$\therefore\ x=-5\pm\sqrt{25+100}=-5\pm5\sqrt{5}$
이때, $x>0$이므로 $x=-5+5\sqrt{5}$
따라서 $\overline{AB}$의 길이는 $(-5+5\sqrt{5})$ cm야.

122 답 2 cm



$\overline{AC}=x$ cm로 놓으면 $\overline{BC}=(12-x)$ cm야.
(색칠한 부분의 넓이)
=($\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
 −($\overline{AC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
 −($\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
$\frac{1}{2}\times\pi\times6^2-\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{12-x}{2}\right)^2=5\pi$
$x^2-12x+20=0$, $(x-2)(x-10)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=10$
이때, $\overline{AC}<\overline{BC}$이므로 $x=2$
따라서 $\overline{AC}=2$ cm야.

123 답 14초 후

x초 후의 가로의 길이는 $(24-x)$ cm, 세로의 길이는 $(20+2x)$ cm야.
$(24-x)(20+2x)=24\times20$
$480+48x-20x-2x^2=480$
$2x^2-28x=0$, $x^2-14x=0$, $x(x-14)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=14$
이때, $x=0$일 때는 길이가 변하기 전이므로 $x=14$
따라서 14초 후에 처음 직사각형의 넓이와 같아져.

124 답 2 cm

늘인 길이를 x cm라 하면
$(4+x)(6+x)=2\times(6\times4)$
$x^2+10x+24=48$, $x^2+10x-24=0$
$(x+12)(x-2)=0$
$\therefore\ x=2\ (\because\ x>0)$
따라서 가로, 세로의 길이를 2 cm씩 늘이면 그 넓이가 처음 직사각형의 넓이의 2배가 돼.

125 답 $(3+3\sqrt{2})$ cm

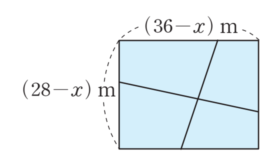
처음 원의 반지름의 길이를 x cm라 하면 늘인 원의 반지름의 길이는 $(x+3)$ cm야.
$\pi(x+3)^2=2\times(\pi x^2)$
$x^2+6x+9=2x^2$
$x^2-6x-9=0$
$\therefore\ x=3\pm\sqrt{9+9}=3\pm3\sqrt{2}$
이때, $x>0$이므로 $x=3+3\sqrt{2}$
따라서 처음 원의 반지름의 길이는 $(3+3\sqrt{2})$ cm야.

126 답 ④

처음 직각이등변삼각형의 밑변의 길이를 x cm라 하면 늘인 직각삼각형의 밑변의 길이는 $(x+1)$ cm, 높이는 $(x+3)$ cm야.
$\frac{1}{2}(x+1)(x+3)=2\times\frac{1}{2}x^2$
$x^2+4x+3=2x^2$
$x^2-4x-3=0$
$\therefore\ x=2\pm\sqrt{4+3}=2\pm\sqrt{7}$
이때, $x>0$이므로 $x=2+\sqrt{7}$
따라서 처음 직각이등변삼각형의 밑변의 길이는 $(2+\sqrt{7})$ cm야.

127 답 1

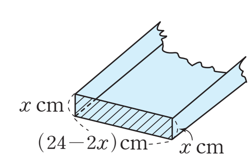
그림과 같이 길을 제거하여 잔디밭끼리 붙이면 가로의 길이는 $(36-x)$ m, 세로의 길이는 $(28-x)$ m인 직사각형이 되지?



$(36-x)(28-x)=945$
$1008-36x-28x+x^2=945$
$x^2-64x+63=0$
$(x-1)(x-63)=0$
$\therefore\ x=1\ (\because\ 0<x<28)$

128 답 4 cm 또는 8 cm

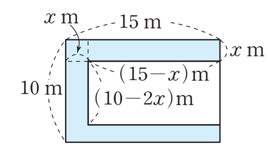
빗금친 부분의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $(24-2x)$ cm야.
빗금친 부분의 넓이가 64 cm^2이므로



$x(24-2x)=64$
$24x-2x^2=64$
$2x^2-24x+64=0$
$x^2-12x+32=0$
$(x-4)(x-8)=0$
$\therefore\ x=4$ 또는 $x=8$
따라서 양쪽을 4 cm 또는 8 cm씩 접어 올려야 해.

129 답 2 m

도로의 폭을 x m라 하면
도로의 넓이는 전체 정원의 넓이에서 가운데 정원의 넓이를 빼면 되지?



$15\times10-(10-2x)(15-x)=72$
$150-150+40x-2x^2=72$
$2x^2-40x+72=0$
$x^2-20x+36=0$
$(x-2)(x-18)=0$
$\therefore\ x=2\ (\because\ 0<x<5)$
따라서 도로의 폭은 2 m야.

130 답 4 cm

타일의 짧은 변의 길이를 x cm, 긴 변의 길이를 y cm라 하면
$4x=2y+2 \qquad \therefore y=2x-1 \cdots$ ㉠
타일 8개가 놓인 직사각형의 넓이는
$4x(y+2x)=240$
$4x(2x-1+2x)=240$ ($\because$ ㉠)
$x(4x-1)=60$
$4x^2-x-60=0$
$(4x+15)(x-4)=0$
$\therefore x=4$ ($\because x>0$)
따라서 타일의 짧은 변의 길이는 4 cm야.

잘 틀리는 유형 훈련 +1up

p. 142

131 답 ②

1st 이차방정식의 계수가 모두 정수가 되도록 양변에 분모의 최소공배수를 곱해 보자.
$0.5x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{6}=0$에서 $\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{6}=0$의 양변에 각 항의 계수의 분모 2, 3, 6의 최소공배수인 6을 곱하면
$3x^2-8x+1=0$
2nd 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 풀자.
이때, 일차항의 계수가 짝수이므로
$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-3\times1}}{3}=\frac{4\pm\sqrt{13}}{3}$
따라서 $a=3$, $b=13$이므로
$a+b=3+13=16$

132 답 ④

1st 이차방정식의 계수가 모두 정수가 되도록 양변에 10을 곱해 보자.
$0.3x=0.4-0.2x^2$의 양변에 10을 곱하면
$3x=4-2x^2$, $2x^2+3x-4=0$
2nd 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 풀자.
근의 공식에 의해
$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$
따라서 $a=-3$, $b=41$이므로
$b-a=41-(-3)=44$

133 답 ①

1st 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b^2-4ac의 부호에 따라 근의 개수가 달라지지?
ㄱ. $a^2-4b=(-5)^2-4\times6=1>0$이므로 서로 다른 두 근을 가져. (참)
ㄴ. $a^2-4b=0$이어야만 중근을 가져. (거짓)
ㄷ. a^2-4b에서 $b<0$이면 항상 $a^2-4b>0$이므로 서로 다른 두 근을 가져. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이야.

오답피하기

근의 개수를 묻는 유형은 b^2-4ac가 특효약이야. 이때, 계수가 문자로 나오면 틀리는 사람이 많은데 숫자랑 문자가 크게 다르지는 않아.
숫자는 바로 계산을 할 수 있어서 금방 간단해지는 장점이 있긴 해. 하지만 문자로 나타내면 금방 간단해지지는 않더라도 일반화를 할 수 있다는 장점이 있어.

134 답 -1

1st 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b^2-4ac의 부호를 확인해 보자.
(i) $\frac{1}{6}x^2-2x+6=0$, $x^2-12x+36=0$에서
$(-12)^2-4\times1\times36=0$이므로 근의 개수는 1개야.
$\therefore a=1$
(ii) $3x^2-5x-2=0$에서
$(-5)^2-4\times3\times(-2)=49>0$이므로 근의 개수는 2개야.
$\therefore b=2$
(iii) $0.2(x+1)^2=-0.4$, $2(x+1)^2=-4$
$2x^2+4x+2=-4$, $x^2+2x+3=0$
$2^2-4\times1\times3=-8<0$이므로 근은 없어.
$\therefore c=0$
(i)~(iii)에 의해서 $a-b-c=1-2-0=-1$

135 답 -17

1st 중근을 가질 조건을 이용하자.
$(m^2-1)x^2+6(m+1)x+8=0$이 중근을 가지므로
$9(m+1)^2-8(m^2-1)=0$
$9m^2+18m+9-8m^2+8=0$
$m^2+18m+17=0$
$(m+17)(m+1)=0$
$\therefore m=-17$ 또는 $m=-1$
이때, 이차방정식이므로 $m^2\neq1$에서 $m\neq-1$이고 $m\neq1$이어야 하므로 $m=-17$이야.

오답피하기

중근을 갖게 되면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $b^2-4ac=0$이어야 해. 이때, 이차항의 계수가 문자로 나왔을 경우는 이차항의 계수가 0이 아니라는 걸 잊으면 안 돼. 여기에서 실수하기 쉬워.
아무 생각 없이 풀다간 위의 문제에서 m의 값을 $m=-17$ 또는 $m=-1$이라고 할 거야. 주의해.

136 답 7

1st 중근을 가질 조건을 이용하자.
이차방정식 $(m^2-1)x^2-4(m-1)x+3=0$이 중근을 가지려면
$4(m-1)^2-3(m^2-1)=0$
$4m^2-8m+4-3m^2+3=0$
$m^2-8m+7=0$
$(m-1)(m-7)=0$
$\therefore m=1$ 또는 $m=7$
2nd 이차방정식이 되려면 이차항의 계수가 0이 되면 안 돼.
이차방정식이므로 (이차항의 계수)$\neq0$
즉, $m^2-1\neq0$에서 $m\neq-1$이고 $m\neq1$이어야 해.
$\therefore m=7$

137 답 ⑤

1st 근을 가질 조건을 생각하자.

$x^2-2(k+1)x+k^2+4=0$이 근을 가지려면

$(k+1)^2-(k^2+4)\geq 0$, $k^2+2k+1-k^2-4\geq 0$

$2k\geq 3$ $\quad\therefore k\geq\frac{3}{2}$

오|답|피|하|기

근을 갖는다는 것은 서로 다른 두 근을 갖거나 중근을 갖는 것을 의미해. 그러니까 $b^2-4ac\geq 0$이어야지? 등호를 빠트리는 실수를 하기가 쉬워. 근을 갖는다는 것과 서로 다른 두 근을 갖는다는 것의 차이를 알겠지?

138 답 ①

1st 근을 가지는 조건을 생각해.

$x^2-2(a+b-2)x+(a+b-3)^2+1=0$이 근을 가지려면

$(a+b-2)^2-\{(a+b-3)^2+1\}\geq 0$

2nd 반복되는 식은 치환하자.

$a+b=t$로 치환하자.

$(t-2)^2-(t-3)^2-1\geq 0$, $t^2-4t+4-t^2+6t-9-1\geq 0$

$2t-6\geq 0$ $\quad\therefore t\geq 3$

따라서 $a+b\geq 3$이므로 선택지 중 $a+b$의 값이 될 수 없는 것은 ①이야.

139 답 ①

1st 이차방정식 $x^2-3x-5=0$의 두 근의 합과 곱을 구하자.

이차방정식 $x^2-3x-5=0$의 두 근을 α, β라 하면

x^2의 계수가 1이므로 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$에서

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ $\quad\therefore \alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-5$

2nd 상수 a, b의 값을 구하자.

즉, 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 해는 $x=3$ 또는 $x=-5$야.

이때, 두 근이 3, -5이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2(x-3)(x+5)=0$이므로 $2x^2+4x-30=0$

따라서 $a=4$, $b=-30$이므로

$a+b=4+(-30)=-26$

오|답|피|하|기

이 문제에서 이차방정식 $x^2-3x-5=0$의 해를 근의 공식을 이용하여 구해도 돼. 하지만 식이 복잡해지니까 이차방정식을 세워 계수를 비교하는 방법이 더 수월해.

140 답 93

1st 이차방정식 $x^2-4x-7=0$의 두 근의 합과 곱을 구하자.

이차방정식 $x^2-4x-7=0$의 두 근을 α, β라 하면

x^2의 계수가 1이므로 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$에서

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ $\quad\therefore \alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-7$

2nd 상수 a, b의 값을 구하자.

즉, 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$의 해는 $x=4$ 또는 $x=-7$이야.

이때, 두 근이 4, -7이고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3(x-4)(x+7)=0$이므로 $3x^2+9x-84=0$

따라서 $a=9$, $b=-84$이므로

$a-b=9-(-84)=93$

141 답 ⑤

1st 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 다른 한 근을 구하자.

이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 계수가 모두 유리수이므로

한 근이 $3-\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $3+\sqrt{2}$야.

2nd 유리수 k의 값을 구하자.

이차방정식 $x^2-6x+k=0$은 $3-\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$를 두 근으로 하고,

x^2의 계수가 1이므로

$\{x-(3-\sqrt{2})\}\{x-(3+\sqrt{2})\}=0$

$x^2-(3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2})x+(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=0$

$\therefore x^2-6x+7=0$

따라서 $k=7$이고, 다른 한 근은 $x=3+\sqrt{2}$야.

[다른 풀이]

이차방정식 $x^2-6x+k=0$에 $x=3-\sqrt{2}$를 대입하면

$(3-\sqrt{2})^2-6(3-\sqrt{2})+k=0$

$9-6\sqrt{2}+2-18+6\sqrt{2}+k=0$

$\therefore k=7$

따라서 이차방정식은 $x^2-6x+7=0$이므로 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$x=3\pm\sqrt{9-7}=3\pm\sqrt{2}$

즉, 다른 한 근은 $x=3+\sqrt{2}$야.

오|답|피|하|기

조건만 맞으면 공식을 적용하는 데 실수가 없을 거야.
[다른 풀이]처럼 근을 원래 방정식에 대입하여 미지수 k를 구하고, k를 대입하여 다른 한 근을 구할 수도 있어. 그러나 실수하기 쉬워. 조건에서 k가 왜 유리수로 주어졌을까? 바로 계수가 모두 유리수이니 켤레근을 이용하라는 뜻이야.

142 답 ④

1st 이차방정식 $x^2-14x+k=0$의 다른 한 근을 구하자.

이차방정식 $x^2-14x+k=0$의 계수가 모두 유리수이므로

한 근이 $7-\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $7+\sqrt{2}$야.

2nd 유리수 k의 값을 구하자.

이차방정식 $x^2-14x+k=0$은 $7-\sqrt{2}$, $7+\sqrt{2}$를 두 근으로 하고,

x^2의 계수가 1이므로

$\{x-(7-\sqrt{2})\}\{x-(7+\sqrt{2})\}=0$

$x^2-(7-\sqrt{2}+7+\sqrt{2})x+(7-\sqrt{2})(7+\sqrt{2})=0$

$\therefore x^2-14x+47=0$

따라서 $k=47$이고, 다른 한 근은 $x=7+\sqrt{2}$야.

143 답 ④

1st 이차방정식 $x^2+(2-k)x+28=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha>\beta)$로 놓고, β의 값을 구하자.

이차방정식 $x^2+(2-k)x+28=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha>\beta)$라 하면

$\alpha-\beta=3$ $\quad\therefore \alpha=\beta+3$ ⋯ ㉠

이때, 두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$에서 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이므로

$\alpha+\beta=2-k$ ⋯ ㉡, $\alpha\beta=28$ ⋯ ㉢

㉠을 ㉢에 대입하면

$(\beta+3)\beta=28$

$\beta^2+3\beta-28=0$

$(\beta+7)(\beta-4)=0$

$\therefore \beta=-7$ 또는 $\beta=4$

2nd 상수 k의 값을 구하자.
(i) $\beta=-7$일 때, ㉠에서 $\alpha=-7+3=-4$이므로 ㉡에 의해
$-4+(-7)=2-k \qquad \therefore k=13$
(ii) $\beta=4$일 때, ㉠에서 $\alpha=4+3=7$이므로 ㉡에 의해
$7+4=2-k \qquad \therefore k=-9$
(i), (ii)에 의해 양수 k의 값은 13이야.

144 답 ②

1st 이차방정식 $x^2-(m+2)x+8=0$의 두 근을 α, 2α로 놓고, α의 값을 구하자.
이차방정식 $x^2-(m+2)x+8=0$의 두 근을 α, 2α라 하자.
이때, α, 2α를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-2\alpha)=0$에서 $x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$이므로
$m+2=3\alpha$ ⋯ ㉠, $2\alpha^2=8$ ⋯ ㉡
㉡에서
$2\alpha^2=8$, $\alpha^2=4 \qquad \therefore \alpha=\pm2$
2nd 상수 m의 값을 구하자.
(i) $\alpha=2$일 때, ㉠에서 $m+2=6$
$\therefore m=4$
(ii) $\alpha=-2$일 때, ㉠에서 $m+2=-6$
$\therefore m=-8$
(i), (ii)에 의해 모든 m의 값의 합은 $4+(-8)=-4$야.

145 답 $x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

1st A, B가 잘못 보고 구한 이차방정식을 각각 구하자.
A가 잘못 보고 구한 이차방정식은 두 근이 $-\frac{5}{2}$, 1이고
x^2의 계수가 a인 이차방정식이므로
$a\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)=0$
$\therefore ax^2+\frac{3}{2}ax-\frac{5}{2}a=0$
B는 x^2의 계수를 잘못 보았으므로 B가 구한 이차방정식의 x^2의 계수를 a'이라 하면
$a'\left(x-\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)=0$
$\therefore a'x^2-3a'x-5a'=0$
이때, 두 사람이 본 이차방정식의 상수항은 같아야 하므로
$-\frac{5}{2}a=-5a' \qquad \therefore a=2a'$ ⋯ ㉠
2nd 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 올바른 해를 구하자.
A는 x의 계수를, B는 x^2의 계수를 잘못 보았으므로
두 사람이 구해야 하는 올바른 이차방정식은
$ax^2-3a'x-\frac{5}{2}a=0$에서 $2a'x^2-3a'x-5a'=0$($\because$ ㉠)이야.
따라서 $2x^2-3x-5=0$에서
$(x+1)(2x-5)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

오|답|피|하|기

x^2의 계수를 잘못 보았으니 x^2의 계수를 다른 문자로 놓고 나머지 계수를 알아내야 해. 이런 발상을 하기가 쉽지 않아. 기계적으로 문제를 풀었던 사람에게 신선한 느낌을 주는 문제야. 잘못 본 것에 신경쓰기 보다는 제대로 본 것에 초점을 맞추어야 해.

146 답 4개

1st 제대로 본 항을 이용하여 풀자.
잘못보고 푼 이차방정식은
$\{x-(-3+\sqrt{17})\}\{x-(-3-\sqrt{17})\}=0$이므로
$x^2+6x-8=0$이야.
이때, x의 계수를 잘못보고 푼 것이므로
옳은 이차방정식은 $x^2+ax-8=0$으로 놓을 수 있어.
그런데 이 이차방정식의 두 근을 정수 m, n이라 하면
$(x-m)(x-n)=0$에서
$x^2-(m+n)x+mn=0$ ⋯ ㉠
이것이 $x^2+ax-8=0$과 같아야 하므로 $mn=-8$
따라서 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)을 구하면
$(1, -8)$, $(-1, 8)$, $(2, -4)$, $(-2, 4)$야.
2nd 이차방정식을 구하자.
㉠에 m, n의 값을 대입하면
$(m, n)=(1, -8)$일 때, $x^2+7x-8=0$
$(m, n)=(-1, 8)$일 때, $x^2-7x-8=0$
$(m, n)=(2, -4)$일 때, $x^2+2x-8=0$
$(m, n)=(-2, 4)$일 때, $x^2-2x-8=0$
따라서 가능한 이차방정식은 모두 4개야.

G

147 답 ②

1st 연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$로 놓자.
$x^2=(x+1)^2-(x-1)^2$
$x^2=x^2+2x+1-x^2+2x-1$
$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$
$\therefore x=4$ ($\because x>0$)
따라서 연속하는 세 자연수는 3, 4, 5이고 세 수의 합은
$3+4+5=12$야.

오|답|피|하|기

연속하는 세 자연수를 x, $x+1$, $x+2$로 놓고 풀 수도 있고, $x-2$, $x-1$, x로 놓을 수도 있어. 조건에 맞는 식을 제대로 세우지 못하면 틀릴 수 있어. 조건에 맞게 식을 꼼꼼히 세우는 훈련이 필요해.

148 답 ④

1st 연속하는 네 홀수를 $x-2$, x, $x+2$, $x+4$로 놓자.
$(x-2)^2+x^2+(x+2)^2+(x+4)^2=1044$
$x^2-4x+4+x^2+x^2+4x+4+x^2+8x+16=1044$
$4x^2+8x-1020=0$, $x^2+2x-255=0$
$(x+17)(x-15)=0$
$\therefore x=15$ ($\because x>0$)
따라서 가장 큰 홀수는 $x+4=15+4=19$야.

149 답 6초

1st 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m야.
$-5t^2+10t+120=0$에서
$t^2-2t-24=0$
2nd 이차방정식을 풀자.
$(t+4)(t-6)=0$
$\therefore t=6$ ($\because t>0$)
따라서 6초 후에 지면에 떨어져.

150 답 ③

1st 건물 옥상의 높이는 45 m야.

$-5x^2+40x+45=45$에서

$x^2-8x=0$, $x(x-8)=0$

$\therefore x=8$ ($\because x>0$)

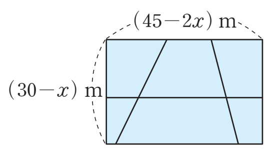
따라서 8초 후에 건물의 옥상에 떨어져.

오답피하기

이 문제에서는 문제를 제대로 읽지 않으면 틀리기 쉽지. 수인이가 어디에 있는지를 잘 봐야 해. 왜냐하면 주어진 식은 '지면으로부터의 높이에 관한 식'이니까 말이야. 문제를 제대로 읽는다는 게 얼마나 중요한지 알겠지?

151 답 ④

1st 길을 뺀 나머지 땅을 모아 만들어지는 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 x에 대하여 나타내 봐.



$(45-2x)(30-x)=675$

$1350-105x+2x^2=675$

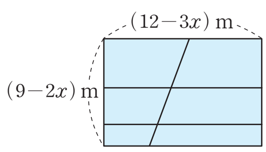
$2x^2-105x+675=0$

$(2x-15)(x-45)=0$

$\therefore x=\frac{15}{2}$ $\left(\because 0<x<\frac{45}{2}\right)$

152 답 ③

1st 길을 제외한 잔디밭을 모아서 만들어지는 직사각형의 가로와 세로의 길이를 x에 대하여 나타내자.



$(12-3x)(9-2x)=45$

$(4-x)(9-2x)=15$

$2x^2-17x+21=0$

$(2x-3)(x-7)=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ ($\because 0<x<4$)

153 답 ④

1st 삼각형에서 각의 이등분선의 성질을 이용해.

$\overline{CD}=x$ cm라 하면 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$4:\overline{AC}=2:x$ $\quad\therefore \overline{AC}=2x$(cm)

2nd 직각삼각형에서 피타고라스 정리가 성립하지?

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$4^2=(2+x)^2+(2x)^2$, $16=x^2+4x+4+4x^2$

$5x^2+4x-12=0$, $(x+2)(5x-6)=0$

$\therefore x=\frac{6}{5}$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{AC}=2x=2\times\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$(cm)

154 답 ⑤

1st $\triangle$ABH, $\triangle$AHC는 모두 직각삼각형이므로 피타고라스 정리가 성립해.

$\triangle$ABH는 직각삼각형이므로

$\overline{AH}^2=\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=13^2-x^2$ ⋯ ㉠

또, $\triangle$AHC도 직각삼각형이고, $\overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=2x-1$이므로

$\overline{AH}^2=\overline{AC}^2-\overline{CH}^2=15^2-(2x-1)^2$ ⋯ ㉡

2nd ㉠, ㉡이 같음을 이용하여 x의 값을 구하자.

㉠, ㉡에서

$13^2-x^2=15^2-(2x-1)^2$

$169-x^2=225-(4x^2-4x+1)$

$169-x^2=225-4x^2+4x-1$

$3x^2-4x-55=0$, $(3x+11)(x-5)=0$

$\therefore x=5$ ($\because x>0$)

3rd $\overline{AH}$의 길이를 구하자.

따라서 $x=5$를 ㉠에 대입하면

$\overline{AH}^2=13^2-5^2=169-25=144$

$\therefore \overline{AH}=12$ ($\because \overline{AH}>0$)

서술형 다지기

p. 146

[155-156 채점기준표]

Ⅰ	해를 갖는 범위를 구한다.	40%
Ⅱ	해를 갖지 않는 범위를 구한다.	40%
Ⅲ	자연수 k의 값의 합을 구한다.	20%

155 답 6

먼저, 해를 갖는 범위를 구하자.

이차방정식 $2x^2-5x+2k-3=0$이 해를 갖기 위해서는

$(-5)^2-4\times2\times(2k-3)\geq0$에서

$25-16k+24\geq0$, $-16k\geq-49$

$\therefore k\leq\frac{49}{16}$ ⋯ ㉠ ⋯ Ⅰ

그다음, 해를 갖지 않는 범위를 구하자.

또, 이차방정식 $(k+1)x^2+4x+3=0$이 해를 갖지 않기 위해서는

$4^2-4\times(k+1)\times3<0$에서

$16-12k-12<0$, $-12k<-4$

$\therefore k>\frac{1}{3}$ ⋯ ㉡ ⋯ Ⅱ

그래서, 자연수 k의 값의 합을 구하자.

따라서 ㉠과 ㉡을 모두 만족시키는 자연수 k의 값은

1, 2, 3이므로 k의 값의 합은 $1+2+3=6$이다. ⋯ Ⅲ

156 답 7

먼저, 해를 갖는 범위를 구하자.

이차방정식 $x^2-2x-k+2=-2k+5$가 해를 가지려면

$x^2-2x+k-3=0$에서 $2^2-4(k-3)\geq0$

$4-4k+12\geq0$ $\quad\therefore k\leq4$ ⋯ ㉠ ⋯ Ⅰ

그다음, 해를 갖지 않는 범위를 구하자.

또, 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2+k-5=0$이 해를 갖지 않으려면 $4(k-1)^2-4(k^2+k-5)<0$

$4k^2-8k+4-4k^2-4k+20<0$, $-12k+24<0$

$\therefore k>2$ ⋯ ㉡ ⋯ Ⅱ

그래서, 자연수 k의 값의 합을 구하자.

따라서 ㉠과 ㉡을 모두 만족시키는 자연수 k의 값은

3, 4이므로 k의 값의 합은 $3+4=7$이다. ⋯ Ⅲ

[157-158 채점기준표]

Ⅰ	상수항을 구한다.	30%
Ⅱ	x의 계수를 구한다.	30%
Ⅲ	올바른 두 근의 차를 구한다.	40%

157 답 7

먼저, 상수항을 구하자.
종국이가 잘못 보고 푼 이차방정식은
$(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x^2-x-6=0$
종국이는 상수항을 제대로 보았으므로 $b=-6$ … Ⅰ
그다음, x의 계수를 구하자.
하하가 잘못 보고 푼 이차방정식은
$(x+2)(x-7)=0 \quad \therefore x^2-5x-14=0$
하하는 x의 계수를 제대로 보았으므로 $a=-5$ … Ⅱ
그래서, 올바른 두 근의 차를 구하자.
옳게 본 이차방정식은 $x^2-5x-6=0$이므로
$(x+1)(x-6)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$
따라서 두 근의 차는 $6-(-1)=7$이다. … Ⅲ

158 답 $\frac{7}{3}$

먼저, 상수항을 구하자.
재석이가 잘못 보고 푼 이차방정식은
$3(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0 \quad \therefore 3x^2+x-2=0$
재석이는 상수항을 제대로 보았으므로 상수항은 -2이다. … Ⅰ
그다음, x의 계수를 구하자.
세호가 잘못 보고 푼 이차방정식은
$3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)=0 \quad \therefore 3x^2-5x+2=0$
세호는 x의 계수를 제대로 보았으므로 x의 계수는 -5이다. … Ⅱ
그래서, 올바른 두 근의 차를 구하자.
옳게 본 이차방정식은 $3x^2-5x-2=0$이므로
$(3x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$
따라서 두 근의 차는 $2-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}$이다. … Ⅲ

159 답 2

이차방정식 $2x^2+(a+3)x+b=0$의 모든 계수가 유리수이므로
한 근이 $1+2\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-2\sqrt{2}$이다. … Ⅰ
이때, 두 근이 $1+2\sqrt{2}$, $1-2\sqrt{2}$이고 x^2의 계수가 2인
이차방정식은 $2\{x-(1+2\sqrt{2})\}\{x-(1-2\sqrt{2})\}=0$이므로
$2(x^2-2x-7)=0$
$\therefore 2x^2-4x-14=0$ … Ⅱ
따라서 $a+3=-4$에서 $a=-7$이고, $b=-14$이므로
$\frac{b}{a}=\frac{-14}{-7}=2$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	나머지 한 근을 구한다.	30%
Ⅱ	이차방정식을 세운다.	50%
Ⅲ	$\frac{b}{a}$의 값을 구한다.	20%

160 답 2

이차방정식 $x^2+(t^2-5t+6)x+t-3=0$의 두 근의 절댓값이 같고
부호가 서로 반대이므로 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=0$ … ㉠, $\alpha\beta<0$ … ㉡ … Ⅰ
이때, 두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$에서 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이므로
$\alpha+\beta=t^2-5t+6$, $\alpha\beta=t-3$
㉠에 의해 $t^2-5t+6=0$, $(t-2)(t-3)=0$
$\therefore t=2$ 또는 $t=3$ … Ⅱ
(i) $t=2$일 때,
$\alpha\beta=t-3=2-3=-1$이므로 ㉡을 만족시킨다.
(ii) $t=3$일 때,
$\alpha\beta=t-3=3-3=0$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에 의해 상수 t의 값은 2이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	두 근의 합과 곱의 조건을 구한다.	30%
Ⅱ	두 근의 합의 조건을 만족시키는 t의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	조건을 모두 만족시키는 t의 값을 구한다.	30%

161 답 -1

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 연속하는 자연수이므로 자연수 m에 대하여 두 근을 m, $m+1$이라 하자.
이때, 두 근의 제곱의 차가 5이므로
$(m+1)^2-m^2=5$, $m^2+2m+1-m^2=5$
$2m=4 \quad \therefore m=2$ … Ⅰ
즉, 두 근이 2, 3이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-2)(x-3)=0$에서 $x^2-5x+6=0$이므로
$a=5$, $b=6$ … Ⅱ
따라서 $a-b=5-6=-1$이므로
$(a-b)+(a-b)^2+(a-b)^3+\cdots+(a-b)^{99}$
$=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{99}$
$=-1$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	근의 조건을 이용해 두 근을 구한다.	40%
Ⅱ	두 근을 이용하여 이차방정식을 세워 a, b의 값을 구한다.	30%
Ⅲ	주어진 식의 값을 구한다.	30%

162 답 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$

처음의 이차방정식을 $3x^2+ax+b=0$이라 하자.
$3x^2+ax+b=0$의 x의 계수를 바꾸었더니 두 근이 1, 2가 되었으므로 상수항 b는 제대로 본 경우이다.
즉, $3(x-1)(x-2)=0$에서 $3x^2-9x+6=0$이므로
$b=6$이다. … Ⅰ
$3x^2+ax+b=0$의 상수항을 바꾸었더니 두 근이 4, $-\frac{1}{3}$이 되었으므로 x의 계수 a는 제대로 본 경우이다.
즉, $3(x-4)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$에서 $3x^2-11x-4=0$이므로
$a=-11$이다. … Ⅱ
따라서 처음의 이차방정식은 $3x^2-11x+6=0$이므로
$(3x-2)(x-3)=0 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$ … Ⅲ

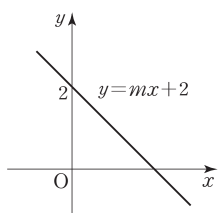
G

[채점기준표]

Ⅰ	처음의 이차방정식의 상수항을 구한다.	30%
Ⅱ	처음의 이차방정식의 x의 계수를 구한다.	30%
Ⅲ	처음의 이차방정식의 올바른 해를 구한다.	40%

163 답 -1

직선 $mx-y+2=0$, 즉 $y=mx+2$가 제3사분면을 지나지 않으려면 그림과 같이 그려져야 한다.



$\therefore m\le 0$ … Ⅰ

직선이 점 $(m+1,\ 2m^2)$을 지나므로 점의 좌푯값을 대입하면

$2m^2=m(m+1)+2$

$m^2-m-2=0$

$(m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=2$ … Ⅱ

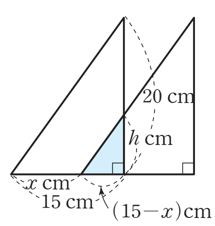
따라서 $m\le 0$이므로 $m=-1$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	직선이 제3사분면을 지나지 않을 조건을 구한다.	40%
Ⅱ	직선이 주어진 점을 지날 때의 m의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	조건을 모두 만족시키는 m의 값을 구한다.	20%

164 답 9분 후

평행이동시킨 지 x분 후 겹쳐진 부분인 직각삼각형의 밑변의 길이는 $(15-x)$ cm이고, 높이를 h cm라 하면 겹쳐진 부분의 삼각형은 △ABC와 닮음이므로



$15:(15-x)=20:h$

$\therefore h=\dfrac{4(15-x)}{3}$ … Ⅰ

$\therefore$ (겹쳐진 부분의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times(15-x)\times\dfrac{4(15-x)}{3}$

$=\dfrac{2}{3}(15-x)^2\ (\text{cm}^2)$

이때, 겹쳐진 부분의 넓이가 $24\ \text{cm}^2$이므로

$\dfrac{2}{3}(15-x)^2=24$

$(15-x)^2=36$ … Ⅱ

$x^2-30x+189=0$

$(x-9)(x-21)=0$

$\therefore x=9\ (\because 0<x<15)$

따라서 이동시킨 지 9분 후이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	x분 후의 겹쳐진 부분의 밑변의 길이와 높이를 x에 대한 식으로 나타낸다.	40%
Ⅱ	겹쳐진 부분의 넓이에 대한 이차방정식을 세운다.	30%
Ⅲ	이차방정식을 풀어 x의 값을 구한다.	30%

최고난도 만점 문제

p. 148

165 답 $x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

1st 근호 안을 인수분해하자.

$x^2-\sqrt{4x^2-8x+4}=\sqrt{x^2}+1$에서

$x^2-\sqrt{\{2(x-1)\}^2}=\sqrt{x^2}+1$ … ㉠

2nd $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$임을 이용하자.

(ⅰ) $x<0$일 때, $x-1<0$이므로 ㉠은

$x^2+2(x-1)=-x+1,\ x^2+3x-3=0$

$\therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+12}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}$

(ⅱ) $0\le x<1$일 때, $x-1<0$이므로 ㉠은

$x^2+2(x-1)=x+1,\ x^2+x-3=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

그런데 $0\le x<1$이므로 해가 없어.

(ⅲ) $x\ge 1$일 때, $x-1\ge 0$이므로 ㉠은

$x^2-2(x-1)=x+1,\ x^2-3x+1=0$

$\therefore x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의해서

$x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

166 답 4

1st 두 이차방정식의 해를 구하자.

먼저 이차방정식 $(x-3)^2=-12x+4$를 풀면

$(x-3)^2=-12x+4,\ x^2-6x+9=-12x+4$

$x^2+6x+5=0,\ (x+5)(x+1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

이차방정식 $x^2+(2a-2)x+a(a-2)=0$을 풀면

$(x+a)(x+a-2)=0$

$\therefore x=-a$ 또는 $x=-a+2$

$$\begin{array}{ccccc} x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & a & \rightarrow & ax \\ x & & a-2 & \rightarrow & (a-2)x\ (+ \\ & & & & \overline{(2a-2)x} \end{array}$$

2nd $-a$와 $-a+2$가 -5와 -1 사이에 있어야 해.

(ⅰ) $-5<-a<-1$이어야 하므로 $1<a<5$ … ㉠

(ⅱ) $-5<-a+2<-1$이어야 하므로

$-7<-a<-3\qquad \therefore 3<a<7$ … ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 자연수 a의 값은 4야.

167 답 ⑤

1st 근이 존재하지 않을 조건을 이용하자.

$x^2+(p+q)x+pq+1=0$의 근이 존재하지 않으므로

$(p+q)^2-4(pq+1)<0$

$p^2+2pq+q^2-4pq-4<0$

$p^2-2pq+q^2-4<0$

$p^2-2pq+q^2<4$

즉, $(p-q)^2<4$이고, p, q는 자연수이므로

$(p-q)^2=0$ 또는 $(p-q)^2=1$인 경우만 성립해.

2nd $p-q=0$, $p-q=\pm 1$인 경우를 따져 주자.
p, q는 주사위의 눈의 수이므로 p, q는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 값을 갖지?
(i) $(p-q)^2=0$인 경우
　(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6개
(ii) $(p-q)^2=1$인 경우
　(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)의 10개
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 16가지야.

168 답 8

1st 첫 번째와 두 번째 시행에서 덜어낸 알코올의 양을 구하자.
(i) [시행 1]에서 덜어낸 알코올의 양은 x L지?
(ii) [시행 1]을 한 후 통에 들어 있는 혼합물과 알코올의 양의 비는 $48:(48-x)$야.
이때, [시행 2]에서 알코올과 물이 섞여 있는 통에서 알코올과 물의 혼합물을 $(x+4)$ L만큼 덜어내었으므로 이 중에 포함된 알코올의 양을 A L라 하면
$48:(48-x)=(x+4):A$　　$\therefore A=\frac{1}{48}(48-x)(x+4)$

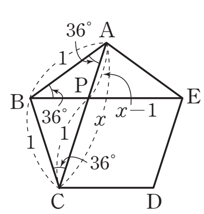
2nd 두 번에 걸쳐 덜어낸 알코올의 양이 18 L라 하므로 방정식을 세워서 풀자.
$x+\frac{1}{48}(48-x)(x+4)=18$, $48x+(48-x)(x+4)=864$
$48x+48x+192-x^2-4x=864$, $x^2-92x+672=0$
$(x-8)(x-84)=0$　　$\therefore x=8$ ($\because 0<x<48$)

169 답 3분

1st 7분 동안 점 P가 움직인 거리를 구해 보자.
$2x^2+x$에 $x=7$을 대입하면 $2\times 7^2+7=105$이니까 원 O의 둘레의 길이는 105 cm야.
2nd 두 바퀴 도는 데 걸린 시간을 구하자.
두 바퀴 도는 데 걸린 시간을 x분이라 하면
$2x^2+x=105\times 2$, $2x^2+x-210=0$
$(2x+21)(x-10)=0$　　$\therefore x=10$ ($\because x>0$)
따라서 한 바퀴를 돈 후 다시 한 바퀴를 도는 데 걸리는 시간은 $10-7=3$(분)이야.

170 답 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1st 정오각형의 한 내각의 크기부터 구해야 해.
정 n각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times(n-2)}{n}$이지?
즉, 정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$이므로
$\angle ABC=108^\circ$야.
그런데 $\triangle ABC$는 $\overline{BA}=\overline{BC}=1$인 이등변삼각형이므로
$\angle BAC=\angle BCA=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$
마찬가지로 $\triangle ABE$도 $\overline{AB}=\overline{AE}=1$인 이등변삼각형이므로



$\angle ABE=\angle AEB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$
이때, $\angle CBP=108^\circ-36^\circ=72^\circ$이고
$\angle CPB=180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=72^\circ$이므로
$\triangle CPB$는 $\overline{CP}=\overline{CB}=1$인 이등변삼각형이야.
$\therefore \overline{AP}=x-1$

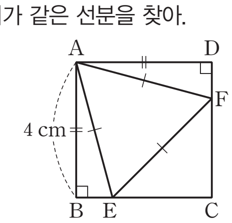
2nd $\triangle ABC$와 닮음인 삼각형을 찾자.
$\triangle ABC$와 $\triangle APB$에서
$\angle BAC=\angle PAB=36^\circ$, $\angle BCA=\angle PBA=36^\circ$이므로
$\triangle ABC\backsim\triangle APB$(AA 닮음)
3rd 닮음비를 이용하여 x의 값을 구해.
즉, $\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{AC}:\overline{AB}$이므로 $1:(x-1)=x:1$
$x(x-1)=1$, $x^2-x-1=0$
$\therefore x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because x>0$)

171 답 ④

1st 증가와 감소를 식으로 나타내 보자.
인상 전의 입장료를 a원, 방문객의 수를 b명이라 하자.
입장료를 x % 인상하면
입장료는 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원
방문객의 수는 $b\left(1-\frac{0.5x}{100}\right)$명
입장료 수입이 8 % 증가하면 수입은 $ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$원이지?
2nd (입장료)×(방문객의 수)=(수입)임을 이용하자.
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{0.5x}{100}\right)=ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$
$1-\frac{5x}{1000}+\frac{x}{100}-\frac{5x^2}{100000}=\frac{108}{100}$
$1+\frac{x}{200}-\frac{x^2}{20000}=\frac{108}{100}$
$20000+100x-x^2=21600$
$x^2-100x+1600=0$
$(x-20)(x-80)=0$
$\therefore x=20$ ($\because 0<x<30$)
따라서 20 % 인상해야 해.

172 답 $(8-4\sqrt{3})$ cm

1st 합동인 두 삼각형을 이용해 $\overline{BE}$와 길이가 같은 선분을 찾아.
$\triangle ABE$와 $\triangle ADF$에서
$\angle B=\angle D=90^\circ$,
$\overline{AE}=\overline{AF}$, $\overline{AB}=\overline{AD}$이므로
$\triangle ABE\equiv\triangle ADF$ (RHS 합동)
$\therefore \overline{BE}=\overline{DF}$



즉, $\overline{BE}=\overline{DF}=x$ cm라 하면
$\overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=\overline{CD}-\overline{DF}=\overline{CF}$이므로
$\overline{CE}=\overline{CF}=4-x$(cm)
2nd 직각삼각형에서 피타고라스 정리가 성립함을 이용해.
$\triangle CFE$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{EF}^2=\overline{CE}^2+\overline{CF}^2=(4-x)^2+(4-x)^2$
$=32-16x+2x^2$ ⋯ ㉠
또, $\triangle ABE$도 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2=4^2+x^2$
$=16+x^2$ ⋯ ㉡
3rd 삼각형 AEF가 정삼각형이므로 $\overline{AE}=\overline{EF}$지?
따라서 $\overline{AE}=\overline{EF}$이므로 ㉠, ㉡에서
$32-16x+2x^2=16+x^2$
$x^2-16x+16=0$
$\therefore x=8\pm\sqrt{64-16}=8\pm 4\sqrt{3}$
이때, $0<x<4$이므로 $x=8-4\sqrt{3}$
$\therefore \overline{BE}=(8-4\sqrt{3})$ cm

H 이차함수와 그래프(1)

개념 체크 **001~045** 정답은 p. 6~7에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

문제편 p. 154

046 답 ②

y가 x에 대한 이차식 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 나타내어질 때, y를 x에 대한 이차함수라 하지?
그런데 ② $y=x^2-x-(x-1)^2$을 정리하면 $y=x-1$로 이차항이 없어지므로 이 함수는 일차함수가 돼.

047 답 ③

먼저 〈보기〉의 식들을 정리해 보자.
ㄱ. $y=x^2+3$ ← 이차함수!
ㄴ. $y=-2x+1$ ← 일차함수!
ㄷ. $y=(x+2)^2-x^2=4x+4$ ← 일차함수!
ㄹ. $y=(2x+3)^2-2x^2=4x^2+12x+9-2x^2$
$=2x^2+12x+9$ ← 이차함수!
ㅁ. $y=\frac{1}{x^2}$ ← 이차함수가 아니야!
ㅂ. $y=x(3x-1)+x=3x^2$ ← 이차함수!
따라서 이차함수는 ㄱ, ㄹ, ㅂ이야.

오답피하기

일반적으로 중학교에서 배우는 다항식에서 분모에 문자가 있는 식은 다항식이라고 하지 않아. ㅁ은 분모에 x가 있는 분수식으로 이런 식을 유리함수라 해. 이 부분은 고등학교에서 배우게 돼.

048 답 ⑤

① $y=\frac{1}{2}\times5\times2x=5x$로 일차함수야.
② $y=4x$로 일차함수지!
③ $x\times y=20$, 즉 $y=\frac{20}{x}$으로 이차함수가 아니야.
④ $y=4x$로 일차함수야.
⑤ $y=\frac{1}{2}\times(6+x)\times4x=2x^2+12x$로 이차함수가 돼.

049 답 ④

함수 $y=4x^2+1-2x(ax+1)$을 정리하면
$y=(4-2a)x^2-2x+1$
y가 x에 대한 이차함수가 되려면 이차항의 계수 $4-2a$가 0이 아니어야 해.
$4-2a\neq0$ $\quad\therefore a\neq2$
따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ④ 2야.

050 답 ⑤

이차함수 $f(x)=x^2-2x+3$에서
$f(1)=1^2-2\times1+3=2$이고,
$f(2)=2^2-2\times2+3=3$이야.
$\therefore f(1)+f(2)=2+3=5$

051 답 ②

$f(a)=8$이므로 $2a^2-5a+1=8$
$2a^2-5a-7=0$
$(a+1)(2a-7)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{7}{2}$
그런데 조건에서 a가 정수이니까 $a=-1$이 되지.

052 답 ④

이차함수 $f(x)=ax^2+5x-2$에서
$f(-1)=-10$이니까
$a-5-2=-10$ $\quad\therefore a=-3$
$f(2)=b$이니까
$4a+10-2=b$, $-12+10-2=b$ $\quad\therefore b=-4$
$\therefore ab=-3\times(-4)=12$

053 답 ①

$f(x)=3x^2+ax-b$에서 $f(-2)=1$이므로
$12-2a-b=1$ $\quad\therefore 2a+b=11$ ⋯ ㉠
또, $f(3)=6$이므로
$27+3a-b=6$ $\quad\therefore 3a-b=-21$ ⋯ ㉡
㉠+㉡을 하면
$5a=-10$ $\quad\therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$-4+b=11$ $\quad\therefore b=15$
따라서 $f(x)=3x^2-2x-15$이므로
$f(-1)=3+2-15=-10$

054 답 ③

이차함수 $y=ax^2$ ⋯ ㉠에 대한 설명이야. 하나씩 맞는지 살펴보자.
① 꼭짓점은 $(0, 0)$이므로 원점이야. ← OK!
② 점 $(2, 4a)$의 좌표를 ㉠에 대입해 보면
$4a=a\times2^2$으로 등식이 성립해. ← OK!
③ a의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어져. ← NO!
④ $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록해. ← OK!
⑤ 이차함수 $y=ax^2$과 $y=-ax^2$은 같은 x의 값에 대하여 부호가 서로 반대인 함숫값을 가지므로 $y=ax^2$의 그래프와 $y=-ax^2$의 그래프는 x축에 대하여 서로 대칭이야. ← OK!

055 답 ㅁ과 ㅂ

이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프는 x축에 대하여 서로 대칭이야.
따라서 ㅁ. $y=-2x^2$과 ㅂ. $y=2x^2$의 그래프가 x축에 대하여 서로 대칭이야.

056 답 ③

이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 위로 볼록이면 $a<0$이어야 하고, 폭이 가장 넓은 것을 찾으려면 a의 절댓값이 가장 작은 것을 찾아야 해.
먼저 $a<0$인 것은 ①, ②, ③이지. 그 중 a의 절댓값은 ①은 3, ②는 1, ③은 $\frac{1}{4}$이므로 구하는 것은 ③이야.

057 답 ②

이차함수 $y=ax^2$의 폭은 a의 절댓값이 클수록 좁아지지?
이때,
$|-5|>|3|>|-1|>\left|\frac{3}{4}\right|>\left|-\frac{1}{2}\right|>\left|\frac{1}{3}\right|$이야.
따라서 폭이 좁은 것부터 차례로 나열하면
ㄷ, ㄱ, ㅁ, ㅂ, ㄴ, ㄹ이야.

058 답 ①

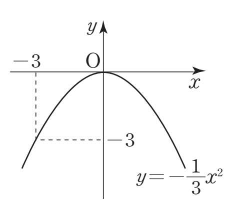
이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 x축과 $y=2x^2$의 그래프 사이에 있으려면
$0<a<2$
또, $y=ax^2$의 그래프가 x축과 $y=-x^2$의 그래프 사이에 있으려면
$-1<a<0$
따라서 주어진 이차함수 $y=ax^2$ 중 $-1<a<0$ 또는 $0<a<2$를 만족하지 않는 것은 ①이야.

059 답 ⑤

이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(-2, 6)$을 지나므로
$6=a\times(-2)^2$, $4a=6$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}$
즉, 이차함수 $y=\frac{3}{2}x^2$의 그래프가 점 $(4, b)$를 지나므로
$b=\frac{3}{2}\times4^2=\frac{3}{2}\times16=24$
$\therefore ab=\frac{3}{2}\times24=36$

060 답 ⑤

이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$ ⋯ ㉠의 그래프를 그려 보자.



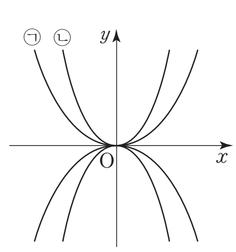
① 점 $(-3, 3)$의 좌표를 ㉠에 대입해 보면 $3\neq\left(-\frac{1}{3}\right)\times9=-3$이므로 이 점을 지나지 않아. ← NO!
② 축의 방정식은 $x=0$이야. ← NO!
③ x^2의 계수가 $-\frac{1}{3}$로 음수이므로 위로 볼록하지? ← NO!
④ 어떤 x의 값에 대해서도 $y\leq0$ ← NO!
⑤ $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소해. ← OK!

061 답 ②

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 a가 양수니까 아래로 볼록하고, $0<a<2$이므로 $y=2x^2$의 그래프보다는 폭이 넓어.
따라서 이차함수 $y=ax^2$의 그래프로 옳은 것은 ②야.

062 답 $\frac{25}{4}$

㉠은 아래로 볼록한 포물선이므로 이차항의 계수가 양수인 이차함수의 그래프가 되는 거야. 또, ㉠은 ㉡보다 폭이 넓지?
즉, ㉠의 이차항의 계수의 절댓값은 ㉡의 이차항의 계수의 절댓값보다 작아.



주어진 이차함수의 식 $y=-2x^2$, $y=-\frac{1}{4}x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=2x^2$에서 ㉠과 ㉡의 그래프의 식은 $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=2x^2$이고 이 중 ㉠은 ㉡보다 이차항의 계수의 절댓값이 작아야 하니까 ㉠은 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프가 되는 거야.
따라서 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프가 점 $(-5, a)$를 지나니까 이 점의 좌표를 대입하면
$a=\frac{1}{4}\times(-5)^2=\frac{25}{4}$

063 답 ②

구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2$이라 하면 그래프가 점 $(3, 2)$를 지나므로
$2=9a$ $\quad\therefore a=\frac{2}{9}$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\frac{2}{9}x^2$이야.

064 답 ③

구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2$이라 하자.
이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 두 점 $(2, 8)$, $(-1, k)$를 지나므로
먼저 점 $(2, 8)$의 좌표를 대입하면
$8=4a$ $\quad\therefore a=2$
따라서 $y=2x^2$에 점 $(-1, k)$의 좌표를 대입하면
$k=2\times(-1)^2=2$

065 답 −24

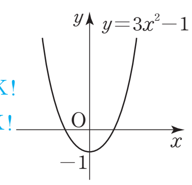
$f(0)=0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점은 원점이고 축이 y축이니까 식은 $y=ax^2$으로 놓을 수 있어.
이때, 이 그래프는 점 $(3, -6)$을 지나므로 좌표를 대입하면
$-6=9a$ $\quad\therefore a=-\frac{2}{3}$
즉, 이 그래프의 식은 $y=f(x)=-\frac{2}{3}x^2$이야.
$\therefore f(6)=-\frac{2}{3}\times36=-24$

066 답 −4

원점을 꼭짓점으로 하고 점 $(2, -3)$을 지나는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2$이라 하면
$-3=a\times2^2$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{4}$
즉, $y=-\frac{3}{4}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프의 식은 $y=\frac{3}{4}x^2$이야.
따라서 $y=\frac{3}{4}x^2$의 그래프가 점 $(k, 12)$를 지나므로
$12=\frac{3}{4}k^2$, $k^2=16$
$\therefore k=\pm4$
따라서 구하는 음수 k의 값은 -4야.

067 답 ④

이차함수 $y=3x^2-1$의 그래프를 그리면 그림과 같아.



① 그림에서 아래로 볼록한 포물선이야. ← OK!
② 축이 y축이니까 축의 방정식은 $x=0$ ← OK!
③ 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -1)$ ← OK!
④ $y=3x^2-1$에 x 대신 1, y 대신 3을 대입하면 $3\neq3-1=2$로 등식이 성립하지 않지? 즉, 점 $(1,\ 3)$을 지나지 않아. ← NO!
⑤ $y=3x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=3x^2-1$의 그래프가 돼. ← OK!

068 답 ③

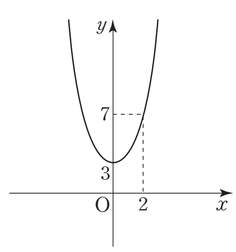
이차함수 $y=x^2+2$의 그래프를 평행이동하여 완전히 포갤 수 있는 그래프는 이차항의 계수가 같은 것이므로 ③ $y=x^2$이야.

069 답 $(0,\ 4)$

이차함수 $y=-3x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-3x^2+q$가 되지.
이 그래프가 점 $(2,\ -8)$을 지난다고 하니까
$-8=-12+q$ $\quad\therefore q=4$
따라서 $y=-3x^2+4$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 4)$야.

070 답 ①

그림은 꼭짓점이 $(0,\ 3)$이고 y축을 축으로 하는 이차함수의 그래프이므로 구하는 식을 $y=ax^2+3$이라 하자.
이 그래프가 점 $(2,\ 7)$을 지나므로 좌표를 $y=ax^2+3$에 대입해 보면
$7=4a+3$ $\quad\therefore a=1$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=x^2+3$이야.

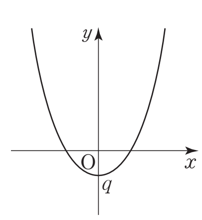


071 답 ④

이차함수 $y=2x^2+3$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 $y=2x^2+3+k$
이 식이 $y=2x^2-4$와 일치하므로
$3+k=-4$ $\quad\therefore k=-7$

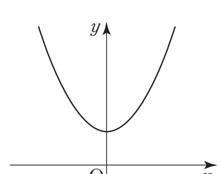
072 답 ②

이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프가 아래로 볼록하므로 이차항의 계수 a는 양수야.
$\therefore a>0$
또, 꼭짓점 $(0,\ q)$는 x축보다 아래쪽에 있으므로 q는 음수야. $\quad\therefore q<0$



073 답 ③

$a<0$에서 $-a>0$이므로 $y=-ax^2-q$의 그래프는 아래로 볼록한 포물선이지?
또, 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -q)$인데 $q<0$이니까 꼭짓점은 x축보다 위쪽에 있게 돼.
따라서 이차함수 $y=-ax^2-q$의 그래프는 그림과 같아.



074 답 -4

이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것은 $y=ax^2+q+3$이고, 이것이 $y=ax^2-3$과 같아야 하니까
$q+3=-3$ $\quad\therefore q=-6$
이차함수 $y=ax^2-3$의 그래프가 점 $(2,\ 5)$를 지나므로
$5=4a-3$ $\quad\therefore a=2$
$\therefore a+q=2+(-6)=-4$

075 답 ③

이차함수 $y=-ax^2+q$의 그래프에서
① 아래로 볼록하니까 $-a>0$ $\quad\therefore a<0$ ← NO!
② 꼭짓점의 y좌표가 양수이니까 $q>0$ ← NO!
③ $aq<0$ ← OK!
④ $a<0$이고 $q>0$에서 $-q<0$이니까 $a-q=a+(-q)<0$ ← NO!
⑤ a와 q의 부호가 다르다고 항상 $a+q<0$이라고는 할 수 없어. ← NO!

076 답 ⑤

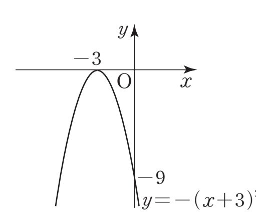
이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 $y=2x^2+5$의 그래프가 되지. 선분 AB는 y축에 평행하니까 선분 AB의 길이는 5가 되는 거야.

077 답 3

이차함수 $y=-2x^2+3$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-2x^2+3+a$
이때, 이 그래프가 두 점 $(2,\ 1)$, $(-1,\ b)$를 지나므로
점 $(2,\ 1)$의 좌표를 대입하면
$1=-2\times2^2+3+a$ $\quad\therefore a=6$
점 $(-1,\ b)$의 좌표를 대입하면
$b=-2\times(-1)^2+3+a=-2+3+6=7$
따라서 두 점 $(2,\ 1)$, $(-1,\ 7)$을 지나는 직선의 기울기를 구하면
$m=\dfrac{7-1}{-1-2}=\dfrac{6}{-3}=-2$ $\quad\therefore y=-2x+n$
여기에 점 $(2,\ 1)$의 좌표를 대입하면
$1=(-2)\times2+n$ $\quad\therefore n=5$
$\therefore m+n=(-2)+5=3$

078 답 ㄴ, ㄹ

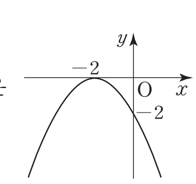
먼저 $y=-(x+3)^2$의 그래프를 그려 보면 그림과 같아.



ㄱ. 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ 0)$이고, 직선 $x=-3$을 축으로 하는 포물선이지? (거짓)
ㄴ. $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 거야. (참)
ㄷ. $y=(x+3)^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이지? (거짓)
ㄹ. $x=0$일 때, $y=-(0+3)^2=-9$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이야.

079 답 ②

이차함수 $y=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 0)$이고, 축의 방정식은 $x=-2$야.
또, 이차항의 계수가 음수이니까 위로 볼록하므로 그래프는 그림과 같아.



080 답 ⑤

구하는 이차함수의 그래프가 $y=3x^2$의 그래프와 모양이 같다고 하므로 이차항의 계수가 같겠지? 또, 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$이므로

$y=3(x-2)^2$

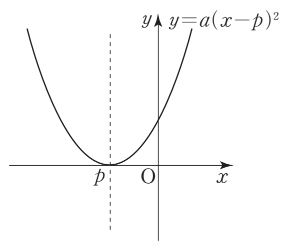
따라서 $a=3$, $p=2$이므로

$a+p=3+2=5$

081 답 $a>0$, $p<0$

그림에서 $y=a(x-p)^2$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

또, 축이 직선 $x=p$이고 y축의 왼쪽에 있으므로 $p<0$



082 답 12

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$이므로 그래프의 식은 $y=a(x-2)^2$ 꼴이야.

또, 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나니까 좌표를 대입해 보면

$2=a(0-2)^2$, $4a=2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$이 그림의 그래프를 만족하는 식이지?

이 이차함수의 그래프가 점 $(-3,\ m)$을 지나므로

$m=\frac{1}{2}\times(-3-2)^2=\frac{25}{2}$

또, 점 $(3,\ n)$을 지나므로

$n=\frac{1}{2}\times(3-2)^2=\frac{1}{2}$

$\therefore m-n=\frac{25}{2}-\frac{1}{2}=12$

083 답 ①

이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-3$이라 하므로 $p=-3$

또, 이 그래프가 점 $(-2,\ 2)$를 지나니까

$2=a(-2+3)^2$ $\quad\therefore a=2$

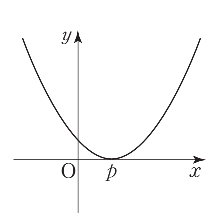
$\therefore ap=2\times(-3)=-6$

084 답 ③

일차함수 $y=ax+p$의 그래프가 오른쪽 위를 향하니까 $a>0$

또, y절편이 양수이니까 $p>0$

따라서 $y=a(x-p)^2$에서 $a>0$이므로 그래프는 아래로 볼록하고, $p>0$이므로 꼭짓점 $(p,\ 0)$은 그림과 같이 x축의 양의 부분에 있어.



오|답|피|하|기

이차함수에서 부호 판별을 요구하는 문제는 늘 출제되니까 잘 기억해야 해. 그리고 일차함수 역시 잘 알고 있어야겠지? $y=ax+b$라는 일차함수에서 a는 기울기, b는 y절편이고 $a>0$이면 그래프가 오른쪽 위를 향하고, $a<0$이면 그래프가 오른쪽 아래를 향해. 잊어버리면 안 돼!

085 답 ③

이차함수 $y=-(x+2)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면

$y=-(x+2-p)^2+1+q$

이것이 $y=-x^2$의 그래프와 완전히 포개어지므로 두 식이 같다는 거지?

즉, $2-p=0$에서 $p=2$이고 $1+q=0$에서 $q=-1$

$\therefore p+q=2+(-1)=1$

086 답 ②

이차함수 $y=3(x-2)^2+2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3(x-2+1)^2+2-1$ $\quad\therefore y=3(x-1)^2+1$

오|답|피|하|기

평행이동 문제에서 왜 x축의 방향으로 p만큼 이동한 것은 $-p$이고, y축의 방향으로 q만큼 이동한 것은 $+q$가 되는지 궁금하지? 원래 y축의 방향으로 q만큼 이동시키면 y 대신에 $y-q$를 넣어야 해. 그런데 여기서 $-q$가 이항되어서 $y=$(함수식)$+q$의 형태로 정리되지. 결과적으로 우리는 이항된 q를 보기 때문에 $-q$가 아닌 $+q$를 보게 되지!

087 답 ④

이차함수 $y=(x+1)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=(x+1-4)^2+1+2=(x-3)^2+3$

따라서 선택지의 점 중 $y=(x-3)^2+3$의 그래프가 지나는 점은 ④ $(4,\ 4)$야.

088 답 10

이차함수 $y=2(x-1)^2+3$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=2(x-1-2)^2+3-1$ $\quad\therefore y=2(x-3)^2+2$

이 그래프가 점 $(1,\ m)$을 지나므로

$m=2\times(1-3)^2+2=10$

089 답 ⑤

이차함수 $y=-(x+3)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$y=-(x+3+3)^2+4=-(x+6)^2+4$ ⋯ ㉠

㉠의 꼭짓점의 좌표는 $(-6,\ 4)$이고 축의 방정식은 $x=-6$

따라서 $p=-6$, $q=4$, $m=-6$이므로

$p-2q-3m=-6-8+18=4$

090 답 -3

이차함수 $y=\frac{2}{3}(x-2)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이므로

$p=2$

또, $y=-4\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+3$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{5}{4}$이므로

$q=-\frac{5}{4}$

$\therefore p+4q=2+4\times\left(-\frac{5}{4}\right)=2-5=-3$

091 답 ④

조건 (다)에서 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 평행이동한 것이므로 구하는 이차함수의 식의 이차항의 계수는 $\frac{1}{2}$이야.

조건 (가)에서 축의 방정식이 $x=-2$이니까 꼭짓점의 x좌표는 -2가 돼.

$\therefore y=\frac{1}{2}(x+2)^2+q$

이때, 조건 (나)에 의해 이 이차함수의 그래프가 점 $(-4,\ 1)$을 지나니까

$1=\frac{1}{2}\times(-4+2)^2+q,\ 1=2+q$

$\therefore q=-1$

$\therefore y=\frac{1}{2}(x+2)^2-1$

092 답 ⑤

① 이차함수 $y=5x^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$
② 이차함수 $y=-2x^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 3)$
③ 이차함수 $y=3(x-1)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 0)$
④ 이차함수 $y=(x-1)^2-7$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -7)$
⑤ 이차함수 $y=-2(x+4)^2-3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-4,\ -3)$

이 중 꼭짓점이 제3사분면 위에 있는 것은 x좌표와 y좌표가 모두 음수인 것이므로 ⑤야.

093 답 ②

이차함수 $y=-a(x-p)^2+3$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-1$이므로 $p=-1$이지.

또, 이 이차함수의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4=-a(0+1)^2+3$

$\therefore a=-1$

$\therefore a+p=-1+(-1)=-2$

094 답 ③

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 6)$이므로 $p=-2,\ q=6$

또, 이차함수 $y=a(x+2)^2+6$의 그래프가 점 $(4,\ 2)$를 지나니까

$2=a(4+2)^2+6,\ 36a=-4$

$\therefore a=-\frac{1}{9}$

$\therefore a+p+q=-\frac{1}{9}+(-2)+6=\frac{35}{9}$

095 답 ⑤

이차함수 $y=4x^2-5$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $k+2$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=4(x-k)^2-5+k+2$

$\therefore y=4(x-k)^2+k-3$

따라서 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(k,\ k-3)$이고

이 점이 직선 $y=-x+9$ 위에 있으므로

$k-3=-k+9,\ 2k=12$

$\therefore k=6$

096 답 ③

이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 모양이 같으므로 이차항의 계수는 $-\frac{1}{2}$이고 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 3)$이므로 구하는 식은

$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

097 답 ②

꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -6)$인 이차함수의 식은

$y=a(x+2)^2-6$ ⋯ ㉠

이 이차함수의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 이 점의 좌표를 ㉠에 대입하면

$-2=a(0+2)^2-6 \quad \therefore a=1$

즉, $y=(x+2)^2-6$이므로 $a=1,\ p=-2,\ q=-6$

$\therefore a+p+q=1+(-2)+(-6)=-7$

098 답 ④

이차함수 $y=x^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $m+3$만큼, y축의 방향으로 $n-3$만큼 평행이동하면

$y=(x-m-3)^2+1+n-3$

$\therefore y=(x-m-3)^2+n-2$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로

$m+3=2,\ n-2=3 \quad \therefore m=-1,\ n=5$

$\therefore m-n=-1-5=-6$

099 답 4

이차함수 $y=(a+1)(x-2)^2-a^2+3a+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -a^2+3a+3)$이고 이 점이 점 $(2,\ -1)$과 일치해야 하므로

$-a^2+3a+3=-1$

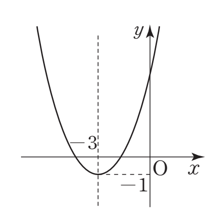
$a^2-3a-4=0,\ (a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

그런데 주어진 함수가 이차함수이려면 $a+1\neq0$에서 $a\neq-1$이어야 하므로 구하는 a의 값은 4야.

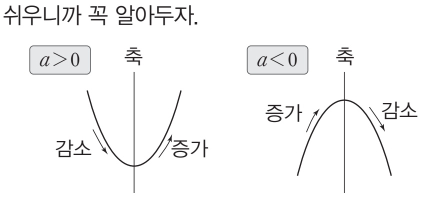
100 답 ③

이차함수 $y=\frac{2}{3}(x+3)^2-1$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 x의 값의 범위는 $x>-3$이야.



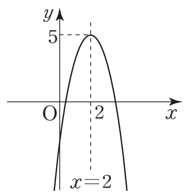
오답피하기

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에서 증가 · 감소하는 x의 값의 범위는 축 $x=p$를 기준으로 나뉘게 돼.
틀리기 쉬우니까 꼭 알아두자.



101 답 ②

이차함수 $y=-(x-2)^2+5$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 x의 값의 범위는 $x<2$야.



102 답 ③

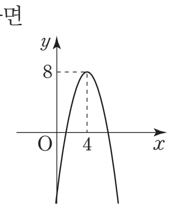
이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=2(x-1)^2+3$이 되지.
이 이차함수의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 x의 값의 범위는 $x<1$이야.

오답피하기

그래프의 증가 · 감소 문제는 축의 방정식과 밀접한 관계가 있어. 이런 문제는 x^2의 계수가 0보다 큰지 작은지, 축의 방정식이 무엇인지만 알면 그래프나 완벽한 식 없이도 풀 수 있으니까 이제 시간을 절약하는 연습도 해 보자!

103 답 ④

주어진 일차함수의 그래프에서 y절편이 4이므로 $b=4$
$y=ax+4$에 $x=2$, $y=0$을 대입하면
$0=2a+4$ $\quad\therefore a=-2$
즉, $a=-2$, $b=4$를 $y=a(x-b)^2-ab$에 대입하면
$y=-2(x-4)^2+8$
따라서 $y=-2(x-4)^2+8$의 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식이 $x=4$이므로 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 x의 값의 범위는 $x<4$야.



104 답 ①

$y=-3(x+2)^2+4$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시키면
$-y=-3(x+2)^2+4$
$\therefore y=3(x+2)^2-4$

105 답 $(1, -3)$

이차함수 $y=2(x+1)^2-3$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 그래프의 식은
$y=2(-x+1)^2-3$
$\therefore y=2(x-1)^2-3$
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(1, -3)$이야.

106 답 50

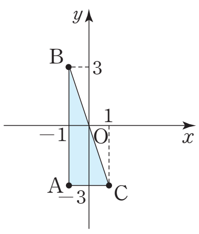
이차함수 $y=-3(x+1)^2-2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면
$-y=-3(x+1)^2-2$
$\therefore y=3(x+1)^2+2$
이 그래프가 점 $(3, a)$를 지나므로
$a=3\times(3+1)^2+2=48+2=50$

107 답 18

이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시키면
$y=-x^2$
또, 이 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동시키면
$y=-(x+3)^2+6$
이 식이 $y=a(x-p)^2+q$와 같아야 하므로
$a=-1$, $p=-3$, $q=6$
$\therefore apq=(-1)\times(-3)\times6=18$

108 답 6

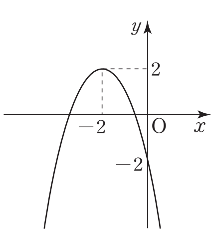
이차함수 $y=2(x+1)^2-3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -3)$이므로 $\mathrm{A}(-1, -3)$
이차함수 $y=2(x+1)^2-3$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=-2(x+1)^2+3$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 3)$이야.
$\therefore \mathrm{B}(-1, 3)$
또한, 이차함수 $y=2(x+1)^2-3$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=2(x-1)^2-3$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(1, -3)$이야.
$\therefore \mathrm{C}(1, -3)$
즉, 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같아.



$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times2\times6=6$

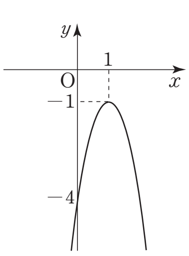
109 답 ④

이차함수 $y=-(x+2)^2+2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 2)$가 되고, $x=0$을 대입한 값이 $y=-2$이므로 점 $(0, -2)$를 지나.
그리고 x^2의 계수가 음수이므로 위로 볼록한 포물선이 되겠지?
따라서 그래프는 그림과 같아.



110 답 제 1, 2사분면

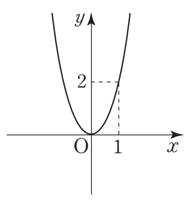
이차함수 $y=-3(x-1)^2-1$의 이차항의 계수가 -3이므로 위로 볼록하고, 꼭짓점의 좌표가 $(1, -1)$이야.
또, y축과 점 $(0, -4)$에서 만나.
따라서 주어진 이차함수의 그래프는 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제1, 2사분면이야.



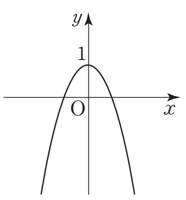
111 답 ④

먼저 그래프를 그려 보고 x축과 만나지 않는 것을 고르자.

① $y=2x^2$

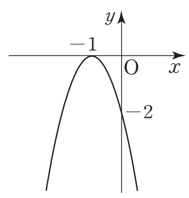


② $y=-3x^2+1$

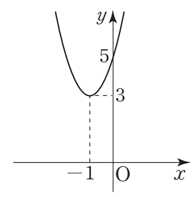


H

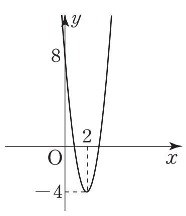
③ $y=-2(x+1)^2$



④ $y=2(x+1)^2+3$



⑤ $y=3(x-2)^2-4$

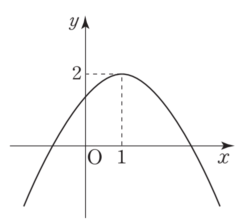


따라서 그래프 중 x축과 만나지 않는 것은 ④야.

112 답 -1

$y=a(x-1)^2+2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로 그래프가 위로 볼록해야 모든 사분면을 지나겠지?

$\therefore\ a<0$ ⋯ ㉠



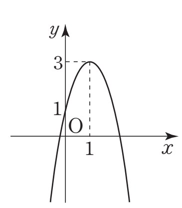
즉, 이 그래프가 모든 사분면을 지나기 위해서는 그림과 같이 그래프가 위로 볼록해야 하고, y축과의 교점의 y좌표가 양수이면 돼.

$a(0-1)^2+2=a+2>0 \qquad \therefore\ a>-2$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 a의 값은 -1이야.

113 답 ③

이차함수 $y=-2(x-1)^2+3$의 그래프는 이차항의 계수가 -2이므로 위로 볼록하고, 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 3)$이야.



① 위로 볼록하지? ← NO!

② 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 3)$이지? ← NO!

③ $x=0$일 때, $y=-2\times(0-1)^2+3=1$이므로 y축과 점 $(0,\ 1)$에서 만나. ← OK!

④ $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 거야. ← NO!

⑤ $x>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소해. ← NO!

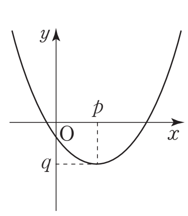
114 답 ㄱ, ㄴ

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는

ㄱ. 축의 방정식이 $x=p$이므로 직선 $x=p$에 대하여 대칭이야. (참)

ㄴ. a의 절댓값이 클수록 포물선의 폭은 좁아져. (참)

ㄷ. $a>0$일 때 $x>p$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가해. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이야.

115 답 ②, ⑤

① $y=3x^2+2$와 $y=-3(x-1)^2+4$의 이차항의 계수의 절댓값이 3으로 같으므로 두 이차함수의 그래프의 폭은 서로 같아. ← OK!

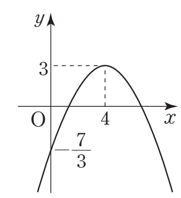
② $y=-x^2+5$의 그래프의 축의 방정식은 $x=0$이야. ← NO!

③ $y=2(x+3)^2-6$에 $x=-1$을 대입하면

$y=2\times(-1+3)^2-6=8-6=2$

즉, $y=2(x+3)^2-6$의 그래프는 점 $(-1,\ 2)$를 지나. ← OK!

④ 이차함수 $y=-\frac{1}{3}(x-4)^2+3$의 그래프는 그림과 같으므로 제 2사분면을 지나지 않아. ← OK!



⑤ 이차함수 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-7$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=-\frac{1}{2}(-x-2)^2-7$

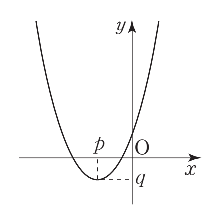
$\therefore\ y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-7$ ← NO!

따라서 옳지 않은 것은 ②, ⑤야.

116 답 $a>0,\ p<0,\ q<0$

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 아래로 볼록하니까 $a>0$

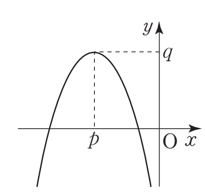
또, 꼭짓점 $(p,\ q)$가 제 3사분면 위의 점이니까 $p<0,\ q<0$



117 답 ③, ⑤

$y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

또, 꼭짓점 $(p,\ q)$가 제 2 사분면 위의 점이니까 $p<0,\ q>0$



① $a<0,\ p<0$이므로 $ap>0$ ← OK!

② $a<0,\ q>0$이므로 $aq<0$ ← OK!

③ $p<0,\ q>0$이므로 $pq<0$ ← NO!

④ $a<0,\ p<0,\ q>0$이므로 $apq>0$ ← OK!

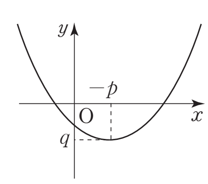
⑤ $a<0,\ p<0$이므로 $a+p<0$ ← NO!

118 답 $a-p-q>0$

$y=a(x+p)^2+q$의 그래프가 아래로 볼록하니까 $a>0$

꼭짓점 $(-p,\ q)$가 제4사분면 위의 점이므로 $-p>0,\ q<0$에서 $p<0,\ q<0$

$\therefore\ a-p-q=a+(-p)+(-q)>0$



119 답 ②

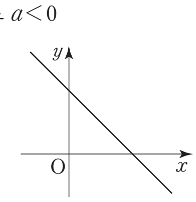
$y=a(x+p)^2+q$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

꼭짓점이 제2사분면 위의 점이니까

$-p<0,\ q>0$에서 $p>0,\ q>0$

즉, 일차함수 $y=apx+pq$의 그래프의 기울기는 $ap<0$이고, y절편은 $pq>0$이야.

따라서 일차함수의 그래프는 그림과 같아.



잘 틀리는 유형 훈련+1up

p. 164

120 답 -3

1st 그래프의 폭과 이차항의 계수의 관계를 생각해 보자.

이차항의 계수의 절댓값이 클수록 폭은 좁고 절댓값이 작을수록 폭은 넓어져.

즉, $y=ax^2$의 그래프가 $y=-\frac{1}{5}x^2$의 그래프보다 폭이 좁으니까 a의 절댓값이 $-\frac{1}{5}$의 절댓값보다 커야 해. ⋯ ㉠

또, $y=ax^2$의 그래프가 $y=-3x^2$의 그래프보다 폭이 넓으니까 a의 절댓값은 -3의 절댓값보다 작다는 걸 알 수 있어. ⋯ ㉡

2nd a가 음수임을 이용해.

a가 음수이므로 ㉠에서 $a<-\frac{1}{5}$

또, ㉡에서 $-3<a<0$

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 음의 정수 a의 값은 -2, -1이므로 그 합은 $-2+(-1)=-3$이야.

오답피하기

이차항의 계수의 절댓값이 클수록 폭이 좁아지고 작을수록 폭이 넓어지는 걸 알아야 해.

그리고 나서 a가 음수라는 걸 알고 부등식을 세우는 게 중요해! 음수라는 것에 실수할 수 있어.

121 답 -6

1st 이차항의 계수의 절댓값과 폭의 관계를 알아보자.

$y=ax^2$의 그래프가 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프보다 폭이 좁으니까 a의 절댓값이 $-\frac{1}{3}$의 절댓값보다 크지. ⋯ ㉠

또, $y=ax^2$의 그래프가 $y=4x^2$의 그래프보다 폭이 넓으니까 a의 절댓값은 4보다 작아야 해. ⋯ ㉡

2nd 음수 a의 값의 범위를 따져봐.

a가 음수이므로 ㉠에서 $a<-\frac{1}{3}$

또, ㉡에서 $-4<a<0$

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 음의 정수 a의 값은 -3, -2, -1이므로 그 합은 $-3+(-2)+(-1)=-6$이야.

122 답 $\frac{1}{4}$

1st $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$에서 다섯 개의 점 A, B, C, D, E가 같은 간격임을 알고 점 B의 x좌표를 구해 보자.

점 B는 $y=x^2$의 그래프 위의 점이고 y좌표가 16이니까

$16=x^2$에서 $x=\pm4$가 되지.

이때, 점 B는 제 2사분면 위의 점이니까 B$(-4, 16)$이 되어 $\overline{BC}=4$가 돼.

2nd $\overline{AB}=\overline{BC}=4$임을 이용하여 점 A의 좌표를 구해서 a의 값을 구해 보자.

$\overline{BC}=4$이니까 $\overline{AB}=4$가 되어야 해.

즉, 점 B의 x좌표가 -4이니까 점 A의 x좌표는 -8이 됨을 알 수 있어.

그럼 점 A의 좌표가 $(-8, 16)$이 되고 점 A는 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이니까

$16=64a \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

오답피하기

A, B, C, D, E의 y좌표가 16으로 같고 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$임을 이용하여 A, B, C, D, E의 좌푯값을 구하는 게 핵심이야. 이 걸 제대로 파악하지 못해서 틀리지.

y의 값이 같고 같은 간격으로 되어 있으니까 두 점 A, B의 x좌표의 차가 두 점 B, C의 x좌표의 차가 됨을 알 수 있을 거야.

한편, 이 부분에서 한 번 생각해 볼 것이 있어. 함수식에서 $y=0$을 대입하면 (이차식)$=0$의 모양이 되지? 이를 만족하는 x는 이차방정식의 해가 될 거야. 이 해는 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 점들의 x좌표지. 그리고 이 두 좌표의 평균값이 p일 때 $x=p$가 축의 방정식이 된단다. 방정식과 함수, 꽤 친하지?

123 답 $\frac{1}{2}$

1st y좌표가 같음을 알고 두 점 A, B의 x좌표를 구해 보자.

점 B의 y좌표가 25이고 $y=x^2$의 그래프 위의 점이므로

$25=x^2 \qquad \therefore x=\pm5$

이때, 점 B는 제 2사분면 위의 점이니까 B$(-5, 25)$

그럼 $\overline{BC}=5$이고 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}=5$가 되지.

즉, 점 B의 x좌표가 -5이고 $\overline{AB}=5$가 되려면 점 A의 x좌표는 -10이 되어야 해.

따라서 점 A의 좌표는 $(-10, 25)$야.

2nd 점 A는 $y=\frac{1}{2}ax^2$의 그래프 위의 점이므로 점 A의 좌표를 대입해서 a의 값을 구하자.

점 A는 $y=\frac{1}{2}ax^2$의 그래프 위의 점이므로

$25=\frac{1}{2}a\times100 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

124 답 ②

1st x축과 만나는 두 점의 중점의 x좌표가 꼭짓점의 x좌표임을 알자.

x축과 만나는 두 점의 중점의 x좌표가 꼭짓점의 x좌표이므로

(꼭짓점의 x좌표)$=\frac{-3+1}{2}=-1$

2nd 꼭짓점의 좌표로 이차함수의 식을 만들자.

이차함수의 그래프가 직선 $y=2$와 한 점에서 만나므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 2)$야.

즉, $y=a(x+1)^2+2$이므로 $p=-1$, $q=2$

이때, 이 이차함수의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로 대입하면

$0=4a+2 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore 2a-p+q=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-(-1)+2=2$

오답피하기

그래프를 보고 이차함수의 식을 만드는 건데 x축과의 교점의 성질을 알면 쉽게 풀 수 있어. 세 점 $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 2)$를 지난다고 하여 세 점의 좌표를 대입해서 세 문자 a, p, q를 구할 수도 있지만 계산이 복잡해지니까 위 풀이 방식으로 풀도록 해.

125 답 ①

1st 꼭짓점의 좌표를 구하자.
x축과 만나는 두 점의 좌표가 $(-4,\ 0)$, $(0,\ 0)$이므로
(꼭짓점의 x좌표)$=\dfrac{-4+0}{2}=-2$
또, 직선 $y=-3$과 한 점에서 만나므로 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -3)$이야.
즉, $y=a(x+2)^2-3$이므로 $p=-2$, $q=-3$
2nd 원점을 지나므로 식에 대입하여 a의 값을 구하자.
이때, 이 이차함수의 그래프가 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로 대입하면
$0=4a-3 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{4}$
$\therefore a+p+q=\dfrac{3}{4}+(-2)+(-3)=-\dfrac{17}{4}$

126 답 ⑤

1st 축의 방정식을 이용하여 구하려고 하는 이차함수의 식을 만들어 보자.
축의 방정식이 $x=2$이니까 $p=2$야.
이 함수의 그래프가 두 점 $(1,\ 1)$, $(0,\ 3)$을 지나니까 대입해 보면
$1=a+q$ ⋯ ㉠
$3=4a+q$ ⋯ ㉡
㉡$-$㉠을 하면
$3a=2 \qquad \therefore a=\dfrac{2}{3}$ ⋯ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$\dfrac{2}{3}+q=1 \qquad \therefore q=\dfrac{1}{3}$
2nd $a+p-q$의 값을 구하자.
$\therefore a+p-q=\dfrac{2}{3}+2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$

오|답|피|하|기

축의 방정식은 이차함수의 식을 결정하는 데 중요한 역할을 해. 조건 하나하나에 힌트들이 들어 있으니까 제대로 파악하는 훈련이 필요해.

127 답 ③

1st 축의 방정식을 이용하여 함수식을 세우고 그래프가 지나는 두 점을 대입하자.
축의 방정식이 $x=-3$이므로 구하려는 이차함수의 식은
$y=a(x+3)^2+q$가 되어야 해.
$\therefore p=3$
이 함수의 그래프가 두 점 $(-2,\ 4)$, $(0,\ 5)$를 지나니까 대입하면
$4=a+q$ ⋯ ㉠
$5=9a+q$ ⋯ ㉡
㉡$-$㉠을 하면
$8a=1 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{8}$ ⋯ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$4=\dfrac{1}{8}+q \qquad \therefore q=\dfrac{31}{8}$
2nd $a-p+2q$의 값을 구해 보자.
$\therefore a-p+2q=\dfrac{1}{8}-3+\dfrac{31}{4}=\dfrac{39}{8}$

128 답 $y=\dfrac{1}{2}x-2$

1st 꼭짓점의 좌표를 구해 보자.
$y=\dfrac{1}{3}(x+1)^2-\dfrac{5}{2}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-1,\ -\dfrac{5}{2}\right)$
2nd 기울기와 한 점이 주어질 때 직선의 방정식을 구해 보자.
기울기가 $\dfrac{1}{2}$이니까 직선의 방정식을 $y=\dfrac{1}{2}x+b$로 두고
점 $\left(-1,\ -\dfrac{5}{2}\right)$의 좌표를 대입하자.
$-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{1}{2}+b \qquad \therefore b=-2$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x-2$가 돼.

오|답|피|하|기

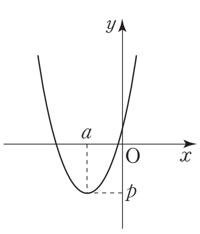
한 점을 지나고, 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구하는 방법을 잊어서 틀렸을지도 몰라! 잘 정리하자!
한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 a인 직선의 방정식은 처음에 $y=ax+b$로 두고 점 $(x_1,\ y_1)$의 좌푯값을 대입해서 b의 값을 구해줘야 해.

129 답 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$

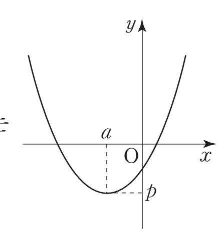
1st 먼저 이차함수의 그래프의 꼭짓점과 y축과의 교점의 좌표를 구하자.
$y=-\dfrac{1}{2}(x+1)^2+\dfrac{3}{2}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$
또, $x=0$을 대입하면 $y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=1$이므로 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 1)$이 돼.
2nd 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하자.
두 점 $\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $(0,\ 1)$을 지나는 직선에서
(기울기)$=\dfrac{1-\dfrac{3}{2}}{0-(-1)}=-\dfrac{1}{2}$
또, y절편은 1이므로 구하는 직선의 방정식은
$y=-\dfrac{1}{2}x+1$이야.

130 답 ①

1st 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 보고 a, p, q의 부호를 결정해 보자.
그래프가 위로 볼록하니까 $a<0$
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$이고, 꼭짓점이 제 2사분면 위에 있으므로 $p<0$, $q>0$
2nd a, p, q의 부호를 통해 $y=q(x-a)^2+p$의 그래프를 그려 보자.
$q>0$이므로 $y=q(x-a)^2+p$의 그래프는 아래로 볼록하고, 꼭짓점 $(a,\ p)$는 $a<0$, $p<0$이므로 제 3사분면 위에 있지?
따라서 그래프를 그리면 다음과 같아.

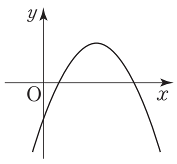


또는

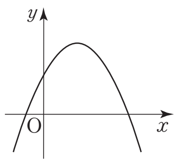


131 답 ③

1st $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 보고, a, p, q의 부호를 정하자.
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 아래로 볼록하니까
$a>0$
꼭짓점 $(p,\ q)$가 제4사분면 위에 있으니까
$p>0,\ q<0$
2nd a, p, q의 부호를 알고 $y=q(x-a)^2+p$의 그래프를 그리자.
이차함수 $y=q(x-a)^2+p$의 그래프는 $q<0$이니까 위로 볼록해.
또, 꼭짓점 $(a,\ p)$에서 $a>0$, $p>0$이니까 제1사분면 위의 점이므로 그래프를 그리면 그림과 같아.



또는



서술형 다지기

p. 166

[132-133 채점기준표]

Ⅰ	꼭짓점의 좌표를 이용하여 p, q의 값을 구한다.	40%
Ⅱ	a의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	$a+p+q$의 값을 구한다.	20%

132 답 $\frac{50}{9}$

먼저, 꼭짓점의 좌표를 이용하여 p, q의 값을 구하자.
$y=a(x-p)^2+q$에서 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ q)$이므로
$p=2,\ q=4$ … Ⅰ
그다음, a의 값을 구하자.
$y=a(x-2)^2+4$의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로
$x=-1$, $y=0$을 대입하면
$0=a\times(-3)^2+4 \qquad \therefore a=-\frac{4}{9}$ … Ⅱ
그래서, $a+p+q$의 값을 구하자.
$\therefore a+p+q=\left(-\frac{4}{9}\right)+2+4=\frac{50}{9}$ … Ⅲ

133 답 -6

먼저, 꼭짓점의 좌표를 이용하여 p, q의 값을 구하자.
$y=a(x-p)^2+q$에서 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ q)$이므로
$p=-3,\ q=-4$ … Ⅰ
그다음, a의 값을 구하자.
$y=a(x+3)^2-4$의 그래프가 점 $(0,\ 5)$를 지나므로
$x=0$, $y=5$를 대입하면
$5=a\times3^2-4,\ 9a=9 \qquad \therefore a=1$ … Ⅱ
그래서, $a+p+q$의 값을 구하자.
$\therefore a+p+q=1+(-3)+(-4)=-6$ … Ⅲ

[134-135 채점기준표]

Ⅰ	꼭짓점의 x좌표의 범위에 맞는 a의 값의 범위를 정한다.	40%
Ⅱ	꼭짓점의 y좌표의 범위에 맞는 a의 값의 범위를 정한다.	40%
Ⅲ	정수 a의 값을 구한다.	20%

134 답 -1

먼저, 꼭짓점의 x좌표의 범위에 맞는 a의 값의 범위를 정하자.
이차함수 $y=(x+a)^2-2a-3$의 그래프의 꼭짓점이 제4사분면 위에 있으려면 꼭짓점의 x좌표인 $-a$가 0보다 커야 한다.
$-a>0 \qquad \therefore a<0$ … ㉠ … Ⅰ
그다음, 꼭짓점의 y좌표의 범위에 맞는 a의 값의 범위를 정하자.
또, 꼭짓점의 y좌표의 값은 0보다 작아야 하므로
$-2a-3<0 \qquad \therefore a>-\frac{3}{2}$ … ㉡ … Ⅱ
그래서, 정수 a의 값을 구하자.
따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 a의 값은 -1이다. … Ⅲ

135 답 1

먼저, 꼭짓점의 x좌표의 범위에 맞는 a의 값의 범위를 정하자.
이차함수 $y=(x-a)^2+a-2$의 그래프의 꼭짓점이 제4사분면 위에 있으려면 $a>0$ … ㉠ … Ⅰ
그다음, 꼭짓점의 y좌표의 범위에 맞는 a의 값의 범위를 정하자.
또, 꼭짓점이 제 4사분면 위에 있으려면
$a-2<0 \qquad \therefore a<2$ … ㉡ … Ⅱ
그래서, 정수 a의 값을 구하자.
따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 a의 값은 1이다. … Ⅲ

136 답 1

$y=2x^2-18$이 x축과 만나는 점이 $y=a(x-b)^2$의 꼭짓점이므로
$y=0$을 대입하면
$2x^2-18=0,\ 2x^2=18 \qquad \therefore x=\pm3$
$\therefore b=3\ (\because b>0)$ … Ⅰ
또한, $y=2x^2-18$의 그래프의 꼭짓점 $(0,\ -18)$이 $y=a(x-3)^2$의 그래프 위의 점이므로 대입하면
$-18=a\times(-3)^2 \qquad \therefore a=-2$ … Ⅱ
$\therefore a+b=-2+3=1$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	이차함수 $y=2x^2-18$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 이용해 b의 값을 구한다.	40%
Ⅱ	이차함수 $y=a(x-b)^2$의 그래프가 이차함수 $y=2x^2-18$의 그래프의 꼭짓점을 지남을 이용해 a의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	$a+b$의 값을 구한다.	20%

137 답 28

$y=\frac{1}{2}x^2-k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구해 보면
$\frac{1}{2}x^2-k=0,\ x^2=2k \qquad \therefore x=\pm\sqrt{2k}$
즉, 두 점 A, B 사이의 거리는 $2\sqrt{2k}$이다. … Ⅰ
이때, 이 값이 정수가 되려면 $k=2n^2$(단, n은 정수)의 형태가 되어야 하고, k가 20보다 작은 자연수이므로
$k=2\times1^2=2,\ k=2\times2^2=8,\ k=2\times3^2=18$ … Ⅱ
따라서 모든 k의 값의 합은 $2+8+18=28$이다. … Ⅲ

H

[채점기준표]

Ⅰ	두 점 A, B 사이의 거리를 k에 대한 식으로 나타낸다.	30%
Ⅱ	$\overline{AB}$의 길이가 정수가 되도록 하는 자연수 k의 값을 찾는다.	50%
Ⅲ	모든 k의 값의 합을 구한다.	20%

138 답 2

이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $2k$만큼 평행이동하면 $y=(x-2k)^2$이다.

x축과 만나는 점의 x좌표는 $0=(x-2k)^2$에서 $x=2k$이므로

A$(2k, 0)$ … Ⅰ

y축과 만나는 점의 y좌표는 $y=(2k)^2=4k^2$이므로

B$(0, 4k^2)$ … Ⅱ

이때, $\triangle OAB=\frac{1}{2}\times 2k\times 4k^2=4k^3$에서 $4k^3=32$이므로

$k^3=8=2^3$ $\quad\therefore k=2$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	점 A의 좌표를 구한다.	30%
Ⅱ	점 B의 좌표를 구한다.	30%
Ⅲ	$\triangle$OAB의 넓이를 이용하여 k의 값을 구한다.	40%

139 답 -18, -4

점 $(4, -2)$가 $y=(x-p)^2+q$의 그래프 위의 점이므로 좌표를 대입하면

$-2=(4-p)^2+q$ … ㉠

꼭짓점 (p, q)가 직선 $y=-3x$ 위에 있으므로

$q=-3p$ … ㉡ … Ⅰ

㉡을 ㉠에 대입하면 $(4-p)^2-3p=-2$

$p^2-11p+18=0$, $(p-2)(p-9)=0$

$\therefore p=2$ 또는 $p=9$

(i) $p=2$일 때, $q=-6$ ($\because$ ㉡)

(ii) $p=9$일 때, $q=-27$ ($\because$ ㉡) … Ⅱ

$\therefore p+q=2+(-6)=-4$ 또는 $p+q=9+(-27)=-18$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 조건을 이용해 p, q에 대한 두 식을 세운다.	30%
Ⅱ	두 식을 연립하여 p, q의 값을 구한다.	50%
Ⅲ	$p+q$의 값을 모두 구한다.	20%

140 답 -3

$y=(x-m)^2-m^2-4m+3$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 $2m$만큼 평행이동하면

$y=(x-2m)^2-m^2-2m+3$ … ㉠ … Ⅰ

㉠이 x축과 한 점에서 만나기 위해서는 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 한다. … Ⅱ

$-m^2-2m+3=0$, $m^2+2m-3=0$

$(m+3)(m-1)=0$

$\therefore m=-3$ 또는 $m=1$

따라서 음수 m의 값은 $m=-3$이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	평행이동한 그래프의 식을 구한다.	30%
Ⅱ	그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 조건을 찾는다.	40%
Ⅲ	음수 m의 값을 구한다.	30%

141 답 제 3사분면

주어진 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

꼭짓점 (p, q)가 제 4사분면 위에 있으므로 $p>0$, $q<0$ … Ⅰ

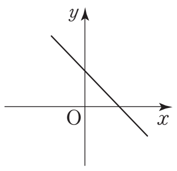
일차함수 $y=\frac{q}{a}x+\frac{a}{p}$의 그래프에서

(i) a와 q의 부호가 서로 다르므로

(기울기)$=\frac{q}{a}<0$

(ii) a와 p의 부호가 서로 같으므로

(y절편)$=\frac{a}{p}>0$ … Ⅱ



따라서 일차함수 $y=\frac{q}{a}x+\frac{a}{p}$의 그래프가 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	a, p, q의 부호를 정한다.	40%
Ⅱ	일차함수의 그래프의 기울기와 y절편의 부호를 정한다.	30%
Ⅲ	일차함수의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구한다.	30%

최고난도 만점 문제

p. 168

142 답 ①

1st y가 x에 대한 이차함수가 되려면 y^2의 항이 없어야 하므로 y^2의 계수가 0이 되게 하자.

$(a^2-4)x^2+3x+(a^2+a-6)y^2-2y=0$에서 y가 x에 대한 이차함수이니까 y^2의 계수 $a^2+a-6=0$이어야 해.

$a^2+a-6=0$, $(a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=2$ … ㉠

2nd x^2의 계수가 0이 되면 안 되는 걸 이용해서 a의 값을 구해 보자.

x^2의 계수가 0이 되면 이차함수가 아니기 때문에 $a^2-4\neq0$이어야 하지.

$a^2-4\neq0$, $(a+2)(a-2)\neq0$

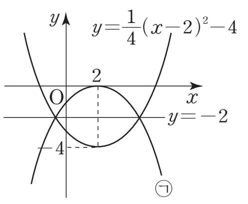
$\therefore a\neq-2$이고 $a\neq2$ … ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의해서 $a=-3$이야.

143 답 $(2, 0)$

1st 이차함수의 그래프를 그리고 직선 $y=-2$에 대하여 대칭이동시켜 보자.

$y=\frac{1}{4}(x-2)^2-4$의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점이 $(2, -4)$이므로 그림과 같아.



$y=\frac{1}{4}(x-2)^2-4$의 그래프를 직선 $y=-2$에 대칭이동시킨 그래프를 ㉠이라 하자.

㉠의 꼭짓점의 좌표를 (a, b)라 하면 x좌표는 처음 그래프와 같아야 하므로 $a=2$

y좌표 b와 처음 그래프의 꼭짓점의 y좌표 -4의 중점이 -2가 되어야 하므로

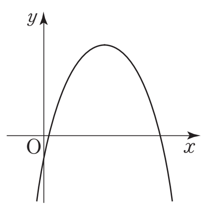
$\frac{b+(-4)}{2}=-2 \qquad \therefore b=0$

따라서 ㉠의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0)$이야.

144 답 ③

1st 제 1, 3, 4사분면만을 지나는 그래프를 그리고 a, p, q의 부호를 구해 보자.

제 1, 3, 4사분면만 지나는 이차함수의 그래프는 그림과 같아.



$y=-a(x+p)^2+q$에서 위로 볼록하므로

$-a<0 \qquad \therefore a>0$

또, 꼭짓점 $(-p,\ q)$가 제 1사분면 위의 점이니까

$-p>0,\ q>0 \qquad \therefore p<0,\ q>0$

2nd 옳은 것은 직접 밝혀 보자.

① $a>0$, $p<0$에서 $a+p>0$인지 $a+p<0$인지는 알 수 없어. ← NO!

② $p<0$, $q>0$이니까 $pq<0$ ← NO!

③ $a>0$이고, $p<0$에서 $p^2>0$이므로 $ap^2>0$이야.
  즉, $q>0$이니까 $ap^2+q>0$ ← OK!

④ $a>0$, $p<0$, $q>0$이니까 $apq<0$ ← NO!

⑤ $-p>0$, $q>0$이니까 $q-p=q+(-p)>0$ ← NO!

145 답 4

1st 점 A의 x좌표를 a라 놓고 세 점 A, B, D의 좌표를 a에 대하여 나타내봐.

점 A의 x좌표를 $a(a>0)$라 하면 점 A는 이차함수 $y=2x^2$의 그래프 위의 점이므로 $A(a,\ 2a^2)$이야.

또, 점 D도 이차함수 $y=2x^2$의 그래프 위의 점이고 $\overline{AD}$가 x축에 평행하므로 $D(-a,\ 2a^2)$이지.

그리고 $\overline{AB}$는 y축에 평행하니까 점 B의 x좌표는 a이고, 점 B가 이차함수 $y=-x^2+5$의 그래프 위의 점이므로 $B(a,\ -a^2+5)$야.

2nd □ABCD가 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$야.

$\overline{AB}=(-a^2+5)-2a^2=-3a^2+5$이고, $\overline{AD}=2a$지?

이때, □ABCD가 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$에서

$-3a^2+5=2a,\ 3a^2+2a-5=0$

$(3a+5)(a-1)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

3rd □ABCD의 넓이를 구하자.

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 $\overline{AD}=2a=2\times1=2$이므로 □ABCD의 넓이는 $2\times2=4$가 돼.

146 답 ⑤

1st $y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$의 그래프와 직선 $y=2x-8$이 만나는 점의 좌표를 구해 보자.

두 이차함수 $y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$, $y=x^2+ax+b$의 그래프가 만나는 두 점이 직선 $y=2x-8$ 위에 있으니까 $y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$의 그래프와 직선 $y=2x-8$이 만나는 두 점이 $y=x^2+ax+b$의 그래프 위에 있게 돼.

우선 $y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$의 그래프와 직선 $y=2x-8$이 만나는 점의 좌표를 구해 보자.

$$\begin{cases} y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4} & \cdots ㉠ \\ y=2x-8 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입해 보면

$2x-8=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$

$2x-8=-x^2+x-2$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입해 보면

$x=-3$일 때 $y=-14$이고, $x=2$일 때 $y=-4$

따라서 두 점 $(-3,\ -14)$, $(2,\ -4)$가 만나는 점이야. ⋯ ㉣

2nd 구한 두 점의 좌푯값을 $y=x^2+ax+b$에 대입해서 a, b의 값을 구해 보자.

$y=x^2+ax+b$의 그래프가 ㉣의 두 점을 지나니까 대입해서 a, b에 대한 두 식을 구할 수 있지?

$-14=9-3a+b$

$-4=4+2a+b$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-14$

$\therefore a+b=3+(-14)=-11$

147 답 −4

1st 이차함수의 식을 구해 보자.

그래프에서 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -1)$이므로 이차항의 계수를 a라 하면 이차함수의 식은 $y=a(x-1)^2-1$

이 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나니까

$0=a-1 \qquad \therefore a=1$

$\therefore y=(x-1)^2-1$

2nd 이차함수의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표가 α, β임을 이용하여 $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구해 보자.

$y=(x-1)^2-1$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표를 구하기 위해 식을 세우면

$(x-1)^2-1=2,\ x^2-2x-2=0$

즉, 이차방정식 $x^2-2x-2=0$이 두 근이 α, β야.

이때, 두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$에서 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이므로

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-2$야.

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{4+4}{-2}=-4$$

[다른 풀이]

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 해를 근의 공식을 이용하여 구하면

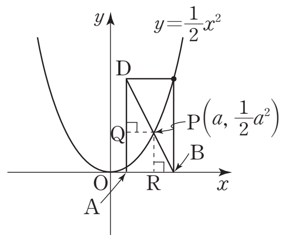
$x=1\pm\sqrt{1+2}=1\pm\sqrt{3}$

즉, $\alpha=1-\sqrt{3}$, $\beta=1+\sqrt{3}$이므로

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}+\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{-2}+\frac{(1-\sqrt{3})^2}{-2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}+\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}+(-2+\sqrt{3})=-4$$

148 답 $2\sqrt{3}-2$

1st 점 P에서 $\overline{\text{AD}}$, $\overline{\text{AB}}$에 수선의 발을 내린 후 닮음을 이용해.



점 P의 y좌표를 b라 하면 점 P$(a,\ b)$는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점

이니까 $b=\frac{1}{2}a^2$

즉, P$\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$이야.

점 P에서 $\overline{\text{AD}}$, $\overline{\text{AB}}$에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면

$\triangle$DQP$\backsim\triangle$PRB야.

조건에서 $\overline{\text{PD}}:\overline{\text{PB}}=2:1$이니까 $\overline{\text{DQ}}:\overline{\text{PR}}=2:1$에서

$\overline{\text{DQ}}=2\overline{\text{PR}}=2\times\frac{1}{2}a^2=a^2$

$\therefore$ (점 D의 y좌표)$=\frac{1}{2}a^2+a^2=\frac{3}{2}a^2$

점 C의 y좌표도 $\frac{3}{2}a^2$이고 점 C가 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점이므로

x좌표를 구하면

$\frac{3}{2}a^2=\frac{1}{2}x^2$, $x^2=3a^2$

$\therefore x=\sqrt{3}a$ ($\because a>0$)

즉, 점 C의 좌표는 $\left(\sqrt{3}a,\ \frac{3}{2}a^2\right)$, 점 B의 좌표는 $(\sqrt{3}a,\ 0)$이야.

또, $\overline{\text{BR}}=\sqrt{3}a-a$이고 $\overline{\text{AR}}=2\overline{\text{BR}}$이니까

$\overline{\text{AR}}=2(\sqrt{3}a-a)=(2\sqrt{3}-2)a$

이때, 점 A의 x좌표는 $a-(2\sqrt{3}-2)a=(3-2\sqrt{3})a$이므로

점 A의 좌표는 $((3-2\sqrt{3})a,\ 0)$이고,

점 D의 좌표는 $\left((3-2\sqrt{3})a,\ \frac{3}{2}a^2\right)$이야.

2nd □ABCD가 정사각형이면 $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AD}}$이지?

□ABCD가 정사각형이니까 $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AD}}$에서

$\sqrt{3}a-(3-2\sqrt{3})a=\frac{3}{2}a^2$

$(3\sqrt{3}-3)a=\frac{3}{2}a^2$ ⋯ ㉠

그런데 $a>0$에서 $a\neq0$이므로 ㉠의 양변을 a로 나누면

$\frac{3}{2}a=3\sqrt{3}-3$

$\therefore a=\frac{2}{3}\times(3\sqrt{3}-3)=2\sqrt{3}-2$

I 이차함수와 그래프(2)

개념 체크 001~015 정답은 p. 7에 있습니다.

유형 다지기 학교시험+학력평가

문제편 p. 172

016 답 ③

$y=-2x^2+8x-5$

$=-2(x^2-4x)-5$ ← x^2의 계수로 이차항과 일차항을 묶어. (가)

$=-2(x^2-4x+4-4)-5$ ← $\left\{\frac{(x\text{의 계수})}{2}\right\}^2$을 더하고 빼.

$=-2(x-2)^2+8-5$ ← 완전제곱식의 꼴로 바꾸어야 해. (나) (다)

$=-2(x-2)^2+3$ ← 상수항을 계산하면 되는 거야. (라) (마)

017 답 18

$y=-2x^2+12x-1$

$=-2(x^2-6x)-1$

$=-2(x^2-6x+9-9)-1$

$=-2(x-3)^2+18-1$

$=-2(x-3)^2+17$

이것이 $y=a(x-p)^2+q$와 같으므로

$a=-2$, $p=3$, $q=17$

$\therefore a+p+q=-2+3+17=18$

018 답 1

$y=3x^2+6x+1$

$=3(x^2+2x)+1$

$=3(x^2+2x+1-1)+1$

$=3(x+1)^2-3+1$

$=3(x+1)^2-2$

이것이 $y=3(x-p)^2+q$와 같으므로

$p=-1$, $q=-2$

$\therefore p-q=-1-(-2)=1$

019 답 1

이차함수 $y=x^2-ax-1$의 그래프가 점 $(1,\ -4)$를 지나니까

$-4=1-a-1$ $\quad\therefore a=4$

$y=x^2-4x-1$을 완전제곱식의 꼴로 고쳐 보자.

$y=x^2-4x-1$

$=(x^2-4x+4-4)-1$

$=(x-2)^2-5$

이것이 $y=(x-b)^2+c$와 같으므로 $b=2$, $c=-5$

$\therefore a+b+c=4+2+(-5)=1$

020 답 ④

$y=x^2-4x+k$에 $x=3$, $y=-1$을 대입하면

$-1=9-12+k$ $\quad\therefore k=2$

즉, $y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$이므로 구하는 꼭짓점의 좌표는

$(2,\ -2)$야.

021 답 -5

$y=-2x^2+px-3=-2\left(x^2-\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{16}-\frac{p^2}{16}\right)-3$

$=-2\left(x-\frac{p}{4}\right)^2+\frac{p^2}{8}-3$

꼭짓점의 좌표가 $(-1, q)$이므로

$\frac{p}{4}=-1$, $\frac{p^2}{8}-3=q$

따라서 $p=-4$, $q=\frac{16}{8}-3=-1$이므로

$p+q=-4+(-1)=-5$

[다른 풀이]

x^2의 계수가 -2이고 꼭짓점의 좌표가 $(-1, q)$인 이차함수는

$y=-2(x+1)^2+q=-2(x^2+2x+1)+q$

$=-2x^2-4x-2+q$

이것이 $y=-2x^2+px-3$과 같으므로

$p=-4$, $-2+q=-3$에서 $p=-4$, $q=-1$

$\therefore p+q=-4+(-1)=-5$

022 답 ④

① $y=-x^2+2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 2)$

⇨ y축 위의 점

② $y=3(x+1)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 0)$

⇨ x축 위의 점

③ $y=-x^2-2x=-(x^2+2x)$

$=-(x^2+2x+1-1)=-(x+1)^2+1$

그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 1)$ ⇨ 제 2 사분면 위의 점

④ $y=x^2-4x-3=(x^2-4x+4-4)-3$

$=(x-2)^2-7$

그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -7)$ ⇨ 제 4사분면 위의 점

⑤ $y=-x^2+6x+1=-(x^2-6x+9-9)+1$

$=-(x-3)^2+10$

그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, 10)$ ⇨ 제 1사분면 위의 점

따라서 꼭짓점이 제 4사분면 위에 있는 것은 ④야.

023 답 ㄷ, ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㄹ

ㄱ. $y=5x^2-1$의 그래프의 축의 방정식은 $x=0$

ㄴ. $y=-3(x-1)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$

ㄷ. $y=\frac{1}{3}(x+2)^2+1$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-2$

ㄹ. $y=-x^2+5x-2$

$=-\left(x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right)-2$

$=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{17}{4}$

즉, 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{5}{2}$

ㅁ. $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-4$

$=-\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)-4$

$=-\frac{1}{2}(x-2)^2-2$

즉, 그래프의 축의 방정식은 $x=2$

따라서 축이 가장 왼쪽에 있는 것부터 나열하면

ㄷ, ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㄹ이야.

024 답 ②

$y=x^2+ax+1=\left\{x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}+1$

$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+1$

축의 방정식은 $x=-\frac{a}{2}$이므로

$-\frac{a}{2}=-1$ $\quad\therefore a=2$

025 답 ④

$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2, 1)$이야.

$y=-x^2-2px+q=-(x^2+2px)+q$

$=-(x^2+2px+p^2-p^2)+q$

$=-(x+p)^2+p^2+q$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-p, p^2+q)$야.

그런데 두 꼭짓점이 일치하므로

$-p=2$, $p^2+q=1$에서 $p=-2$, $q=1-(-2)^2=-3$

$\therefore pq=(-2)\times(-3)=6$

026 답 2

주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구해 보면

$y=x^2+4kx+4k^2+2k-3$

$=(x^2+4kx+4k^2)+2k-3$

$=(x+2k)^2+2k-3$

이 이차함수의 그래프의 꼭짓점 $(-2k, 2k-3)$이 제 2사분면 위의 점이므로 x좌표는 음수, y좌표는 양수가 되어야 해.

즉, $-2k<0$이고 $2k-3>0$에서 $k>0$이고 $k>\frac{3}{2}$이야.

따라서 조건을 모두 만족시키는 가장 작은 자연수 k의 값은 2야.

027 답 ③

이차함수 $y=x^2-4x+k$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구해 보면

$y=x^2-4x+k=(x^2-4x+4-4)+k$

$=(x-2)^2-4+k$

즉, 이 이차함수의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -4+k)$야.

이 꼭짓점이 직선 $2x+3y-1=0$ 위에 있으니까 꼭짓점의 좌표를 대입하면

$4+3(-4+k)-1=0$, $4-12+3k-1=0$

$3k-9=0$ $\quad\therefore k=3$

028 답 ③

일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 두 점 $(-2, 0)$, $(0, 2)$를 지나니까 두 점의 좌표를 대입해 보면

$\begin{cases} 0=-2a+b \\ 2=b \end{cases}$ $\quad\therefore a=1$, $b=2$

즉, $y=ax^2+bx-1=x^2+2x-1$이지?

이제 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구해 보자.

$y=x^2+2x-1=(x^2+2x+1-1)-1$

$=(x+1)^2-2$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -2)$이고, x좌표와 y좌표가 모두 음수이므로 제 3사분면 위의 점이야.

029 답 -4

이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x-4$를 완전제곱식의 꼴로 고치면

$y=-\frac{1}{2}x^2-2x-4=-\frac{1}{2}(x^2+4x+4-4)-4$

$=-\frac{1}{2}(x+2)^2-2$

즉, 이차함수 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-2$의 그래프는 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 거야.

따라서 $a=-2$, $b=-2$이므로

$a+b=-2+(-2)=-4$

030 답 $y=-x^2-4x-3$

그림을 보면 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 걸 알 수 있지?

$\therefore y=-(x+2)^2+1=-x^2-4x-3$

031 답 ②

어떤 이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동해서 $y=2(x-3)^2+5$의 그래프가 되었다고 하므로 처음 이차함수의 그래프는 $y=2(x-3)^2+5$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 거야.

즉, $y=2(x-3+1)^2+5-2$에서 $y=2(x-2)^2+3$이므로

이 식을 전개하면

$y=2(x^2-4x+4)+3=2x^2-8x+11$

032 답 -3

먼저 이차함수 $y=x^2-6x+2$를 완전제곱식의 꼴로 고친 뒤 평행이동시키자.

$y=x^2-6x+2=(x^2-6x+9-9)+2=(x-3)^2-7$

이것을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면

$y=(x-3-1)^2-7=(x-4)^2-7$

이 함수의 그래프가 점 $(2, k)$를 지나니까 좌표를 대입하면

$k=(2-4)^2-7=-3$

033 답 -2

이차함수 $y=a(x-2)^2-3$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면

$y=a(x-2+4)^2-3+2=a(x+2)^2-1=ax^2+4ax+4a-1$

이것이 $y=-3x^2+px+q$와 같으므로

$a=-3$, $4a=p$, $4a-1=q$

따라서 $a=-3$, $p=-12$, $q=-13$이므로

$a+p-q=-3+(-12)-(-13)=-2$

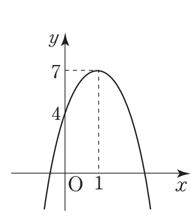
034 답 ②

이차함수 $y=-3x^2+6x+4$를 완전제곱식의 꼴로 고쳐 보면

$y=-3x^2+6x+4=-3(x^2-2x)+4$

$=-3(x^2-2x+1-1)+4$

$=-3(x-1)^2+7$



이 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식이 $x=1$이므로 $x<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가해.

035 답 $x>6$

$y=\frac{1}{3}x^2-4x+11=\frac{1}{3}(x^2-12x+36-36)+11$

$=\frac{1}{3}(x-6)^2-1$

따라서 이 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 x의 값의 범위는 $x>6$이야.

036 답 $x<-\frac{1}{2}$

이차함수 $y=2x^2+mx-5$의 그래프가 점 $(2, 7)$을 지나니까 좌표를 대입하면

$7=8+2m-5 \qquad \therefore m=2$

$\therefore y=2x^2+2x-5$

이 식을 완전제곱식의 꼴로 고쳐 보면

$y=2x^2+2x-5=2\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-5$

$=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{2}$

따라서 이 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 x의 값의 범위는 $x<-\frac{1}{2}$이야.

037 답 ⑤

이차함수 $y=-2x^2-8mx-4m^2+2$를 완전제곱식의 꼴로 고치면

$y=-2x^2-8mx-4m^2+2=-2(x^2+4mx)-4m^2+2$

$=-2(x^2+4mx+4m^2-4m^2)-4m^2+2$

$=-2(x+2m)^2+4m^2+2$ ⋯ ㉠

이때, $x<-2$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고 $x>-2$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다는 것은 이 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$라는 거야.

㉠에서 축의 방정식이 $x=-2m$이므로

$-2m=-2 \qquad \therefore m=1$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $y=-2(x+2)^2+6$

따라서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 6)$이므로 꼭짓점의 y좌표는 6이야.

038 답 ⑤

이차함수 $y=-2x^2-6x+8$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표 p, q는 $y=0$일 때의 x의 값이야.

즉, 이차방정식 $-2x^2-6x+8=0$의 두 근이 p, q가 되는 거야.

이차방정식을 풀어 보면

$-2(x^2+3x-4)=0$, $-2(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 $p=-4$, $q=1$ 또는 $p=1$, $q=-4$야.

또, y축과 만나는 점의 y좌표 k는 $x=0$일 때의 y의 값이니까 $y=8$에서 $k=8$이야.

$\therefore p+q+k=1+(-4)+8=5$

039 답 ④

x^2의 계수가 1인 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 3)$이면 $y=(x+1)^2+3=x^2+2x+1+3=x^2+2x+4$

이것과 $y=x^2+bx+c$가 같으므로 $b=2$, $c=4$

따라서 $y=x^2+2x+4$에서 $x=0$일 때 $y=4$이므로 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 4)$야.

중등자이(중3상) 정답G~I-ok.indd 116 2019-08-06 오후 5:10:05

040 답 $k<-1$

이차함수 $y=x^2+2x+k+2$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+2x+k+2=0$이 서로 다른 두 근을 가지면 돼.

$2^2-4(k+2)>0$

$4-4k-8>0$

$-4k>4$

$\therefore k<-1$

041 답 ④

이차함수 $y=-x^2-x+20$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $y=0$을 대입해서 구하면 돼.

$-x^2-x+20=0$

$x^2+x-20=0$

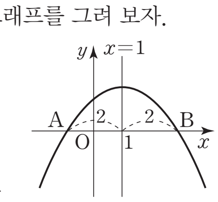
$(x+5)(x-4)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=4$

따라서 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-5,\ 0)$, $(4,\ 0)$이므로 두 점 사이의 거리는 $4-(-5)=9$야.

042 답 3

이차함수 $y=-x^2+2x+a$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다고 하므로 꼭짓점을 구해서 그래프를 그려 보자.



$y=-x^2+2x+a$

$\quad=-(x^2-2x)+a$

$\quad=-(x^2-2x+1-1)+a$

$\quad=-(x-1)^2+1+a$ ⋯ ㉠

그림에서 보면 두 점 A, B는 축 $x=1$로부터 같은 거리에 있다는 걸 알 수 있어. $\overline{AB}=4$라고 하니까 점 A는 $x=1$로부터 좌측으로 2만큼 떨어져 있겠지.

즉, 점 A의 x좌표는 -1이 되는 거야.

따라서 ㉠의 그래프가 점 $A(-1,\ 0)$을 지나므로 점A의 좌표를 ㉠에 대입하면

$0=-4+1+a \qquad \therefore a=3$

오답피하기

> 문제에서 이차함수의 그래프 위에 있는 두 점 A, B 사이의 거리가 4라고 하는데 이것을 어떻게 활용해야 할지 감이 잘 안 오지? 머릿속으로 고민만 하고 있지 말고 그래프부터 그려 봐. 그래프를 그리면 4라는 거리를 이용해서 두 점 A와 B의 x좌표를 알 수 있어. 이처럼 말로 쓰였을 때는 이해하기 힘들던 게 그래프로 그리면 이해되는 것들이 참 많아. 그래서 항상 그래프를 그리는 습관을 들여야 해. 평소에 그래프를 싫어하던 친구들이 있다면 앞으로는 그래프와 좀 더 친해질 수 있도록 그래프 그리는 연습을 해 보는게 어떨까?

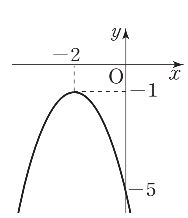
043 답 ②

$y=-x^2-4x-5=-(x^2+4x)-5$

$\quad=-(x^2+4x+4-4)-5$

$\quad=-(x+2)^2-1$

즉, 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -1)$이고 이차항의 계수가 음수이니까 위로 볼록한 그래프야.



044 답 ③

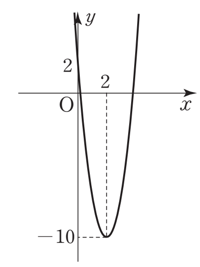
$y=3x^2-12x+2=3(x^2-4x)+2$

$\quad=3(x^2-4x+4-4)+2$

$\quad=3(x-2)^2-10$

주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -10)$이고 이차항의 계수가 양수이니까 아래로 볼록하고 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 2)$가 되지.

따라서 그림과 같이 그래프는 제 3사분면을 지나지 않아.



045 답 제 1, 3, 4사분면

이차함수 $y=ax^2-6ax-13$의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지나니까 점 $(2,\ 3)$의 좌표를 대입하면

$3=4a-12a-13$, $-8a=16$

$\therefore a=-2$

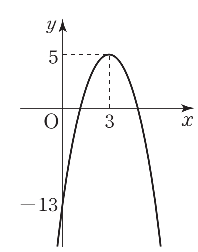
이차함수 $y=-2x^2+12x-13$의 그래프의 꼭짓점을 구하여 그래프를 그려 보자.

$y=-2x^2+12x-13$

$\quad=-2(x^2-6x+9-9)-13$

$\quad=-2(x-3)^2+5$

즉, 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 5)$, y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ -13)$이고 위로 볼록한 포물선이야.



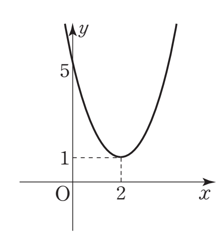
따라서 이 그래프가 지나는 사분면은 제 1, 3, 4사분면이야.

046 답 ③

$y=x^2-4x+5=(x^2-4x+4-4)+5$

$\quad=(x-2)^2+1$

이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 1)$이고 아래로 볼록한 포물선이야.



ㄱ. 축의 방정식은 $x=2$이지. (참)

ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 1)$ (참)

ㄷ. $x>2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가해. (거짓)

ㄹ. $y=(x-2)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=x^2$의 그래프와 겹쳐지지? (참)

ㅁ. $y=-x^2+4x-5$는 $y=x^2-4x+5$에서 y 대신 $-y$를 대입한 식이니까 x축에 대하여 대칭이야. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ로 3개야.

047 답 ④

① 이차항의 계수가 같으면 평행이동으로 겹칠 수 있어. ← OK!

② $a<0$이면 위로 볼록하고, $a>0$이면 아래로 볼록해. ← OK!

③ 이차함수 $y=-ax^2-bx-c$의 그래프는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 그래프야. ← OK!

④ $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c$이므로 축의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{2a}$야. ← NO!

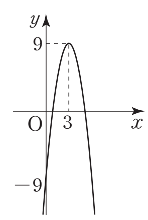
⑤ y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ c)$야. ← OK!

048 답 ②, ④

① 이차항의 계수의 절댓값이 $|-2|>|-1|$이므로 $y=-2x^2+12x-9$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프보다 폭이 좁아. ← NO!

② $y=-2x^2+12x-9=-2(x^2-6x+9-9)-9$
$=-2(x-3)^2+9$
이므로 축의 방정식은 $x=3$이야. ← OK!

③ $y=-2(x-3)^2+9$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, 9)$야. ← NO!



④ $x>3$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소해. ← OK!

⑤ 그림에서 주어진 이차함수의 그래프는 제 2사분면을 지나지 않아. ← NO!

따라서 옳은 것은 ②, ④야.

049 답 8

$y=-x^2+2x+3=-(x^2-2x)+3$
$=-(x^2-2x+1-1)+3$
$=-(x-1)^2+4$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $(1, 4)$야.

두 점 A, B의 x좌표를 구하려면 $y=-x^2+2x+3$에서 $y=0$일 때의 x의 값을 구하면 돼.

$-x^2+2x+3=0$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$이므로 $\overline{AB}=4$이고 $\triangle ABC$의 높이는 점 C의 y좌표인 4가 되지.

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

050 답 10

이차함수 $y=x^2-6x+5$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 구하기 위해 $y=0$을 대입하면

$x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

즉, $A(1, 0)$, $B(5, 0)$이고 y축과 만나는 점 C의 좌표는 $(0, 5)$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times5=10$

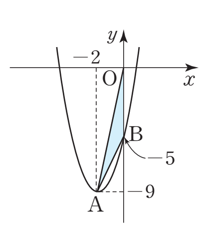
051 답 5

이차함수 $y=x^2+4x-5$의 그래프에서 점 A는 꼭짓점이니까 구해 보면

$y=x^2+4x-5=(x^2+4x+4-4)-5$
$=(x+2)^2-9$ ⋯ ㉠

즉, 점 A의 좌표는 $(-2, -9)$가 되지.

또, ㉠에 $x=0$을 대입하면 $y=-5$이므로 $B(0, -5)$야.



따라서 $\triangle ABO$에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}=5$로 하면 높이는 꼭짓점 A의 x좌표의 절댓값이니까 2가 되는 거야.

$\therefore \triangle ABO=\frac{1}{2}\times5\times2=5$

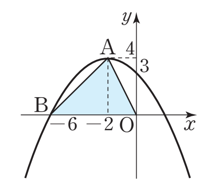
052 답 12

이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2+bx+3$의 그래프가 점 $B(-6, 0)$을 지나므로

$0=-9-6b+3$, $6b=-6$ $\therefore b=-1$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x^2-x+3$

점 A는 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로 완전제곱식의 꼴로 바꾸어 보자.



$y=-\frac{1}{4}x^2-x+3=-\frac{1}{4}(x^2+4x)+3$
$=-\frac{1}{4}(x^2+4x+4-4)+3$
$=-\frac{1}{4}(x+2)^2+4$

즉, 점 A의 좌표는 $(-2, 4)$가 되는 걸 알 수 있어.

따라서 $\triangle ABO$의 밑변의 길이는 $\overline{BO}=6$이고 높이는 점 A의 y좌표니까 4가 돼.

$\therefore \triangle ABO=\frac{1}{2}\times6\times4=12$

053 답 $\frac{9}{8}$

두 점 A, B는 이차함수 $y=-2x^2+4x+16$의 그래프와 x축과의 교점이므로 $y=-2x^2+4x+16$에 $y=0$을 대입하면

$-2x^2+4x+16=0$, $x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

즉, $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$이야.

또, 점 C는 이차함수의 그래프와 y축과의 교점이므로 $C(0, 16)$이야.

한편,

$y=-2x^2+4x+16=-2(x^2-2x+1-1)+16$
$=-2(x-1)^2+18$

이므로 꼭짓점 D의 좌표는 $(1, 18)$이야.

따라서 $S_1=\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times16=48$,

$S_2=\triangle ABD=\frac{1}{2}\times6\times18=54$이므로

$\frac{S_2}{S_1}=\frac{54}{48}=\frac{9}{8}$

[다른 풀이]

$\triangle ABC$와 $\triangle ABD$의 밑변의 길이가 같지?

즉, $\frac{S_2}{S_1}$의 값은 $\triangle ABD$의 높이를 $\triangle ABC$의 높이로 나눈 값과 같아.

따라서 $\triangle ABC$의 높이는 점 C의 y좌표인 16이고, $\triangle ABD$의 높이는 점 D의 y좌표인 18이므로 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$야.

054 답 (6, 6)

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-2x$의 그래프에서 먼저 두 점 A, P의 좌표를 구해 보자.

$y=\frac{1}{2}x^2-2x=\frac{1}{2}(x^2-4x)$
$=\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$

즉, 꼭짓점 P의 좌표는 $(2, -2)$야.

점 A는 이 그래프가 x축과 만나는 점이니까

$0=\frac{1}{2}x^2-2x$, $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=4$

즉, 점 A의 좌표는 $(4,\ 0)$이지.
조건에서 $\triangle$OPA : $\triangle$OAB$=1:3$, 즉 $\triangle$OAB$=3\triangle$OPA이고
$\triangle\text{OPA}=\frac{1}{2}\times4\times2=4$이므로 $\triangle\text{OAB}=12$
$\triangle$OAB의 밑변의 길이를 $\overline{\text{OA}}=4$라 하면 높이는 점 B의 y좌표이므로
$\triangle\text{OAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\text{OA}}\times(\text{점 B의 }y\text{좌표})$
$=\frac{1}{2}\times4\times(\text{점 B의 }y\text{좌표})=12$
$\therefore$ (점 B의 y좌표)$=6$
이때, 점 B의 좌표를 $(a,\ 6)$으로 놓으면, 이 점을 이차함수의 그래프가 지나므로
$6=\frac{1}{2}a^2-2a,\ a^2-4a-12=0$
$(a+2)(a-6)=0$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=6$
따라서 점 B는 제 1사분면 위의 점이니까 B$(6,\ 6)$이야.

055 답 64

$y=x^2+6x+10=(x^2+6x+9-9)+10$
$=(x+3)^2+1$
이므로 꼭짓점 A의 좌표는 $(-3,\ 1)$이야.
이 이차함수의 그래프에서 $y=17$일 때의 x의 값을 구하기 위해 $y=17$을 대입하면
$17=x^2+6x+10,\ x^2+6x-7=0$
$(x+7)(x-1)=0$
$\therefore x=-7$ 또는 $x=1$
즉, 점 P의 좌표는 $(-7,\ 17)$, 점 Q의 좌표는 $(1,\ 17)$이지.
따라서 $\triangle$AQP의 밑변을 $\overline{\text{PQ}}$라 할 때, $\overline{\text{PQ}}=1-(-7)=8$이고
높이는 $17-1=16$이므로
$\triangle\text{AQP}=\frac{1}{2}\times8\times16=64$

056 답 $\frac{81}{2}$

두 이차함수 $y=x^2+a$와 $y=-\frac{1}{2}x^2+b$의 그래프가 점 D$(3,\ 0)$을 각각 지나므로 $9+a=0,\ -\frac{9}{2}+b=0$
$\therefore a=-9,\ b=\frac{9}{2}$
따라서 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점 A, C의 좌표는 각각
A$\left(0,\ \frac{9}{2}\right)$, C$(0,\ -9)$이므로
$\square\text{ABCD}=\triangle\text{ABD}+\triangle\text{BCD}$
$=\frac{1}{2}\times6\times\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\times6\times9$
$=\frac{81}{2}$

057 답 ②, ⑤

① 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
② 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$에서 $b>0$
③ 그래프와 y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$
④ $a<0$이고 $-b<0,\ -c<0$이므로
$a-b-c=a+(-b)+(-c)<0$
⑤ $a<0,\ b>0,\ c>0$이므로 $abc<0$

058 답 $a>0,\ b>0,\ c<0$

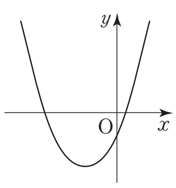
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
그래프의 축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$에서 $b>0$
그래프와 y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 있으므로 $c<0$

059 답 ④

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로 a와 b의 부호는 다르지?
$\therefore b<0$
y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 있으므로 $c<0$
① $ab<0$ ② $ac<0$ ③ $\frac{c}{b}>0$
④ $x=1$일 때, $y=a+b+c$이고 $y<0$이므로
$a+b+c<0$
⑤ $x=-2$일 때, $y=4a-2b+c$이고 $y>0$이므로
$4a-2b+c>0$ ⋯ ㉠
이때, ㉠의 양변을 4로 나누면 $a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c>0$
따라서 옳은 것은 ④야.

060 답 제 3사분면

$a<0,\ b>0,\ c<0$이므로 $-a>0,\ b>0,\ -ac<0$이지?
즉, $y=-ax^2+bx-ac$의 그래프에서
(i) $-a>0$이므로 아래로 볼록
(ii) $-a>0,\ b>0$에서 $-ab>0$이므로 축은 y축의 왼쪽에 위치
(iii) $-ac<0$이므로 y축과의 교점은 x축보다 아래쪽에 위치



(i)~(iii)에서 $y=-ax^2+bx-ac$의 그래프는 그림과 같으므로 꼭짓점은 제3사분면 위에 있어.

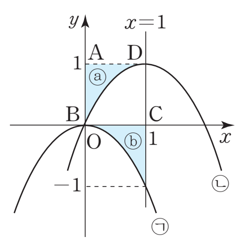
061 답 ②

주어진 일차함수의 그래프에서
(기울기)$=a<0$
(y절편)$=b<0$
즉, 이차함수 $y=x^2+ax+ab$에서 x^2의 계수가 양수이므로 아래로 볼록하고, x^2의 계수가 양수이고, $a<0$이므로 그래프의 축은 y축의 오른쪽에 있으며 $a<0,\ b<0$에서 $ab>0$이므로 그래프와 y축과의 교점은 x축의 위쪽에 있어.
따라서 그래프로 알맞은 것은 ②야.

062 답 ③

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서
위로 볼록하므로 $a<0$
축이 y축의 왼쪽에 있으므로 a와 b는 같은 부호야.
$\therefore b<0$
y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$
이때, $y=-bx^2-cx+a$의 그래프에서
(i) $-b>0$이므로 아래로 볼록
(ii) $-b>0,\ -c<0$에서 $bc<0$이므로 축은 y축의 오른쪽에 위치
(iii) $a<0$이므로 y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 위치
따라서 (i)~(iii)에서 $y=-bx^2-cx+a$의 그래프로 적당한 것은 ③이야.

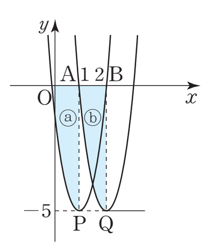
063 답 1



위의 그림에서 ⓐ 부분과 ⓑ 부분의 넓이가 같으니까 색칠한 부분의 넓이는 사각형 ABCD의 넓이와 같아.
㉡에서 $y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$이므로
점 D의 좌표는 $(1,\ 1)$이야.
따라서 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$이므로
$(\square\mathrm{ABCD}$의 넓이$)=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=1\times1=1$

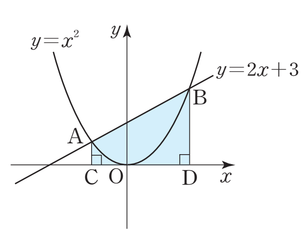
064 답 ②

$y=5x^2-10x=5(x^2-2x+1-1)$
$\quad=5(x-1)^2-5$
$\therefore \mathrm{P}(1,\ -5)$
$y=5x^2-20x+15=5(x^2-4x+4-4)+15$
$\quad=5(x-2)^2-5$
$\therefore \mathrm{Q}(2,\ -5)$



위의 그림에서 ⓐ 부분과 ⓑ 부분의 넓이가 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 APQB의 넓이와 같아.
$\therefore \square\mathrm{APQB}=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AP}}=1\times5=5$

065 답 ③



두 함수의 그래프의 교점의 y좌표가 같으므로
$x^2=2x+3$, $x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
$x=-1$일 때, $y=(-1)^2=1$
$x=3$일 때, $y=3^2=9$
즉, 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$이고 점 $\mathrm{B}(3,\ 9)$야.
또한, 점 $\mathrm{C}(-1,\ 0)$, 점 $\mathrm{D}(3,\ 0)$이므로
$(\text{사각형 ACDB의 넓이})=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}})\times\overline{\mathrm{CD}}$
$\qquad=\frac{1}{2}\times(1+9)\times4=20$

066 답 ④

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -3)$이므로 이차함수의 식을
$y=a(x+1)^2-3$ ⋯ ㉠이라 놓자.
그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 대입하면
$-1=a-3 \qquad \therefore a=2$
따라서 ㉠은 $y=2(x+1)^2-3$이므로
$y=2(x+1)^2-3=2x^2+4x+2-3=2x^2+4x-1$

067 답 ②

축이 y축과 평행하고, 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 0)$이면 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2$으로 놓을 수 있어.
점 $(5,\ 2)$를 지난다고 했으니까 대입하면 a의 값을 구할 수 있지?
$2=4a \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=\frac{1}{2}(x-3)^2=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}$

068 답 ①

꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 3)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2+3$으로 놓을 수 있어. 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 이차함수의 식에 대입하면
$1=4a+3 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$
따라서 구하고자 하는 이차함수의 식은
$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$
$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=-2,\ c=1$
$\therefore abc=\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)\times1=1$

069 답 4

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 4)$라 했으므로 $y=a(x+1)^2+4$로 놓을 수 있어. 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$0=4a+4 \qquad \therefore a=-1$
즉, 구하고자 하는 이차함수의 식은
$y=-(x+1)^2+4=-x^2-2x+3$
이므로 x축과 만나는 점의 좌표를 구하면
$-x^2-2x+3=0$, $x^2+2x-3=0$
$(x+3)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$
따라서 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 $1-(-3)=4$

070 답 (0, 6)

축의 방정식이 $x=-1$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+q$로 놓을 수 있어.
그래프가 두 점 $(-2,\ 6)$, $(1,\ 12)$를 지나므로
점 $(-2,\ 6)$을 대입하면 $a+q=6$ ⋯ ㉠
점 $(1,\ 12)$를 대입하면 $4a+q=12$ ⋯ ㉡
㉡−㉠을 하면
$3a=6 \qquad \therefore a=2$
이를 ㉠에 대입하면 $q=4$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=2(x+1)^2+4=2x^2+4x+6$이므로 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 6)$이야.

071 답 ④

축의 방정식이 $x=0$이므로 이차함수의 식은 $y=ax^2+q$로 놓을 수 있어.
점 $(-1, 2)$를 지날 때, $a+q=2$ ⋯ ㉠
점 $(2, -4)$를 지날 때, $4a+q=-4$ ⋯ ㉡
㉡−㉠을 하면
$3a=-6$ $\quad\therefore a=-2$
이를 ㉠에 대입하면 $q=4$
따라서 이차함수의 식은 $y=-2x^2+4$이므로 점 $(1, k)$의 좌푯값을 대입하면
$k=-2+4=2$

072 답 ①

축의 방정식이 $x=-2$이고 꼭짓점이 x축 위에 있으므로 꼭짓점의 y좌표는 0이야. 즉, 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 0)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2$으로 놓을 수 있어. a의 값을 구할 수 있는 조건이 보이지?
점 $(-1, 5)$를 지나므로 이차함수의 식에 대입하자.
$5=a(-1+2)^2$ $\quad\therefore a=5$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=5(x+2)^2=5x^2+20x+20$

073 답 ③

직선 $x=-2$를 축으로 하는 이차함수의 식은 $y=a(x+2)^2+q$로 놓을 수 있어.
두 점 $(-3, 2)$, $(1, 4)$를 지나므로 이차함수의 식에 대입하자.
점 $(-3, 2)$를 대입하면 $a+q=2$ ⋯ ㉠
점 $(1, 4)$를 대입하면 $9a+q=4$ ⋯ ㉡
㉡−㉠을 하면
$8a=2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$
이를 ㉠에 대입하면 $q=\frac{7}{4}$
따라서 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{4}(x+2)^2+\frac{7}{4}$ ⋯ ㉢
이 포물선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 식은 ㉢에서
$y=\frac{1}{4}(x+2-2)^2+\frac{7}{4}-1$
$\therefore y=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$

074 답 $y=-x^2+5x-2$

세 점 $(0, -2)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$를 지나므로 이차함수의 식 $y=ax^2+bx+c$에 대입하자.
우선 점 $(0, -2)$를 대입하면 $c=-2$이므로
이차함수의 식 $y=ax^2+bx-2$에 점 $(1, 2)$를 대입하면
$a+b-2=2$
$\therefore a+b=4$ ⋯ ㉠
점 $(2, 4)$를 대입하면
$4a+2b-2=4$, $4a+2b=6$
$\therefore 2a+b=3$ ⋯ ㉡
㉡−㉠을 하면 $a=-1$
이를 ㉠에 대입하면 $b=5$
$\therefore y=-x^2+5x-2$

075 답 6

주어진 그래프에서 이차함수의 식을 구하기 위한 조건이 보이지?
그래, 세 점 $(3, 5)$, $(4, 0)$, $(0, 8)$을 지나지.
여기서 $y=ax^2+bx+c$에 점 $(0, 8)$을 대입하면 c의 값을 구할 수 있어. 즉, $c=8$이야.
이차함수의 식은 $y=ax^2+bx+8$이므로 점 $(4, 0)$을 대입하면
$16a+4b=-8$ $\quad\therefore 4a+b=-2$ ⋯ ㉠
점 $(3, 5)$를 대입하면
$9a+3b=-3$ $\quad\therefore 3a+b=-1$ ⋯ ㉡
㉠−㉡을 하면 $a=-1$
이를 ㉠에 대입하면 $b=2$
$\therefore 4a+b+c=-4+2+8=6$

076 답 ②

이차함수 $y=ax^2+bx+c$에 먼저 점 $(0, -1)$을 대입하면
$c=-1$
이제 $y=ax^2+bx-1$에 점 $(1, 4)$를 대입하면
$a+b-1=4$ $\quad\therefore a+b=5$ ⋯ ㉠
점 $(-1, -2)$를 대입하면
$a-b-1=-2$ $\quad\therefore a-b=-1$ ⋯ ㉡
㉠+㉡을 하면
$2a=4$ $\quad\therefore a=2$
이를 ㉠에 대입하면 $b=3$
$\therefore y=2x^2+3x-1=2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)-1$
$\quad=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$
따라서 축의 방정식은 $x=-\frac{3}{4}$이야.

077 답 (1, 5)

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로
$c=3$
$y=ax^2+bx+3$에 점 $(-1, -3)$을 대입하면
$a-b+3=-3$ $\quad\therefore a-b=-6$ ⋯ ㉠
또, 점 $(2, 3)$을 대입하면
$4a+2b+3=3$ $\quad\therefore 2a+b=0$ ⋯ ㉡
㉠+㉡을 하면
$3a=-6$ $\quad\therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉡에 대입하면 $b=4$
따라서 이차함수의 식은
$y=-2x^2+4x+3=-2(x^2-2x+1-1)+3$
$\quad=-2(x-1)^2+5$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1, 5)$야.

078 답 −30

그래프가 두 점 $(-1, 0)$, $(6, 0)$을 지나므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+1)(x-6)$으로 놓을 수 있어.
$\therefore y=a(x^2-5x-6)$ ⋯ ㉠
또한, 그래프가 점 $(0, 6)$을 지나니까 ㉠에 대입해.
$-6a=6$ $\quad\therefore a=-1$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-x^2+5x+6$이므로
$a=-1$, $b=5$, $c=6$
$\therefore abc=-1\times5\times6=-30$

I

079 답 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

x축과 만나는 점의 좌표가 $(-3, 0)$, $(2, 0)$이므로
$y=a(x+3)(x-2)$로 놓으면 점 $(0, -6)$을 지나므로
$-6=a\times3\times(-2)$ $\quad\therefore a=1$
$\therefore y=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$
$=\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-6=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$
따라서 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$야.

080 답 ③

x축과 만나는 점은 $(-2, 0)$, $(3, 0)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)(x-3)$으로 놓을 수 있어. a의 값을 구할 수 있는 조건이 있지? 점 $(-1, -2)$를 지난다는 거. 이 점의 좌표를 대입해.
$-2=a(-1+2)(-1-3)$, $-4a=-2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=\frac{1}{2}(x+2)(x-3)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$
이므로 y축과 만나는 점의 y좌표는 -3이야.

081 답 3

x축과 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$에서 만나므로
$y=a(x+2)(x-4)$로 놓을 수 있어. 꼭짓점의 좌표를 구해 보자.
$y=a(x+2)(x-4)=a(x^2-2x-8)$
$=a(x^2-2x+1-9)=a(x-1)^2-9a$
즉, 꼭짓점의 좌표는 $(1, -9a)$야.
이 꼭짓점이 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로
$-9a=-1+2$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{9}$
따라서 이차함수의 식은 $y=-\frac{1}{9}(x^2-2x-8)=-\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{8}{9}$
이므로 $b=\frac{2}{9}$, $c=\frac{8}{9}$
$\therefore a+2b+3c=-\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{24}{9}=3$

082 답 3초 후

$h=65$를 대입하면
$65=-5t^2+30t+20$, $5t^2-30t+45=0$
$t^2-6t+9=0$, $(t-3)^2=0$ $\quad\therefore t=3$ (중근)
따라서 높이가 65 m가 되는 것은 3초 후야.

083 답 ③

$h=-5t^2+50t+55$이고, 지면의 높이는 0 m이므로
$-5t^2+50t+55=0$, $t^2-10t-11=0$
$(t+1)(t-11)=0$ $\quad\therefore t=11$ $(\because t>0)$
따라서 지면에 떨어지는 것은 11초 후야.

084 답 3초

$y=50$을 대입하면
$50=35x-5x^2$, $5x^2-35x+50=0$
$x^2-7x+10=0$, $(x-2)(x-5)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=5$
따라서 높이가 50 m 이상인 것은 2초부터 5초까지이므로 3초 동안이야.

085 답 50개

$y=200$을 대입하면
$200=-\frac{1}{10}x^2+10x-50$, $\frac{1}{10}x^2-10x+250=0$
$x^2-100x+2500=0$, $(x-50)^2=0$
$\therefore x=50$ (중근)
따라서 하루에 생산해야 하는 제품의 개수는 50개야.

086 답 ②

x초 후의 밑변의 길이는 $(28+2x)$ cm, 높이는 $(36-x)$ cm야.
삼각형의 넓이를 y cm^{2}라 하면
$y=\frac{1}{2}(28+2x)(36-x)=(14+x)(36-x)$
$=-x^2+22x+504$
삼각형의 넓이가 625 cm^{2}일 때는 $y=625$일 때이므로
$625=-x^2+22x+504$
$x^2-22x+121=0$
$(x-11)^2=0$ $\quad\therefore x=11$ (중근)
따라서 삼각형의 넓이가 625 cm^{2}가 되는 때는 11초 후야.

087 답 ④

x초 후에 $\overline{AP}=x$ cm, $\overline{AQ}=(10-2x)$ cm이므로
삼각형 APQ의 넓이를 y cm^{2}라 하면
$y=\frac{1}{2}x(10-2x)=x(5-x)$
$=-x^2+5x$
이때, 3초 후의 삼각형 APQ의 넓이는 $x=3$일 때이므로
$y=-3^2+5\times3=6$
따라서 3초 후의 삼각형 APQ의 넓이는 6 cm^{2}야.

088 답 10

$\overline{AP}=x$라 하면 $\overline{PB}=18-x$야.
두 직각이등변삼각형의 넓이의 합을 y라 하면
$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(18-x)^2=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2-18x+162$
$=x^2-18x+162$
이때, 두 직각이등변삼각형의 넓이의 합이 82이면
$x^2-18x+162=82$
$x^2-18x+80=0$, $(x-8)(x-10)=0$
$\therefore x=8$ 또는 $x=10$
따라서 $\overline{AP}>\overline{PB}$이므로 넓이의 합이 82가 될 때의 $\overline{AP}$의 길이는 10이야.

089 답 8

$\overline{AP}=2x$라 하면 $\overline{PB}=16-2x$야.
두 원의 넓이의 합을 y라 하면
$y=x^2\pi+(8-x)^2\pi=(x^2+x^2-16x+64)\pi$
$=(2x^2-16x+64)\pi$
이때, 두 원의 넓이의 합이 32π이면 $y=32\pi$이므로
$2x^2-16x+64=32$, $x^2-8x+16=0$
$(x-4)^2=0$ $\quad\therefore x=4$ (중근)
따라서 두 원의 넓이의 합이 32π가 될 때,
$\overline{AP}$의 길이는 $2\times4=8$이야.

090 답 ④

물받이의 높이가 x cm이면 물받이의 단면의 폭은 $(20-2x)$ cm이니까 단면의 넓이를 식으로 나타내면

$y=x(20-2x)=-2x^2+20x$

이때, $y=50$이면 $50=-2x^2+20x$

$x^2-10x+25=0$, $(x-5)^2=0$ $\quad \therefore x=5$ (중근)

따라서 $y=50$일 때 x의 값은 5야.

091 답 ②, ④

직선의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로 주어진 직선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x+4$야.

즉, 점 P의 x좌표를 a라 하면 y좌표는 $-\frac{4}{3}a+4$이므로

$\mathrm{P}\left(a,\ -\frac{4}{3}a+4\right)$이고, 점 Q의 좌표는 $(a,\ 0)$이야.

$\triangle$POQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\times a\times\left(-\frac{4}{3}a+4\right)=-\frac{2}{3}a^2+2a$

이때, $\triangle$POQ의 넓이가 $\frac{4}{3}$이면 $S=\frac{4}{3}$이므로

$\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}a^2+2a$, $a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

따라서 $\triangle$POQ의 넓이가 $\frac{4}{3}$일 때의 점 P의 좌표는

$\left(1,\ \frac{8}{3}\right)$ 또는 $\left(2,\ \frac{4}{3}\right)$야.

잘 틀리는 유형 훈련 +1up

p. 182

092 답 $\frac{1}{3}$

1st 꼭짓점의 좌표를 구하기 위해서는 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸어 주어야 해.

$y=-x^2-4x-1=-(x^2+4x+4-4)-1$

$\quad=-(x+2)^2+3$

즉, 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 3)$이야.

$y=\frac{2}{3}x^2+ax+b=\frac{2}{3}\left\{x^2+\frac{3}{2}ax+\left(\frac{3}{4}a\right)^2-\left(\frac{3}{4}a\right)^2\right\}+b$

$\quad=\frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{4}a\right)^2-\frac{3}{8}a^2+b$

즉, 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{4}a,\ -\frac{3}{8}a^2+b\right)$야.

2nd 두 함수의 그래프의 꼭짓점이 같다는 걸 이용하자.

두 점 $(-2,\ 3)$과 $\left(-\frac{3}{4}a,\ -\frac{3}{8}a^2+b\right)$가 같으므로

$-2=-\frac{3}{4}a$ $\quad \therefore a=\frac{8}{3}$

$3=-\frac{3}{8}a^2+b$, $3=-\frac{3}{8}\times\left(\frac{8}{3}\right)^2+b$ $\quad \therefore b=\frac{17}{3}$

$\therefore b-2a=\frac{17}{3}-2\times\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$

093 답 $-\frac{1}{2}$

1st 두 함수의 그래프의 꼭짓점을 구하자.

$y=-x^2+6x-8$

$\quad=-(x^2-6x+9-9)-8$

$\quad=-(x-3)^2+1$

즉, 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 1)$이야. ⋯ ㉠

$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$

$\quad=\frac{1}{2}(x^2+2ax+a^2-a^2)+b$

$\quad=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{1}{2}a^2+b$

즉, 꼭짓점의 좌표는 $\left(-a,\ -\frac{1}{2}a^2+b\right)$야. ⋯ ㉡

2nd 꼭짓점이 같음을 이용해서 a, b의 값을 구해 보자.

㉠, ㉡에서 $(3,\ 1)$과 $\left(-a,\ -\frac{1}{2}a^2+b\right)$는 같으므로

$3=-a$ $\quad \therefore a=-3$

$1=-\frac{1}{2}a^2+b$, $1=-\frac{9}{2}+b$

$\therefore b=\frac{11}{2}$

$\therefore 2a+b=2\times(-3)+\frac{11}{2}=-\frac{1}{2}$

094 답 제 2사분면

1st 일차함수의 그래프를 보고 a, b의 값을 구해 보자.

직선 $y=ax+b$가 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ -1)$을 지나지?

$a=(\text{기울기})=\frac{-1-0}{0-(-2)}=-\frac{1}{2}$

$b=(y\text{절편})=-1$

2nd 이차함수의 그래프의 꼭짓점을 구해 보자.

$y=x^2-ax-b=x^2+\frac{1}{2}x+1$을 완전제곱식의 꼴로 고쳐서 꼭짓점의 좌표를 구하자.

$y=x^2+\frac{1}{2}x+1$

$\quad=\left\{x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}+1$

$\quad=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$

즉, 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{15}{16}\right)$야.

따라서 꼭짓점은 제 2사분면 위에 있어.

095 답 ①

1st $y=ax+b$의 그래프를 보고 a, b의 값을 구해 보자.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 두 점 $(0,\ 4)$, $(2,\ 0)$을 지나므로 두 점의 좌표를 대입하면

$b=4$, $2a+b=0$ $\quad \therefore a=-2$, $b=4$

2nd $a=-2$, $b=4$를 이차함수에 대입하고 꼭짓점의 좌표를 구하자.

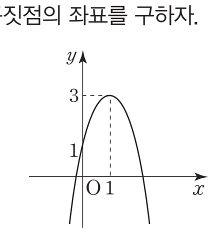
즉, $y=ax^2+bx+1=-2x^2+4x+1$이므로

$y=-2x^2+4x+1$

$\quad=-2(x^2-2x+1-1)+1$

$\quad=-2(x-1)^2+3$

따라서 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 3)$이니까 제 1사분면 위의 점이야.



096 답 $2\sqrt{6}$

1st $y=-x^2+4x+2$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 A, B의 좌표를 구해 보자.

$y=-x^2+4x+2$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하기 위해 $y=0$을 대입하자.

$-x^2+4x+2=0$, $x^2-4x-2=0$

인수분해가 되지 않으니까 근의 공식을 이용하면 $x=2\pm\sqrt{6}$

$\therefore$ $\mathrm{A}(2-\sqrt{6},\ 0)$, $\mathrm{B}(2+\sqrt{6},\ 0)$

2nd 두 점 A, B 사이의 거리를 구해 보자.

두 점 A, B 사이의 거리는 선분 AB의 길이와 같아.

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AB}}=|2+\sqrt{6}-(2-\sqrt{6})|=2\sqrt{6}$

[다른 풀이]

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{B}(\beta,\ 0)$으로 놓으면 α, β는 이차방정식 $-x^2+4x+2=0$의 두 근이야.

x^2의 계수가 -1이므로 $-(x-\alpha)(x-\beta)=0$에서

$-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta=0$ $\quad\therefore$ $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\times(-2)=24$

$\therefore$ $|\alpha-\beta|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{6}$이야.

오답피하기

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근과 같다는 걸 알아야 제대로 풀 수 있어. 그런데 이차방정식이 모두 인수분해가 되는 게 아니니까 인수분해가 되지 않을 때는 근의 공식을 이용하면 돼.

097 답 -1

1st 이차함수가 x축과 만나는 두 점을 구해 보자.

$y=x^2-6x+k$가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $y=0$일 때의 x의 값이니까 $x^2-6x+k=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=3\pm\sqrt{9-k}$

2nd $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{10}$을 이용해서 k의 값을 구해 보자.

$\mathrm{A}(3-\sqrt{9-k},\ 0)$, $\mathrm{B}(3+\sqrt{9-k},\ 0)$이라 놓으면

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{10}$이니까

$\overline{\mathrm{AB}}=|3+\sqrt{9-k}-(3-\sqrt{9-k})|=2\sqrt{9-k}$에서

$2\sqrt{9-k}=2\sqrt{10}$, $9-k=10$ $\quad\therefore$ $k=-1$

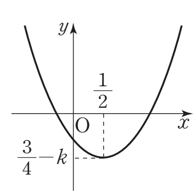
098 답 ④

1st 그래프에서 꼭짓점의 위치를 생각해 보자.

$y=x^2-x+1-k$

$=\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+1-k$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-k$



그래프가 x축과 두 점에서 만나려면 꼭짓점의 y좌표가 음수이어야 해.

$\frac{3}{4}-k<0$ $\quad\therefore$ $k>\frac{3}{4}$

[다른 풀이]

이차함수 $y=x^2-x+1-k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다는 건 $y=0$일 때, 이차방정식 $x^2-x+1-k=0$이 서로 다른 두 근을 갖는다는 걸 의미해.

$1-4(1-k)>0$, $1-4+4k>0$ $\quad\therefore$ $k>\frac{3}{4}$

오답피하기

이런 유형의 문제에서 실수하기 쉬운 부분은 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해하지 못해서 풀 수 없게 되는 거야.

이차함수와 이차방정식은 매우 밀접한 관련이 있어. 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하기 위해서 이차함수의 y가 0이 되는 x를 구하는 건데, 이때 이차방정식이 나오게 돼.

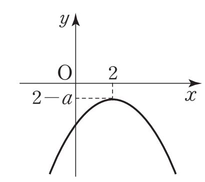
099 답 ⑤

1st 이차함수의 식을 완전제곱식의 꼴로 만들어 보자.

$y=-\frac{1}{2}x^2+2x-a=-\frac{1}{2}(x^2-4x)-a$

$=-\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)-a=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2-a$

2nd 그래프가 x축보다 아래쪽에 있도록 하는 a의 값의 범위를 구해 보자.



그림처럼 그래프가 x축보다 아래쪽에 있으려면 꼭짓점의 y좌표가 음수가 되어야 해.

$2-a<0$

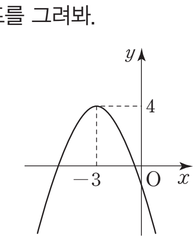
$\therefore$ $a>2$

오답피하기

이차함수의 그래프가 'x축과 접한다.', 'x축보다 위, 또는 아래에 있다.', 'y축에 대하여 대칭이다.'같은 말들은 우리를 항상 헷갈리게 만들지? 그럴 땐 처음부터 그런 말을 머릿속에 넣고 고민하지 말고 우선 주어진 조건들을 통해서 대략적인 그래프의 모양을 알아보도록 해. 이 문제에서 주어진 정보로 우리가 알 수 있는 것은 이차함수의 그래프가 위로 볼록하고 그래프의 축이 y축보다 오른쪽에 있다는 사실이지? 아하! 그렇다면 이제 꼭짓점의 y좌표만 음수가 된다면 이차함수의 그래프가 x축보다 위로 올라갈 일은 없겠네? 이처럼 차근차근 따져가면서 그래프를 그리다보면 답에 접근하기 쉽겠지?

100 답 $a\le-\frac{4}{9}$

1st 주어진 조건을 이용해서 이차함수의 그래프를 그려봐.



꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 4)$이고, 제1사분면을 지나지 않으려면 그래프는 그림과 같아야 해.

즉, (y축과의 교점의 y좌표)≤0이어야 하므로 $x=0$일 때, y의 값이 0보다 작거나 같아야 하지.

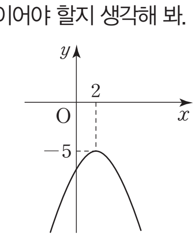
따라서 $y=ax^2+bx+c=a(x+3)^2+4$에서

$x=0$일 때 $9a+4\le0$ $\quad\therefore$ $a\le-\frac{4}{9}$

101 답 1

1st 모든 사분면을 지나려면 그래프가 어떤 모양이어야 할지 생각해 봐.

$y=a(x-2)^2-5$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -5)$이므로 그래프가 위로 볼록하다면 [그림 1]과 같이 제1, 2사분면을 지나지 않아.



[그림 1]

즉, 모든 사분면을 지나려면 [그림 2]와 같이 그래프가 아래로 볼록해야 해.

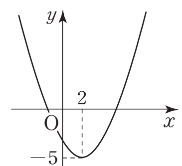
$\therefore$ $a>0$ $\cdots$ ㉠

또한, (y축과의 교점의 y좌표)<0이어야 하므로 $x=0$을 대입하면

$4a-5<0$

$\therefore\ a<\frac{5}{4}$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 a의 값은 1이야.



[그림 2]

102 답 ⑤

1st 그래프를 보고 a, b, c의 부호를 구하자.

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 a와 b는 같은 부호야. $\therefore\ b<0$

또, 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $c=0$

2nd 옳은 것을 찾아 보자.

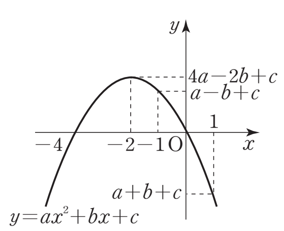
① $ab>0$ ← NO!

② $abc=0$ ← NO!

③ $a+b+c$는 $x=1$을 이차함수에 대입한 함숫값이므로 그림에서 함숫값의 부호를 구하면 $a+b+c<0$ ← NO!

④ $a-b+c$는 $x=-1$을 이차함수에 대입한 함숫값이므로 그림에서 함숫값의 부호를 구하면 $a-b+c>0$ ← NO!

⑤ $4a-2b+c$는 $x=-2$를 이차함수에 대입한 함숫값이므로 그림에서 함숫값의 부호를 구하면 $4a-2b+c>0$ ← OK!



오답피하기

①, ②는 a, b, c의 부호로 알 수 있지만 ③, ④, ⑤는 $y=f(x)=ax^2+bx+c$로 두고 함숫값을 이용해서 풀어야 해. 그림에서 $f(1)<0$, $f(-1)>0$, $f(-2)>0$인 것을 이용해 보면 되는 거야. 이 부분이 생각하기에 어려울 거야. 하지만 이런 유형의 문제는 자주 나오니까 적절히 값을 대입해 보는 훈련을 하면 돼.

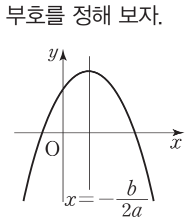
103 답 ⑤

1st $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 보고 a, b, c의 부호를 정해 보자.

위로 볼록이므로 $a<0$ ⋯ ㉠

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 a와 b는 서로 다른 부호야. $\therefore\ b>0$ ⋯ ㉡

y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$ ⋯ ㉢



2nd ㉠, ㉡, ㉢을 이용해서 $y=cx^2+ax-b$의 그래프를 그려 보자.

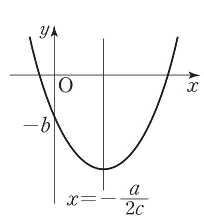
$y=cx^2+ax-b$의 그래프에서

(i) $c>0$이므로 아래로 볼록

(ii) c와 a의 부호가 서로 다르므로 축은 y축의 오른쪽에 위치

(iii) $b>0$에서 $-b<0$이므로 y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 위치

따라서 $y=cx^2+ax-b$의 그래프는 그림과 같아.



서술형 다지기

p. 184

[104-105 채점기준표]

Ⅰ	c의 값을 구한다.	30%
Ⅱ	a, b의 값을 구한다.	50%
Ⅲ	abc의 값을 구한다.	20%

104 답 -4

먼저, c의 값을 구하자.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$c=2$ ⋯ Ⅰ

그다음, a, b의 값을 각각 구하자.

이차함수 $y=ax^2+bx+2$의 그래프가 두 점 $(1,\ 3)$, $(-1,\ 5)$를 지나므로 $\begin{cases} a+b+2=3 & \cdots ㉠ \\ a-b+2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $2a+4=8$ $\quad\therefore\ a=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=-1$ ⋯ Ⅱ

그래서, abc의 값을 구하자.

$\therefore\ abc=2\times(-1)\times2=-4$ ⋯ Ⅲ

105 답 -16

먼저, c의 값을 구하자.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0,\ 8)$을 지나므로

$c=8$ ⋯ Ⅰ

그다음, a, b의 값을 각각 구하자.

이차함수 $y=ax^2+bx+8$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0)$, $(5,\ -7)$을 지나므로

$\begin{cases} 4a-2b+8=0 \\ 25a+5b+8=-7 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 2a-b=-4 & \cdots ㉠ \\ 5a+b=-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $7a=-7$ $\quad\therefore\ a=-1$

이것을 ㉠에 대입하면 $-2-b=-4$ $\quad\therefore\ b=2$ ⋯ Ⅱ

그래서, abc의 값을 구하자.

$\therefore\ abc=(-1)\times2\times8=-16$ ⋯ Ⅲ

[106-107 채점기준표]

Ⅰ	그래프가 지나는 x축 위의 두 점의 좌표를 이용하여 이차함수의 식을 세운다.	30%
Ⅱ	a의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	$a-b-c$의 값을 구한다.	30%

106 답 2

먼저, x축 위의 두 점을 지나는 이차함수의 식을 세우자.

x축과 만나는 두 점의 x좌표가 -3과 1이므로

$y=ax^2+bx+c=a(x+3)(x-1)$ ⋯ Ⅰ

그다음, a의 값을 구하자.

$y=a(x+3)(x-1)=a(x^2+2x-3)$

$=a(x^2+2x+1)-4a=a(x+1)^2-4a$

꼭짓점의 y좌표가 -4이므로

$-4a=-4$ $\quad\therefore\ a=1$ ⋯ Ⅱ

그래서, $a-b-c$의 값을 구하자.

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=x^2+2x-3$이고, $y=ax^2+bx+c$와 같으므로 $b=2$, $c=-3$

$\therefore\ a-b-c=1-2+3=2$ ⋯ Ⅲ

107 답 -2

먼저, x축 위의 두 점을 지나는 이차함수의 식을 세우자.

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표가 $(1, 0)$, $(4, 0)$이므로

$y=ax^2+bx+c=a(x-1)(x-4)$ … Ⅰ

그다음, a의 값을 구하자.

$y=a(x-1)(x-4)$의 그래프가 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4=a(0-1)(0-4)$

$\therefore a=-1$ … Ⅱ

그래서, $a-b-c$의 값을 구하자.

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=-(x-1)(x-4)=-x^2+5x-4$

이것이 $y=ax^2+bx+c$와 같으므로

$b=5$, $c=-4$

$\therefore a-b-c=-1-5+4=-2$ … Ⅲ

108 답 $-\frac{49}{9}$

그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 꼭짓점의 x좌표의 부호만 반대가 된다.

즉, 주어진 그래프와 y축에 대하여 대칭인 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-6, 0)$이므로 $y=a(x+6)^2$으로 놓을 수 있다. … Ⅰ

이때, 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4=a(0+6)^2$

$\therefore a=-\frac{1}{9}$

$\therefore y=-\frac{1}{9}(x+6)^2=-\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{3}x-4$

이것이 $y=ax^2+bx+c$와 같으므로

$a=-\frac{1}{9}$, $b=-\frac{4}{3}$, $c=-4$ … Ⅱ

$\therefore a+b+c=\left(-\frac{1}{9}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)+(-4)=-\frac{49}{9}$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 그래프와 y축에 대하여 대칭인 그래프의 식을 세운다.	40%
Ⅱ	a, b, c의 값을 각각 구한다.	40%
Ⅲ	$a+b+c$의 값을 구한다.	20%

109 답 20

축의 방정식이 $x=2$이므로 $y=a(x-2)^2+q$로 놓자. … Ⅰ

두 점 $(5, 0)$, $(0, -5)$를 지나므로 좌표를 대입하면

$\begin{cases} 9a+q=0 \cdots ㉠ \\ 4a+q=-5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$5a=5 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $q=-9$ … Ⅱ

즉, $y=(x-2)^2-9=x^2-4x-5$이므로

$a=1$, $b=-4$, $c=-5$

$\therefore abc=1\times(-4)\times(-5)=20$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	축의 방정식을 이용하여 이차함수의 식을 세운다.	30%
Ⅱ	a의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	abc의 값을 구한다.	30%

110 답 130원

상품의 가격을 $2x$원 올리면 $5x$개가 적게 팔린다고 하므로 상품의 가격이 $(100+2x)$원이 되면 상품은 $(400-5x)$개가 팔리게 된다.

(총 판매 금액)=(상품 한 개당 가격)×(판매 개수)이므로

총 판매 금액을 y원이라 하면

$y=(100+2x)(400-5x)=-10x^2+300x+40000$ … Ⅰ

$y=42250$이면 $42250=-10x^2+300x+40000$

$10x^2-300x+2250=0$, $x^2-30x+225=0$

$(x-15)^2=0 \quad \therefore x=15$ (중근) … Ⅱ

따라서 $x=15$일 때 이 상품의 총 판매 금액이 42250원이 되므로 이때의 상품 한 개당 판매 가격은

$100+2\times15=130$(원)이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	총 판매 가격을 y원이라 놓고 y를 x에 대한 이차함수의 식으로 나타낸다.	40%
Ⅱ	$y=42250$일 때의 x의 값을 구한다.	30%
Ⅲ	한 개당 판매 가격을 구한다.	30%

111 답 -9

x축과의 교점을 구하기 위해 $y=x^2+2x-3$에 $y=0$을 대입하면

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$\therefore$ A$(-3, 0)$, B$(1, 0)$ … Ⅰ

직선 $y=mx-n$이 점 C$(0, -3)$을 지나므로 $n=3$

$\therefore y=mx-3$

직선 $y=mx-3$이 △ACB의 넓이를 이등분하기 위해서는 두 점 A, B의 중점 $(-1, 0)$을 지나야 하므로 좌표를 대입하면

$0=-m-3 \quad \therefore m=-3$ … Ⅱ

$\therefore mn=-3\times3=-9$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	점 A, B의 좌표를 구한다.	30%
Ⅱ	점 C를 지나는 직선이 두 점 A, B의 중점을 지나야 함을 이용하여 m, n의 값을 구한다.	50%
Ⅲ	mn의 값을 구한다.	20%

112 답 1

$y=-x^2+4x+5=-(x^2-4x+4-4)+5$

$=-(x-2)^2+9$ … Ⅰ

이 이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $k+4$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-(x-2-k)^2+9+k+4$

$=-(x-2-k)^2+13+k \cdots ㉠$ … Ⅱ

이 이차함수의 그래프가 처음 그래프와 y축에서 만나므로 y축과의 교점의 좌표가 $(0, 5)$이다.

즉, ㉠에 $x=0$, $y=5$를 대입하면

$5=-(-2-k)^2+13+k$, $-k^2-4k-4+13+k=5$

$k^2+3k-4=0$, $(k+4)(k-1)=0$

$\therefore k=1 \ (\because k>0)$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 나타낸다.	20%
Ⅱ	평행이동한 그래프의 식을 구한다.	30%
Ⅲ	y축과의 교점의 좌표를 이용하여 k의 값을 구한다.	50%

113 답 18

새로 만든 직사각형의 가로의 길이는 $(24-x)$ cm, 세로의 길이는 $(16+2x)$ cm이다. … Ⅰ

$y=(24-x)(16+2x)=-2x^2+32x+384$ … Ⅱ

이때, $y=312$이면 $312=-2x^2+32x+384$

$2x^2-32x-72=0$, $x^2-16x-36=0$

$(x+2)(x-18)=0$

$\therefore x=18$ $(\because x>0)$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	새로 만든 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.	20%
Ⅱ	y를 x에 대한 이차함수의 식으로 나타낸다.	30%
Ⅲ	$y=312$일 때의 x의 값을 구한다.	50%

최고난도 만점 문제

p. 186

114 답 $\frac{1}{3}$

1st 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점을 구해 보자.

$y=2x^2-8ax+8a^2-3b=2(x^2-4ax+4a^2)-3b$
$=2(x-2a)^2-3b$

즉, 꼭짓점의 좌표는 $(2a, -3b)$야. … ㉠

$y=x^2+6bx+9b^2+a-3=(x^2+6bx+9b^2)+a-3$
$=(x+3b)^2+a-3$

즉, 꼭짓점의 좌표는 $(-3b, a-3)$이야. … ㉡

2nd 두 꼭짓점이 x축에 대하여 대칭이 됨을 이용해서 a, b의 값을 구해 보자.

㉠과 ㉡이 x축에 대하여 대칭이니까 ㉠을 x축에 대하여 대칭이동시키면 x좌표는 그대로이고 y만 $-y$가 돼.

$(2a, -3b) \xrightarrow{x\text{축에 대하여 대칭}} (2a, 3b)$ … ㉢

㉢이 ㉡과 같아야 하니까

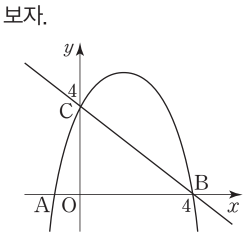
$2a=-3b$, $3b=a-3$에서 $a=1$, $b=-\frac{2}{3}$

$\therefore a+b=1+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$

115 답 $\frac{125}{8}$

1st 그래프를 보고 이차함수의 식을 구해 보자.

이차함수 $y=-x^2+bx+c$의 그래프와 직선 $x+y=4$가 두 점에서 만나는 게 보이지? 그 두 점 B, C에 해당하는 것이 각각 직선 $x+y=4$의 x절편, y절편이야.



즉, B(4, 0), C(0, 4)이므로

$y=-x^2+bx+c$에 대입해 보면 $c=4$

$0=-16+4b+c$, $4b-12=0$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore y=-x^2+3x+4$

2nd 점 P, A의 좌표를 구하자.

이 이차함수의 식을 완전제곱식의 꼴로 바꾸면

$y=-x^2+3x+4=-(x^2-3x)+4$
$=-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+4$
$=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

즉, 꼭짓점 P의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)$가 돼.

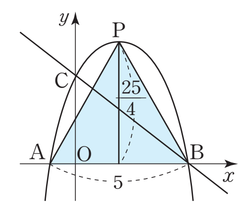
$y=-x^2+3x+4$에 $y=0$을 대입하여 점 A의 좌표를 구하면

$-x^2+3x+4=0$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

$\therefore$ A$(-1, 0)$

3rd △PAB의 넓이를 구해 보자.



△PAB의 밑변이 $\overline{AB}$이면 $\overline{AB}=5$,

높이는 점 P의 y좌표이니까 $\frac{25}{4}$지.

$\therefore \triangle PAB=\frac{1}{2}\times5\times\frac{25}{4}=\frac{125}{8}$

116 답 15 cm

1st $\overline{AB}$를 x축, $\overline{CM}$을 y축으로 하자.

$\overline{AB}$를 x축, $\overline{CM}$을 y축이라 하면 주어진 포물선은 두 점 $(-20, 0)$, $(20, 0)$을 지나므로

$y=a(x+20)(x-20)$

이것이 점 $(0, 16)$을 지나므로 좌표를 대입하면

$16=-400a$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{25}$

$\therefore y=-\frac{1}{25}(x+20)(x-20)$

따라서 $\overline{DH}$의 길이는 $x=5$일 때의 y의 값이므로

$y=-\frac{1}{25}(5+20)(5-20)=15$

$\therefore \overline{DH}=15$ cm

117 답 $-\frac{3}{2}$

1st 두 점 P, Q의 좌표를 구하자.

이차함수 $y=x^2+4x+3$의 그래프와 x축과의 교점의 좌표는

$0=x^2+4x+3$, $(x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

즉, $(-3, 0)$, $(-1, 0)$이야.

또, 이차함수 $y=-x^2-2x+3$의 그래프와 x축과의 교점의 좌표는

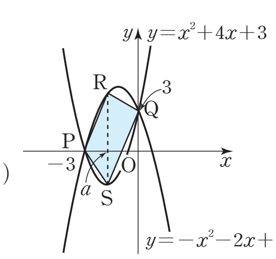
$0=-x^2-2x+3$, $x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

즉, $(-3, 0)$, $(1, 0)$이야.

따라서 P$(-3, 0)$, Q$(0, 3)$이야.

2nd 선분 RS가 y축에 평행함을 이용하여 $\overline{RS}$의 길이를 식으로 나타내봐.



선분 RS는 y축에 평행하므로

R$(a, -a^2-2a+3)$,

S(a, a^2+4a+3) (단, $a<0$)으로 놓으면

$\overline{RS}=(-a^2-2a+3)-(a^2+4a+3)$
$=-2a^2-6a$

3rd □PSQR＝△PSR＋△QRS임을 이용하자.

□PSQR＝△PSR＋△QRS

$$=\frac{1}{2}\times(-2a^2-6a)\times\{a-(-3)\}+\frac{1}{2}\times(-2a^2-6a)\times(0-a)$$

$$=-(a^2+3a)(a+3)+a(a^2+3a)$$

$$=(a^2+3a)\{-(a+3)+a\}$$

$$=-3a^2-9a$$

이때, □PSQR$=\frac{27}{4}$이면

$\frac{27}{4}=-3a^2-9a$, $12a^2+36a+27=0$

$4a^2+12a+9=0$, $(2a+3)^2=0$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$ (중근)

따라서 사각형 PSQR의 넓이가 $\frac{27}{4}$일 때의 점 R의 x좌표는 $-\frac{3}{2}$이야.

118 답 $y=x^2+4x+3$

1st 꼭짓점의 y좌표가 주어졌으니까 구하는 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 놓자.

꼭짓점의 y좌표가 -1이므로 구하는 이차함수의 식을

$y=a(x-p)^2-1$ (단, p는 정수) ⋯ ㉠

이라 놓자.

2nd 그래프가 지나는 점을 이용해 a, p의 값을 구하자.

그래프가 두 점 $(-1, 0)$, $(1, 8)$을 지나므로 ㉠에 각각 대입하면

$\begin{cases}0=a(-1-p)^2-1\\8=a(1-p)^2-1\end{cases}$에서 $\begin{cases}a(p+1)^2=1 \cdots ㉡\\a(p-1)^2=9 \cdots ㉢\end{cases}$

㉢$-$㉡$\times9$를 하면

$a(p-1)^2-9a(p+1)^2=0$

이때, $a\neq0$이니까 양변을 a로 나누면

$p^2-2p+1-9(p^2+2p+1)=0$

$p^2-2p+1-9p^2-18p-9=0$

$-8p^2-20p-8=0$, $2p^2+5p+2=0$

$(p+2)(2p+1)=0$ $\therefore p=-2$ 또는 $p=-\frac{1}{2}$

이때, p는 정수라 했으므로 $p=-2$야.

즉, $p=-2$를 ㉡에 대입하면

$a(-2+1)^2=1$ $\therefore a=1$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$이야.

119 답 24

1st 이차함수의 그래프를 보고 세 점 A, B, C의 좌표를 구해 보자.

그래프를 보면 점 A는 x축과 만나는 점이니까 $y=0$을 대입하면

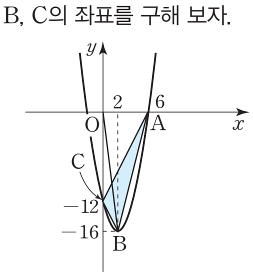
$x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

즉, 점 A의 좌표는 $(6, 0)$이야.

점 C는 그래프가 y축과 만나는 점이니까 $x=0$을 대입하면 $y=-12$

즉, 점 C의 좌표는 $(0, -12)$야.



점 B는 이차함수의 그래프의 꼭짓점이지?

$y=x^2-4x-12=(x^2-4x+4-4)-12$

$=(x-2)^2-16$

즉, 점 B의 좌표는 $(2, -16)$이야.

2nd △BAC의 넓이는 □OCBA－△OCA임을 이용해.

□OCBA＝△OCB＋△OBA

$$=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times(\text{점 B의 }x\text{좌표의 절댓값})+\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times(\text{점 B의 }y\text{좌표의 절댓값})$$

$$=\frac{1}{2}\times12\times2+\frac{1}{2}\times6\times16$$

$$=12+48=60$$

∴ △BAC＝□OCBA－△OCA

$$=□OCBA-\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OC}$$

$$=60-\frac{1}{2}\times6\times12$$

$$=60-36=24$$

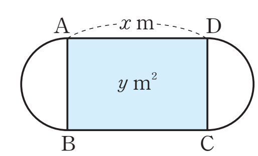
오답피하기

세 점 A, B, C의 좌표를 다 구하고도 △BAC의 넓이를 구하기가 쉽지 않지.
이럴 때는 위의 풀이처럼 구할 수 있는 도형 사이의 넓이의 차를 이용해. 위의 풀이에서는 △BAC＝□OCBA－△OCA로 구했는데, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 D라 하면
△BAC＝□ODBA－△CDB－△OCA로 구해도 돼.

120 답 ③

1st $\overline{AD}=x$ m로 놓고 트랙의 곡선 코스의 길이를 구해.

$\overline{AD}=x$ m라 하자.



트랙의 둘레의 길이가 400 m이므로

$2x+2\pi\times\frac{\overline{AB}}{2}=2x+\pi\times\overline{AB}=400$

$\therefore \overline{AB}=\frac{1}{\pi}(400-2x)(\text{m})$

2nd 직사각형의 넓이를 이차함수의 식으로 나타내.

직사각형 ABCD의 넓이를 y m²라 하면

$y=x\times\frac{1}{\pi}(400-2x)=\frac{1}{\pi}(-2x^2+400x)$

이때, 직사각형의 ABCD의 넓이가 $\frac{19200}{\pi}$ m²이면

$\frac{19200}{\pi}=\frac{1}{\pi}(-2x^2+400x)$

$2x^2-400x+19200=0$, $x^2-200x+9600=0$

$(x-80)(x-120)=0$

$\therefore x=80$ 또는 $x=120$

이때, 직선 코스의 길이가 곡선 코스의 길이보다 길어야 하므로 $x=120$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{19200}{\pi}$ m²일 때의 $\overline{AD}$의 길이는 120 m야.

중등자이(중3상) 정답G~I-ok.indd 128 2019-08-06 오후 5:10:26